



# Universidade: presente!

UFRGS  
PROPEQ



## XXXI SIC

21.25. OUTUBRO • CAMPUS DO VALE

### Aglomeraco Econmica em um Modelo Capital-Trabalho com Mobilidade Espacial dos Fatores

Bruno de Moraes (FCE/UFRGS)

Orientador: João Plínio Juchem Neto (FCE/UFRGS)

## INTRODUO

Em 1967, inspirado pelas equações de Lotka-Volterra, também conhecidas como “sistema predador-presa” (Murray, 2002), Richard Goodwin desenvolveu um modelo matemático para descrever a evolução do crescente conflito distributivo entre capital e trabalho nas economias capitalistas. No seu tempo, esse trabalho se destacou por explicar endogenamente os ciclos no nível de emprego, antecedendo até mesmo John Muth, que posteriormente seria lembrado como o fundador da *Real Business Cycle Theory*. Apesar de ter recebido menos atno que este último, do ponto de vista metodológico o trabalho de Goodwin reinaugurou a utilização de modelos populacionais advindos da biologia na teoria econmica, sendo provavelmente o primeiro a introduzir o sistema de Lotka-Volterra na disciplina (Gandolfo, 2008).

## OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é a exploração matemática e computacional das soluções de um modelo econmico com mobilidade espacial de capital e trabalho entre duas regiões, como apresentado por Aly (2012), o qual é baseado no sistema competitivo de Lotka-Volterra.

## O MODELO

O modelo abordado aqui descreve a dinâmica de capital e força de trabalho entre duas economias espaciais distintas (regiões A e B). O capital  responsável pela criação de postos de trabalho, enquanto os trabalhadores precisam desses para se empregar. Desta forma, o modelo é descrito por um sistema acoplado de equações diferenciais não lineares. A partir do estado inicial do sistema, dado no tempo  $t=0$ , as dotações de capital e trabalho de ambas as economias se movimentam livremente, seguindo a seguinte regra: o capital se move em direção a lugares onde a força de trabalho  abundante, e a força de trabalho se move para onde existam postos de trabalho disponíveis. Matematicamente, temos:

$$\frac{dC_a(t)}{dt} = C_a(t) \left( \epsilon - \frac{\epsilon}{K_1} C_a(t) - \alpha L_a(t) \right) + d_1 (\rho_1(L_b(t)) C_b(t) - \rho_1(L_a(t)) C_a(t))$$

$$\frac{dL_a(t)}{dt} = L_a(t) \left( \gamma + \beta C_a(t) - \frac{\gamma}{K_2} L_a(t) \right) + d_2 (\rho_2(C_b(t)) L_b(t) - \rho_2(C_a(t)) L_a(t))$$

$$\frac{dC_b(t)}{dt} = C_b(t) \left( \epsilon - \frac{\epsilon}{K_1} C_b(t) - \alpha L_b(t) \right) + d_1 (\rho_1(L_a(t)) C_a(t) - \rho_1(L_b(t)) C_b(t))$$

$$\frac{dL_b(t)}{dt} = L_b(t) \left( \gamma + \beta C_b(t) - \frac{\gamma}{K_2} L_b(t) \right) + d_2 (\rho_2(C_a(t)) L_a(t) - \rho_2(C_b(t)) L_b(t))$$

Onde  $C_i, L_i > 0$ ,  $i=a,b$ , representam respectivamente as quantidades de postos de trabalho e de trabalhadores nas regiões A e B. Os parâmetros  $\epsilon$  e  $\gamma$  são as taxas naturais de crescimento dessas mesmas variáveis,  $\alpha$  é a taxa na qual a força de trabalho ocupa os postos de emprego e  $\beta$  é a taxa na qual o nível de emprego influencia o crescimento da força de trabalho. As funções  $\rho_i$  são positivas decrescentes e representam a densidade das variáveis correspondentes. O coeficiente  $d_i$  determina a intensidade da migração de capital e trabalho entre as regiões.

## METODOLOGIA

Através do software Matlab, utilizamos o método de Runge-Kutta para realizar computacionalmente a aproximação numérica da solução do sistema de equações diferenciais. Em seguida, também realizamos a análise de estabilidade dos equilíbrios do sistema, utilizando uma linearização do sistema em torno dos mesmos.

## RESULTADOS

A análise de estabilidade mostrou que, se o coeficiente de difuso  $d_i$  (i.e. a taxa de migração) for suficientemente pequeno, então o modelo é assintoticamente estável. Neste caso, ambas as regiões sempre convergem para os mesmos níveis de capital e trabalho, independente das condições iniciais. Por outro lado, para valores grandes de  $d_i$ , o sistema perde sua estabilidade por uma bifurcação de Turing, onde disparidades iniciais geram aglomeração econmica em uma região. Na Figura 1 apresentamos o diagrama de bifurcação para os postos de trabalho em A,  $C_a$ , onde  $d_2=0.1$  é mantido fixo, enquanto  $d_1$  varia de 0 a 50. Em  $d_1=24.878$  o equilíbrio perde sua estabilidade, e os estoques de fatores convergem majoritariamente para uma região. Na Figura 2

apresentamos a evolução temporal das variáveis das duas regiões em um cenário instável onde  $d_1=50$ , considerando três condições iniciais. Em (a), ambas as regiões iniciam com os mesmos níveis de capital e trabalho, e assintoticamente convergem para um *steady-state* espacialmente homogneo. Em (b) a região B inicia com mais capital do que A; neste caso, no *steady-state*, B apresenta maior estoque de capital e trabalho do que A, constituindo-se assim em um maior aglomerado econmico. Finalmente, em (c) apresentamos o caso inverso, onde A inicia com mais capital do que B.

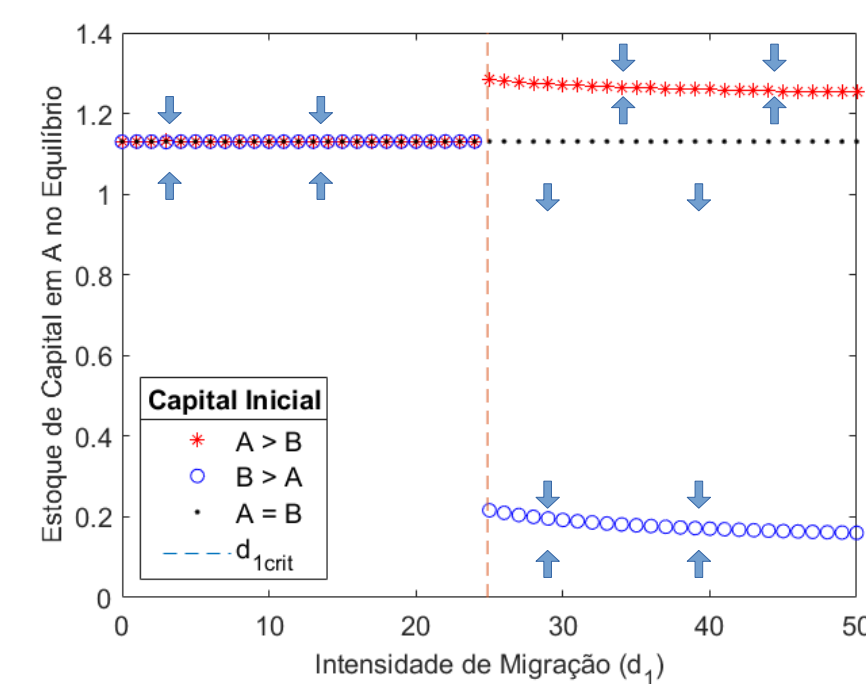


Figura 1: Diagrama de bifurcação para C em A

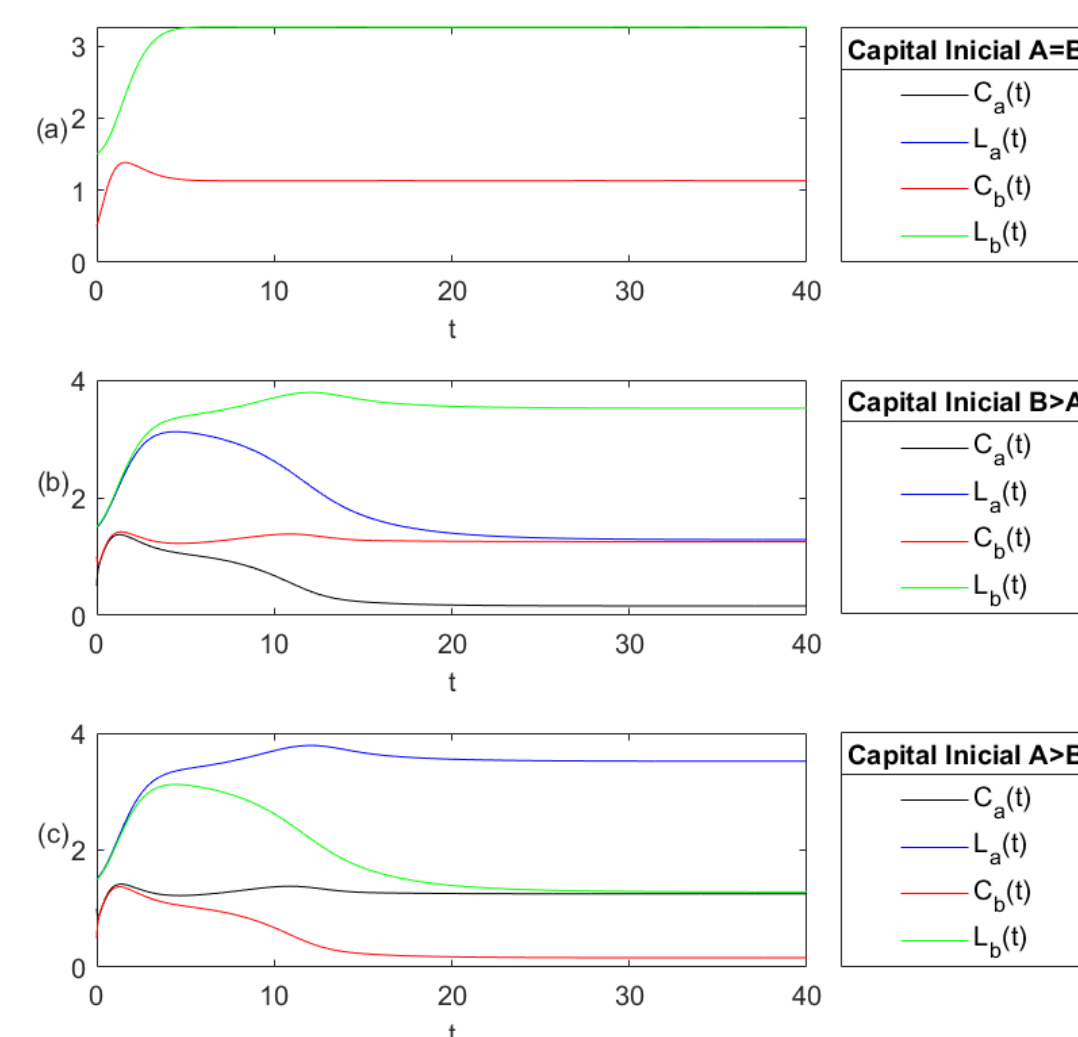


Figura 2: Evolução temporal dos fatores capital e trabalho em A e B, considerando  $d_1=50$

## CONCLUSÃO

A migração de meios de produção entre duas regiões diferentes potencialmente explica a existência de agregados econmicos. O equilíbrio instável do modelo  reforçador de desigualdades. Assim, a depender das dotações iniciais dos fatores de produção, duas economias que trocam livremente seus estoques de capital e trabalho de acordo com uma regra arbitrária de retornos decrescentes, estão fadadas a ou equalizarem seus estoques (no equilíbrio estável) ou reforçar disparidades prévias (no equilíbrio instável). Uma migração forte dos fatores colocar as economias neste segundo estado, enquanto uma migração fraca as colocar no primeiro. Tal comportamento emula, utilizando uma estratégia de modelagem distinta, um dos resultados fundamentais do modelo centro-periferia considerado pela Nova Geografia Econmica (Krugman, 1991).

## REFERÊNCIAS

- MURRAY, James D. *Mathematical Biology: An Introduction*. 3. ed. Nova Iorque: Springer-Verlag, 2002.
- GANDOLFO, Giancarlo. *Economic Dynamics*. 4. ed. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
- ALY, Shaban. Spatial Inhomogeneity due to Turing Instability in a Capital-Labour Model. *Applied Mathematics*. v. 3, p. 172-176, 2012
- KRUGMAN, P. Increasing Returns and Economic Geography. *Journal of Political Economy*, n. 99, p. 483-499, 1991.