Universidade: presente!

XXXI SIC

Salão UFRGS 2019 — Conhecimento, Formação, Inovação

21 . 25 . OUTUBRO • CAMPUS DO VALE

UFRGS PROPESQ

Ações parciais de grupo, ações de semigrupo inverso e representações de C*-álgebra em espaços de Hilbert

Autor: Wesley Gonçalves Lautenschlaeger

Orientadora: Thaísa Raupp Tamusiunas

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

CNPq

PICME

Introdução

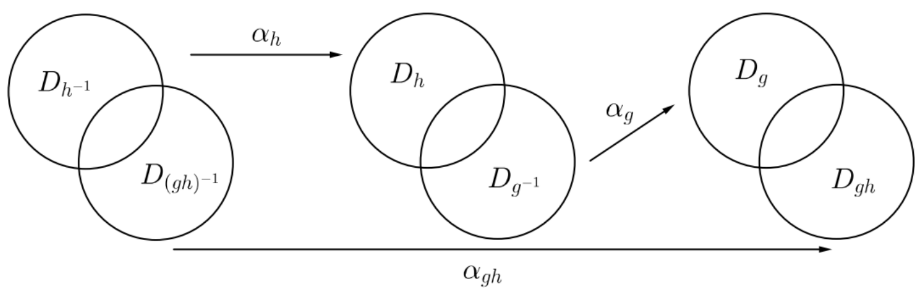
O estudo de ações parciais é recente em termos matemáticos. Exel [1] mostrou uma relação biunívoca entre ações parciais de grupos e ações de semigrupos inversos. Já Dokuchaev e Exel [2] discutiram quando o skew anel de grupo parcial é associativo de forma puramente algébrica.

Sejam *G* um grupo com elemento neutro *e* e *X* um conjunto. Uma ação parcial α de *G* em *X* é uma coleção de subconjuntos D_g de *X* e bijeções $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$, com g ∈ G tais que

$(i) D_e = X, \alpha_e = I_X;$

$(ii) D_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}), \forall g, h \in G;$

$(iii) (\alpha_g \circ \alpha_h)(x) = \alpha_{gh}(x), \forall x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}), g, h \in G.$



Seja α uma ação parcial de um grupo G em uma K-álgebra A, onde K é um anel comutativo. Definimos o *skew* anel de grupo parcial como o conjunto de todas as somas formais finitas

$$A \ltimes_\alpha G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g \delta_g : a_g \in D_g \right\}.$$

A adição é definida de forma usual e a multiplicação é dada por

$$(a_g \delta_g)(b_h \delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g) b_h) \delta_{gh}, \forall g, h \in G$$

Objetivo

O objetivo deste trabalho é construir um semigrupo inverso S(G) que depende unicamente de um grupo G de forma puramente algébrica e mostrar que as ações parciais de G estão em relação biunívoca com as ações de S(G). Construiremos também a C*-álgebra grupo parcial $C_p^*(G)$ que depende exclusivamente de G e mostraremos que as representações parciais em espaços de Hilbert de G estão em correspondência com as representações de S(G) em espaços de Hilbert e com as representações de C*-álgebra de $C_p^*(G)$ em espaços de Hilbert.

Desenvolvimento

Seja G um grupo fixado. Denotaremos por S(G) o semigrupo definido como se segue: Para cada elemento t de G tomaremos o símbolo [t]. Assim, S(G) é o semigrupo livre com base G e, para t, s em G, estabelecemos as relações

$(i) [s^{-1}][s][t] = [s^{-1}][st];$

$(ii) [s][t][t^{-1}] = [st][t^{-1}];$

$(iii) [s][e] = [s].$

Podemos verificar que S(G) é, de fato, um semigrupo inverso e que as ações de S(G) em um conjunto X estão em correspondência de um para um com as ações parciais de G em X.

Definiremos uma C*-álgebra, denotada por A, a partir de geradores e relações como se segue: O conjunto de geradores é formado por um símbolo P_E para cada subconjunto finito E de G. As relações são

$(i) P_E P_F = P_{E \cup F}$

$(ii) P_E^* = P_E$

Verificamos que A é uma C*-álgebra. Definimos o ideal $A_e = P_{\{e\}} A$ e as aplicações α_t por $\alpha_t(P_E) = P_{tE}$, para cada t em G. Além disso, provamos que para todo t em G, $D_t = \overline{span}\{P_E : e, t \in E\}$ é um ideal de A_e. Denotando a restrição de α_t em D_t simplesmente por α_t, podemos finalmente definir a C*-álgebra grupo parcial $C_p^*(G) = A_e \ltimes_\alpha G.$

Esta C*-álgebra é tal que as representações parciais de G em um espaço de Hilbert H estão em relação biunívoca com as representações de C*-álgebra em H e com as representações de semigrupo de S(G) em H.

Conclusão

As equivalências apresentadas acima são de grande importância. De fato, caso haja algum problema envolvendo ações parciais de grupo ou representações de C*-álgebra em espaços de Hilbert, podemos transportar o problema para um ambiente de ações/representações de semigrupos inversos, que geralmente é mais fácil de se trabalhar.

Referências Bibliográficas

[1] R. Exel. Partial actions of groups and actions of inverse semigroups.Proceedings ofthe American Mathematical Society, 126(12):3481–3494, 1998.

[2] M. Dokuchaev and R. Exel. Associativity of crossed products by partial actions,enveloping actions and partial representations.Transactions of the American Mathe-matical Society, 357(5):1931–1952, 2005.