

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Seção de Choque de minijatos em ordem dominante

Thomas Ventura Iser

Trabalho de Conclusão de Curso do
curso de Bacharelado em Física, sob
orientação do Prof. Dr. Emerson
Gustavo de Souza Luna.

Porto Alegre, Brasil
Dezembro de 2019

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, a minha família. Muitas foram as noites em claro estudando e programando cada aspecto deste trabalho, sendo dúvidas atrás de dúvidas e erros que se multiplicavam rápido demais a norma de cada dia. Das palavras de consolo de minha irmã e irmão e das palavras de motivação de meu pai e mãe, posso dizer com convicção que sem elas esta dissertação sequer estaria completa.

Em segundo aos meus amigos, de dentro e de fora da faculdade. Já que perspectivas diferentes de cada problema foram os principais motivadores de ter começado meus estudos em física e também de querer continuar, agora em física de partículas. Posso afirmar que as noites em claro jogando e me divertindo me ajudaram a clarear a mente e observar os meus erros com mais nitidez, a isto devo principalmente para meus grandes amigos Gustavo e Marcelo.

Mas os meus agradecimentos principais eu devo a duas pessoas em especial. Meu grande amigo Miguel, colega de área ao qual ainda me inspiro e ainda faço mil e uma perguntas, muitas das quais as respostas agora fazem parte desta dissertação. E por último e mais importante, gostaria de agradecer meu orientador o Prof. Dr. Emerson Luna, ao qual eu e meu colega Miguel chamamos simplesmente de Luna. A verdade é óbvia, sem ele este trabalho não existiria, sem ele eu poderia perder o interesse na área como fiz já com muitas outras, sem ele para me abrir o caminho adentro da grande área de física de partículas e me despertar para o brilhantismo de todos aqueles que já contribuíram para a área eu poderia estar perdido até agora. Só tenho a agradecer, pelas mil e uma referências de textos e livros para começar a aprender, sua paciência para me responder a enxurrada de perguntas que já lhe fiz e as noites adentro que já entramos durante reuniões tardias, mesmo de longe ainda fez de tudo para me ajudar a completar esta dissertação. Se sem a minha família não conseguiria terminar esta dissertação, sem meu orientador ela seria um vazio de tudo aquilo que ele me ensinou.

Sua orientação e correção, em suas palavras, foi como o lapidar de um mármore, e eu gostaria muito de ter criado uma obra de arte a altura de suas orientações.

Muito obrigado.

Resumo

Neste trabalho estudamos a seção de choque total inclusiva de minijatos em ordem dominante e seu comportamento para diferentes escolhas dos parâmetros Q^2 , \bar{p}_T^{min} e conjunto de funções de distribuição partônicas (*Parton distribution functions*, PDF's). Trabalhamos um novo método de obtenção dos melhores parâmetros para o cálculo da seção de choque de minijatos, que na literatura são normalmente tratados como arbitrários. O novo método se baseia na minimização da distribuição- χ^2 das seções de choque de minijatos em relação aos dados experimentais, com diferentes escolhas de parâmetros. Estudamos três escolhas diferentes de escala, $Q^2 = p_T^2$, $p_T^2/4$ e \hat{s} , assim como duas escolhas de conjuntos de PDF's, MMHT[1], pós-LHC e CTEQ6L[2], pré-LHC. Observamos que destas escolhas realizadas a que apresenta o melhor ajuste dos dados experimentais da colaboração UA1[3] foi $Q^2 = p_T^2/4$ e conjunto MMHT, com um corte $\bar{p}_T^{min} = 3.41\text{GeV}$.

Abstract

In this work, we studied the total inclusive minijet cross section in Leading Order and its behavior for different choices of parameters Q^2 , p_T^{min} and PDF sets. We worked up a new method of obtaining the best choice of parameters for the minijet cross section calculation, normally thought to be arbitrary. This new method is based upon the minimization of the χ^2 -distribution of the parameterized curves of the cross section related to the experimental data, with different parameters choices. We studied three different choices for the scale, $Q^2 = p_T^2$, $p_T^2/4$ and \hat{s} , as well as two choices of PDF sets, MMHT, after-LHC, and CTEQ6L, before-LHC. We observed that from the choices made the one that has the best fit to the experimental data of the UA1 collaboration is $Q^2 = p_T^2/4$, MMHT PDF set, with $\bar{p}_T^{min} = 3.41$ GeV.

Sumário

1	Introdução	7
2	QCD Perturbativa, Jatos e Invariantes de Mandelstam	10
2.1	QCD Perturbativa e Ordens de grandeza	10
2.1.1	Constante de acoplamento $\alpha_s(Q^2)$	12
2.1.2	Escalas de Renormalização e Fatorização	15
2.2	Invariantes de Mandelstam	16
3	Seção de choque total inclusiva de Minijatos	20
3.1	Seção de choque total inclusiva de minijatos	20
4	Seções de choque Partônicas e PDFs	24
4.1	Seções de Choque Partônicas e Diagramas de Feynman	24
4.2	Funções de Distribuição Partônicas(PDFs)	30
4.2.1	Escolhas de conjunto de PDF's	32
5	Estudo das possíveis escolhas de escala, cortes de momentum transversal e PDF	36
5.1	Análise dos Dados e Parametrização	36
5.2	Estudo de χ^2	39
5.3	Curvas de seção de choque total inclusiva de minijatos	43
5.4	Previsões do Modelo	45
6	Conclusão e Perspectivas	47
7	Apêndice A	49
7.1	Regras de Feynmann para QCD	49
8	Referências	52

Capítulo 1

Introdução

A QCD (*Quantum Chromodynamics*), Cromodinâmica Quântica [4], é a teoria de campo que pretende explicar a dinâmica de uma das forças fundamentais de interação, a força forte, que apresenta como "carga" da interação a cor e como partícula mediadora o glúon. Nesta teoria as interações entre hádrons, como o próton e nêutron, é descrita em termos das interações entre os seus constituintes, quarks e glúons, conhecidos coletivamente como pártons [5]. Nos regimes de energia trabalhados (física de altas energias), desde o final do século passado até recentemente, em colisores hadrônicos, foi observado a prevalência de processos mediados pela força forte, o que demonstrou a importância de estudos em QCD. Na verdade, estudos em física de interações fortes tem sido realizado utilizando duas teorias bem diferentes, sendo estas, válidas em regiões cinemáticas diferentes, sendo elas a QCD perturbativa, que seguiremos para o trabalho, e a teoria não-perturbativa de Regge. A QCD perturbativa é capaz de explicar quase, se não todos, fenômenos de espalhamentos duros (*hard*), observados em colisores atuais, enquanto a teoria não-perturbativa de Regge obteve muito sucesso em descrever processos suaves (*soft*) observados.

O crescimento da seção de choque total com a energia, em colisões hadrônicas foi previsto teoricamente há muitos anos. Este crescimento, de acordo com dados experimentais de experimentos em colisores e em raios cósmicos, é governado por jatos, com energia transversal E_T muito menor que a energia s disponível na colisão hadrônica [6]. De acordo com a QCD [4] estes *minijatos* surgem a partir de espalhamentos semiduros entre pártons. Estes espalhamentos são definidos como espalhamentos duros entre pártons que carregam frações muito pequenas do momentum dos hádrons colidentes [7]. Neste cenário o comportamento em altas energias, das seções de choque, é controlado principalmente por processos semiduros envolvendo glúons, uma vez que glúons são dominantes em pequenos x (x de Bjorken) [8-10], a fração do momentum carregada pelos pártons. Logo, dada a importância dos minijatos em física de altas energias, neste trabalho estudamos sua seção de choque total inclusive em ordem dominante, analisando os efeitos de diferentes escolhas de parâmetros, como a função de distribuição partônicas (PDFs), escalas perturbativas Q^2 e cortes de momentum transversal mínimo p_T^{min} . Em relação às PDFs, investigamos as diferenças entre distribuições pré-LHC e pós-LHC, mais es-

pecificamente entre as funções MMHT[1], pós-LHC, e CTEQ6L[2], pré-LHC. No caso das escalas perturbativas e cortes de momentum transversal mínimo, diferentes escolhas irão alterar a magnitude e forma das seção de choque dos jatos. As escolhas de escala e corte de momentum transversal mínimo serão discutidas na análise dos resultados.

Este trabalho foi dividido da seguinte maneira:

No Capítulo 2 introduzimos aspectos essenciais da QCD perturbativa, que tipo de interação fundamental da natureza pretendia explicar, quais os regimes de energia onde podemos nos assegurar da aplicabilidade da teoria e os principais fenômenos que esta consegue solucionar com êxito. Comentamos as incertezas intrínsecas de trabalharmos em determinadas ordens de grandeza do tratamento perturbativo e como a escolha da escala Q^2 é importante para determinação da constante de acoplamento que surge na teoria. Ao final do capítulo introduzimos as variáveis de Mandelstam que iremos utilizar para o resto do trabalho, assim como explicar a cinemática do tipo de colisão estudada neste trabalho, colisão de dois corpos indo em dois corpos, para as colisões partônicas.

No Capítulo 3 apresentamos a equação para o cálculo da seção de choque total inclusiva de minijatos seguida neste trabalho, o formalismo que iremos utilizar para obtenção dos dados de seção de choque de minijatos por energia de centro de massa. Comentamos sobre cada parâmetro que influencia o resultado da equação, os limites das integrais e suas dependências com a energia de centro de massa disponível no sistema, por exemplo. Explicamos o tipo exato de colisão que estudamos, $pp \rightarrow 2 \text{ jets}$, e como a equação leva em conta a contribuição dos pártons na colisão, ou seja, como levamos em conta os subprocessos de colisões partônicas com frações do momentum total dos hádrons na colisão hádron-hádron. Ao final do capítulo comentamos as mudanças que precisam ser realizadas para uma continuação em uma próxima ordem de grandeza, *Next-to-leading-order* ou NLO.

No Capítulo 4, calculamos as seções de choque partônicas em ordem dominante dos subprocessos que governam as colisões hadrônicas, comentados no capítulo 3, apresentando os diagramas de Feynman que contribuem para amplitude de espalhamento e como podemos obter as seções de choque através de comparações diretas com processo análogos da Eletrodinâmica Quântica (*Quantum Electrodynamics*, QED). Também apresentamos o que exatamente são as funções de distribuição partônicas (PDF's) necessárias para o cálculo da seção de choque de minijatos, como são definidas, como podemos obtê-las através de dados experimentais e seus comportamentos para cada párton em diferentes regimes de energia de centro de massa. Comentamos um pouco sobre cada um dos conjuntos de PDF's escolhidos para este trabalho e comparamos seus comportamentos para diferentes escolhas de escala Q^2 .

No Capítulo 5 realizamos a análise dos dados obtidos através da equação apresentada no capítulo 3. Explicamos como as dificuldades computacionais inerentes de trabalhar com métodos de integração multidimensional gera uma necessidade de parametrização dos dados para obtenção da curva de seção de choque de minijatos por energia de centro de massa. Apresentamos um novo

método de extração das melhores escolhas de Q^2 e p_T^{min} para cada conjunto de PDF's, baseado em uma comparação direta da curva parametrizada da seção de choque com dados experimentais. Ao final do capítulo aparecem as melhores escolhas de parâmetros, Q^2 , p_T^{min} e conjunto de PDF's, assim como previsões, do modelo seguido neste trabalho, da seção de choque total inclusiva de minijatos para energias de centro massas atingidas, atualmente, no LHC, $\sqrt{s} = 7, 8$ e 13 TeV.

Capítulo 2

QCD Perturbativa, Jatos e Invariantes de Mandelstam

Neste capítulo descrevemos os principais aspectos da QCD perturbativa, de onde surge, sua propriedade de liberdade assintótica e limites de energia para sua aplicabilidade, importância de cada ordem de grandeza no tratamento perturbativo de processos de espalhamento e as correções e incertezas que surgem para cada ordem de grandeza. Comentamos a relação entre a seção de choque total observada para espalhamentos hádron-hádron (Bárions e Mésons) e a seção de choque dos jatos gerados neste processo, mais especificamente, de sua predominância sob o valor observado de σ_{TOT} nos colisores.

2.1 QCD Perturbativa e Ordens de grandeza

Quando queremos analisar, nos grandes colisores, processos gerados por um espalhamento hádron-hádron de alta-energia, somos levados a estudar os subprocessos que dominam a colisão. Sabemos, hoje, que os constituintes do núcleo atômico, comumente chamados de núcleons, não são partículas elementares da matéria, estes são na verdade compostos por quarks e glúons, geralmente colocados em um mesmo grupo de partículas, os pártons. O termo pártons, cunhado inicialmente por Feynman em seu modelo partônico para descrição dos hádrons [5], são partículas que interagem entre si através da força forte, que tem como carga da interação a cor, definidas historicamente como "red", "blue" e "green". A formulação da QCD como uma teoria criada nos moldes do sucesso da QED, ambas teorias quânticas de campos [11], apresenta uma descrição fantástica para uma propriedade muito importante da força forte, que a difere das demais forças fundamentais de interação. A força forte se torna muito atrativa em grandes distâncias e o contrário em pequenas distâncias; a QCD explica o fenômeno através da propriedade de liberdade assintótica retirada do comportamento da função β , que comento neste capítulo. A QCD tem como grupo de simetria o $SU(3)$ (grupo unitário especial), um grupo não-abeliano. Para um estudo aprofundado de teoria de grupos e álgebra de Lie, necessário para formalização de uma teoria quântica de campos,

apontamos o leitor para [12] . Podemos observar diretamente a propriedade de liberdade assintótica ao analisarmos a constante de acoplamento da força forte, e o fato de está "correr", variar, com a escala de energia em que um processo de espalhamento acontece. Outra propriedade importante da QCD é a de escravidão infravermelha (*infrared slavery*), responsável por não conseguirmos observar pártons livres em colisores. No modelo aperfeiçoado da QCD para pártons, a colisão entre hádrons é governada por subprocessos de espalhamentos duros entre pártons, de cada hádron, que carregam frações do momentum total destes. O resultado destes subprocessos é a subsequente quebra dos hádrons em seus constituintes, é exemplificado na Figura 2.1. Porém, como já comentamos, não observamos estes pártons livres, o que significa que estes sofrem um processo de hadronização, que nos grandes colisores são detectados como jatos de partículas colimados no eixo do párton espalhado. Um melhor entendimento dos processos experimentais e tipos de eventos observados em colisores pode ser obtido em [13].

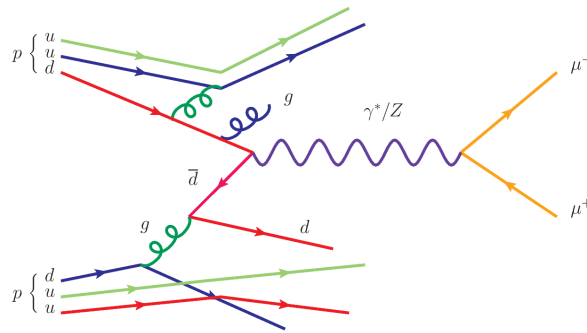


Figura 2.1: Exemplo de espalhamento hádron-hádron, processo de Drell-Yan, com geração de jatos.

Foi teorizado, há muitos anos, que a seção de choque total, para estas colisões hadrônicas, cresce com a energia disponível para colisão, e com dados de experimentos em colisores e em raios cósmicos foi possível observar que este crescimento é governado por jatos que carregam uma energia transversal E_T muito menor que a energia de centro de massa disponível \sqrt{s} [6], o regime de *minijatos*. A obtenção desta seção de choque teórica passa pela análise das amplitudes de espalhamento para cada subprocesso possível na colisão hadrônica, Equação (2.1). Em uma descrição por teoria de campos podemos obter as amplitudes de espalhamento analisando os diagramas de Feynman que contribuam para o espalhamento.

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} \propto |\mathcal{M}|^2 \quad (2.1)$$

Em um tratamento perturbativo para uma teoria de campos, cada diagrama de Feynman recebe um peso em relação a sua contribuição para o processo descrito. Este peso é dado através da constante de acoplamento da teoria, e cada vértice que aparece no diagrama traz consigo a constante, ou seja, diagramas com maiores quantidades de vértices da interação aumentam a ordem de grandeza levada em conta no cálculo perturbativo. Para espalhamentos duros entre

pártons, diagramas de ordens maiores podem ser compostos por laços (*loops*) e emissões gluônicas, veja Figura 2.2.

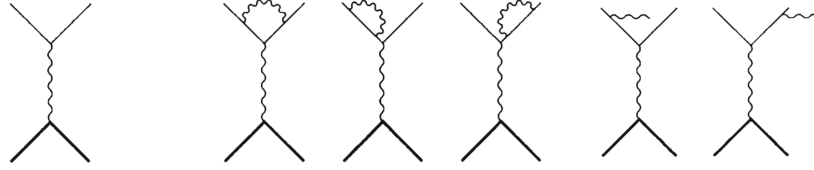


Figura 2.2: Diagramas de Feynman possíveis para interações fermiônicas intermediadas pela força forte, onde as linhas curvas representam glúons e as linhas retas férmions.

Até que ordem de grandeza, no tratamento perturbativo, da expansão em α_s devemos trabalhar depende do tipo de processo trabalhado. Como já foi explicado, α_s "corre", varia de valor dependendo de uma escala de energia[14], o que dependendo do regime de energia e processo estudado pode nos obrigar a utilizarmos ordens de grandeza cada vez maiores e possivelmente complicar o processo de renormalização da teoria, devemos levar em conta a contribuição de diagramas de Feynman com quantidades crescentes de laços (*loops*) e emissões gluônicas. Damos uma pausa agora nesta explicação para descrevermos o comportamento de α_s em relação a escala de energia e a utilização de um novo parâmetro para sua descrição, Λ_{QCD} .

2.1.1 Constante de acoplamento $\alpha_s(\mathbf{Q}^2)$

Para obtermos uma constante de acoplamento, para o tratamento perturbativo da QCD, necessitamos primeiro definir o esquema de renormalização de grupo seguida no processo. Neste trabalho seguimos o esquema de renormalização de mínima subtração modificada \overline{MS} . Como mencionado anteriormente, α_s "corre" com a escala de energia e podemos obter a seu comportamento através da equação de Callan–Symanzik[11]:

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma \right] G^{(n)}(\{x_i\}; M, g) = 0; \quad (2.2)$$

Onde M é a escala de grande momentum da qual α_s depende, $\beta(g)$ a taxa de mudança, ou variação, da nossa constante de acoplamento $\alpha_s = g^2/(4\pi)$ em um determinado valor da escala M e em determinado g_0

$$\beta(g) = M \frac{\partial g}{\partial M} \Big|_{g_0}. \quad (2.3)$$

Podemos aplicar diretamente (2.2) em um observável, como a seção de choque, para que a equação perca a dependência em γ [11] ($\gamma = 0$ quando aplicada a um observável) e fique como

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] \sigma(s, M, \alpha_s) = 0. \quad (2.4)$$

Por análise dimensional, a seção de choque pode ser escrita como

$$\sigma = \frac{c}{s} f\left(\frac{s}{M^2}, \alpha_s\right), \quad (2.5)$$

sendo c uma constante adimensional. A Equação (2.2) implica que f depende somente da constante de acoplamento da força forte, avaliada em um $Q^2 = s$. Com estas definições, a constante de acoplamento obedece a seguinte equação de renormalização de grupo

$$\frac{d}{d \ln(M/M_0)} g' = \beta(g'), \quad (2.6)$$

Com condição inicial $\alpha_s(M_0) = \alpha_s$. Para nossa QCD perturbativa de três cores e com n_f , quantidade de sabores de quarks levados em conta, em um limite em que a massa dos pártons é desprezível, $m_q \ll M$, a taxa $\beta(g)$ até segunda ordem de grandeza é dada pela expansão em série

$$\beta(g) = -\frac{b_0}{(4\pi)^2} g^3 - \frac{b_1}{(4\pi)^4} g^5 - \mathcal{O}(g^7) - \dots, \quad (2.7)$$

onde as constantes b_0 e b_1 são

$$b_0 = 11 - \frac{2n_f}{3}, \quad b_1 = 102 - \frac{38n_f}{3}. \quad (2.8)$$

Podemos realizar a integração da (2.6) com a taxa (2.7):

$$\ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = - \int_{\infty}^{g(\alpha_s(Q^2))} dg' \left[\frac{b_0}{(4\pi)^2} g'^3 + \frac{b_1}{(4\pi)^4} g'^5 + \dots \right]^{-1}. \quad (2.9)$$

A integral pode ser resolvida para ordem dominante (*Leading Order*, LO) ignorando os termos de b_1 em diante, resultando em:

$$\frac{1}{\alpha_s(M)} - \frac{1}{\alpha_s(M_0)} = b_0 \ln(M/M_0), \quad (2.10)$$

Levando a:

$$\alpha_s(M) = \frac{\alpha_s(M_0)}{1 + \alpha_s(M_0) b_0 \ln(M/M_0)}. \quad (2.11)$$

Enquanto ao utilizarmos nossa série em (2.7) com aproximação até segunda ordem (*Next-to-leading order*, NLO), o resultado de nossa integral pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_s(M)} - b_0 \ln M - \frac{b_1}{b_0} \ln\left(\frac{1}{\alpha_s(M)} + \frac{b_1}{b_0}\right) = \\ \frac{1}{\alpha_s(M_0)} - b_0 \ln M_0 - \frac{b_1}{b_0} \ln\left(\frac{1}{\alpha_s(M_0)} + \frac{b_1}{b_0}\right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Esta é somente uma expressão implícita de $\alpha_s(M)$ em função de $\alpha_s(M_0)$ e $\ln(M/M_0)$ que pode ser resolvida numericamente.

Gostaríamos, agora, de colocar nossas equações para constante de acoplamento da força forte em função de uma escala Q^2 , arbitrária em ordem dominante e aproximadamente arbitrária em ordens maiores de grandeza, postergamos a explicação do porquê para próxima seção. Também introduzimos um parâmetro da QCD, Λ_{QCD} , cuja escolha irá depender do conjunto de funções de distribuição partônicas (PDFs) utilizadas para o tratamento da seção de choque total inclusiva, e seus valores aparecem nos artigos das PDF's [1] e [2]. Para isto, começando pela expressão da ordem dominante, podemos fazer a troca direta da nossa escala de grande momentum M por nossa nova escala Q^2 e substituímos as componentes em (2.13) que envolvam M_0 por $b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)$, resultando na seguinte equação em LO para constante de acoplamento

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}. \quad (2.13)$$

Para a próxima ordem de grandeza, podemos fazer a mesma troca de escalas e substituímos o lado direito de (2.12) por $b_0 \ln \Lambda^2 - b_1(\ln b_0)/b_0$, a equação para a constante de acoplamento em segunda ordem de grandeza fica então:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \left[1 - \frac{b_1 \ln \ln(Q^2/\Lambda^2)}{b_0^2 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \right]. \quad (2.14)$$

É importante notar que, por definição, o parâmetro de escala da QCD, Λ , também depende da escolha de esquema de renormalização. Em LO, podemos obter uma correspondência entre Λ 's de diferentes esquemas de renormalização, através de:

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 e^{\frac{2d}{b_0}}, \quad (2.15)$$

onde d é a diferença, em LO, entre os $\alpha_s(Q^2)$ dos diferentes esquemas de renormalização.

Outro fator importante a ser levado em conta é o comportamento da constante de acoplamento em regiões de energia em que $Q^2 \approx m_q^2$, já que formalizamos $\alpha_s(Q^2)$ num limite em que as massas dos quarks, pártons, podiam ser desprezadas. Para escalas de energia em que poderíamos observar desvios das equações (2.13) e (2.14) devido a influência das massas dos quarks, u , d e s . Mesmo sendo os quarks mais leves ainda afetam, de forma significativa, α_s , devido sua dependência com n_f , número de sabores de quarks ativos na escala Q^2 . Podemos considerar os sabores de quarks ativos se sua massa $m_q^2 \ll Q^2$, regime em que esperamos ser válida a utilização das equações (2.13) e (2.14). Este requerimento implica que α_s deve variar de forma contínua através de limiares de massas dos quarks, ao invés de variar de forma discreta. É exatamente este requerimento de que os valores de α_s sejam iguais para antes e depois de um limiar de massa que implica em uma dependência explícita de Λ com n_f . Para LO esta dependência implica que:

$$\alpha_s^{(n_f-1)}(Q^2 = m_q^2) = \alpha_s^{(n_f)}(Q^2 = m_q^2), \quad (2.16)$$

resultando em:

$$\Lambda^{(n_f)} = \Lambda^{(n_f-1)} \left(\frac{\Lambda^{n_f-1}}{m_q} \right)^{\frac{2}{(33-2n_f)}}. \quad (2.17)$$

2.1.2 Escalas de Renormalização e Fatorização

Na última seção, mencionamos várias vezes o termo "escala", mas não o que realmente queremos dizer com isto. Não chegamos a comentar ainda sobre de onde vêm nem se podem ser escolhidas, e mais, se podemos escolhe-las, quão arbitrárias são estas escolhas. As diferentes escalas que aparecem no tratamento perturbativo da QCD para análise de seções de choque hadrônicas surgem devido os processos de renormalização e fatorização da seção de choque total.

A escala utilizada para o processo de renormalização já foi mencionada, ela aparece na definição da constante de acoplamento $\alpha_s(Q^2)$ e define a escala de energia em que podemos empregar α_s em nossos cálculos e obter um resultado renormalizável. O seu surgimento vem diretamente da propriedade de liberdade assintótica da QCD, em que α_s apresenta diferentes valores em diferentes limites de energia, em que necessitamos definir uma escala de momentum grande que defina o regime de energia em que podemos realizar o tratamento perturbativo da QCD. Já que $\alpha_s(Q^2)$ diminui com aumento de Q , podemos justificar a utilização de métodos perturbativos para espalhamentos duros se fizermos uma escolha de escala na magnitude de uma escala de grande momentum.

A escala utilizada para o processo de Fatorização surge devido ao processo de eliminação de divergências colineares que aparecem no limite em que podemos desprezar as massas dos pártons. A subtração destas divergências corresponde a eliminar a sobreposição de contribuições, em próxima ordem de grandeza, de linhas gluônicas quase colineares e de camada de massa. O tratamento sistemático, em todas as ordens de grandeza, destas divergências gera uma necessidade por funções de distribuição partônicas que dependam de uma escala de fatorização. Esta escala de fatorização serve, portanto, para separarmos as porções de distâncias curtas e longas do processo de espalhamento. Devido a isso, a escala de fatorização também deve ser da mesma ordem de magnitude de uma escala de grande momentum.

As escalas de renormalização e fatorização não necessitam ser iguais, devido terem origens distintas. Porém, como já mencionamos, ambas devem ter a mesma ordem de magnitude para mantermos a validade dos processo de renormalização, com a definição da constante de acoplamento $\alpha_s(Q^2)$ apresentada, e fatorização que forma a base teórica para o modelo partônico da QCD. Iremos mencionar novamente no capítulo 3 sobre a importância das escolhas realizadas para justificarmos o tratamento perturbativo dos processo analisados, mas podemos adiantar um comentário sobre os efeitos da escolha de escala Q^2 para o nosso processo de renormalização e fatorização.

É natural pensarmos que se levássemos em conta todas as ordens de grandeza da expansão em α_s , e por conseguinte diagramas de Feynman com maiores quantidades de laços (*loops*), o nosso observável, a seção de choque total, não deveria depender do esquema de renormalização nem de fatorização. Este fato implica que tratamentos em ordens maiores dependem cada vez mais fracamente da escolha de escala realizada, o que torna a escolha em ordem

dominate, LO, basicamente arbitrária e dependente da escolha de outros parâmetros. Este fato gera uma motivação de estudos que envolvam tratamentos NLO em diante.

2.2 Invariantes de Mandelstam

Para o estudo de processos de espalhamento, podemos observar diferentes características da colisão através da configuração cinemática do processo.

Ao trabalharmos com estes tipos de experimentos, nos colisores, gostaríamos que esta configuração cinemática fosse independente do sistema referencial adotado, ou seja, que as variáveis físicas estudadas fossem invariantes frente à *boosts* de *Lorentz*, na direção do eixo da colisão. As variáveis com esta propriedade são conhecidas como invariantes de *Lorentz*, cuja discussão aprofundada pode ser vista em [15].

Queremos expressar então nossa seção de choque a partir destas variáveis invariantes de *Lorentz*. Para este fim, introduzimos as famosas variáveis de Mandelstam.

Como estamos estudando processos do tipo

$$A + B \rightarrow jets + X, \quad (2.18)$$

onde A e B podem ser hádrons ou léptons, mais especificamente, neste trabalho estudamos espalhamentos com A e B sendo hádrons, por exemplo pp e $p\bar{p}$. Este tipo colisão, espalhamento inelástico, é governado por espalhamentos duros, elásticos, entre pártons que compõem os hádrons A e B. Este tipo de interação, dura, pode ser generalizada para qualquer tipo de partícula, então o processo pode ser definido cinematicamente como

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \quad (2.19)$$

definição de um espalhamento entre dois corpos indo em dois corpos. Tomando como partículas dos estados iniciais 1 e 2, que interagem, neste trabalho levamos em conta somente interações mediadas pela força forte, e são então espalhadas resultando nas partículas dos estados finais, 3 e 4. Para construirmos a cinemática, começamos pela propriedade de conservação do 4-momentum total da interação num sistema fechado

$$p_1^\mu + p_2^\mu \rightarrow p_3^\mu + p_4^\mu, \quad (2.20)$$

escrita na notação de Einstein. O 4-momentum de uma partícula é definido como

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (2.21)$$

sendo E a energia da partícula e \mathbf{p} seu momentum linear. Fazendo uso de (2.20) podemos definir as variáveis de Mandelstam, mencionadas anteriormente,

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (2.22)$$

2.2 Invariantes de Mandelstam

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \quad (2.23)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \quad (2.24)$$

As variáveis também são conhecidas como canal-s, canal-t e canal-u de energia do sistema. Expandindo (2.22), (2.23) e (2.24) podemos obter uma relação muito importante entre as variáveis de Mandelstam

$$s + t + u = \sum_i m_i^2, \quad (2.25)$$

ou seja, a soma das variáveis é igual a soma do quadrado das massas das partículas dos estados inicial e final. Na relação entre as variáveis, já omitimos a velocidade da luz c , devido ao sistema de grandezas utilizado no trabalho, que geralmente é empregado em estudos de física de altas energias, $\hbar = c = 1$.

Neste trabalho utilizamos s e t que em um sistema de referencial inercial, escolhido para o trabalho, se tornam, respectivamente, o quadrado da energia total de centro de massa e o quadrado do momentum transferido do sistema. Em um referencial inercial de centro massa podemos definir um eixo, por exemplo z , no qual as partículas do estado inicial se deslocam e por conseguinte interagem, sendo ao final espalhadas em um ângulo θ do eixo de interação. Esta escolha de referencial implica na seguinte relação, devido a conservação de energia e momentum,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

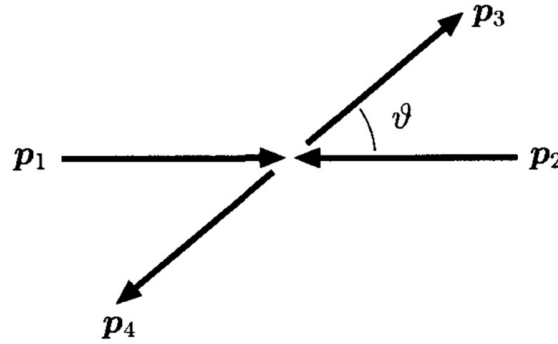


Figura 2.3: Referencial de centro de massa com partículas espalhadas em um ângulo θ [15].

Neste referencial, da Figura 2.3, podemos reescrever os 4-momenta das partículas em função de um momentum de centro de massa, longitudinal p_L e de um momentum transversal p_T , em relação ao eixo da colisão,

$$p_1 = (E_1, 0, 0, p_L), \quad (2.27)$$

$$p_2 = (E_2, 0, 0, -p_L), \quad (2.28)$$

$$p_3 = (E_3, \mathbf{p}_T, p'_L), \quad (2.29)$$

$$p_4 = (E_4, -\mathbf{p}_T, -p'_L). \quad (2.30)$$

Fazendo uso da definição das variáveis de Mandelstam e da nova definição dos 4-momenta obtemos as seguintes expressões para as energias

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_1^2 - m_2^2), \quad (2.31)$$

$$E_2 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_2^2 - m_1^2), \quad (2.32)$$

$$E_3 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_3^2 - m_4^2), \quad (2.33)$$

$$E_4 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_4^2 - m_3^2). \quad (2.34)$$

Podemos observar o comportamento das energias no limite de $s \rightarrow \infty$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E \sim \frac{\sqrt{s}}{2}. \quad (2.35)$$

Podemos, ao observar da figura 2.3 e fazendo uso da definição dos 4-momenta novamente, obter as seguintes relações,

$$\mathbf{p}'_{\mathbf{L}} = |\mathbf{p}'| \cos\theta \quad (2.36)$$

$$\mathbf{p}'_{\mathbf{T}} = |\mathbf{p}'| \sin\theta. \quad (2.37)$$

Colocando em termos das variáveis de Mandelstam:

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_1^2, m_2^2) \quad (2.38)$$

$$\mathbf{p}'^2 = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_1^2, m_2^2), \quad (2.39)$$

onde $\lambda(x, y, z)$ é a função triangular, definida como

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz. \quad (2.40)$$

Vamos agora expressar a variável t em termos destas novas definições de 4-momentum

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 \\ &= m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos\theta, \end{aligned} \quad (2.41)$$

Fazendo uso das equações (2.28-2.40), podemos obter a relação entre o ângulo de espalhamento no referencial de centro de massa e as variáveis de Mandelstam s e t :

$$\cos\theta = \frac{s^2 + s(2t - \sum_i m_i^2) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2) \lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_3^2, m_4^2)}. \quad (2.42)$$

Podemos tomar novamente o limite $s \rightarrow \infty$, limite em que podemos desprezar as massas das partículas, das equações (2.41) e (2.42) para obter:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \cos\theta \sim 1 + \frac{2t}{s} \quad (2.43)$$

2.2 Invariantes de Mandelstam

$$\lim_{s \rightarrow \infty} t \sim -\mathbf{p}_T^2. \quad (2.44)$$

Relações estas que iremos utilizar para o resto do trabalho, desprezando a massa dos pártons interagentes e trabalhando em um regime de energia que sugere boa aplicabilidade da QCD perturbativa,

$$s + t + u = 0. \quad (2.45)$$

Para finalizar, levantamos aqui a propriedade de cruzamento no processo de espalhamento. O cruzamento é simplesmente a troca de uma partícula dos estado inicial para o final e vice versa, se tornando sua antipartícula:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \quad (2.46)$$

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4, \quad (2.47)$$

onde, as seções de choque correspondentes de cada um desses processo difere somente pela troca dos canais envolvidos no cruzamento, ($s \leftrightarrow t$), ($t \leftrightarrow u$) e ($u \leftrightarrow s$), o que facilita o processo de obtenção das seções de choque dos subprocessos que contribuem para a colisão hadrônica.

Capítulo 3

Seção de choque total inclusiva de Minijatos

Neste capítulo explicamos o processo de espalhamento estudado, uma colisão pp ou $p\bar{p}$ com criação de 2 jatos, $pp \rightarrow 2jets + X$, em que, como já comentamos, é um processo governado por espalhamentos duros entre os pártons que compõem os hádrons. Estes jatos são formados devido à propriedade de confinamento, uma das características da QCD, em que os pártons espalhados sofrem um processo de hadronização, que nos colisores são observados como jatos colimados em relação ao eixo do párton espalhado inicialmente. Mais especificamente, estamos interessados no comportamento da seção de choque no regime de momentum transversal pequeno, pequeno- p_T , regime de energia dos minijatos. Já comentamos anteriormente sobre como o crescimento da seção de choque total é governado por jatos deste regime, exatamente de onde surge a motivação dos estudos sobre as seções de choque de minijatos. Nas próximas seções, apresentamos o método utilizado para o cálculo da seção de choque total inclusiva de minijatos, comentamos certas escolhas que devem ser feitas para nos assegurarmos dos resultados obtidos pelo processo de colisão hadrônica estudado, assim como sobre as incertezas existentes neste tipo de tratamento devido ao comportamento das PDF's escolhidas nos limites de integração tomados.

3.1 Seção de choque total inclusiva de minijatos

Como mencionamos no capítulo anterior, é necessário que seja explicado os esquemas de renormalização e fatorização devido seu impacto em tratamentos perturbativos de LO e NLO. Mais especificamente, para escolha de um esquema de fatorização, que são garantidos pelos teoremas de fatorização do modelo à pártons da QCD.

Para colisões hadrônicas podemos separar a seção de choque inelástica total em uma soma, por estarmos trabalhando em um modelo aditivo, das contribuições de processos suaves (*soft*) e duros (*hard*):

$$\sigma_T = \sigma_{soft} + \sigma_{QCD}, \quad (3.1)$$

3.1 Seção de choque total inclusiva de minijatos

onde σ_{QCD} é a contribuição que obtemos ao analisarmos os subprocessos de espalhamentos duros entre os pártons que compõem os hádrons, onde podemos ter certeza de que o tratamento perturbativo é válido, e σ_{soft} é a contribuição que vêm de uma região de p_T muito pequeno. A separação realizada serve para definirmos uma região de aplicabilidade dos métodos utilizados neste trabalho, ou seja, definimos um corte de momentum transverso mínimo, p_T^{min} , que dá um limite inferior para o nosso tratamento perturbativo.

Para o tipo de colisão hadrônica que tratamos neste trabalho, $A + B \rightarrow jets + X$, utilizamos a seguinte equação para o cálculo da seção de choque total inclusiva de minijatos em ordem dominante[16]:

$$\begin{aligned} \sigma_{QCD}^{AB}(s) &= \sum_{i,j,k,l} \int_{(p_T^{min})^2}^{s/4} dp_T^2 \int_{4p_T^2/s}^1 dx_1 \int_{4p_T^2/x_1 s}^1 dx_2 \\ &\times [f_{i/A}(x_1, Q^2) f_{j/B}(x_2, Q^2) + f_{j/A}(x_1, Q^2) f_{i/B}(x_2, Q^2)] \\ &\times \left[\frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}}{dp_T^2}(\hat{t}, \hat{u}) + \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}}{dp_T^2}(\hat{u}, \hat{t}) \right] (1 - \delta_{ij}/2) (1 - \delta_{kl}/2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Esquemáticamente este processo pode ser descrito pela Figura 3.1.

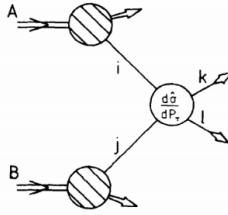


Figura 3.1: Diagrama de ordem dominante do processo $A + B \rightarrow jets$ [15].

A equação expressa o nosso observável seção de choque total inclusiva como uma convolução de conjuntos de distribuições partônicas universais $f(x, Q^2)$ e as seções de choque partônicas, espalhamentos duros entre os pártons de cada hádron, $d\hat{\sigma}/dp_T^2$. Onde "A" e "B" são os hádrons iniciais, que neste trabalho estes podem ser pp - $p\bar{p}$. Somamos sob todas as combinações de pártons (i, j) , iniciais, e (k, l) , finais, permitidas pela Lagrangeana da QCD, apêndice A. Nossas seções de choque partônicas e PDF's, definidas no capítulo 4, dependem de uma escala de fatorização, em que aqui já a escolhemos como Q^2 . Escala com magnitude de grande momentum, utilizamos aqui a mesma escala do esquema de renormalização, e que para um tratamento em ordem dominante e LO é relativamente arbitrária, as escolhas realizadas são apresentadas no capítulo 5 juntamente com a análise dos resultados. As variáveis de Mandelstam que utilizamos para tratar a cinemática dos subprocessos, introduzidas no capítulo anterior, são definidas como (s, t, u) e $(\hat{s}, \hat{t}, \hat{u})$ em um referencial de centro de massa dos processos AB e ij , respectivamente. Onde a relação entre estas

varáveis é:

$$\hat{s} = x_1 x_2 s \quad (3.3)$$

$$\hat{t} = -\frac{\hat{s}}{2} \left(1 - \sqrt{q - \frac{4p_T^2}{\hat{s}}} \right) \quad (3.4)$$

$$\hat{u} = -\hat{s} - \hat{t}, \quad (3.5)$$

já que desprezamos as massas dos pártons, Relação (2.45).

As funções δ , delta de Dirac, são necessárias para levarmos em conta as simetrias dos jatos e alvos do feixe de pártons, quando temos pártons iguais nos estados iniciais ou finais. As integrais realizadas sob p_T^2 , x_1 e x_2 , em que os x 's são as frações de momentum total de cada hádron "A" e "B" carregados pelos pártons do estado inicial, apresentam limites de integração provindos diretamente das relações entre as variáveis do sistema que aparecem no tratamento do modelo à partons da QCD[4]. O limite inferior da integral em momentum transversal surge exatamente de nossa definição de um corte p_T^{min} em que a aplicabilidade deste esquema é considerada válida. Para energias de centro de massa $\sqrt{s} < 1$ TeV, regime de energia com qual iremos comparar nossas análises, é sugerido pela literatura, [16],[17] e [18] por exemplo, cortes de momentum transversal $p_T^{min} \geq 2$ GeV. As escolhas que utilizamos para escala Q^2 e p_T^{min} e a sensibilidade do nosso modelo com relação a estas será discutido no Capítulo 5.

Sobre o comportamento do observável seção de choque total inclusiva, já podemos observar o comportamento de seu crescimento com o aumento da energia de centro de massa \sqrt{s} disponível na colisão, através dos limites de integração. A medida que s aumenta os limites inferiores das frações de momentum x diminuem, isto e o fato da função de distribuição partônica do glúon crescer rapidamente com a diminuição de x geram um crescimento acentuado da seção de choque total inclusiva. Devemos ter cuidado ao tratarmos de valores assintóticos de s já que para esses limites, devido ao comportamento da PDF do glúon, o modelo aditivo que adotamos não preserva a unitariedade do processo de espalhamento.

Fora certas variáveis que iremos discutir no próximo capítulo, o tratamento perturbativo em ordem dominante para obtenção da seção de choque total inclusiva de minijatos está bem definido. Para ordem dominante, LO, necessitamos escolher um valor para a escala de renormalização e fatorização, Q^2 , um corte de momentum transversal mínimo p_T^{min} e os conjuntos de PDF's que iremos utilizar. Mas ainda não temos tudo que precisamos para tratarmos o processo $A + B \rightarrow jets$ em NLO. Já mencionamos, no capítulo anterior, a importância do tratamento em NLO, principalmente de como tratamentos em ordens consecutivamente mais altas, devido ao processo de compensação entre os diferentes fatores, assegurado pela teoria perturbativa, independem cada vez mais das escolhas de escalas de renormalização e fatorização. Necessitamos para trabalhar com um formalismo em NLO, PDF's evoluídas em até dois laços (*loops*) e seções de choque partônicas em NLO, ou seja, que levem em conta contribuições de maiores quantidades de diagramas de Feynman, com

laços (*loops*) e emissões gluônicas, para o caso da interação forte.

Pode-se obter a evolução das PDF's através das funções de evolução partônicas, como DGLAP, enquanto que as seções de choque partônicas podem ser obtidas levando em conta processos que desconsideramos em um cálculo original das seções de choque partônicas em LO, pártons extras que não sejam colineares aos eixos dos pártons iniciais e finais do espalhamento típico de dois corpos, já que a contribuição destes é incorporada na formulação das PDF's. Na aproximação em NLO, essas contribuições, não colineares, devem ser calculadas exatamente para os subprocessos de espalhamentos duros entre pártons. O resultado obtido é igual à seção de choque original em LO somado a todas contribuições logarítmicas em NLO, até mesmo as constantes. Neste trabalho focamos na formulação em LO.

Capítulo 4

Seções de choque Partônicas e PDFs

Como mencionamos anteriormente, em experimentos de colisores, a seção de choque é dominada pela contribuição de jatos hadrônicos iniciados por quarks ou glúons, porém é muito difícil diferenciarmos jatos iniciados por glúons dos iniciados por quarks, assim como diferenciarmos os pártons responsáveis pela colisão em primeiro lugar. Como consequência, as predições teóricas da QCD para processos de espalhamentos duros necessitam da soma das contribuições de todos os processos de espalhamento partônicos possíveis, processos iniciados por quarks, antiquarks e glúons. Neste capítulo, apresentamos os cálculos necessários para obtermos as seções de choque da QCD perturbativa destes processos, que necessitamos para o cálculo da equação (3.2), apresentada no capítulo 3. Apresentamos os diagramas de Feynman relevantes para os diferentes espalhamentos, onde as regras de Feynman para QCD podem ser observadas no apêndice A, comentando sobre diagramas de maiores ordens e como estes podem gerar correções para as equações das seções de choque partônicas apresentadas. Comentamos os principais aspectos dos conjuntos de PDF's escolhidos, como são obtidos e seus comportamentos para diferentes escolhas de escala de fatorização.

4.1 Seções de Choque Partônicas e Diagramas de Feynman

Para começarmos a atacar o problema da obtenção de seções de choque para cada um dos subprocessos envolvidos

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2}(ij \rightarrow kl), \quad (4.1)$$

em colisões do tipo $A + B \rightarrow jets + X$, podemos partir de processo análogos provindos da Eletrodinâmica Quântica (*Quantum Electrodynamics*, QED); a comparação é válida já que os processos são sobre a mesma categoria de partículas, férmions de Dirac, elétrons, múons, quarks, etc., e bósons vetoriais,

fótons e glúons[11]. O processo mais simples que precisamos tratar é o de espalhamento entre quarks de sabores diferentes, $q + q' \rightarrow q + q'$. Conseguimos obter a seção de choque deste processo nos apoiando na fórmula para um espalhamento análogo, $e^- \mu \rightarrow e^- \mu$. A seção de choque da QED para este processo é

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} (e^- \mu \rightarrow e^- \mu) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right], \quad (4.2)$$

lembrando que estamos trabalhando no limite em que podemos desprezar a massa dos pártons participantes do espalhamento, o que nos leva a equação do capítulo anterior

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0. \quad (4.3)$$

Agora, para que possamos converter esta seção de choque em seu análogo da QCD, precisamos trocar a constante de acoplamento utilizada para α_s e multiplicar a seção de choque por um fator de simetria do grupo $SU(3)$. Para isto, fazemos uso das regras de Feynman, apêndice A, apresentadas para o diagrama da Figura 4.1, onde fica definido que as linhas retas são férmion e as linhas curvas são glúons.

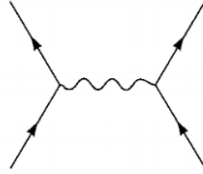


Figura 4.1: Diagrama de Feynman para um espalhamento $qq' \rightarrow qq'$.

O fator de cor deste diagrama, como visto no apêndice A, é

$$(t^a)_{i'i} (t^a)_{j'j}, \quad (4.4)$$

onde i, i' são as cores iniciais e finais do quark q e j', j são as cores iniciais e finais do quark q' . Para colocarmos este fator em nossa seção de choque, necessitamos tirar seu quadrado, somar sobre as cores finais e tirar a média sobre as cores iniciais. Realizando estes passos, ficamos com

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{tr}[t^b t^a] \text{tr}[t^b t^a] = \frac{1}{9} [C(r)]^2 \delta^{ab} \delta^{ab} \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{2}{9}, \quad (4.5)$$

onde $C(r) = 1/2$, para a representação fundamental de $SU(3)$ apresentada no apêndice. Obtemos finalmente a seção de choque partônica para $qq' \rightarrow qq'$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} (qq' \rightarrow qq') = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right]. \quad (4.6)$$

Podemos nos aproveitar desta equação e utilizarmos a propriedade de simetria de cruzamento, explicada no Capítulo 2, para obtermos a seção de choque para o processo $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$. Para isto, só precisamos cruzar os canais t e s em (4.6)

e chegamos à seção de choque para um processo de aniquilamento de par de um sabor indo em par de outro sabor

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} (q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}') = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right]. \quad (4.7)$$

Para o processo de aniquilamento de um par de um sabor indo no mesmo par, necessitamos analisar a contribuição de dois diagramas de Feynman, Figura 4.2. O análogo que iremos utilizar é o caso do espalhamento Bhabha da QED, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, com seção de choque

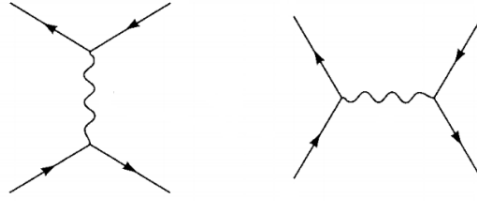


Figura 4.2: Diagramas de Feynman para um espalhamento $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$.

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} (e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2}{\hat{s}^2} + \hat{u}^2 \left(\frac{1}{\hat{s}} + \frac{1}{\hat{t}} \right)^2 \right]. \quad (4.8)$$

Este processo é um pouco mais complicado que os dois anteriores, ao invés de termos um fator único multiplicando nosso análogo, cada termo da expressão (4.8) vai receber diferentes fatores de cor.

Existem diferente maneiras de se analisar cada contribuição, seguiremos a mais comum. Analisamos o processo usando estados iniciais e finais de helicidade. Como estamos no limite em que podemos desprezar a massa dos nossos pártons, a helicidade do processo é conservada, o que implica que o reação $e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_R^-$ pode receber contribuições do diagrama do canal- s , enquanto $e_R^+e_R^- \rightarrow e_R^+e_R^-$ recebe contribuições somente do diagrama do canal- t . As seções de choque ficam

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\hat{t}} (e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_R^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \frac{\hat{t}^2}{\hat{s}^2}, \\ \frac{d\sigma}{d\hat{t}} (e_R^+e_R^- \rightarrow e_R^+e_R^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \frac{\hat{s}^2}{\hat{t}^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A seção de choque de $e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_L^-$ deve ser nula. A última seção de choque $e_R^+e_L^- \rightarrow e_R^+e_L^-$ depende de ambos os diagramas, canal- s e canal- t . Esta fica

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} (e_R^+e_L^- \rightarrow e_R^+e_L^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \hat{u}^2 \left(\frac{1}{\hat{t}} + \frac{1}{\hat{s}} \right)^2. \quad (4.10)$$

A invariância da QED sob paridade implica que as seções de choque são invariantes sob reversão das helicidades.

4.1 Seções de Choque Partônicas e Diagramas de Feynman

Finalmente, para convertermos o nosso análogo em sua versão para QCD, adicionamos os fatores de cor para cada diagrama, assim como realizado para o caso $qq' \rightarrow qq'$. Somente a última expressão recebe um fator diferente, já que depende da contribuição do cruzamento do dois diagramas. Este fator, com as regras do apêndice A, fica

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (t^a)_{i'i} (t^a)_{jj'} \cdot (t^b)_{j'i'} (t^b)_{ij} = \frac{1}{9} \text{tr}[t^a t^b t^a t^b], \quad (4.11)$$

mas,

$$t^a t^b t^a t^b = \left(C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)\right) t^a t^a = \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) \frac{4}{3} = -\frac{2}{9}, \quad (4.12)$$

o que implica em

$$\frac{1}{9} \text{tr}[t^a t^b t^a t^b] = -\frac{2}{27}. \quad (4.13)$$

Somando todas as seções de choque, após multiplicar os respectivos fatores de cor e levarmos em conta sua helicidade, chegamos na seguinte seção de choque para $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right] - \frac{8\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}^2} \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}}. \quad (4.14)$$

Novamente, podemos cruzar os canais, neste caso s e u , para obtermos a seção de choque de $qq \rightarrow qq$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(qq \rightarrow qq) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{s}^2}{\hat{u}^2} \right] - \frac{8\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}^2} \frac{\hat{s}^2}{\hat{u}\hat{t}}. \quad (4.15)$$

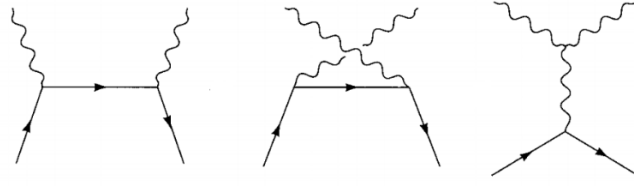
O processo $\bar{q}\bar{q} \rightarrow \bar{q}\bar{q}$ tem a mesma seção de choque do processo $qq \rightarrow qq$.

Agora analisaremos as seções de choque partônicas que terão maior contribuição para o regime de minijatos estudado neste trabalho, seções de choque que envolvam glúons no estado inicial. Estas são consideravelmente mais complicadas de serem analisadas, primeiramente pela maior quantidade de diagramas necessários para termos todas as contribuições do processo, assim como pelo fato do tratamento por separação de helicidade para estas contribuições tornaria o cálculo longo de mais para esta dissertação. Então para estas seções de choque partônicas apresentamos somente os processo análogos utilizados e os diagramas de Feynmann que contribuem.

Começamos pelo processo $q\bar{q} \rightarrow g\bar{g}$, já que este pode ser estendido, através da simetria de cruzamento de canais, para todos outros processos. O análogo a ser estudado para $q\bar{q} \rightarrow g\bar{g}$ é a seção de choque do aniquilamento $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ da QED

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}}{t} + \frac{t}{u} \right]. \quad (4.16)$$

Para realizarmos a transformação, do análogo, para QCD devemos levar em conta a contribuição de três diagramas de Feynman, que aparecem na figura 4.19.


 Figura 4.3: Diagramas de Feynman para um espalhamento $q\bar{q} \rightarrow gg$.

A contribuição de cada diagrama deve ser somado sob os estados de polarização transversos do glúon. O que, como mencionado anteriormente, é um processo complicado e portanto mencionamos somente o fator de cor para o quadrado de qualquer um dos diagramas do processo é o quadrado de

$$(t^a)_{ij}(t^b)_{jk}, \quad (4.17)$$

que deve ser somado sobre as cores do glúon a,b e tirado a média sobre as cores de q e \bar{q} , i,k. O fator de cor fica então:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \text{tr} [t^a t^b t^b t^a] = \frac{1}{9} \cdot 3(C_2(r))^2 = \frac{16}{27}. \quad (4.18)$$

Com isto temos todas as ferramentas necessárias para obtermos a seguinte seção de choque partônica

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow gg) = \frac{32\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} \right] - \frac{8\pi\alpha_s^2}{3\hat{s}^2} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}. \quad (4.19)$$

Como fizemos anteriormente, podemos obter o resto das seções de choque partônicas quark-glúon pela propriedade de cruzamento. Para obtermos a reação inversa $gg \rightarrow q\bar{q}$ teremos o mesmo comportamento de (4.19), tirando a média sobre as cores dos glúons, ao invés das cores dos quarks, dando uma fator $(3/8)^2$. A seção de choque para o processo $gg \rightarrow q\bar{q}$ é portanto

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \rightarrow q\bar{q}) = \frac{\pi\alpha_s^2}{6\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} \right] - \frac{3\pi\alpha_s^2}{8\hat{s}^2} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}. \quad (4.20)$$

Para a última seção de choque, cruzamos os canais s e t e multiplicar pelo fator, $(3/8)$, já que agora a média é sobre a cor de somente um glúon, resultando em

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gq \rightarrow gq) = -\frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{s}} \right] + \frac{\pi\alpha_s^2}{\hat{s}^2} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}. \quad (4.21)$$

Para seção de choque que mais contribui para seção de choque total de minijatos, $gg \rightarrow gg$, este processo não apresenta um análogo da QED em que possamos nos apoiar para obtermos sua seção de choque, e novamente o processo é longo demais para esta dissertação. Na Figura 4.4 apresentamos os diagramas de Feynman que contribuem para seção de choque em ordem dominante. O resultado final, após tirada média sobre spin e cor, é

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \rightarrow gg) = \frac{9\pi\alpha_s^2}{2\hat{s}^2} \left[3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2} \right]. \quad (4.22)$$

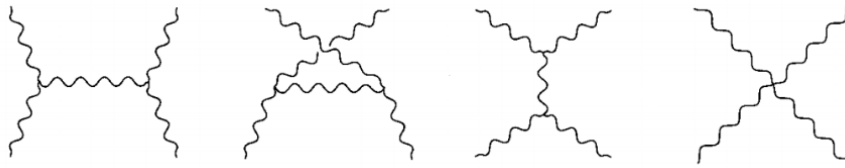


Figura 4.4: Diagramas de Feynman para um espalhamento $gg \rightarrow gg$.

Um tratamento completo da obtenção da seção de choque partônica $gg \rightarrow gg$ pode ser revisado em [11]. Ao final da seção, apresentamos um compilado das seções de choque partônicas calculadas para cada um dos subprocessos possíveis na colisão hadrônica, tabela 4.1

Tabela 4.1: Expressões para as seções de choque diferenciais para os subprocessos de espalhamentos duros entre pártons, de dois corpos. Foi retirado das expressões um fator comum $\pi\alpha_s^2/\hat{s}^2$. Novamente, as variáveis de Mandelstam estão no referencial de c.m. párton-pártion, identificadas pelo símbolo " \wedge ".

Subprocesso	Seção de choque partônicas
$qq' \rightarrow qq'$	$\frac{4}{9} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}$
$qq \rightarrow qq$	$\frac{4}{9} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{s}^2 + \hat{t}^2}{\hat{u}^2} \right] - \frac{8}{27} \frac{\hat{s}^2}{\hat{t}\hat{u}}$
$q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$	$\frac{4}{9} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
$q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$	$\frac{4}{9} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{u}^2 + \hat{t}^2}{\hat{s}^2} \right] - \frac{8}{27} \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}}$
$gq \rightarrow gq$	$-\frac{4}{9} \left[\frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{s}} \right] + \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}$
$q\bar{q} \rightarrow gg$	$\frac{32}{27} \left[\frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right] - \frac{8}{3} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
$gg \rightarrow q\bar{q}$	$\frac{1}{6} \left[\frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right] - \frac{3}{8} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
$gg \rightarrow gg$	$\frac{9}{2} \left[3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2} \right]$

4.2 Funções de Distribuição Partônicas(PDFs)

As funções de distribuição partônicas (*Parton Distribution Function*, PDF's) são definidas, em um formalismo de fatorização colinear, como a densidade de probabilidade de encontrarmos determinado pártion com certa fração de momentum total do hádron, x , e em determinada escala de resolução, ou escala de fatorização, Q^2 . Devido ao fenômeno de confinamento não podemos calcular

as PDF's através da QCD perturbativa. Porém, podemos estudar com QCD perturbativa as variações destas PDF's com a escala Q^2 através de uma sonda externa, como um jato ou fóton.

A dependência das funções de distribuição partônicas com uma escala de fatorização é a propriedade que separa o tratamento antigo do modelo à pártons de Feynman, em que a escala de Bjorken definia uma dependência única das PDF's para com as frações de momentum carregadas [4], do modelo melhorado da QCD. Esta dependência na QCD surge devido as interações entre quarks e glúons através de processos elementares como emissão de um glúon pelos quarks, $q \rightarrow qg$, emissão de um glúon por outros glúons, $g \rightarrow gg$, e a criação de par quark-antiquark, definidos como quarks de mar, por glúon, $g \rightarrow q\bar{q}$. Em um processo de espalhamento, os pártons envolvidos podem haver irradiado glúons antes ou depois da colisão, nossa ignorância sobre estes pártons não observados deve ser integrada sob todo espaço remanescente de fase, para determinada escala Q^2 . São estas correções de radiação que são a fonte física da dependência logarítmica com a escala de fatorização.

Estas relações explicitas das PDF's para com a escala de fatorização são governadas por um conjunto de equações integro-diferenciais, conhecidas como as equações de evolução partônicas, que comentamos brevemente no Capítulo 3. Deixamos a discussão sobre o formato e origem destas equações para o leitor referenciadas em [4][11][19]. Devemos, porém, comentar sobre alguns aspectos importantes que tangem a motivação das escolhas de conjuntos de PDF's para este trabalho.

Sobre a utilização da equações de evolução é necessário primeiro definir um formato inicial em uma escala Q_0^2 e determinada fração de momentum x para cada PDF de um conjunto, ou seja, precisamos inferir sobre comportamento das PDF's em determinado regime. Já comentamos sobre o fato da impossibilidade de determinação do formato das PDF's através da QCD perturbativa. Podemos inferir, porém, sobre o comportamento em certos limites de x , $x = 0$ e $x = 1$, através da teoria de Regge e análises específicas dos dados experimentais de colisores. Isto significa que existe certa liberdade na definição das PDF's em uma escala Q_0^2 , que pode ser sustentada através de experimentos em colisores. Esta liberdade na escolha inicial, $f(x, Q_0^2)$, para o conjunto de PDF's e a quantidade e tipo de dados experimentais levados em conta em sua construção são os principais diferenciais entre conjuntos de PDF's de diferentes grupos de pesquisadores.

Diferentemente das outras escolhas de parâmetros como Q^2 e p_T^{min} , que comentamos em maior detalhe na análise de resultados no Capítulo 5, a escolha de conjunto de PDF's utilizadas será discutida neste capítulo, devido certas particularidades inerentes de cada conjunto, em relação aos dados levados em conta em suas construções e parametrizações iniciais das funções de distribuição.

4.2.1 Escolhas de conjunto de PDF's

Neste trabalho fizemos uso de dois conjuntos de PDF's diferentes, um conjunto pós-LHC e um pré-LHC para comparação. Quando realizamos esta separação entre pré e pós LHC, nos referimos exatamente aos dados experimentais levados em conta na construção do conjunto de PDF's. O conjunto pré-LHC que utilizamos, para comparação com conjuntos mais modernos, foi o do grupo CTEQ6L [2], em específico o conjunto CTEQ6L1, publicado em 2008. Enquanto para o conjunto pós-LHC, utilizamos as PDF's do grupo MMHT [1], 2014.

As principais diferenças entre os conjuntos de PDF's de cada grupo surgem principalmente, como comentamos anteriormente, da parametrização inicial do comportamento das PDF's em determinada escala de fatorização Q_0^2 e os dados experimentais levados em conta para uma melhor resolução do comportamento das PDF's, principalmente no limite de pequeno- x . O comportamento em pequeno- x das PDF's dos quarks e glúons foi um grande problema a ser resolvido nas décadas de 80 e 90, onde o comportamento neste limite para o glúon, por exemplo, era tomado ingenuamente como $g(x, Q^2) \approx x^{-J}$, onde $1 < J < 1.5$ [16]. Este comportamento "ingrime" da PDF do glúon e a pequena quantidade de dados para suportarem este tipo de escolha levava a previsões teóricas da seção de choque de jatos, que necessitavam destas PDF's, a carregar uma incerteza inerente deste tipo de escolha. O comportamento assintótico das PDF's em pequeno- x , limite em que estamos trabalhando, foi resolvido, em grande parte, por Lipatov[20]. Este comportamento surge, perincipalmente, devido ao aumento rápido da densidade de pártons conforme $x \rightarrow 0$, onde para certo valor de x ocorrerá uma saturação onde a densidade aumenta tanto que os pártons começam a interagir fortemente, apesar de neste limite o acoplamento efetivo ser fraco. Então, devido a estes fatores, iremos comparar principalmente o comportamento da PDF do glúon de cada conjunto de PDF's, já que como iremos observar o comportamento dos quarks de valência, *up* e *down* no caso do próton, será praticamente o mesmo para cada conjunto de PDF's. Enfatizamos novamente que a escala de fatorização deve ser a mesma que a de renormalização, para que os cancelamentos que permitem o tratamento perturbativo ocorram. Todos os conjuntos de PDF's escolhidos estão no esquema \overline{MS} .

PDF's da CTEQ6L:

As PDF's para os quarks *up* e *down*, assim como dos glúons, são apresentadas na Figura 4.5.

O conjunto de PDF's do grupo CTEQ6L tem como parametrização inicial:

$$xf(x, Q_0) = A_0 x^{A_1} (1-x)^{A_2} e^{A_3 x} (1 + e^{A_4 x})^{A_5}, \quad (4.23)$$

onde, na análise do grupo, o limite inferior para escala é $Q_0 = 1.3 \text{ GeV}$. Nesta parametrização existem polos em $x = 0$ e $x = 1$ para representar o comportamento de Regge em pequeno- x e regras de contagem de quarks em grande- x , juntamente com uma razão de polinômios para descrição do comportamento intermediário das PDF's. As variáveis (A_0, A_1, \dots) são parâmetros livres a

4.2 Funções de Distribuição Partônicas(PDFs)

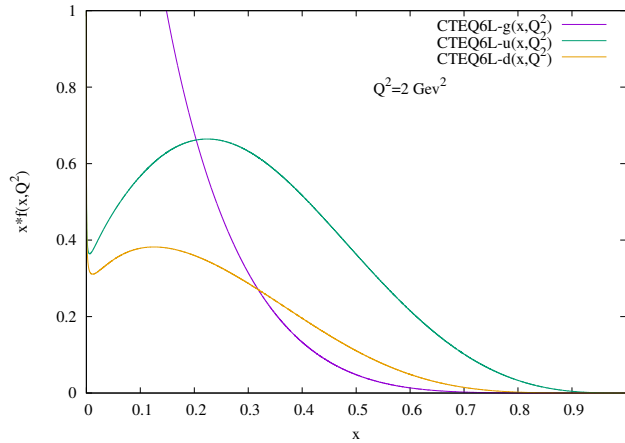


Figura 4.5: PDF's de quark up , quark $down$ e glúon para um determinado valor de escala de fatorização $Q^2 = 2 \text{ GeV}^2$ do grupo CTEQ6L[2].

serem ajustados de acordo com comparações com dados experimentais.

PDF's da MMHT:

As PDF's para os quarks up e $down$, assim como dos glúons, aparecem na figura 4.6.

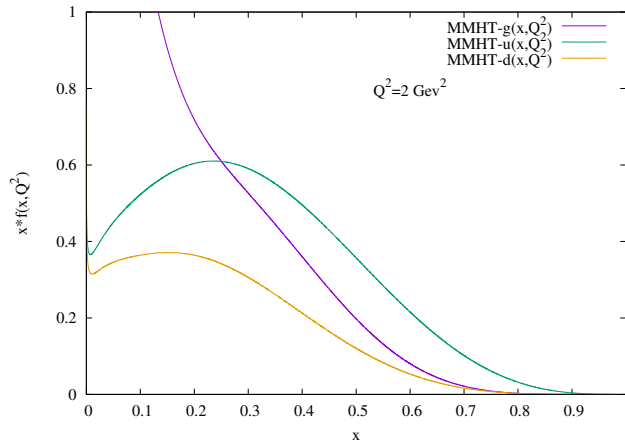


Figura 4.6: PDF's de quark up , quark $down$ e glúon para um determinado valor de escala de fatorização $Q^2 = 2 \text{ GeV}^2$ do grupo MMHT[1].

O conjunto de PDF's do grupo MMHT tem como parametrização inicial:

$$xf(x, Q_0^2) = A(1-x)^{\eta} x^{\delta} \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i T_i^{ch}(y(x)) \right), \quad (4.24)$$

onde o comportamento intermediário é comandado por polinômios de Chebyshev em y , com $y = 1 - x^k$, $k = 0.5$ e $n = 4$, com uma escala mínima $Q_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$. As constantes não especificadas são parâmetros livres, assim como n desta vez. O comportamento do glúon é dado por:

$$xg(x, Q_0^2) = A_g(1-x)^{\eta_g} x^{\delta_g} \left(1 + \sum_{i=1}^2 a_{i,g} T_i^{ch}(y(x)) \right) + A_{g'}(1-x)^{\eta_{g'}} x^{\delta_{g'}}. \quad (4.25)$$

Novamente, maiores detalhes podem ser obtidos no artigo de publicação do conjunto de PDF's[1].

Comparação entre PDF's:

Uma comparação entre o comportamento da PDF do glúon para os diferentes conjuntos de PDF's aparecem nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9. As comparações foram realizadas entre três escolhas de Q^2 , onde podemos observar que o comportamento da PDF do glúon para os dois conjuntos escolhidos difere cada vez menos com aumento da escala. A diferença em pequeno- x vem tanto da escolha de parametrização inicial quanto dos dados analisados em sua construção. O conjunto MMHT é mais moderno que CTEQ6L, este leva em conta dados novos da run-1 do LHC e possuem uma melhor resolução do comportamento em pequeno- x em relação à CTEQ6L.

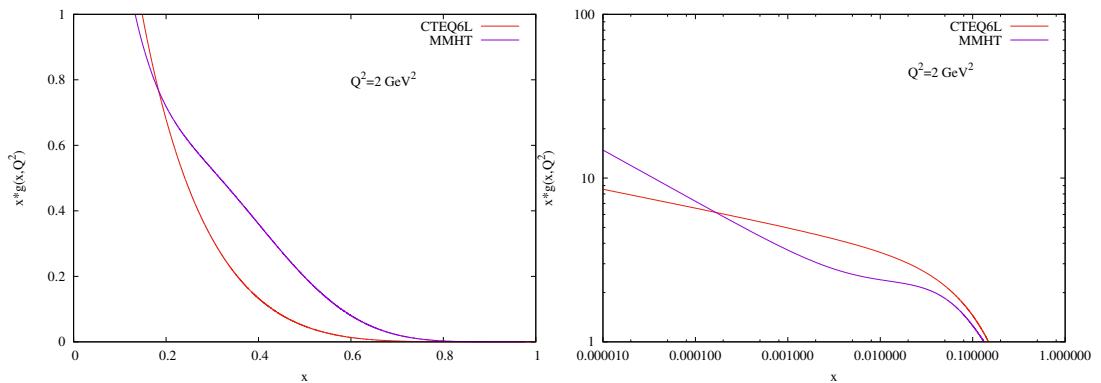


Figura 4.7: Comparação entre os dois conjuntos de PDF's para PDF do glúon em $Q^2 = 2 \text{ GeV}^2$

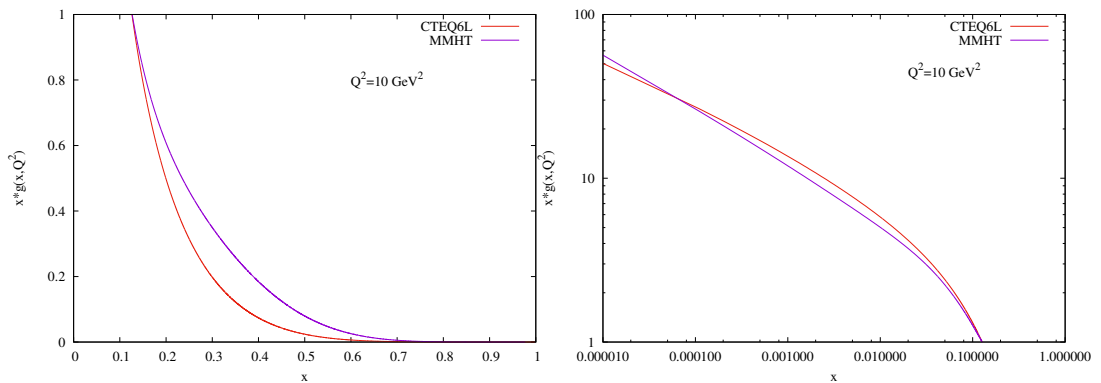


Figura 4.8: Comparação entre os dois conjuntos de PDF's para PDF do glúon em $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$

4.2 Funções de Distribuição Partônicas(PDFs)

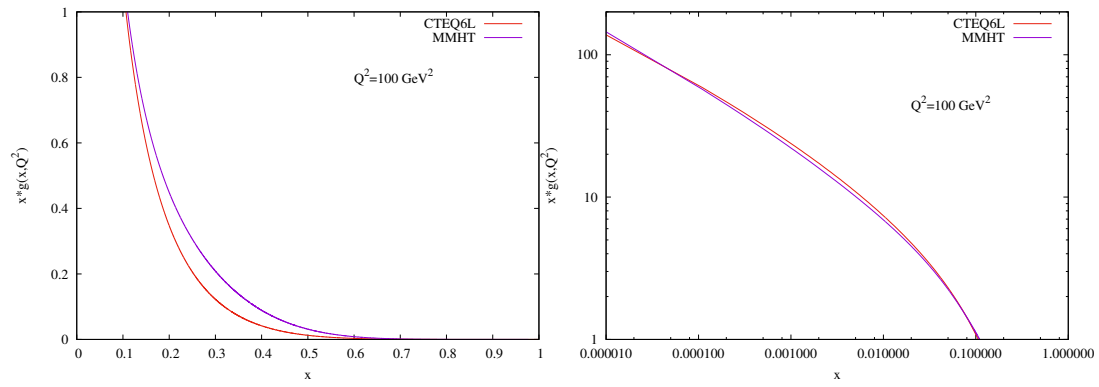


Figura 4.9: Comparação entre os dois conjuntos de PDF's para PDF do glúon em $Q^2 = 100\text{GeV}^2$

Capítulo 5

Estudo das possíveis escolhas de escala, cortes de momentum transversal e PDF

Neste capítulo apresentamos as técnicas utilizadas para obtenção das curvas de seção de choque de minijatos pela energia de centro massa do sistema em ordem dominante. Discutimos um novo método de obtenção da escolha ideal de p_T^{min} para cada um dos conjuntos de PDF's escolhidos. Neste trabalho realizamos as seguintes escolhas de escala $Q^2 = p_T^2$, $Q^2 = p_T^2/4$ e $Q^2 = \hat{s}$ para cada um dos conjuntos de PDF's. Para cada escolha de escala e conjunto de PDF's realizamos uma comparação direta com os dados de seção de choque de minijatos da colaboração UA1[3], já que estes são para um regime de energia de centro de massa onde podemos esperar que o nosso modelo apresente uma boa descrição do comportamento da seção de choque total inclusiva de minijatos. Comparamos as curvas obtidas em relação à sua escolha de escala, Q^2 e o conjunto de PDF's utilizado. Ao final do capítulo apresentamos as seções de choque totais inclusivas de minijatos para as melhores escolhas de Q^2 , p_T^{min} e conjunto de PDF's, assim como previsões dos valores de seção de choque total inclusiva de minijatos para as energias de centro de massa $\sqrt{s} = 7, 8$ e 13 TeV, energias típicas do LHC.

5.1 Análise dos Dados e Parametrização

Para obtenção dos resultados de seção de choque de minijatos por energia de centro de massa fizemos uso da equação apresentada no Capítulo 3:

$$\begin{aligned} \sigma_{QCD}^{AB}(s) &= \sum_{i,j,k,l} \int_{p_T^{min}}^{s/4} dp_T^2 \int_{4p_T^2/s}^1 dx_1 \int_{4p_T^2/x_1 s}^1 dx_2 \\ &\times [f_{i/A}(x_1, Q^2) f_{j/B}(x_2, Q^2) + f_{j/A}(x_1, Q^2) f_{i/B}(x_2, Q^2)] \\ &\times \left[\frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}}{dp_T^2}(\hat{t}, \hat{u}) + \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}}{dp_T^2}(\hat{u}, \hat{t}) \right] (1 - \delta_{ij}/2) (1 - \delta_{kl}/2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Para o cálculo das integrais utilizamos um programa de integração multidimensional chamado VEGAS, método de integração baseado em Monte Carlo. Calculamos uma quantidade razoável de pontos em um grande intervalo de energia, \sqrt{s} , através de (5.1) para diversas escolhas de p_T^{min} para cada escolha de Q^2 e conjunto de PDF's. O tempo computacional necessário para uma análise completa, formação de uma curva da seção de choque total inclusiva de minijatos, para cada escolha de p_T^{min} , Q^2 e conjunto de PDF's seria enorme. Para obtenção, portanto, de uma curva completa para seção de choque de minijatos realizamos uma parametrização dos pontos calculados através da seguinte função monotônica[21]:

$$\begin{aligned}
 F(s) = & b_1 + b_2 e^{b_3 [X(s)]^{1.01 b_4}} + \\
 & b_5 e^{b_6 [X(s)]^{1.05 b_7}} + \\
 & b_8 e^{b_9 [X(s)]^{1.09 b_{10}}} + \\
 & b_{11} e^{b_{12} [X(s)]^{1.13 b_{13}}}, \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

onde (b_1, b_2, \dots) são parâmetros livres da função $F(s)$ e $X(s) = \ln \ln(s)$. A função $F(s)$ na equação acima é exatamente a seção de choque de minijatos.

Após o cálculo da seção de choque total inclusiva de minijatos fazemos uso de um novo método de extração do melhor corte de momentum transversal, \bar{p}_T^{min} para cada escolha de Q^2 e conjunto de PDF's. Este novo método, apesar de simples, não parece ter sido utilizado até então na literatura, em que geralmente a escolha de p_T^{min} é completamente arbitrária, geralmente define-se somente um limite inferior como em [18] onde $p_T^{min} > 2 \text{ GeV}$.

Este novo método se baseia em uma comparação direta entre as curvas de seção de choque total inclusiva de minijatos por energia de centro de massa com os dados experimentais da colaboração UA1. Para isto fazemos uso de um teste de χ^2 para obtermos qual curva parametrizada faz o melhor ajuste dos dados experimentais. Com uma quantidade de dados grande o suficiente é possível obter, com alta precisão, qual o corte de momentum transversal que minimiza a distribuição de χ^2/DOF , onde DOF significa (*Degrees of freedom*, DOF), graus de liberdade.

A variável χ^2 é definida como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[y_i - f(x_i)]^2}{\sigma_i^2}, \tag{5.3}$$

onde n é a quantidade de dados experimentais que utilizamos com posição e desvio padrão (x_i, y_i, σ_i) . Enquanto $f(x_i)$ é o valor da nossa curva de seção de choque total inclusiva de minijatos, calculada com (5.1), na mesma posição x_i do ponto experimental. Podemos identificar o lado direito da equação como:

$$D_i^2 = \frac{[y_i - f(x_i)]^2}{\sigma_i^2}, \tag{5.4}$$

sendo a distância ao quadrado de um ponto experimental à curva ajustada. A quantidade χ^2 é portanto um medidor da qualidade do ajuste da curva de seção

de choque total inclusiva de minijatos em relação aos dados experimentais da colaboração UA1. Podemos obter a versão reduzida de χ^2 , versão esta independente da quantidade de graus de liberdade do ajuste:

$$\frac{\chi^2}{DOF} = \frac{\chi^2}{(m - p)}, \quad (5.5)$$

sendo m o número de pontos ajustados e p a quantidade de parâmetros livres. Realizamos, portanto, o teste de χ^2 para curvas de seção de choque total inclusiva de minijatos com diferentes escolhas, p_T^{min} , Q^2 e conjunto de PDF's, com intuito de observar quais escolhas minimizam o valor de χ^2/DOF e assim representam um melhor ajuste dos dados experimentais em relação às outras.

Podemos obter uma melhor visualização deste mínimo ao realizarmos outra parametrização do tipo:

$$F(p_T^{min}; a_1, a_2, a_2) = a_1 (p_T^{min} - a_2)^2 + a_3. \quad (5.6)$$

Esta nova parametrização com formato de parábola é uma aproximação do comportamento da distribuição- χ^2 por p_T^{min} perto de seu mínimo. Esta parametrização é válida somente para pontos próximos do mínimo como iremos observar na próxima seção. Esta parametrização é ótima para obtenção de \bar{p}_T^{min} , que em (5.6) é exatamente o parâmetro a_2 .

5.2 Estudo de χ^2

Apresentamos nesta seção os resultados da análise da distribuição- χ^2 por p_T^{min} para as três diferentes escolhas de escala e duas escolhas de conjunto de PDF's.

MMHT:

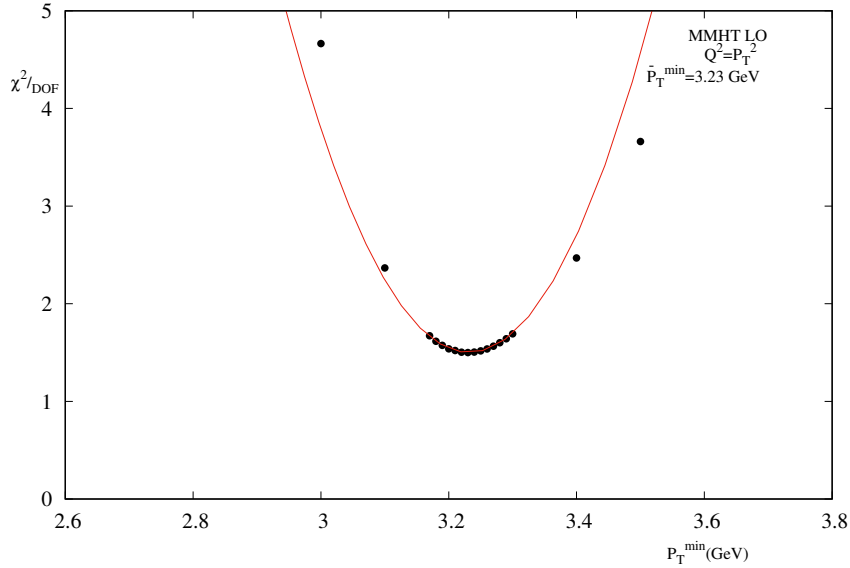


Figura 5.1: Curva de $\chi^2 \times p_T^{min}$ para $Q^2 = P_T^2$ e conjunto MMHT, que apresenta um $\bar{p}_T^{min} = 3.23 \text{ GeV}$. Curva vermelha é parametrização e os pontos são os dados obtidos do modelo.

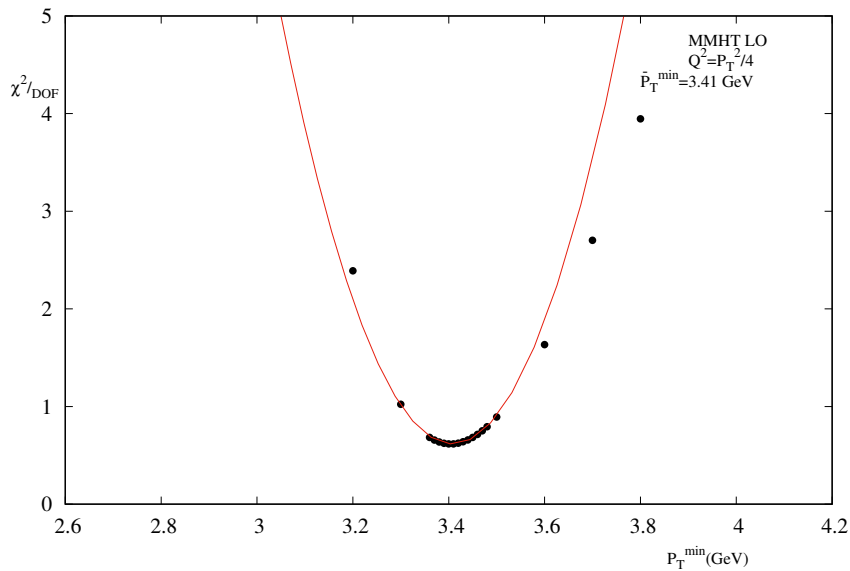


Figura 5.2: Curva de $\chi^2 \times p_T^{min}$ para $Q^2 = P_T^2/4$ e conjunto MMHT, que apresenta um $\bar{p}_T^{min} = 3.41 \text{ GeV}$. Curva vermelha é parametrização e os pontos são os dados obtidos do modelo.

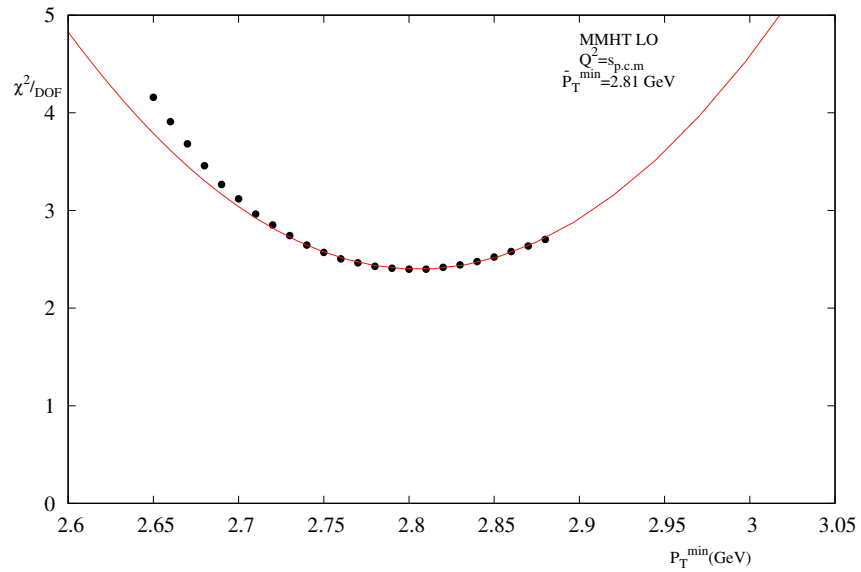


Figura 5.3: Curva de $\chi^2 \times p_T^{\text{min}}$ para $Q^2 = \hat{s}$, quadrado da energia de centro de massa dos pártons ($s_{p.c.m}$) e conjunto MMHT, que apresenta um $\hat{p}_T^{\text{min}} = 2.81$ GeV. Curva vermelha é parametrização e os pontos são os dados obtidos do modelo.

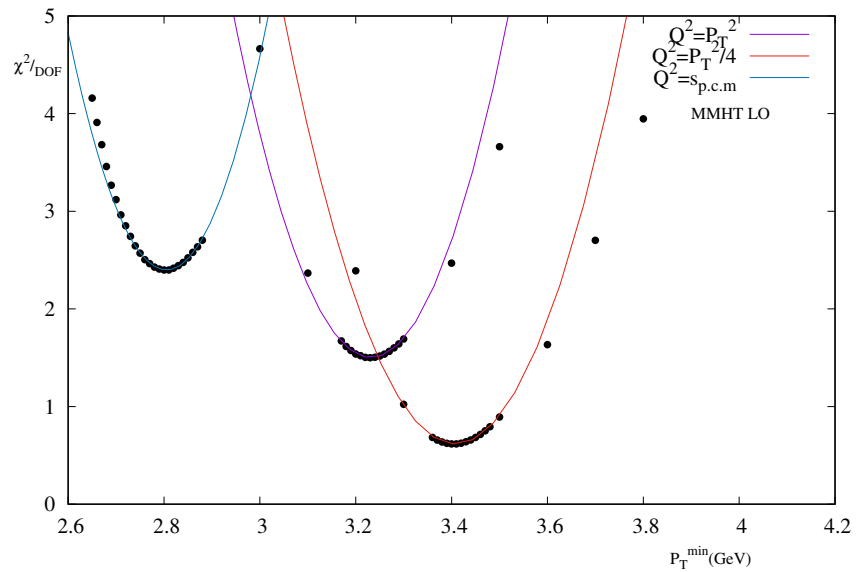


Figura 5.4: Curva de $\chi^2 \times p_T^{\text{min}}$ para as três escolhas de escala e conjunto MMHT.

Podemos observar diretamente da Figura 5.4 que a escolha de escala, para o conjunto MMHT, que melhor se adequa aos dados da colaboração UA1 é $Q^2 = p_T^2/4$ para o modelo seguido neste trabalho.

CTEQ6L:

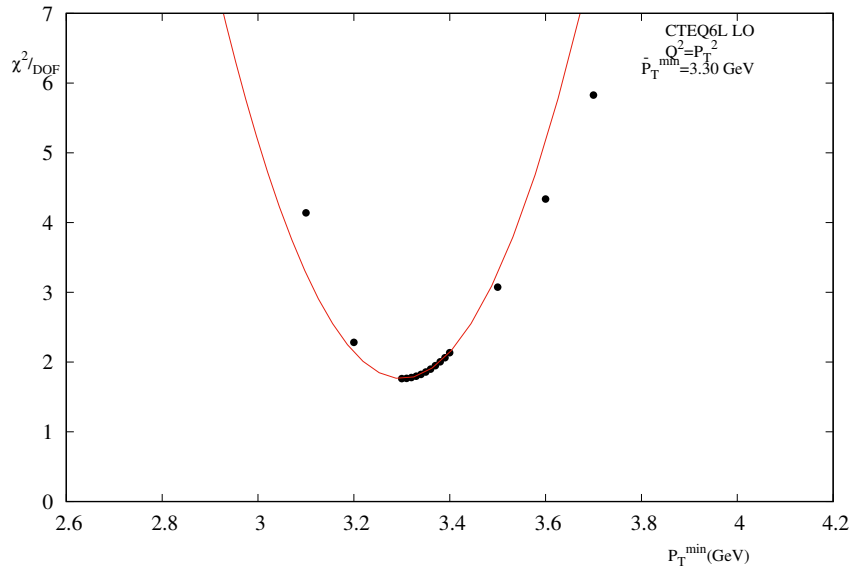


Figura 5.5: Curva de $\chi^2 \times p_T^{min}$ para $Q^2 = p_T^2$ e conjunto CTEQ6L, que apresenta um $\tilde{p}_T^{min} = 3.30 \text{ GeV}$. Curva vermelha é parametrização e os pontos são os dados obtidos do modelo.

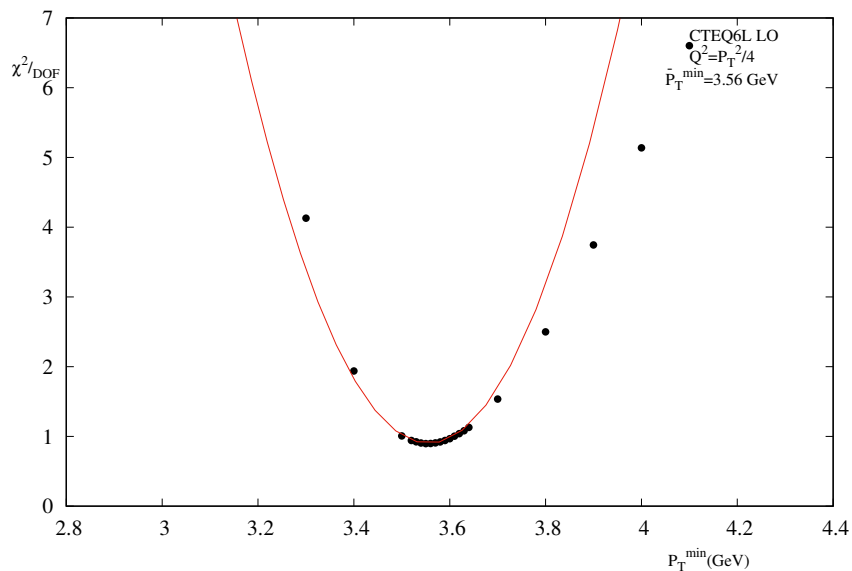


Figura 5.6: Curva de $\chi^2 \times p_T^{min}$ para $Q^2 = P_T^2/4$ e conjunto CTEQ6L, que apresenta um $\tilde{p}_T^{min} = 3.56 \text{ GeV}$. Curva vermelha é parametrização e os pontos são os dados obtidos do modelo.

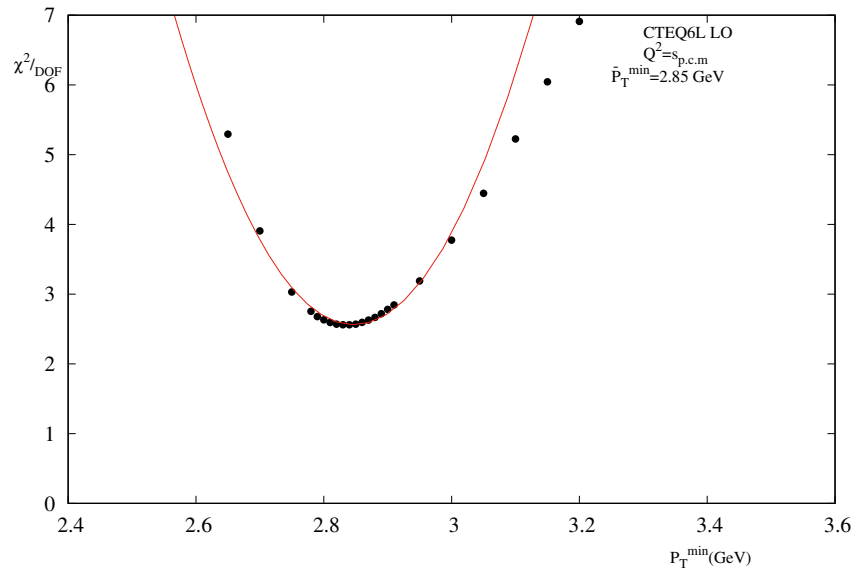


Figura 5.7: Curva de $\chi^2 \times p_T^{min}$ para $Q^2 = \hat{s}$, energia de centro de massa dos pártons ($s_{p.c.m}$) e conjunto CTEQ6L, que apresenta um $\bar{p}_T^{min} = 2.85$ GeV. Curva vermelha é parametrização e os pontos são os dados obtidos do modelo.

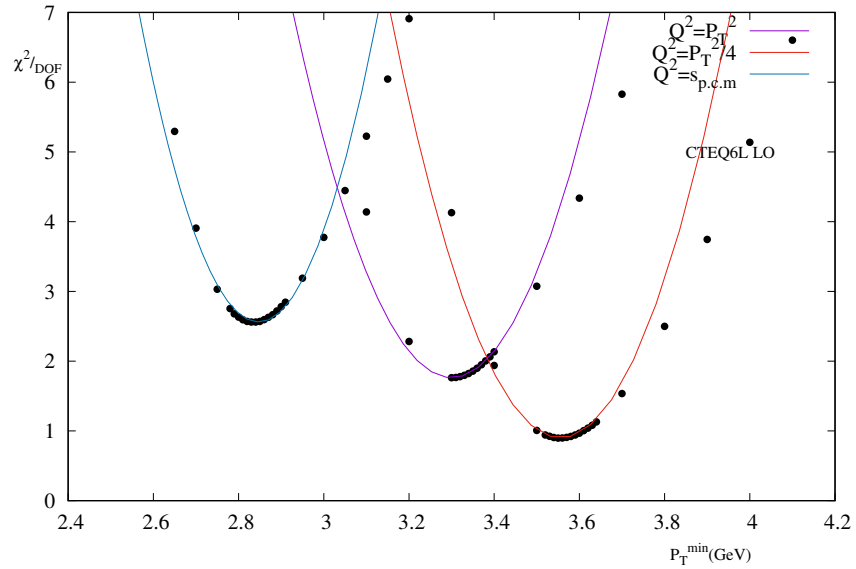


Figura 5.8: Curva de $\chi^2 \times p_T^{min}$ para as três escolhas de escala e conjunto CTEQ6L.

Novamente, podemos observar diretamente da Figura 5.8 que a escolha de escala, para o conjunto CTEQ6L, que melhor se adequa aos dados da colaboração UA1 é $Q^2 = p_T^2/4$, para o nosso modelo, assim como para o conjunto MMHT. Podemos observar comparando as Figuras 5.4 e 5.8 que o conjunto de PDF's que apresenta o melhor ajuste dos dados experimentais foi da MMHT.

5.3 Curvas de seção de choque total inclusiva de minijatos

Nesta seção apresentamos as curvas calculadas com (5.1) e depois parametrizadas com (5.2) para as melhores escolhas de p_T^{min} .

MMHT:

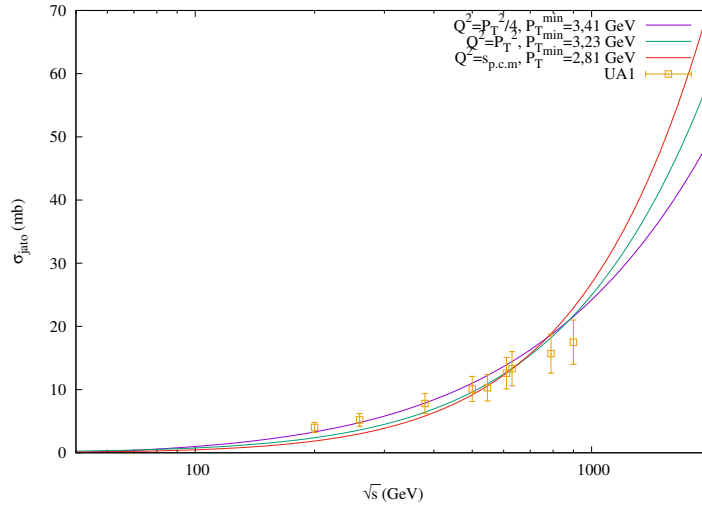


Figura 5.9: Curvas de seção de choque total inclusiva de minijatos por energia de centro de massa para as três escolhas de escala Q^2 do conjunto de PDF's MMHT. A escala de energia tomada é da ordem dos dados experimentais da colaboração UA1 para comparação.

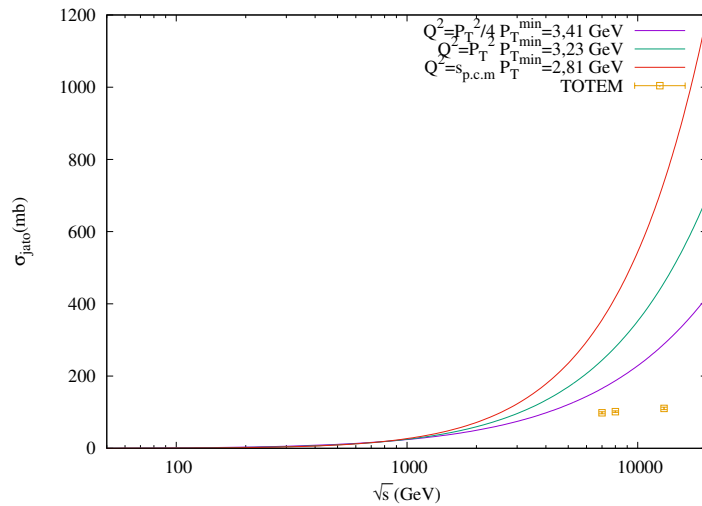


Figura 5.10: Curvas de seção de choque total inclusiva de minijatos para as três escolhas de escala Q^2 do conjunto de PDF's MMHT. A escala de energia tomada é da ordem de grandeza dos experimentos atuais no LHC, como os da colaboração TOTEM de seção de choque total de uma colisão próton-próton.

CTEQ6L:

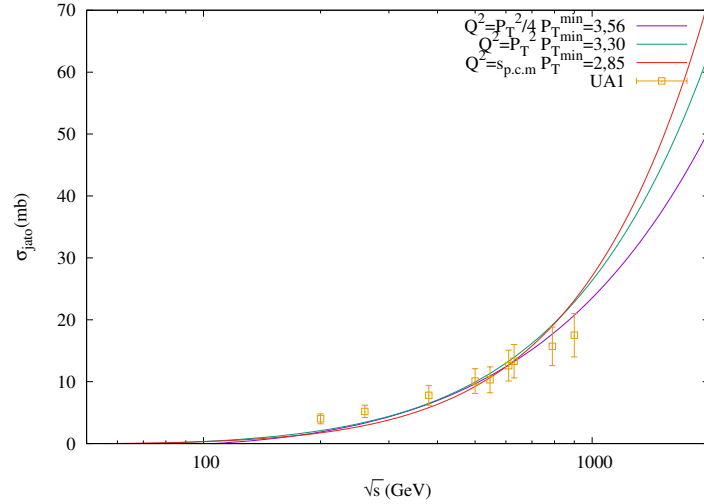


Figura 5.11: Curvas de seção de choque total inclusiva de minijatos por energia de centro de massa para as três escolhas de escala Q^2 do conjunto de PDF's CTEQ6L. A escala de energia tomada é da ordem dos dados experimentais da colaboração UA1 para comparação.

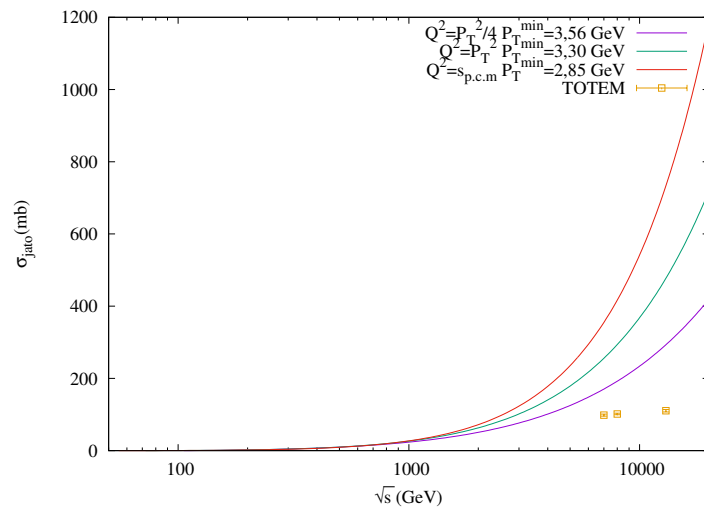


Figura 5.12: Curvas de seção de choque total inclusiva de minijatos para as três escolhas de escala Q^2 do conjunto de PDF's CTEQ6L. A escala de energia tomada é da ordem de grandeza dos experimentos atuais no LHC, como os da colaboração TOTEM de seção de choque total de uma colisão próton-próton.

5.4 Previsões do Modelo

Podemos obter predições teóricas para seção de choque total inclusiva de minijatos através de uma extrapolação do modelo para energias de centro de massa sendo utilizadas atualmente no LHC e outros grandes colisores.

MMHT:

Tabela 5.1: Previsões teóricas para seção de choque total inclusiva de minijatos para energias de centro de massa típicas do LHC para o conjunto de PDF's MMHT, para as três escolhas de escala com seus respectivos melhores cortes de momentum transverso.

		MMHT			
$Q^2 = p_T^2$		$Q^2 = p_T^2/4$		$Q^2 = \hat{s}$	
\sqrt{s} (TeV)	σ (mb)	\sqrt{s} (TeV)	σ (mb)	\sqrt{s} (TeV)	σ (mb)
7	242.34	7	161.84	7	353.72
8	278.40	8	182.87	8	415.21
13	455.51	13	282.59	13	734.49

CTEQ6L:

Tabela 5.2: Previsões teóricas para seção de choque total inclusiva de minijatos para energias de centro de massa típicas do LHC para o conjunto de PDF's MMHT, para as três escolhas de escala com seus respectivos melhores cortes de momentum transverso.

		CTEQ6L			
$Q^2 = p_T^2$		$Q^2 = p_T^2/4$		$Q^2 = \hat{s}$	
\sqrt{s} (TeV)	σ (mb)	\sqrt{s} (TeV)	σ (mb)	\sqrt{s} (TeV)	σ (mb)
7	256.32	7	174.53	7	355.52
8	294.02	8	196.52	8	416.88
13	476.81	13	298.53	13	732.21

Já podemos observar que o modelo faz predições de seções de choque total inclusiva de minijatos muito maiores do que as seções de choque total para colisões pp no LHC para as mesmas energias \sqrt{s} , como podemos observar na tabela 5.3 que apresenta os dados da colaboração TOTEM[22][23][24] .

Tabela 5.3: Dados experimentais obtidos pela colaboração TOTEM para seção de choque total de uma colisão próton-próton.

TOTEM	
$\sqrt{s}(\text{TeV})$	$\sigma_T^{pp}(mb)$
7	98.3 ± 2.8
8	101.5 ± 2.1
13	110.6 ± 3.4

Isto vem do fato de que o modelo tomado é aditivo nas seções de choque e como comentamos anteriormente, modelos aditivos não respeitam a unitariedade do sistema devido ao comportamento da PDF dos gluóns para pequeno- x e grande energia de centro de massa. Este fato gera uma necessidade de aplicarmos a este nosso modelo métodos de controle que mantenham a unitariedade do sistema, como por exemplo métodos de Eikonalização.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho estudamos a aplicação de QCD perturbativa para o cálculo da seção de choque total inclusiva de minijatos, em ordem dominante, para diferentes escolhas de parâmetros. Discorremos sobre a importância de trabalhos sobre o comportamento de colisões hadrônicas no regime de energia de pequeno- p_T , o regime de minijatos, que domina o crescimento da seção de choque total com a energia de centro de massa \sqrt{s} do sistema para estas colisões. Comentamos sobre as dificuldades de aplicação da QCD perturbativa em certos limites de energia, devido sua constante de acoplamento divergir para certos limites de energia, e como este fato gera a necessidade de escolhermos um parâmetro de escala Q^2 que nos certifique da aplicabilidade da teoria. Utilizamos a equação (5.1) [16], um modelo aditivo nas seções de choque, para o cálculo da seção de choque total inclusiva de minijatos de uma colisão $pp \rightarrow 2 jets$, que depende das funções de distribuições partônicas de cada parton possivelmente participante da colisão e a escolha de um corte de momentum transversal, p_T^{min} que nos dê um limite inferior para aplicabilidade da QCD perturbativa. Escolhemos para este trabalho as seguintes escolhas de parâmetros: para escala $Q^2 = p_T^2, p_T^2/4$ e \hat{s} e para os conjuntos de PDF's MMHT, pós-LHC, e CTEQ6L, pré-LHC. Desenvolvemos um novo método, pouco ou nunca utilizado na literatura, de obtenção do corte de momentum transversal ideal para cada escolha de escala e conjunto de PDF's, ou seja, um método de obtenção das escolhas de parâmetros Q^2, p_T^{min} e conjunto de PDF's que melhor se adequa aos dados experimentais, no caso deste trabalho, os dados da colaboração UA1[3]. Ele se baseia na minimização da distribuição- χ^2 para as diferentes curvas parametrizadas da nossa equação para seção de choque total inclusiva de minijatos. Obtivemos que para o modelo seguido neste trabalho as melhores escolhas de parâmetros foram $Q^2 = p_T^2/4, \bar{p}_T^{min} = 3.41 \text{ GeV}$ e o conjunto de PDF's MMHT. Observamos que as diferentes escolhas de parâmetros alteravam tanto a magnitude quanto o formato das curvas de seção de choque de minijatos e que a escolha $Q^2 = p_T^2$ foi a que mais segurou o crescimento da seção de choque. Fazemos uma predição da seção de choque total inclusiva de minijatos para energias típicas do LHC, como por exemplo para os parâmetros comentados anteriormente temos para $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ um seção de choque $\sigma_{minijato} = 282.59 \text{ mb}$. A predição nos dá um valor muito grande

em relação aos obtidos para seção de choque total de uma colisão pp no LHC para estas energias, este erro surge diretamente do fato de que utilizamos um modelo aditivo nas seções de choque partônicas para o cálculo da seção de choque total inclusiva de minijatos, que para estas energias, já sabemos, na literatura, a unitariedade não é respeitada. Como perspectiva de continuação do trabalho, portanto, temos a aplicação de métodos de controle da seção de choque, que respeitem a unitariedade do sistema, mais especificamente, iremos utilizar métodos de Eikonalização, assim como testar uma quantidade maior de conjuntos de PDF's, como por exemplo o conjunto CT14[25], e ordens de grandeza maiores.

Capítulo 7

Apêndice A

7.1 Regras de Feynmann para QCD

Teoria de Calibre não-abeliana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + g A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi \\ & - g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{1}{4} g^2 (f^{eab} A_\mu^a A_\nu^b) (f^{ecd} A^{\mu c} A^{\nu d}) \end{aligned} \quad (7.1)$$

A lagrangiana para uma teoria de calibre não-abeliana depende diretamente das matrizes γ^μ e t^a , sendo t^a a matriz que representa o grupo $SU(3)$. As matrizes γ^μ na representação quirral fica:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

$$\sigma^\mu = (1, \sigma); \quad \bar{\sigma}^\mu = (-1, \sigma) \quad (7.3)$$

sendo σ^μ as famosas matrizes de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Já as matrizes que representam o grupo $SU(3)$ da QCD tem o seguinte formato:

$$\begin{aligned} t^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ t^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ t^7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad t^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Regras de Feynmann:

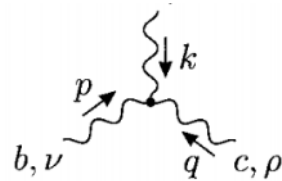
Linhas retas significam férmions e linhas curvas significam glúons.

Vértice Fermiônico:



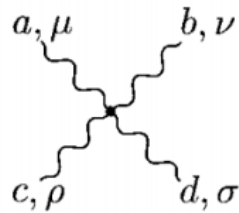
$$\doteq ig\gamma^\mu t^a \quad (7.5)$$

Vértice de 3-bósons:



$$\doteq gf^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu] \quad (7.6)$$

Vértice de 4-bósons:



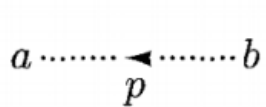
$$\doteq -ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] \quad (7.7)$$

Vértice Fantasma:



$$\doteq -gf^{abc}p^\mu \quad (7.8)$$

Propagador Fantasma:



$$\doteq \frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon} \quad (7.9)$$

Relação entre as variáveis

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c, \quad (7.10)$$

onde f^{abc} são constantes de estrutura totalmente antisimétricas. A definição dos invariantes $C(r)$ e $C_2(r)$ de uma representação r é dada por:

$$\text{tr} [t^a t^b] = C(r) \delta^{ab}, \quad t^a t^a = C_2(r) \cdot 1. \quad (7.11)$$

Algumas relações importantes, que podemos obter definições acima, são:

$$\begin{aligned} t^a t^b t^a &= [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] t^b \\ f^{acd} f^{bcd} &= C_2(G) \delta^{ab} \\ f^{abc} t^b t^c &= \frac{i}{2} C_2(G) t^a \end{aligned} \quad (7.12)$$

Para grupos $SU(N)$ a representação é dada por N , e os invariantes podem ser obtidos por:

$$C(N) = \frac{1}{2}, \quad C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C(G) = C_2(G) = N. \quad (7.13)$$

Outra relação muito importante para obtenção dos fatores de cor é:

$$(t^a)_{ij} (t^b)_{kl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right). \quad (7.14)$$

Capítulo 8

Referências

- [1] Harland-Lang, L.A., Martin, A.D., Motylinski, P. et al. Eur. Phys. J. C (2015) 75: 204.
- [2] J. Pumplin et al., JHEP 07, 012 (2002).
- [3] UAI Collaboration, A. Di Ciaccio, in Proceedings of the XVII Symposium on Multiparticle Dynamics, Seewinkel, Austria, 1986, edited by M. Markytan, W. Majerotto, and J. Mac-Naughton (World Scientific, Singapore, 1986), p. 679; UA1 Collaboration, C. Albajar et al., Nucl. Phys. B309,405 (1988).
- [4] R. K. Ellis, W. J. Stirling, and B. R. Webber, "*QCD and Collider Physics*"(Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [5] R. P. Feynman, Phys. Rev. Lett. 23, 1415 (1969).
- [6] D. Cline, F. Halzen, and J. Luthe, Phys. Rev. Lett. 31, 491 (1973); T. K. Gaisser and F. Halzen, Phys. Rev. Lett. 54, 1754 (1985); T. K. Gaisser and T. Stanev, Phys. Lett. B 219, 375 (1989); A. Capella, J. Tran Thanh Van, and J. Kwiecinski, Phys. Rev. Lett. 58, 2015 (1987); I. Sarcevic, S. D. Ellis, and P. Carruthers, Phys. Rev. D 40, 1446 (1989).
- [7] L. V. Gribov, E. M. Levin, and M. G. Ryskin, Phys. Rep. 100, 1 (1983); E. M. Levin and M. G. Ryskin, Phys. Rep. 189, 267 (1990); M. G. Ryskin, Surveys in High Energy Physics 11, 115 (1997).
- [8] L. Durand and H. Pi, Phys. Rev. Lett. 58, 303 (1987); L. Durand and H. Pi, Phys. Rev. D 38, 78 (1988); L. Durand and H. Pi, Phys. Rev. D 40, 1436 (1989).
- [9] G. Pancheri and Y. N. Srivastava, Phys. Lett. B 182, 199 (1986); A. Corsetti, A. Grau, G. Pancheri, and Y. N. Srivastava, Phys. Lett. B 382, 282 (1996); D. A. Fagundes, A. Grau, G. Pancheri, O Shekhovtsova, and Y. N. Srivastava, Phys.Rev. D 96, 054010 (2017).
- [10] E. G. S. Luna, A. F. Martini, M. J. Menon, A. Mihara, and A. A. Natale, Phys. Rev. D 72, 034019 (2005); E. G. S. Luna, A. A. Natale, Phys. Rev. D 73, 074019 (2006).
- [11] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, "*An Introduction To Quantum Field Theory*", Reading, USA: Addison-Wesley (1995).
- [12] J. M. F. Bassalo, M. S. D. Cattani, "*Teoria de Grupos*", São Paulo -

Editora Livraria da Física, 2008.

- [13] R. Devenish, A. Cooper-Sarkar, "*Deep Inelastic Scattering*" (Oxford University Press, Oxford, 2004).
- [14] Deur, Alexandre et al., Prog.Part.Nucl.Phys. 90 (2016) 1-74.
- [15] V. Barone and E. Predazzi, High-Energy Particle Diffraction, Springer-Verlag, 2002; R.J. Eden, P.V. Landshoff, D.I. Olive, and J.C. Polkinghorne, The Analytic S-Matrix, Cambridge University Press, 1966.
- [16] J.R. Forshaw and J.K. Storrow, Phys. Rev. D 46 (1992) 4955.
- [17] J.F. Owens, Rev. Mod. Phys. 59 (1987) 465.
- [18] I. Sarcevic, S. D. Ellis, and P. Carruthers, Phys. Rev. D 40, 1446 (1989).
- [19] J.F. Owens, Wu-Ki Tung, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 42 (1992) 291-332.
- [20] Lipatov, L. N. , Sov. 1. Nucl. Phys. 23:338 (1976) ; Kuraev, E. A. , Lipatov, L. N. , Fadin, V. S. , Sov. Phys. JETP 45: 199 (1978).
- [21] M. Broilo, D.A. Fagundes, E.G.S. Luna, M.J. Menon, Phys.Lett.B 799 (2019) 135047
- [22] G. Antchev (Sofiya, Inst. Nucl. Res.), P. Aspell (CERN), I. Atanassov (CERN Sofiya, Inst. Nucl. Res.), V. Avati, J. Baechler (CERN), V. Berardi (INFN, Bari Bari U.), M. Berretti, E. Bossini (U. Siena (main) INFN, Siena), M. Bozzo (INFN, Genoa Genoa U.), P. Brogi (U. Sienna INFN, Siena) et al., EPL 96 (2011) no.2, 21002.
- [23] TOTEM Collaboration (G. Antchev (Sofiya, Inst. Nucl. Res.) et al.), Nucl.Phys. B899 (2015) 527-546 (2015-10).
- [24] TOTEM Collaboration (G. Antchev (Sofiya, Inst. Nucl. Res.) et al.), Eur.Phys.J. C79 (2019) no.2, 103 (2019-02-01).
- [25] S. Dulat et al., Phys. Rev. D 93, 033006 (2016).