

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Estudo das Simetrias do Espaço - Tempo E o Grupo de Poincaré Quântico

Geovane Naysinger

Trabalho de conclusão de curso realizado sob orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef (IF-UFRGS) e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

Porto Alegre
Dezembro de 2019.

Este trabalho é dedicado

à minha irmã Janaína Naysinger (in memorium),
a meus pais Adão de Jesus Ebling Naysinger e Rosana Naysinger
pelo apoio e incentivo que
sempre me deram.

Agradecimentos

★ À meus pais por todo apoio, incentivo e paciência em aturar momentos de estresse, depressão e afins. Com todos os percalços da vida que a vida nos apresentou neste últimos anos, sempre mantiveram a união e o amor em família.

★ À minha irmã por ter me apoiado e incentivado sempre. Por todo carinho, compreensão e demonstração de orgulho, mesmo quando eu não merecia. Devido a natureza aleatória do mundo e ela não poder estar aqui nesta conclusão de etapa, a minha gratidão, amor e saudades permanecerão sempre.

★ Aos amigos que conheci ao longo do curso, especialmente Miguel Bernardi e Leonardo Pessoa, os quais foram fundamentais para o aprendizado, motivação e permanência.

★ Ao professor Emerson Luna pelos ensinamentos de mecânica clássica e quântica e por sua humanidade e tratamento exemplar perante os estudantes.

★ Ao professor Dimiter por aceitar orientar este trabalho, pela orientação feita e pelos ensinamentos ao longo do curso.

★ À todos os demais professores e professoras, funcionários e funcionárias do instituto de física da UFRGS pela excelência apresentada.

Muito Obrigado!

Resumo

Neste trabalho, faz-se um estudo do grupo de Poincaré destacando a obtenção da álgebra de Lie do grupo. Revisa-se conceitos de simetria e relatividade especial bem como teoria de grupos. Destaca-se a obtenção da equação de Dirac na forma quiral a partir do grupo de Lorentz próprio juntamente com a simetria de paridade.

Abstract

In this work, a study of the Poincaré group is made highlighting the obtaining of the group Lie algebra. It's review concepts of symmetry and special relativity as well as group theory. It is noteworthy to obtain the Dirac equation in chiral form from the Lorentz group itself along with the parity symmetry.

Conteúdo

Introdução	2
1. Introdução à Teoria de Grupos	4
1.1 O que é um grupo?	4
1.2 Isomorfismo e Homomorfismo	6
1.3 Grupo de Lie	7
2. Relatividade Especial	8
2.1 Teoria da Relatividade Especial	8
2.2 Notação Relativística	10
2.3 Transformação de Lorentz Homogênea	11
2.4 Condição de Lorentz	13
3. O Grupo de Poincaré	15
3.1 Transformação de Lorentz Inomogênea	15
3.2 Propriedades de Grupo	16
3.3 Álgebra de Lie	17
4. Equação de Dirac	24
4.1 $SL(2, \mathbb{C})$, Grupo de Lorentz e Equação de Dirac	24
5. Considerações Finais	29
Referências	30

Introdução

O estudo de simetrias ganhou força no final do século XIX e início do XX até hoje. No século XIX, Jacobi mostrou que sistemas clássicos descritos por uma lagrangeana invariante por translações possuía propriedades de conservação de momentum linear, e o mesmo valia para invariância por rotações que representava a conservação de momentum angular. Posteriormente, a beleza dos Teoremas de Emmy Noether apresentam indícios da rigidez teórica do que seria uma simetria, juntamente com a extensão do teorema para a mecânica quântica feita por Ehrenfest e Wigner. No entanto, não seria nenhum absurdo datar o estudos de simetria do espaço-tempo a partir de Galileu e Newton. A invariância das equações de Newton frente a transformações de Galileu já apresenta, logo na sua formação, que a física é composta por simetrias e que essas estruturas abstratas são rígidas do ponto de vista teórico e prático de certa forma. Portanto, estudar física é analisar simetrias, seja via presença, ausência ou a quebra dessas estruturas.

A partir da invariância das leis de Newton via transformação de Galileu é possível deduzir a lei de conservação de momentum linear. A partir da invariância de gauge das equações de Maxwell é possível demonstrar a lei de conservação de carga e também reduzir as equações do eletromagnetismo à uma lagrangeana. E um resumo do teorema de Noether citado anteriormente é que para cada lei de conservação, há uma simetria associada. Tendo em mente a importância de entender essas estruturas que compõem a natureza, neste trabalho será introduzido alguns métodos de estudo de simetria via teoria de grupos e a partir desta teoria encontrar resultados importantes da física.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos os quais não tem ligação totalmente direta. No Capítulo 1, será apresentado os conceitos fundamentais de teoria de grupos. Para o leitor já familiarizado com o assunto, o primeiro capítulo não se faz necessário tendo em vista que o mesmo tem um caráter introdutório de conceitos.

No Capítulo 2, será revisado a teoria da relatividade especial de Albert Einstein. Neste capítulo, embora de caráter revisional, também pode servir como introdutório para um leitor leigo, no entanto não substitui uma leitura de livros introdutórios pois, obviamente, a revisão e introdução não são completas. Ainda neste capítulo, é introduzida a notação quadrivetorial usada ao longo do trabalho.

No Capítulo 3, é apresentado, então, o grupo de Poincaré. Este grupo, sem dúvidas,

é um dos grupos matemáticos mais importantes na física teórica pois sua estrutura revela simetrias fundamentais da natureza. Demonstra-se as propriedades de grupo das transformações de Lorentz inhomogênea a partir da lei de composição do grupo. Logo após, é feito a demonstração da álgebra de Lie do grupo.

No Capítulo 4, é interessante que o leitor conheça um pouco dos grupos $SU(2)$ e $O(3)$. Neste capítulo, é estudado a correlação do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e o grupo de Lorentz. A partir deste correlação, o grupo de Lorentz próprio juntamente com a simetria de paridade, deriva-se a equação de Dirac na forma quiral.

Capítulo 1

Introdução à Teoria de Grupos

A introdução à teoria de grupos terá um enfoque ao trabalho que será seguido ao longo desta monografia. Assim sendo, não haverá uma completude de um curso introdutório de teoria de grupos, mas é de suma importância para o caráter revisional do assunto ou até mesmo introdutório para leitores não familiarizados.

1.1 O que é um grupo?

Seja um conjunto não vazio de objetos matemáticos G onde se pode definir uma operação binária. Uma operação binária em G é uma função $\mu: G \times G \rightarrow G$.

Seja a e b um par de elementos do conjunto G , $\mu(a, b)$ é um terceiro elemento deste conjunto, onde este terceiro elemento é um resultado do mapeamento da operação binária. Geralmente, para fins práticos, $\mu(a, b)$ é visto como uma "multiplicação" de elementos de G [1]. Nesta introdução, usa-se $a * b$ por exemplo. Assim sendo, $\forall a, b \in G$ a operação $a * b \in G$, esta relação (ou condição) é conhecida como **fechamento**.

Associatividade

A operação binária $*$ em G é dita associativa se:

$$(a * b) * c = a * (b * c), \tag{1.1}$$

onde os três elementos a, b e c pertencem ao conjunto G .

Numa operação binária, tem-se uma ambiguidade ao fazer a operação $a * b * c$ pois não é sabido se é feito $(a * b) * c$ ou $a * (b * c)$. Lembrando que $a * b$ é um elemento e $b * c$ é outro elemento. Portanto, a condição de associatividade elimina a ambiguidade nas operações.

Elemento Neutro

Existe um elemento e no conjunto G tal que:

$$e * a = a * e = a, \quad (1.2)$$

para todo $a \in G$. Este elemento e chamado de elemento neutro ou, mais frequentemente, **identidade**.

Este elemento e também é único. Supomos que e' seja um elemento neutro pertencente a G . Então, $e' * a = a * e' = a$. Se faz $e' * e$, tem-se que, como e é elemento neutro, $e' * e = e$. Por outro lado, encontra-se que e' é elemento neutro, então $e' * e = e'$. Assim sendo, $e' = e$ e elemento neutro (identidade) é único.

Como e existe em G , também deve existir a operação $b * a = e, \forall a \in G$.

Inversa

Para todo $a \in G$, existe um elemento a^{-1} tal que:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e. \quad (1.3)$$

Este elemento é chamado de **inversa**.

A inversa também é única. Ve-se facilmente supondo a existência de um novo elemento inversível h onde $a * h = h * a = e$. Então, faz-se

$$\begin{aligned} a^{-1} &= a^{-1} * e = a^{-1} * (a * h) = (a^{-1} * a) * h = e * h, \\ a^{-1} &= h. \end{aligned}$$

A importância da condição de associatividade para a unicidade da inversa é nítida.

Um Grupo

O conjunto não vazio G , munido de uma operação binária $*$, é um grupo se satisfaz as quatro condições apresentadas acima que, lembrando, são:

1. **Fechamento:** $\forall a, b \in G$,

$$a * b \in G.$$

2. **Associatividade:** $\forall a, b, c \in G$,

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

3. **Identidade:** Existe um elemento $e \in G$,

$$a * e = e * a = a,$$

onde $a \in G$.

4. **Inversa:** Existe um elemento $a^{-1} \in G$

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e,$$

onde $a \in G$.

Um conjunto dotado de uma operação binária com apenas propriedades de fechamento e associatividade é conhecido como **semigrupo**. Se o semigrupo possuir um elemento identidade, é chamado de **monóide**.

Subgrupo

Existe (G, \circ) um grupo G munido da operação \circ que possui o elemento identidade e_g . Um conjunto H que faz parte de G , ou seja $H \subset G$, é um **subgrupo** de G se e somente se for um grupo para a operação \circ com elemento neutro e_g .

Por exemplo, o grupo $(Z, +)$ dos números inteiros munido da operação de soma é um subgrupo do grupo $(R, +)$ dos números reais munidos da operação de soma.

1.2 Isomorfismo e Homomorfismo

Sejam os conjuntos G e G' grupos frente uma operação específica $*$, se existe uma correspondência de um para um entre os elementos e a lei de multiplicação do grupo é preservada, os grupos G e G' são dito **isomórficos**.

Um **isomorfismo** é formalmente definido como:

$$\begin{aligned} g_i \in G &\leftrightarrow g'_i \in G', \\ g_1 g_2 &= g_3 \in G, \\ g'_1 g'_2 &= g'_3 \in G'. \end{aligned}$$

Um isomorfismo é um caso especial de Homomorfismo. Um **homomorfismo** de um grupo G para um grupo G' é um mapeamento, que neste caso não é necessariamente um para um, que preserva a lei de multiplicação do grupo.

Um homomorfismo pode ser formalmente definido como: seja $(G, *)$ um grupo G com operação $*$ e (H, \circ) um grupo H com operação \circ . A função $f : G \rightarrow H$ tal que

$$\begin{aligned} f(a * b) &= f(a) \circ f(b), \\ \forall a, b &\in G, \end{aligned}$$

é um homomorfismo.

É importante ressaltar que, na física, teoria de grupo é construída em homomorfismos de grupos abstratos (grupos de simetrias) para grupos de matrizes de espaços vetoriais ou grupos de operadores lineares. Ou seja, um mapeamento homomórfico de G em uma coleção de matrizes de dimensão finita representa um grupo.

1.3 Grupo de Lie

Seja um grupo G que possa ser escrito da forma

$$g = g(t_1, t_2, t_3, \dots, t_r),$$

tal que possua r -parâmetros contínuos. Este grupo é dito *grupo paramétrico* se estes r parâmetros forem contínuos e reais em que a operação de produto e inversa sejam também funções contínuas dos r parâmetros.

Um grupo de Lie é um grupo paramétrico onde a função que define o grupo é uma função analítica. Portanto, é possível escrever esta função em série de Taylor em cada ponto de definição.

A estrutura do grupo de Lie é determinada por um número finito de relações de comutação (álgebra de Lie) entre os geradores do grupo. Os r parâmetros são os geradores. Neste caso, não é possível construir uma tabela de multiplicação do grupo.

O grupo de Lie é um grupo de extrema importância na matemática e na física. Para maiores detalhes e estudo sobre, recomenda-se a referência [10]. No entanto, a definição de grupo de Lie aqui apresentada superficialmente é suficiente para o entendimento da monografia.

Capítulo 2

Relatividade Especial

Neste capítulo, será feita uma breve revisão dos princípios da relatividade de Einstein juntamente com a apresentação da notação relativística que será usada ao longo deste trabalho. Também, será introduzido as transformações de Lorentz. Este capítulo tem caráter introdutório para o leitor não familiarizado com o assunto e revisional para o leitor familiarizado.

2.1 Teoria da Relatividade Especial

O princípio da relatividade é apresentado pela primeira vez por Newton: "As leis de movimento dos corpos num certo referencial não se alteram se o referencial estiver em repouso ou em movimento retilíneo uniforme".

A equação que rege a mecânica newtoniana é:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.1)$$

Portanto, ao mudar as coordenadas, a equação acima deve ser respeitada. Em outras palavras, a física permanece a mesma se o referencial for alterado.

Isso pode ser comprovado facilmente. Considere um referencial em repouso S com coordenadas (x,y,z) e um referencial em movimento retilíneo e uniforme S' com coordenadas (x',y',z') e velocidade u na direção x em relação à S [9]. Pode-se fazer a seguinte transformação:

$$\begin{aligned}x' &= x - u.t, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}$$

Colocando-se essas mudanças de coordenadas nas leis de Newton, nota-se que elas não se alteram, ou seja, a equação (2.1) tem a mesma forma para o referencial S e S' [9]. Assim

sendo, é impossível dizer, a partir de experimentos mecânicos, se um sistema está se movendo com velocidade constante ou não. As transformações descritas acima são conhecidas como transformações de Galileu e é possível dizer que as leis de Newton são invariantes frente a transformações de Galileu.

No entanto, essas transformações descritas acima não são válidas para as equações de Maxwell do eletromagnetismo. A saber (em unidades de Lorentz - Heaviside):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{J}.$$

Se estas equações mudam a partir da troca de referencial anterior, isso quer dizer que uma nave, por exemplo, em movimento constante possui as leis do eletromagnetismo alteradas. Seria possível, então, medir a velocidade da nave a partir de algum experimento elétrico ou óptico específico.

Duas consequências importantes das equações de Maxwell é que dado uma certa perturbação no campo para formar luz, a velocidade desta onda eletromagnética vale c (aproximadamente 3×10^8 m/s) e se propaga igualmente em todas direções. A outra consequência é que esta velocidade c independe da fonte estar em movimento. Caso análogo a ondas sonoras [9].

A medida que se avançou nos estudos deste problema, Hendrik Antoon Lorentz propôs um novo tipo de transformada que consertava o problema e tornava as equações de Maxwell invariantes. Albert Einstein e o francês Henry Poincaré deram significado físico para essas transformações, algo que para Lorentz não fazia muito sentido. As transformações de Lorentz serão estudadas na seção (2.3).

A partir daí, Einstein, conhecendo os resultados de Lorentz, apresentou dois postulados importantes.

1. As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais (Princípio da Relatividade).
2. A velocidade da luz no vácuo é uma constante universal. Qualquer movimento relativo entre a fonte e o observador não alteram a velocidade da luz.

2.2 Notação Relativística

Nesta seção, define-se a notação relativística usada ao longo do trabalho. Como discutido na seção anterior, as equações que descrevem leis físicas devem ser invariantes frente a mudança de referencial e é preciso deixar claro o que é, a partir de agora, o referencial S e S'.

Considere dois eventos (pontos) no espaço-tempo (x,y,z,t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$. No espaço tridimensional, tem-se a distância entre 2 pontos, no espaço-tempo (quadrimensional) o "intervalo" entre dois pontos é definido como ds . Este intervalo é o mesmo para todos observadores (inerciais). Ou seja, o intervalo ds é invariante frente a transformações de Lorentz e rotações. O intervalo ds é definido como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.2)$$

No espaço tridimensional, $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2$, onde dr^2 é positivo definido e invariante frente a rotações. No espaço-tempo quadrimensional, tem-se um problema na generalização pois o intervalo invariante não é positivo definido [2]. Então, define-se:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z),$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z),$$

onde o intervalo é:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu. \quad (2.3)$$

Os quadrivetores com índice superiores (x^μ) são chamados de contravariantes e os quadrivetores com índice inferiores (x_μ) são chamados de covariantes. Para simplificar a notação, usa-se a *conveção de soma* que, ao aparecer índices superiores e inferiores que são automaticamente somados de 0 a 3, usa-se:

$$\sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu \rightarrow dx^\mu dx_\mu. \quad (2.4)$$

É comum em física de partículas trabalhar com $c = 1$. Assim sendo, simplifica-se a notação para:

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.5)$$

Para escrever a relação entre x^μ e x_μ , precisa-se introduzir o termo de métrica do espaço que será usado o símbolo $\eta_{\mu\nu}$. É válida a seguinte relação:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu.$$

Neste trabalho, a métrica usada é a métrica de Minkowski que é escrita como:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Define-se os operadores diferenciais como:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right),$$

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right).$$

Tem-se também o operador de segunda ordem invariante de Lorentz chamado de operador d'Alembertiano [2]:

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

2.3 Transformação de Lorentz Homogênea

Nesta seção será demonstrada a transformação que torna as equações de Maxwell invariantes.

Considera-se um referencial S em repouso e um referencial S' em movimento retilíneo uniforme na direção x. Como o movimento é na direção x, pode-se considerar que $y' = y$ e $z' = z$. O intervalo ds^2 deve ser invariante, portanto $ds'^2 = ds^2$. Pode-se escrever esta invariância da seguinte forma:

$$c^2 t^2 - x^2 = c'^2 t'^2 - x'^2. \quad (2.7)$$

Procura-se as transformações lineares geral em x e t da seguinte forma:

$$t' = At + Bx, \quad (2.8)$$

$$x' = Ft + Gx. \quad (2.9)$$

Considera-se, então, que a distância horizontal no referencial S' é nula, ou seja $x' = 0$. Isso quer dizer que um possível objeto em movimento está centrado na origem do referencial em movimento e, obviamente, com a mesma velocidade que S'. Já no referencial S, tem-se que $x = vt + x'$. Assim sendo, ao colocar este vínculo, resulta que $x = vt$ que faz, da equação (2.9), $F = -Gv$.

Usando este último resultado na equação (2.9), é obtido que:

$$x' = G(x - vt). \quad (2.10)$$

Usando este resultado juntamente com a equação (2.8) aplicados na equação (2.7), o resultado invariante fica:

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - x^2 &= c^2 (At + bx)^2 - G^2 (x - vt)^2, \\ c^2 t^2 - x^2 &= (c^2 A^2 - G^2 v^2) t^2 + (c^2 B^2 - G^2) x^2 + 2(c^2 AB + vG^2). \end{aligned}$$

Ao comparar os dois lados da última equação, é possível montar o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} c^2 A^2 - G^2 v^2 = c^2, \\ c^2 B^2 - G^2 = -1, \\ c^2 AB - vG^2 = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Este sistema de equações parece não ter soluções ou ter inúmeras soluções e a segunda opção é verdadeira. No entanto, fazendo $A = \pm G$ (ansatz) na primeira equação do sistema de equações (2.11):

$$\begin{aligned} c^2 A^2 - A^2 v^2 &= c^2, \\ A &= \pm \sqrt{\frac{1}{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Das equações (2.10) e (2.8), quando $x = 0$ resulta que $t' = At$ e quando $t = 0$ implica $x' = Gx$. Com isso, A e G devem ser positivos. Então, $A = G$ e a terceira equação do sistema de equações (2.11) é resolvida:

$$\begin{aligned} c^2 GB - vG^2 &= 0, \\ B &= \frac{v}{c^2} G. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de A, B e G nas equações (2.10) e (2.8), obtém-se então:

$$\begin{cases} t' = \frac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{v}{c^2} \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x - vt). \end{cases} \quad (2.12)$$

É possível observar um fator comum que é definido como fator de Lorentz:

$$\gamma \equiv \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Feito isso, pode-se escrever de a transformação abaixo:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \\ x' = \gamma (x - vt), \\ y' = y, \\ z' = z. \end{cases} \quad (2.13)$$

Onde o sistema de equações (2.13) mostra explicitamente a Transformação de Lorentz. Este sistema de equações pode ser escrito na forma matricial.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ou

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (2.14)$$

onde o Λ_{ν}^{μ} é o tensor de Lorentz. Esta equação (2.14) é solução de uma equação diferencial que será mostrada no próximo capítulo. Esta equação não possui nenhum termo de translação, por isso ela é chamada de homogênea. Assim sendo, a equação (2.14) descreve a transformação de Lorentz homogênea.

2.4 Condição de Lorentz

As transformações de Lorentz são transformações lineares Λ que podem agir nos vetores unitários e componentes.

$$\hat{e}_{\mu} \rightarrow \hat{e}'_{\mu} = \hat{e}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\nu},$$

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}.$$

E devem preservar o comprimento do quadrivetor x^{μ} [8],

$$|x|^2 = |x'|^2. \quad (2.15)$$

Em termos do tensor métrico, pode-se definir o comprimento do quadrivetor da seguinte forma:

$$|x|^2 = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}. \quad (2.16)$$

Ao combinar as equações (2.15) e (2.16), a **Condição de Lorentz** é obtida:

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda_{\rho}^{\mu}\Lambda_{\sigma}^{\nu} = \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.17)$$

Qualquer transformação Λ que satisfaça esta condição, é uma transformação de Lorentz.

Capítulo 3

O Grupo de Poincaré

Neste capítulo, o grupo de Poincaré será apresentado. Será demonstrado, a partir da lei de composição, que a transformação de Poincaré forma um grupo. Posteriormente, será mostrado com detalhes matemáticos a álgebra de Lie do grupo.

3.1 Transformação de Lorentz Inomogênea

Da notação de intervalo vista na equação (2.5) e sua invariância, é possível escrever a seguinte relação [3]:

$$\eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (3.1)$$

que equivale a escrever (via diferencial exata)

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \eta_{\rho\sigma}. \quad (3.2)$$

Diferenciando a equação (3.2), chega-se em

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \eta_{\rho\sigma} \right).$$

Obtem-se, então, a equação abaixo

$$\eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\sigma}} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Onde os índices ρ , σ e λ são livres e podem ser permutados na equação. Fazendo a troca $\lambda \leftrightarrow \rho$, a equação (3.3) fica

$$\eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Trocando $\lambda \leftrightarrow \sigma$

$$\eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Somando as equações (3.3) e (3.4) e subtraindo a equação (3.4), encontra-se

$$2\eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \right) = 0.$$

Esta equação pode ser simplificada fazendo a seguinte operação

$$2\eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \right) \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} \eta^{\alpha\beta} = 0.$$

Tal que todas as operações com η 's são iguais a 0 ou 1 e $\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} = \delta_\alpha^\nu$. Portanto, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\lambda} = 0. \quad (3.6)$$

Cuja solução é a transformação linear

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu, \quad (3.7)$$

onde Λ_ν^μ e a^μ são "constantes". Nota-se que o termo a^μ é um termo de não homogeneidade e que é uma translação. A equação (3.7) é a transformação de Lorentz inhomogênea (Transformação de Poincaré).

3.2 Propriedades de Grupo

Nesta seção, será analisada algumas propriedades das transformações de Poincaré. Escreve-se $T(\Lambda, a)$ como a representação do grupo de transformações de Lorentz inhomogênea. Caso $a^\mu = 0$, a transformada é escrita $T(\Lambda, 0)$ que é transformação de Lorentz homogênea.

Seja a coordenada x transformada como na equação (3.7), aplica-se novamente a transformação de forma a fazer $x^\mu \rightarrow x''^\mu$. Considerando $\bar{\Lambda}$ e \bar{a} referentes a segunda transformação de Lorentz e distinta da primeira, tem-se que

$$x''^\alpha = \bar{\Lambda}_\beta^\alpha x'^\beta + \bar{a}^\alpha,$$

e colocando no lugar de x'^β a transformação linear (3.7)

$$x''^\alpha = \bar{\Lambda}_\beta^\alpha \left(\Lambda_\nu^\beta x^\nu + a^\beta \right) + \bar{a}^\alpha,$$

$$x''^\alpha = \bar{\Lambda}_\beta^\alpha \Lambda_\nu^\beta x^\nu + \bar{\Lambda}_\beta^\alpha a^\beta + \bar{a}^\alpha,$$

Feito isso, a terceira equação acima mostra a relação de fechamento. Escrevendo em termos da notação da transformada T , a lei de composição do grupo pode ser escrita como

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}). \quad (3.8)$$

Os valores Λ 's e a 's são constantes e, portanto, são associativos.

Pode-se mostrar ainda que a transformação $x'^{\mu} = x^{\mu}$ implica que a única possibilidade para a transformação ocorrer é que a transformada seja escrita da seguinte forma

$$T(1, 0) = 1, \quad (3.9)$$

onde $T(1, 0)$ é o elemento neutro (identidade).

A transformação de $x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu}$ que leve o estado final x' para o inicial x é a transformação inversa. Esta transformação é escrita

$$T^{-1}x'^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu} - a'^{\mu},$$

que é igual a

$$T^{-1}(\Lambda, a) = T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a). \quad (3.10)$$

Assim sendo, existe uma relação de fechamento, associatividade, assim como o elemento identidade e a inversa estão bem definidos. Estas características, como apresentado no Capítulo 1, caracterizam um grupo. O grupo que possui a transformada $T(\Lambda, a)$ é o grupo de Poincaré (Lorentz inhomogêneo).

3.3 Álgebra de Lie

Muita informação de um grupo de Lie está contido perto do elemento identidade do grupo. Para a transformação de Lorentz inhomogênea, a identidade pode ser escrita como $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ e $a^{\mu} = 0$. A transformação deve ficar

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}, \quad a^{\mu} = \epsilon^{\mu}, \quad (3.11)$$

onde ω^{μ}_{ν} e ϵ^{μ} são infinitesimais [3]. A condição de Lorentz

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}, \quad (3.12)$$

substituindo o Λ da equação (3.11) em (3.12), tem-se

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}(\delta^{\mu}_{\rho} + \omega^{\mu}_{\rho})(\delta^{\nu}_{\sigma} + \omega^{\nu}_{\sigma}) = \eta_{\mu\nu}(\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} + \delta^{\mu}_{\rho}\omega^{\nu}_{\sigma} + \omega^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} + O(\omega^2)), \quad (3.13)$$

e como $\omega \ll 1$, o termo $O(\omega^2) \rightarrow 0$. Usando as propriedades de contração dos tensores η 's

$$\begin{aligned}\omega_{\sigma\rho} &\equiv \eta_{\mu\sigma}\omega_{\rho}^{\mu}, \\ \omega_{\rho}^{\mu} &\equiv \eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho},\end{aligned}$$

ao resolver o lado direito da equação (3.13), encontra-se os seguintes resultados

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}\omega_{\rho}^{\mu}\delta_{\sigma}^{\nu} &= \omega_{\nu\rho}\delta_{\sigma}^{\nu}, \\ \eta_{\mu\nu}\delta_{\rho}^{\mu}\omega_{\sigma}^{\nu} &= \eta_{\mu\nu}\omega_{\sigma}^{\nu}\delta_{\rho}^{\mu} = \omega_{\mu\sigma}\delta_{\rho}^{\mu}, \\ \eta_{\mu\nu}\delta_{\rho}^{\mu}\delta_{\sigma}^{\nu} &= \eta_{\rho\sigma},\end{aligned}$$

fazendo $\nu = \sigma$ e $\mu = \rho$, é obtida a expressão:

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma};$$

feito isso, conclui-se que a condição de Lorentz se reduz ao tensor antissimétrico $\omega_{\sigma\rho}$

$$\omega_{\sigma\rho} = -\omega_{\rho\sigma}. \quad (3.14)$$

Em mecânica quântica, para cada transformação $T(\Lambda, a)$, há um operador linear unitário correspondente que atua em vetores de estado no espaço de Hilbert. Estes estados ψ transformam-se tal que $\psi \rightarrow U(\Lambda, a)\psi$ onde $U(\Lambda, a)$ é um operador unitário e obedece a mesma lei de composição de $T(\Lambda, a)$ representada na equação (3.8) [3]. Assim sendo, $U(\Lambda, a)$ será a notação para as transformações $T(\Lambda, a)$ a partir de agora.

Pode-se escrever a transformação de Poincaré onde deve ser igual a $\mathbf{1}$ somado a termos lineares de ω e ϵ da equação (3.11). Lembrando que está sendo trabalhado com um grupo de Lie e se procura buscar informações dessas transformações próxima ao elemento identidade. Portanto, equação $U(\Lambda, a)$ infinitesimal fica

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_{\rho}P^{\rho} + \dots \quad (3.15)$$

Onde $J^{\rho\sigma}$ e P^{ρ} são operadores independentes os quais estão acoplados ao espaço ω e ϵ respectivamente. Sendo unitário o operador acima representado, então obedece a propriedade

$$U^{-1} = U^{\dagger},$$

e, para esta propriedade ser satisfeita, a seguinte relação dos operadores deve ser respeitada

$$J^{\rho\sigma\dagger} = J^{\mu\rho\dagger}, \quad P^{\rho\dagger} = P^{\rho}, \quad (3.16)$$

onde os operadores J e P são hermitianos. Pela propriedade de antisimetria de $\omega_{\rho\sigma}$, impoem-se que

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}, \quad (3.17)$$

também são operadores antissimétricos.

As componentes do operador P^ρ são P^0 , P^1 , P^2 e P^3 onde P^0 é o operador de energia ou *Hamiltoniano*, as demais componentes de P são componentes dos momenta linear [3]. Estes operadores são geradores de translação e a componente P^0 do operador quadrimomentum é gerador de translação no tempo [8]. Já para o operador $J^{\rho\sigma}$, tem-se que J^{12} , J^{23} e J^{31} são componentes do vetor momentum angular e as demais componentes são definidas como "boost" three - vector $K = J^{01}, J^{02}, J^{03}$ que não são conservados e os quais não geram autovalores observáveis quando aplicados a função de onda [3].

Partindo da definição de $U(\Lambda, a)$ na equação (3.15) e da lei de composição na equação (3.8), pode-se examinar algumas propriedades de $J^{\rho\sigma}$ e P^ρ .

Fazendo a seguinte operação $U(\Lambda, a)U(1+\omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a)$ e lembrando que $U^{-1}(\Lambda, a) = U(-1, -\Lambda^{-1}a)$, operando da direita para esquerda, o resultado fica

$$U(\Lambda, a)U(\Lambda^{-1} + \omega\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a - \omega\Lambda^{-1}a + \epsilon),$$

e operando $U(\Lambda, a)$ é obtido

$$U(\Lambda\Lambda^{-1} + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, -\Lambda\Lambda^{-1}a - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a + \Lambda\epsilon + a),$$

onde $\Lambda\Lambda^{-1} = 1$, então resulta que

$$U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) = U(1 + \Lambda\omega^{-1}, -\Lambda\omega\Lambda^{-1}a + \Lambda\epsilon). \quad (3.18)$$

E usando a equação (3.15) no lado direito da equação (3.18), tem-se

$$U(1 + \Lambda\omega^{-1}, -\Lambda\omega\Lambda^{-1}a + \Lambda\epsilon) = 1 + \frac{1}{2}i \left(\Lambda\omega\Lambda^{-1}J^{\rho\sigma} \right) - i \left(-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a + \Lambda\epsilon \right) P^\rho,$$

e substituindo os índices em ω , Λ , a e ϵ , pode-se reescrever o lado direito da equação como

$$1 + \frac{i}{2} \left(\omega_{\mu\nu}\Lambda^\mu\Lambda^\nu \right) J^{\rho\sigma} - i \left(\Lambda^\mu_\rho\epsilon_\mu - \Lambda^\mu_\rho\omega_{\mu\nu}\Lambda^\nu_\sigma a^\sigma \right) P^\rho. \quad (3.19)$$

O lado esquerdo da equação (3.18) ainda pode ser escrito substituindo o $U(1 + \omega, \epsilon)$ como na equação (3.15). Portanto,

$$U(\Lambda, a) \left(\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i\epsilon_{\rho} P^{\rho} \right) U^{-1}(\Lambda, a) = \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) - i\epsilon_{\rho} U(\Lambda, a) P^{\rho} U^{-1}(\Lambda, a), \quad (3.20)$$

e igualando as partes de ω e ϵ no lado direito da equação (3.20) com a expressão (3.19) é obtido o sistema de equações para J e P :

$$U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\sigma}_{\nu} (J^{\mu\nu} + a^{\nu} P^{\mu} - a^{\mu} P^{\nu}), \quad (3.21)$$

$$U(\Lambda, a) P^{\rho} U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda^{\rho}_{\mu} P^{\mu}. \quad (3.22)$$

Para finalizar e encontrar a álgebra do grupo, será substituído os valores de $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}$ e $a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$ representados na equação (3.12). Para melhor organizar a simplificação das equações, a equação (3.21) será separada como "caso 1" e a equação (3.22) como "caso 2".

Caso 1 Colocando os valores de Λ e a no lado direito da equação (3.20)

$$\Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\sigma}_{\nu} (J^{\mu\nu} + a^{\nu} P^{\mu} - a^{\mu} P^{\nu}) = (\delta^{\rho}_{\mu} + \omega^{\rho}_{\mu}) (\delta^{\sigma}_{\nu} + \omega^{\sigma}_{\nu}) (J^{\mu\nu} + \epsilon^{\nu} P^{\mu} - \epsilon^{\mu} P^{\nu}),$$

e resolvendo o lado direito desta equação fica que

$$\left(\delta^{\rho}_{\mu} \delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\rho}_{\mu} \omega^{\sigma}_{\nu} + \omega^{\rho}_{\mu} \delta^{\sigma}_{\nu} + O(\omega^2) \right) (J^{\mu\nu} + \epsilon^{\nu} P^{\mu} - \epsilon^{\mu} P^{\nu}),$$

onde os termos de ordem $O(\omega^2)$ não interessam pois $\omega \ll 1$. Substituindo $\mu = \rho$ e $\sigma = \nu$, a expressão acima fica

$$\left(1 + \omega^{\sigma}_{\nu} + \omega^{\rho}_{\mu} \right) (J^{\rho\sigma} + \epsilon^{\rho} P^{\sigma} - \epsilon^{\sigma} P^{\rho}),$$

e resolvendo esta expressão, tem-se

$$J^{\rho\sigma} - \epsilon^{\rho} P^{\sigma} + \epsilon^{\sigma} P^{\rho} + \omega^{\sigma}_{\nu} J^{\rho\sigma} + \omega^{\rho}_{\mu} J^{\rho\sigma} - \omega^{\sigma}_{\nu} \epsilon^{\rho} P^{\sigma} + \omega^{\sigma}_{\nu} \epsilon^{\sigma} P^{\rho} - \omega^{\rho}_{\mu} \epsilon^{\rho} P^{\sigma} + \omega^{\rho}_{\mu} \epsilon^{\sigma} P^{\rho}, \quad (3.23)$$

que ficará guardada como o resultado do lado direito da equação (3.21). É importante ressaltar que os termos não lineares de ω e ϵ são desprezados. As igualdades são feitas dentro do espaço de ω e ϵ lineares, analogamente a um eixo x e y por exemplo.

Agora será resolvido o lado esquerdo da equação (3.21). Substituindo os valores Λ e a onde

$$U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) = U(1 + \omega, \epsilon) J^{\rho\sigma} U(1 - \omega, \omega\epsilon - \epsilon),$$

e substituindo a definição de $U(1 + \omega, a)$ na equação acima, portanto,

$$\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_{\rho}P^{\rho}\right)J^{\rho\sigma}\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_{\rho}P^{\rho} + O(\omega, \epsilon)\right),$$

onde o termo $O(\omega, \epsilon)$ é também não linear e desprezado. A expressão então resolvida fica

$$J^{\rho\sigma} + i\left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_{\rho}P^{\rho}, J^{\rho\sigma}\right] + O^2, \quad (3.24)$$

que é o lado esquerdo da equação (3.21). Onde novamente se despreza termos não lineares O^2 . Assim sendo, igualando o lado direito (equação 3.23) e esquerdo (equação 3.24), obtém-se:

$$i\left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_{\rho}P^{\rho}, J^{\rho\sigma}\right] = -\epsilon^{\rho}P^{\rho} + \epsilon^{\sigma}P^{\rho} + \omega_{\nu}^{\sigma}J^{\rho\sigma} + \omega_{\mu}^{\rho}J^{\rho\sigma}. \quad (3.25)$$

Caso 2

Será simplificada a equação (3.22) neste caso. Analogamente ao *caso 1*, substitui-se os valores de Λ e a . Como a equação (3.22) tem menos termos, a simplificação fica menos trabalhosa e não será preciso separar em lado direito e esquerdo. Então, substituindo $U(\Lambda, a) \rightarrow U(1 + \omega, \epsilon)$, $\Lambda_{\mu}^{\rho} = \delta_{\mu}^{\rho} + \omega_{\mu}^{\rho}$ e $a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$, a equação (3.22) fica

$$U(1 + \omega, \epsilon)P^{\rho}U^{-1}(1 + \omega, \epsilon) = \left(\delta_{\mu}^{\rho} + \omega_{\mu}^{\rho}\right)P^{\mu}.$$

Substituindo a definição $U(1 + \omega, \epsilon)$, resulta que

$$\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_{\rho}P^{\rho}\right)P^{\rho}\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_{\rho}P^{\rho} + O(\omega, \epsilon)\right) = \left(\delta_{\mu}^{\rho} + \omega_{\mu}^{\rho}\right)P^{\mu},$$

e resolvendo ambos os lados da equação acima

$$P^{\rho} + i\left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_{\rho}P^{\rho}, P^{\rho}\right] + O^2 = \delta_{\mu}^{\rho}P^{\mu} + \omega_{\mu}^{\rho}P^{\mu},$$

onde $\delta_{\mu}^{\rho}P^{\mu}$ é igual a P^{ρ} fazendo $\rho = \mu$ e, portanto, simplifica com o mesmo P^{ρ} do outro lado da equação. Assim sendo, tem-se um novo resultado para equação (3.22):

$$i\left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_{\rho}P^{\rho}, P^{\rho}\right] = \omega_{\mu}^{\rho}P^{\mu}. \quad (3.26)$$

Conclusão da Álgebra

Para concluir a álgebra de Lie do grupo de Poincaré, resolve-se as relações de comutação demonstradas anteriormente. Resolvendo a relação de comutação da equação (3.25)

$$i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, J^{\rho\sigma} \right] = -\epsilon^{\rho} P^{\sigma} + \epsilon^{\sigma} P^{\rho} + \omega_{\rho}^{\mu} J^{\mu\sigma} + \omega_{\sigma}^{\nu} J^{\rho\nu},$$

lembrando que a operação de comutação é $[x, y] = xy - yx$, portanto o comutador fica

$$i \left(\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} J^{\rho\sigma} - \epsilon_{\mu} P^{\mu} J^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\rho\sigma} J^{\mu\nu} + \epsilon_{\mu} J^{\rho\sigma} P^{\mu} \right) = \omega_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} + (-\omega_{\mu\nu}) \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu} - \epsilon_{\mu} \eta^{\nu\rho} P^{\sigma} + \epsilon_{\mu} \eta^{\mu\rho} P^{\sigma},$$

onde o $\omega_{\mu\nu}$ entre parênteses serve para lembrar que o tensor é antissimétrico. Então, separando os espaços de ω e ϵ e organizando os termos de comutação, a expressão fica da seguinte forma:

$$i \left(\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] + \epsilon_{\mu} [J^{\rho\sigma}, P^{\mu}] \right) = \omega_{\mu\nu} (\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu}) + \epsilon_{\mu} (\eta^{\mu\sigma} P^{\rho} - \eta^{\nu\rho} P^{\sigma}). \quad (3.27)$$

Onde pode ser tirado a igualdade $i [J^{\rho\sigma}, P^{\mu}] = \eta^{\mu\sigma} P^{\rho} - \eta^{\nu\rho} P^{\sigma}$ da equação acima, no entanto para $\omega_{\mu\nu}$ há um fator de $1/2$ em que será preciso usar alguns artifícios algébricos.

Então, para forçar um fator $1/2$ na expressão em $\omega_{\mu\nu}$, faz-se o seguinte

$$\omega_{\mu\nu} (\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu}) = \omega_{\mu\nu} \left[\eta^{\nu\rho} \frac{1}{2} (J^{\mu\sigma} + J^{\mu\sigma}) - \eta^{\mu\sigma} \frac{1}{2} (J^{\rho\nu} + J^{\rho\nu}) \right],$$

colocando o $1/2$ para fora dos colchetes e $\omega_{\mu\nu}$ para dentro

$$\frac{1}{2} (\eta^{\nu\rho} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\rho} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \omega_{\mu\nu} J^{\rho\nu} - \eta^{\mu\sigma} \omega_{\mu\nu} J^{\rho\nu}),$$

onde, fazendo uso da propriedade de antissimetria de ω , troca-se a posição dos índices μ e ν de duas expressões da equação. Ou seja, faz-se $\eta^{\nu\rho} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\sigma} \rightarrow -\eta^{\mu\rho} \omega_{\nu\mu} J^{\nu\sigma}$ e $\eta^{\mu\sigma} \omega_{\mu\nu} J^{\rho\nu} \rightarrow -\eta^{\nu\sigma} \omega_{\nu\mu} J^{\rho\mu}$. Feito isso, pode-se colocar o fator $1/2$ e $\omega_{\mu\nu}$ em evidência e a expressão acima fica

$$\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu}).$$

Então, pode-se fazer a comparação com a equação (3.27) que agora possui $(1/2)\omega_{\mu\nu}$ dos dois lados. Assim sendo, pode-se notar a igualdade $i [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu}$.

Agora, resolve-se a relação de comutação da equação (3.26).

$$i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, P^{\rho} \right] = \omega_{\mu}^{\rho} P^{\mu},$$

resolvendo o comutador, a expressão acima fica

$$i \left(\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} P^{\rho} - \epsilon_{\mu} P^{\mu} P^{\rho} - \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} P^{\rho} J^{\mu\nu} + \epsilon_{\mu} P^{\rho} P^{\mu} \right) = \omega_{\mu}^{\rho} P^{\mu},$$

que pode ser escrita com comutadores de J e P

$$i \left(\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} [J^{\mu\nu}, P^{\rho}] + \epsilon_{\mu} [P^{\rho}, P^{\mu}] \right) = \omega_{\mu}^{\rho} P^{\mu},$$

e desta expressão, nota-se que o lado direito da equação não tem termos no espaço de ϵ_{μ} . Assim sendo, o comutador $[P^{\rho}, P^{\mu}] = 0$. Também é possível notar que esta expressão é nula pois P é definido em termos de derivadas e a operação de derivação é comutativa.

Assim sendo, concluímos que os três resultados comutação obtidos são:

$$\begin{aligned} i [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu}, \\ i [J^{\rho\sigma}, P^{\mu}] &= \eta^{\mu\sigma} P^{\rho} - \eta^{\nu\rho} P^{\sigma}, \\ [P^{\rho}, P^{\mu}] &= 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Estas equações são a álgebra de Lie do grupo de Poincaré quântico. Os $J^{\mu\nu}$ e P^{μ} são os geradores do grupo.

Capítulo 4

Equação de Dirac

Neste capítulo, será apresentado uma conexão entre o grupos especial linear $SL(2,C)$ e o grupo de Lorentz. A partir desta correlação, a equação de Dirac na forma quiral será derivada das propriedades de transformações dos spinores frente o grupo de Lorentz.

4.1 $SL(2,C)$, Grupo de Lorentz e Equação de Dirac

Existe uma correspondência entre $SL(2,C)$ e o grupo de Lorentz e é análoga a correspondência entre o grupo de rotação $O(3)$ e $SU(2)$.

Define-se o gerador K , um gerador de 'boost' das transformações de Lorentz, da seguinte maneira:

$$K = \pm i \frac{\sigma}{2}. \quad (4.1)$$

O gerador K deve ser definido dessa forma para que haja relação de comutação cíclica¹ e que faça das transformações de Lorentz um grupo (de Lie). Tendo isto em vista, analisa-se como os spinores de Pauli (σ) se transformam de acordo com as transformações de Lorentz [2].

Dando continuidade, a equação (4.1) deve ter dois tipos de spinores que correspondem a dois K 's de diferentes sinais. Isto fica claro ao expor a natureza do grupo de Lorentz próprio, com seis geradores \mathbf{J} e \mathbf{K} . Define-se, então, os geradores

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(J + iK), \\ B &= \frac{1}{2}(J - iK), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde as relações de comutação ficam

¹ Como, por exemplo $[J_x, J_y] = J_z$.

$$\begin{aligned} [A_x, A_y] &= iA_z, \\ [B_x, B_y] &= iB_z, \\ [A_i, B_j] &= 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo $(i, j = x, y, z)$ e essas relações mostram que A e B são, cada um, geradores do grupo $SU(2)$, e os dois grupos comutam. O grupo de Lorentz é essencialmente o produto direto $SU(2) \otimes SU(2)$, e a transformação dos estados são descritas por dois momenta angulares correspondentes a A e B que são respectivamente (j, j') .

Quando $A = 0$ e $B = 0$, a equação (4.2) resulta em

$$\begin{aligned} (j, 0) &\rightarrow J^{(j)} = iK^{(j)}, \\ (0, j) &\rightarrow J^{(j)} = -iK^{(j)}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

que são duas possibilidades da equação (4.1). Definindo dois tipos de spinores:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) : J^{(1/2)} = \sigma/2, \quad K^{(1/2)} = -\sigma/2.$$

A letra grega ξ é denotada como spinor. Se (θ, ϕ) são os parâmetros de rotação e transformação de Lorentz respectivamente, ξ se transforma como

$$\xi \rightarrow \exp\left(i\frac{\sigma}{2}\theta + \frac{\sigma}{2}\phi\right) \xi,$$

colocando i em evidência na exponencial, define-se então:

$$\exp\left[i\frac{\sigma}{2}(\theta - i\phi)\right] \xi \equiv M\xi. \tag{4.5}$$

Usando a letra ς como spinor. Este transforma-se como

$$\varsigma \rightarrow \exp\left[i\frac{\sigma}{2}(\theta + i\phi)\right] \varsigma \equiv N\varsigma. \tag{4.6}$$

É importante notar que não existe uma matriz S tal que $N = SMS^{-1}$, sendo assim, não é equivalente ao grupo de Lorentz [2]. As matrizes M e N são relacionadas por

$$N = ZM^*Z^{-1}, \tag{4.7}$$

onde Z é uma matriz tal que $Z = -i\sigma_2$, lembrando que σ_2 é uma das matrizes de Pauli.

Sendo o $\det M = \det N = 1$, conclui-se que as matrizes M e N são complexas 2×2 com determinante unitário. Estas matrizes formam o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ [2].

Com tudo feito até aqui, precisa-se deixar claro algumas coisas. Existe três parâmetros relacionados a rotação (ângulos θ) e três parâmetros relacionados a velocidades (ϕ) de acordo com a transformação de Lorentz. Para cada vetor tridimensional, existe duas componentes

do spinor de Pauli frente a rotações (SU(2) e O(3)). No entanto, para as transformações de Lorentz gerais, há dois diferentes tipos de componentes de spinor que se transformam como apresentado nas equações (4.6) e (4.5) que correspondem a representação $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz. Essencialmente, a equação de Dirac é uma relação entre esses dois spinores [2].

Introduzindo a operação de paridade, a qual a velocidade nos 'boost' de Lorentz muda o sinal: $v \rightarrow -v$. Logo, os geradores K também mudam: $K \rightarrow -K$. No entanto, os J 's não mudam, comportando-se como um vetor (pseudovetor) axial, o que é de fato como o momentum angular se transforma frente a operação de paridade. Para a representação de $(j, 0)$ e $(0, j)$

$$(j, 0) \leftrightarrow (0, j), \quad (4.8)$$

portanto,

$$\xi \leftrightarrow \varsigma.$$

Então, considerando a simetria de paridade, não é suficiente considerar apenas os dois spinores ξ e ς , mas um 4-spinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

A transformação de Lorentz para ψ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} e^{1/2\sigma(\theta-i\phi)} & 0 \\ 0 & e^{1/2\sigma(\theta+i\phi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $\bar{D}(\Lambda) = ZD^*Z^{-1}$ e Λ é a transformação de Lorentz homogênea. Devido a simetria de paridade, então ψ se transforma como

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

O 4-spinor ψ é uma representação irredutível do grupo de Lorentz estendido pela paridade [2].

A matriz $exp(\sigma\phi)$ não é unitária e isto faz a representação (4.10) também não ser unitária. Em mecânica quântica, em geral, se interessa apenas por representações unitárias de grupo de simetria pois a probabilidade de transição entre dois estados deve ser conservada.

O grupo de Lorentz homogêneo não é compacto e possui dimensão infinita o qual é um problema. No entanto, estudos Wigner mostram que o grupo fundamental para física de partículas não é o grupo de Lorentz homogêneo, mas o inhomogêneo conhecido, e já tratado no capítulo anterior, grupo de Poincaré que consiste de boost e rotações, juntamente com translações no espaço-tempo [2].

Dando continuidade, considera-se, então, a equação (4.10) para o caso em que $\theta = 0$ (Boost de Lorentz), e redefine-se os spinores

$$\xi \rightarrow \phi_R, \quad \varsigma \rightarrow \phi_L, \quad (4.12)$$

em que R significa a direita (right) e L a esquerda (left). Uma projeção do spin no espaço de momentum é definido como **helicidade** onde *direita* é o caso em que a orientação do movimento e da helicidade da partícula são paralelos e *esquerda* quando são anti paralelos (mesma direção, porém sentidos opostos). Tem-se que

$$\begin{aligned} \phi_R &\rightarrow e^{1/2\sigma \cdot \hat{n} \phi} \phi_R \\ &= [\cosh(\phi/2) + \sigma \cdot \hat{n} \sinh(\phi/2)] \phi_R, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde \hat{n} é p vetor unitário direcional do 'boost' de Lorentz. Considerando que o spinor se refere a uma partícula em repouso, $\phi_R(0)$, onde a transformação feita é para uma partícula de momentum p , $\phi_R(p)$. Da relatividade especial, tem-se que os cossenos e senos hiperbólicos dependem de γ que é o fator de Lorentz, substituindo na equação (4.13), é obtido que

$$\phi_R(p) = \left[\left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \sigma \cdot \hat{p} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \phi_R(0). \quad (4.14)$$

Uma partícula com energia total E , massa m e momentum p , $\gamma = E/m$ (usando $c = 1$), a equação (4.14) fica

$$\phi_R(p) = \frac{E + m + \sigma \cdot p}{[2m(E + m)]^{1/2}} \phi_R(0). \quad (4.15)$$

Procede-se da mesma forma para $\phi_L(p)$, alterando o sinal na equação (4.13) é encontrado

$$\phi_L(p) = \frac{E + m - \sigma \cdot p}{[2m(E + m)]^{1/2}} \phi_L(0). \quad (4.16)$$

Para uma partícula em repouso, não se define o spin em direita e esquerda [2]. Portanto, $\phi_R(0) = \phi_L(0)$ e das equações (4.15) e (4.16) que

$$\phi_R(p) = \frac{E + \sigma \cdot p}{m} \phi_L(p), \quad (4.17)$$

e para ϕ_L

$$\phi_L(p) = \frac{E - \sigma \cdot p}{m} \phi_R(p). \quad (4.18)$$

Estas equações podem ser reescritas na forma de um sistema de equações e, consequentemente, na forma matricial abaixo:

$$\begin{pmatrix} -m & p_0 + \sigma \cdot p \\ p_0 - \sigma \cdot p & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R(p) \\ \phi_L(p) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.19)$$

Definindo o 4-spinor

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} \phi_R(p) \\ \phi_L(p) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

e as matrizes 4x4

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

O sistema de equações mostrados na equação matricial 4.19 pode ser, então, simplificado para

$$(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m)\psi(p) = 0, \quad (4.22)$$

lembrando que $p_\mu = (E, p)$, a equação (4.22) pode ficar compactada como:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(p) = 0. \quad (4.23)$$

Esta equação é a **equação de Dirac** (na representação de momentum) para uma partícula de spin 1/2 massiva. Para uma partícula não massiva, faz-se o mesmo procedimento, porém é colocado $m = 0$ na equação matricial (4.19).

Capítulo 5

Considerações Finais

As estruturas de simetrias se apresentam de suma importância para a compreensão da natureza. Os resultados encontrados neste trabalho são bastante profundos. Notou-se que existe uma estrutura geral de uma certa simetria. A partir desta estrutura, foi usado uma "subestrutura" desta estrutura geral para encontrar um resultado físico importante de física de partículas.

A estrutura geral, neste caso, seria o grupo de Poincaré. A "subestrutura" seria o grupo de Lorentz homogêneo e o importante resultado físico mencionado seria a equação de Dirac. Com isso, é interessante lembrar que o matemático Carl Friedrich Gauss defendia que os encantos da matemática só se revelavam àqueles que têm coragem de ir fundo nela; Galileu Galilei acreditava que a matemática é a linguagem fundamental da natureza. Ao unir o pensamentos destes dois grandes nomes da história da ciência, nota-se que Newton, Poincaré, Noether, Wigner, Einstein e entre outros bons nomes da história possivelmente chegaram muito perto da compreensão estrutural da natureza.

Bibliografia

- [1] J. J. ROTMAN, The Theory of Groups: An Introduction, University of Chicago press (1970)
- [2] L. H. RYDER, Quantum Field Theory, Cambridge University Press (2001)
- [3] S. WEINBERG, The Quantum Theory of Fields, vol. 1, Cambridge University Press (1995)
- [4] J.J. SAKURAI, Modern Quantum Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company (1995).
- [5] J.J SAKURAI, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company (1967)
- [6] W. GREINER, Relativistic Quantum Mechanics - Wave Equation, Ed. Springer-Verlag (2000)
- [7] A. ROONEY - A História da Física, M.Books (2013)
- [8] WU-KI TUNG - Group Theory in Physics, World Scientific Publishing (1985)
- [9] FEYMANN, LEIGHTON, SANDS - The Feymann Lectures on Physics, vol. 1, Bookman (2008)
- [10] A.L. ONISHCHIK E.B. VINBERG - Lie Groups and Algebraic Groups, Springer-Verlag (1980)