

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Análise e implementação do Método de Elementos Finitos Estendido (XFEM) para problemas bidimensionais de elasticidade infinitesimal com interface bimaterial

por

Erik da Rosa Rodriguez

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2019

## DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO

### CIP - Catalogação na Publicação

Rodriguez, Erik da Rosa  
Análise e implementação do Método de Elementos Finitos Estendido (XFEM) para problemas bidimensionais de elasticidade infinitesimal com interface bimaterial / Erik da Rosa Rodriguez. -- 2019.  
27 f.  
Orientador: Rodrigo Rossi.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto Alegre, BR-RS, 2019.

1. Métodos Matemáticos . 2. Elementos Finitos. 3. Elasticidade. I. Rossi, Rodrigo, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Erik da Rosa Rodriguez

Análise e implementação do Método de Elementos Finitos Estendido (XFEM) para problemas bidimensionais de elasticidade infinitesimal com interface bimaterial

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Mário Roland Sobczyk Sobrinho  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rossi

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Rodrigo Rossi

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Porto Alegre, dezembro de 2019

*“Let the mind be enlarged,  
according to its capacity,  
to the grandeur of the mysteries,  
and not the mysteries contracted  
to the narrowness of the mind.”*  
Francis Bacon

## DEDICATÓRIA

aos meus pais por me mostrarem que  
não é preciso ser marinheiro  
para navegar

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Balbino e Seila, pelo inominável incentivo e por não me negarem apoio nas minhas escolhas.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Rossi, pelos conselhos e pela orientação precisa.

Ao Prof. Dr. Oscar Suarez, pelo suporte e pelas discussões sobre este trabalho.

À todos Professores que tive na rede pública. Àqueles que falavam sobre física quântica e campos de *Higgs*, para um aluno desinteressado de ensino médio, meu muito obrigado. Hoje começo a colher os frutos de algumas provocações, de cunho científico, da época. Nunca deixem de acreditar e provocar seus alunos.

Aos camaradas do Grupo de Mecânica Aplicada, que tornaram o ambiente de trabalho tranquilo.

Aos meus amigos, de forma geral, pelas conversas descontraídas, filosóficas, psicanalíticas e que sempre acabam em metafísica.

À psicanalista Flávia, por facilitar a elaboração das minhas questões internas e do meu desejo.

À sociedade brasileira, que dispõe, até então, de um sistema de educação pública, gratuita e de qualidade. Que ela não deixe de fornecer crescimento intelectual aos seus cidadãos, independente de sua origem socioeconômica.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDOS (XFEM)</b>	<b>3</b>
2.1	Formulação geral do XFEM . . . . .	4
2.2	Função de enriquecimento deslocada . . . . .	4
<b>3</b>	<b>DESCRIÇÃO DAS INTERFACES INTERNAS PELO MÉTODO DE CURVAS DE NÍVEL (LSM)</b>	<b>5</b>
3.1	Função de distância assinalada . . . . .	5
<b>4</b>	<b>FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO PARA PROBLEMAS DE GRADIENTES DESCONTÍNUOS</b>	<b>6</b>
4.1	Conjuntos representando os nós e elementos enriquecidos . . . . .	6
4.2	Funções de enriquecimento para interfaces bimaterial . . . . .	7
4.2.1	Função de enriquecimento absoluto . . . . .	7
4.2.2	Função de enriquecimento cume . . . . .	8
<b>5</b>	<b>INTEGRAÇÃO NUMÉRICA</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>XFEM APLICADO PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDADE INFINITESIMAL CONSIDERANDO UMA INTERFACE INTERNA COM GRADIENTE DESCONTÍNUO</b>	<b>8</b>
6.1	Formulação Forte . . . . .	8
6.2	Formulação Fraca . . . . .	9
6.3	Sistema Discreto . . . . .	9
6.4	Medidas de Erro . . . . .	10
<b>7</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>11</b>
8.1	Barra bimaterial . . . . .	11
8.2	Problema de valor no contorno com interface bimaterial . . . . .	12
<b>9</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>15</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>16</b>

# Análise e implementação do Método de Elementos Finitos Estendido (XFEM) para problemas bidimensionais de elasticidade infinitesimal com interface bimaterial

Rodriguez, Erik da Rosa

erik.rodriguez@ufrgs.br

**Resumo.** Neste trabalho foi realizado o desenvolvimento teórico e a implementação do método de elementos finitos estendidos para a solução de problemas bidimensionais de elasticidade infinitesimal que apresentam interfaces internas com gradientes descontínuos, em particular interfaces bimaterial. Utilizou-se o método de curvas de nível para representação das interfaces internas e construção da função de enriquecimento absoluto e função de enriquecimento cume. A implementação foi verificada comparando o resultado numérico com a solução analítica, para uma barra bimaterial e um problema de valor no contorno que apresenta uma inhomogeneidade. Comparou-se as características das funções de enriquecimento utilizadas em relação a taxa de convergência e número de condição. A implementação mostrou-se consistente apresentando os efeitos esperados e resultados satisfatórios.

**Palavras-chave:** XFEM, Gradiente Descontínuo, Funções de Enriquecimento, Interface Bimaterial.

**Abstract.** In this work, the theoretical aspects and the implementation of the extended finite element method are performed to solve two-dimensional problems in infinitesimal elasticity that exhibits internal interfaces with discontinuous gradients, in particular bimaterial interfaces. The level-set method is used to perform the internal interfaces and to build the absolute enrichment function and the ridge enrichment function. The implementation is verified by comparing the numerical result with an analytical solution, for a bimaterial bar and a boundary value problem with an inhomogeneity. The enrichment functions characteristics are compared about the rate of convergence and the condition number. The implementation is proved to be consistent with expected effects and satisfactory results.

**Keywords:** XFEM, Discontinuous Gradient, Enrichment Functions, Bimaterial Interface.

## 1 INTRODUÇÃO

Métodos numéricos de aproximação são usuais para a abordagem de problemas físicos que são governados por equações diferenciais parciais. Com o passar dos anos, novos métodos numéricos de aproximação surgem propondo melhorar os problemas inerentes aos métodos já consolidados pela comunidade científica, como o método dos elementos finitos ou *finite element method* (FEM). O FEM foi amplamente explorado desde a década de 60, estando presente em muitos softwares comerciais na sua forma mais clássica: utilizando polinômios de *Lagrange* como função de forma. Conforme Fries e Matthies (2004), a utilização de polinômios de *Lagrange* se deve, principalmente, a duas características: os valores nodais computados correspondem diretamente a solução do problema e o suporte compacto que garante a matriz de rigidez global esparsa e com banda diagonal em algoritmos de solução implícita. De acordo com Belytschko et al. (2014), o FEM é adequado para aproximações de soluções suaves, caso o problema apresente descontinuidades a malha precisará ser conforme com a interface da descontinuidade e um refinamento deverá ser realizado para aproximar o campo na região. Para casos onde existe uma lei de evolução da descontinuidade, o tratamento da malha pode requerer um alto custo computacional ou até mesmo ser impossível.



Na mecânica de meios contínuos, conforme Belytschko et al. (2009), soluções não-suaves são encontradas tanto na mecânica dos sólidos na forma de trincas, bandas de cisalhamento, inclusões e furos, como na mecânica dos fluidos na forma de ondas de choque, camada limite e fluidos multifásicos. De forma geral, o encontro entre diferentes fases ou materiais envolvem não somente diferenças de propriedades entre eles, como também, equações diferenciais diferentes, como em problemas de interface sólido-líquido. Estes fenômenos podem ser tratados, do ponto de vista matemático, na forma de altos gradientes, dobras (*kinks*), saltos e singularidades.

Durante as últimas décadas, surgiram diversos métodos numéricos baseados no conceito de partição de unidade, que buscam modificar o espaço de aproximação com objetivos específicos como evitar o remalhamento ou aproximar de forma mais precisa o campo. Métodos como o *partition of unity method* (PUM) por Babuška e Melenk (1997), *partition of unity finite element method* (PUFEM) por Melenk e Babuška (1996), *hp-clouds* por Duarte e Oden (1996) e o *generalized finite element method* (GFEM) por Strouboulis et al. (2000), enriquecem o espaço de aproximação adicionando uma base extrínseca que apresenta como objetivo aumentar a ordem de consistência da aproximação ou incluir o conhecimento *a priori* da solução no espaço de aproximação. Esses métodos necessitam de abordagens específicas como utilizar uma integração numérica apropriada, desenvolver uma estrutura de dados efetiva, reduzir o custo computacional, lidar com problemas de condicionamento e utilizar procedimentos especiais para a imposição de condições de contorno.

No *extended finite element method* (XFEM) ou método dos elementos finitos estendidos, proposto em Moës et al. (1999) e Belytschko e Black (1999), o conceito de partição de unidade é utilizado para introduzir termos não-polinomiais ao espaço de aproximação, com o objetivo de representar fenômenos não-suaves como: altos gradientes, dobras (*kinks*), saltos e singularidades. Assim, não necessitando da utilização de uma malha conforme com a interface da descontinuidade, como o FEM, podendo ser visto na Figura 1. Os efeitos não-suaves resultantes das descontinuidades, em grande parte, são fenômenos locais não sendo necessário o enriquecimento global de toda a solução, optando-se por enriquecimentos em subdomínios específicos. Desta forma, o XFEM pode ser considerado um método baseado em partição de unidade que apresenta base extrínseca adicionada em subdomínios específicos, buscando capturar o efeito de descontinuidades com funções de forma não-suaves de modo a ser parcialmente independente de malha.

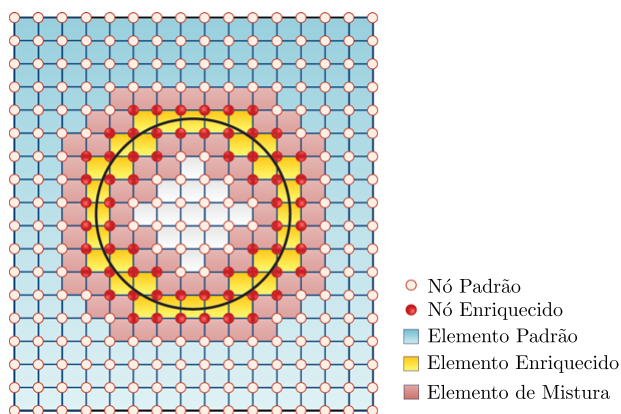


Figura 1: Domínio utilizado no XFEM, onde não existe a necessidade de utilizar uma malha conforme com a interface da descontinuidade, no caso uma interface bimaterial. Adaptado de Khoei (2014).

O XFEM incorpora os efeitos das interfaces internas do domínio através de enriquecimentos locais extrínsecos do espaço de aproximação. Uma técnica que vem sendo utilizada para determinar a interface é o *Level Set Method* (LSM) ou método de curvas de nível proposto por Osher e Sethian (1988) e mais elaborado por Sethian (2001). Este método representa de forma implícita a interface por uma função global no domínio, sendo a interface justamente o zero da função, esse método ainda

permite acompanhar a evolução da interface caso apresente uma lei de evolução, como trincas ou interfaces sólido-líquido. Outra vantagem, é a possibilidade de escrever as funções de enriquecimento em função dos valores da curva de nível.

Os diferentes constituintes em materiais compósitos e policristalinos, muito utilizados em aplicações industriais, resultam em gradientes de deslocamentos descontínuos. Materiais compósitos vem sendo utilizados em diversas aplicações por possuírem alta resistência específica, podendo ainda reduzir custo nas estruturas. A modelagem dos mecanismos de deformação nestes materiais é de fundamental importância para o avanço no desenvolvimento e na aplicação de novos materiais, já que cada vez mais é necessário propor melhorias nas escalas de mais baixo nível para melhorá-lo. Na Figura 2 é mostrado a modelagem de uma estrutura policristalina pelo FEM e XFEM.

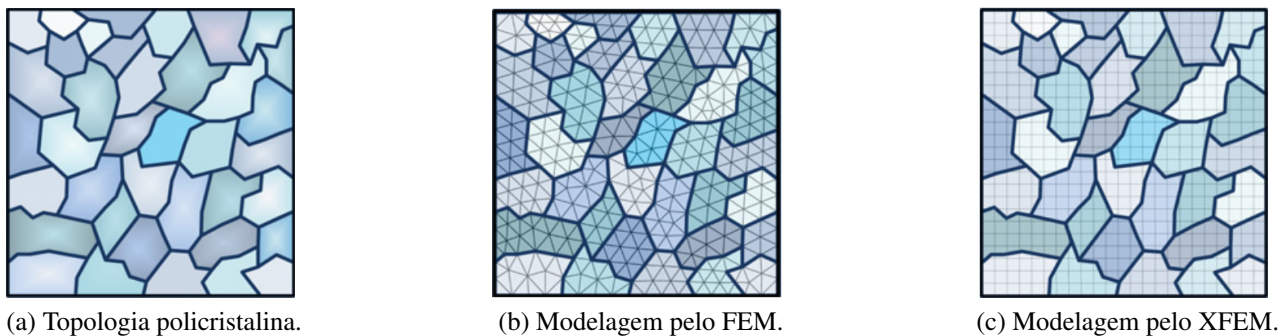


Figura 2: Modelagem de uma estrutura policristalina. Adaptado de Khoei (2014).

A primeira implementação do XFEM, para problemas com gradientes descontínuos, foi a modelagem de vazios e inclusões feita em Sukumar et al. (2001), onde o LSM é utilizado para representar a localização das interfaces internas, através de uma função de enriquecimento absoluto. A partir do trabalho de Moës et al. (2003) começou-se a modelar microestruturas com geometrias complexas e deu-se a proposição da função de enriquecimento cume. O maior problema do FEM para obter o comportamento de materiais heterogêneos por homogeneização numérica é construir a malha conforme aos contornos das heterogeneidades. Com isso, também começou-se a abordar procedimentos de homogeneização, como visto em Yvonnet et al. (2008). Outros trabalhos foram desenvolvidos para materiais com gradiente funcional apresentando descontinuidades em Singh et al. (2011), para fraturas em material compósito em Hettich et al. (2008) e Huynh e Belytschko (2009) e modelagem de trincas em materiais piezoelétricos em Béchet et al. (2009). Para maiores detalhes sobre o XFEM, o método é revisado em Belytschko et al. (2009), Fries e Belytschko (2010), Abdelaziz et al. (2011) e Fries e Matthies (2004).

Este trabalho tem como objetivo: revisar os aspectos teóricos necessários para a modelagem de problemas de elasticidade infinitesimal que apresentam a solução do campo contínuo com gradientes descontínuos, particularmente interfaces bimatéria, utilizando o XFEM em conjunto com o LSM; realizar a implementação computacional do XFEM de forma que casos também possam ser executados pelo FEM; verificar a implementação analisando os resultados numéricos para dois problemas com solução analítica; investigar as implicações das funções de enriquecimento absoluto e cume, comparando-as.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDOS (XFEM)

Nesta seção, é discutida a formulação do XFEM de uma forma geral. A aproximação pelo XFEM é composta por uma base intrínseca, relativa a aproximação pelo FEM, em conjunto com uma base extrínseca. A base extrínseca apresenta os termos de enriquecimentos que são construídos pelo produto

das funções partição de unidade com as funções que permitem a captura dos fenômenos não-suaves em partes locais do domínio, assim sendo, um espaço de aproximação local. As expressões apresentadas nesta seção têm como base Fries e Belytschko (2010).

## 2.1 Formulação geral do XFEM

Considere um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  particionado por  $n^{el}$  elementos, formando uma malha.  $I$  é o conjunto de todos os nós do domínio e  $I_k^{el}$  são os nós do elemento  $k \in \{1, \dots, n^{el}\}$ . A aproximação de uma função  $u(x)$ , ou seja,  $u^h(x)$  pode ser feita utilizando o conceito de partição de unidade (PU) e adicionando uma base extrínseca de tal forma que

$$u(x) \approx u^h(x) = \underbrace{\sum_{i \in I} \phi_i(x) u_i}_{\text{aproximação com base intrínseca} \equiv \text{FEM}} + \underbrace{\sum_{j \in I^*} \Psi_j(x) a_j}_{\text{enriquecimento com base extrínseca}}, \quad (1)$$

onde:  $\phi_i(x)$  é a função de forma da base intrínseca;  $u_i$  o coeficiente da base intrínseca;  $\Psi_j(x)$  a função de enriquecimento local;  $a_j$  o coeficiente da base extrínseca.

De certa maneira, fenômenos não-suaves são de carácter local, assim, não sendo eficiente computacionalmente o enriquecimento global de todos os nós. Com isso, o enriquecimento é construído localmente em um conjunto  $I^* \subset I$ .

A função de enriquecimento local apresenta a forma

$$\Psi_j(x) = \phi_j^*(x) \psi(x), \quad \forall j \in I^*, \quad (2)$$

e  $\phi_j^*(x)$  deve ser uma função de forma que constrói uma PU e não necessariamente precisa ser a mesma escolhida para a base intrínseca,  $\phi_i(x)$ . Já  $\psi(x)$  é a função de enriquecimento que inclui os termos não-suaves e que podem representar o conhecimento *a priori* da solução.

As funções que constroem a PU apresentam a seguinte característica,

$$\sum_{j \in I^*} \phi_j^*(x) = 1, \quad (3)$$

nos elementos em que todos os nós estão contidos em  $I^*$ . Nestes elementos, de acordo com Melenk e Babuška (1996) e Babuška e Melenk (1997), a função de enriquecimento  $\psi(x)$  é reproduzida de forma exata, podendo serem chamados de *elementos reproduzidos*. Já os elementos nos quais apenas certos nós estão contidos em  $I^*$ ,  $\phi_j^*(x)$  não constrói uma PU, pois  $\sum_{j \in I^*} \phi_j^*(x) \neq 1$  e consequentemente  $\sum_{j \in I^*} \phi_j^*(x) \psi(x) \neq \psi(x)$ , assim a função  $\psi(x)$  não pode ser representada de forma exata nestes elementos, de acordo com Karihaloo e Xiao (2003), sendo chamados de *elementos de mistura*.

Elementos de mistura por não construírem uma PU, não são capazes de representar a função de enriquecimento global e ainda podem introduzir termos indesejáveis na aproximação, que em geral, não são compensados pela aproximação com base intrínseca. A presença de termos indesejáveis na aproximação em elementos de mistura é mais severa do que o fato da  $\psi(x)$  não ser reproduzida de forma exata, de acordo com Karihaloo e Xiao (2003) e Abdelaziz et al. (2011), pois estes termos podem rebaixar a taxa de convergência da aproximação em forma significativa. Uma formulação modificada foi proposta por Fries (2008), essa modificação evita termos indesejados nos elementos de mistura e ainda leva a funções de enriquecimento local contínuas caso  $\psi(x)$  for contínuo.

## 2.2 Função de enriquecimento deslocada

Em geral, a base intrínseca apresenta a propriedade de  $\delta$  de *Kronecker*,  $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ , sendo  $i$  e  $j$  dois nós distintos da malha, já que se tratam das funções de forma utilizadas no FEM que apresentam esta propriedade. Na aproximação pelo FEM, os coeficientes computados são diretamente obtidos no

nó  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_i$  e a imposição das condições de contorno de *Dirichlet* são simplesmente  $\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i)$ . Já na aproximação pelo XFEM, mostrada na Equação (1), não é possível obter a propriedade de  $\delta$  de *Kronecker* sem a alteração da função de enriquecimento. Consequentemente,  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_i) \neq \mathbf{u}_i$ , o que tornam o tratamento das condições de contorno essenciais difíceis. A propriedade de  $\delta$  de *Kronecker* só é válida quando  $\Psi_j(\mathbf{x}_i) = 0$ ,  $\forall j \in I^*$ ,  $\forall i \in I$ . Porém, isso pode ser obtido deslocando  $\psi(\mathbf{x})$  para

$$\psi_j^{desl}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j), \quad \forall j \in I^*, \quad (4)$$

no qual foi inicialmente sugerida por Belytschko et al. (2001), que também demonstra que essa formulação permite a reprodução da função  $\psi(\mathbf{x})$  de forma exata no nó. Com isso, a função de aproximação fica

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in I^*} \phi_j^*(\mathbf{x}) [\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j)] \mathbf{a}_j. \quad (5)$$

É de se notar que enquanto a Equação (5) apresenta a propriedade de  $\delta$  de *Kronecker*, os termos de enriquecimentos continuam sendo não nulos nas faces dos elementos.

### 3 DESCRIÇÃO DAS INTERFACES INTERNAS PELO MÉTODO DE CURVAS DE NÍVEL (LSM)

Nesta seção é detalhado o método de curvas de nível *ou level set method* (LSM), proposto por Osher e Sethian (1988) e mais elaborado por Osher e Fedkiw (2003). Esta técnica vem sendo utilizada em conjunto com o XFEM, tanto para identificação e propagação da interface, como para a obtenção das funções de enriquecimento.

Este método representa de forma implícita a interface por uma função  $\gamma(\mathbf{x})$  no domínio, sendo a interface justamente o zero da função. O método ainda permite a propagação da interface posta por uma equação de *Hamilton-Jacobi* para uma dada velocidade de propagação na direção normal da interface, porém, a propagação não é abordada neste trabalho.

Um caso particular deste método é a função de distância assinalada, obtêm-se valores de distâncias de ambos os lados de uma interface, sendo cada um destes lados carregados com sinais contrários. Logo a interface fica implicitamente representada pelos valores nulos desta função. Utilizando este método de uma maneira discretizada, fica fácil localizar a interface identificando quais são os elementos que trocam de sinal nos seus nós. Desta maneira, o método também se mostra interessante para a identificação dos elementos que receberão o enriquecimento.

Esta técnica começou a ser utilizada em conjunto com o XFEM para a descrição de inclusões e furos em Sukumar et al. (2001) e de trincas em Stolarska et al. (2001). Posteriormente, houveram modificações do método com tentativas de melhorar a descrição da propagação de trincas, Ventura et al. (2002) e Ventura et al. (2003).

#### 3.1 Função de distância assinalada

Seja um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , conforme a Figura 3, decomposto em duas regiões,  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$ , de forma que  $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$  e  $\Omega_A \cap \Omega_B = \Gamma_I$  por meio de uma função  $\gamma(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que é positiva em  $\Omega_A$ , negativa em  $\Omega_B$  e zero na interface  $\Gamma_I$ .

A função distância assinalada pode ser definida como

$$\gamma(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}^* \in \Gamma_I} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \text{sign}[\mathbf{n}_I(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)], \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6)$$

sendo  $\|\bullet\|$  a norma euclidiana, e a isolinha zero desta função é a posição da interface

$$\Gamma_I = \{\mathbf{x} : \gamma(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega\}. \quad (7)$$

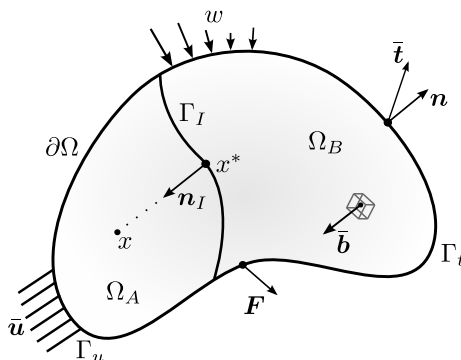


Figura 3: Representação esquemática do domínio  $\Omega$ , decomposto em duas regiões  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$ , com interface interna  $\Gamma_I$  e vetor normal  $\mathbf{n}_I$ . O contorno  $\partial\Omega$ , apresenta o vetor normal externo  $\mathbf{n}$ , e é decomposto em dois conjuntos complementares  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$ . Deslocamentos  $\bar{\mathbf{u}}$  são prescritos no contorno de *Dirichlet*  $\Gamma_u$ , trações  $\bar{\mathbf{t}}$  são prescritas no contorno de *Neumann*  $\Gamma_t$  e forças de corpo  $\bar{\mathbf{b}}$  sobre o domínio  $\Omega$ . Sendo ainda,  $\mathbf{x}^* \in \Gamma_I$  e  $\mathbf{x}$  um ponto qualquer do domínio.

O vetor normal à interface  $\Gamma_I$  é denotado por  $\mathbf{n}_I$ . Nota-se que o sentido de  $\mathbf{n}_I$ , deve ser discriminado para  $\Omega_A$  ou  $\Omega_B$ . O sinal nos dois lados da interface pode ser determinado por  $\text{sign}[\mathbf{n}_I(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)]$ , sendo que  $\mathbf{x}^*$  é o ponto mais próximo da interface para  $\mathbf{x}$ .

Tipicamente, os valores da função de distância assinalada são guardados nos nós  $\gamma_i = \gamma(\mathbf{x}_i)$  e a função de distância assinalada é aproximada por

$$\gamma^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x}) \gamma_i. \quad (8)$$

A representação da descontinuidade como uma isolinha zero, dada pela Equação (7), é só uma aproximação da função real, o que melhora com o refinamento de malha ou com o aumento da ordem de interpolação.

É de se notar que  $\min_{\mathbf{x}^* \in \Gamma_I} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$  é a distância projetada do ponto  $\mathbf{x}$  em  $\Gamma_I$ , porém devido ao fato da interface interna ser discretizada,  $\min_{\mathbf{x}^* \in \Gamma_I} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$  pode estar contido em um conjunto de cone de normais, para este caso a distância mínima entre o ponto  $\mathbf{x}$  e a interface  $\Gamma_I$  é dada pela distância entre o ponto  $\mathbf{x}$  e o nó mais próximo pertencente a  $\Gamma_I$ .

## 4 FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO PARA PROBLEMAS DE GRADIENTES DESCONTÍNUOS

Na Seção 2, a formulação XFEM foi descrita de forma geral, sem especificar quais seriam os nós enriquecidos e as funções de enriquecimento. Já na Seção 3, foi apresentado o LSM que permite descrever a interface de forma implícita. Nesta seção, a descrição da descontinuidade pelo LSM é utilizada para identificação dos elementos enriquecidos e são apresentadas funções de enriquecimento para o tratamento de problemas de gradiente descontínuo, especificamente para a abordagem de interfaces bimaternal.

### 4.1 Conjuntos representando os nós e elementos enriquecidos

Um elemento cortado pela interface apresentará valores da Equação (6) com sinais contrários. Com isso, o conjunto representando os elementos enriquecidos é dado por

$$\mathcal{N} = \left\{ k \in \{1, \dots, n^{el}\} : \min_{i \in I_k^{el}} \gamma^h(\mathbf{x}_i) \max_{i \in I_k^{el}} \gamma^h(\mathbf{x}_i) < 0 \right\}, \quad (9)$$

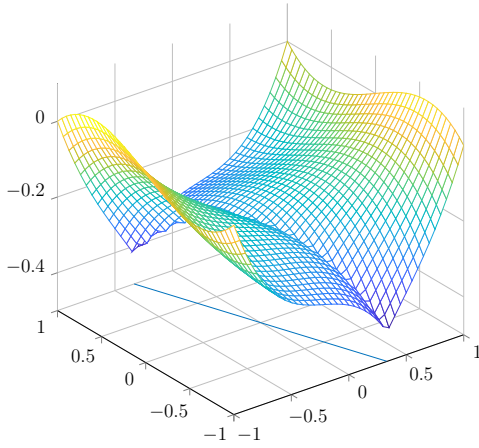
onde  $I_k^{el}$  são os nós do elemento  $k$ .

O subconjunto nodal  $I^*$  contendo todos os nós enriquecidos pode ser representado através do conjunto de elementos enriquecidos  $\mathcal{N}$  de tal forma que

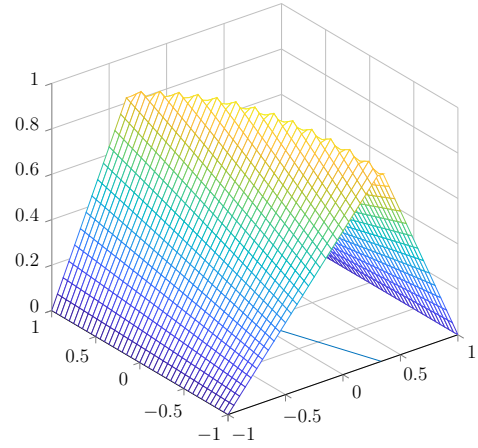
$$I^* = \bigcup_{k \in \mathcal{N}} I_k^{el}. \quad (10)$$

## 4.2 Funções de enriquecimento para interfaces bimaterial

Dentro das proposições de funções de enriquecimento para problemas de gradientes descontínuos, estão a *função de enriquecimento absoluto* proposta por Sukumar et al. (2001) e a *função de enriquecimento cume* proposta por Moës et al. (2003), ambas descritas nesta seção, que resultam nas funções de enriquecimento local mostradas, respectivamente, nas Figuras 4a e 4b.



(a) Função de enriquecimento local construída com a função de enriquecimento absoluto.



(b) Função de enriquecimento local construída com a função de enriquecimento cume.

Figura 4: Funções de enriquecimento local utilizadas para a descrição de problemas com gradientes descontínuos, obtidas utilizando os valores da função de distância assinalada para uma interface inclinada.

### 4.2.1 Função de enriquecimento absoluto

Para capturar uma função com gradiente descontínuo pode ser utilizada uma função de valor absoluto em função da Equação (8) ficando

$$\psi_{abs}(\mathbf{x}) = \text{abs} [\gamma^h(\mathbf{x})], \quad (11)$$

e com gradiente dado por

$$\text{grad} [\psi_{abs}(\mathbf{x})] = \text{sign} [\gamma^h(\mathbf{x})] \text{grad} [\gamma^h(\mathbf{x})], \quad (12)$$

a Equação (5), para a função de enriquecimento absoluto fica

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in I^*} \phi_j^*(\mathbf{x}) \{ \text{abs} [\gamma^h(\mathbf{x})] - \text{abs} [\gamma^h(\mathbf{x}_j)] \} \mathbf{a}_j. \quad (13)$$

Como pode ser visto na Figura 4a, a função de enriquecimento local apresenta valores não-nulos nas faces do elemento, levando assim à termos espúrios nos elementos de mistura, e nulos nos nós devido à função ter sido deslocada.

#### 4.2.2 Função de enriquecimento cume

A função de enriquecimento cume, concebida em Moës et al. (2003), é uma proposta que melhora a aproximação e a taxa de convergência, para alguns casos, quando comparada com a Equação (11) e apresenta a forma

$$\psi_{cume}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I^*} \phi_j^*(\mathbf{x}) \text{abs}(\gamma_j) - \text{abs} \left[ \sum_{j \in I^*} \phi_j^*(\mathbf{x}) \gamma_j \right]. \quad (14)$$

Nota-se que neste caso, a função  $\phi_j^*(\mathbf{x})$ , além de ser uma função que constrói uma PU, deverá também ser uma função de interpolação.

A maior vantagem desta função de enriquecimento é que apresenta valores não-nulos somente nos elementos cortados pela interface, não levando a termos espúrios nos elementos de mistura. Essa função de enriquecimento, mostrada na Figura 4b, apresenta um cume centrado na interface. A desvantagem é que pode tornar a matriz de rigidez singular caso a interface interseccione um nó, sendo assim necessário um procedimento de desenriquecimento deste nó.

A Equação (1), para a função de enriquecimento cume fica

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in I^*} \phi_j^*(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{j \in I^*} \phi_j^*(\mathbf{x}) \text{abs}(\gamma_j) - \text{abs} \left[ \sum_{j \in I^*} \phi_j^*(\mathbf{x}) \gamma_j \right] \right\} \mathbf{a}_j. \quad (15)$$

### 5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

No FEM, a base intrínseca são funções polinomiais, logo utiliza-se a quadratura de *Gauss-Legendre* que permite integrar polinômios de ordem  $2n_q - 1$ , onde  $n_q$  é o número de pontos da quadratura, de forma exata caso não exista distorção no suporte de integração. De outra forma, no XFEM os termos de enriquecimento podem ser não-suaves nos elementos divididos pela interface, com isso, se faz necessário realizar algumas modificações para realizar a integração numérica.

As duas estratégias mais usuais são elevar o número de pontos de integração de *Gauss* ou particionar o elemento de referência, de forma a ser conforme com a interface, e colocar pontos de integração em cada subelemento. Destas estratégias, a que apresenta melhores resultados, segundo Belytschko et al. (2009) e Fries e Belytschko (2010), é a estratégia de particionar o elemento de referência de forma conforme com a interface, pois essa estratégia garante que os pontos de integração não fiquem sobre a interface, porém, leva ao cômputo da localização da interface dentro do elemento, que é uma informação implícita.

Neste trabalho, é utilizada a estratégia de elevar o número de pontos de integração de *Gauss*, pois o fenômeno de gradientes descontínuos pode ser visto como uma não-suavidade de baixa ordem, e por ser mais segura para a primeira concepção e abordagem do XFEM. Nota-se que a taxa de convergência pode ser afetada, de acordo com Belytschko et al. (2009).

### 6 XFEM APLICADO PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDADE INFINITESIMAL CONSIDERANDO UMA INTERFACE INTERNA COM GRADIENTE DESCONTÍNUO

Nesta seção, é descrita as formulações partindo da formulação forte do problema de elasticidade infinitesimal considerando uma interface interna com gradiente descontínuo até a forma discretizada. As expressões apresentadas nesta seção têm como base Hughes (2012).

#### 6.1 Formulação Forte

Seja um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , de acordo com a Figura 3, com contorno  $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , sendo  $\bar{\Omega}$  o fecho e  $\mathbf{n}$  o versor normal exterior a  $\partial\Omega$ . O contorno é decomposto em dois conjuntos complementares

$\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$  em que  $\partial\Omega = \overline{\Gamma_u \cup \Gamma_t}$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ . Deslocamentos  $\bar{\mathbf{u}}$  são prescritos no contorno de *Dirichlet*  $\Gamma_u$  e trações  $\bar{\mathbf{t}}$  são prescritas no contorno de *Neumann*  $\Gamma_t$ . Seja ainda o domínio decomposto em duas regiões  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$ , tal que a interface material seja definida por  $\Omega_A \cap \Omega_B = \Gamma_I \subset \mathbb{R}$  e que apresente um versor normal  $\mathbf{n}_I$ . A forma forte para o problema de valor de contorno de elasticidade linear infinitesimal pode ser enunciada como:

**Problema 1.** Dado uma força de corpo  $\bar{\mathbf{b}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , condição de *Dirichlet*  $\bar{\mathbf{u}} : \Gamma_u \rightarrow \mathbb{R}$  e condição de *Neumann*  $\bar{\mathbf{t}} : \Gamma_t \rightarrow \mathbb{R}$ , encontre  $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{b}}, & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}}, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t, \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_I &= 0, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_I, \end{aligned} \quad (16)$$

onde  $\llbracket \bullet \rrbracket = \bullet^+ - \bullet^-$  é o operador salto denotando a interface e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor tensão de *Cauchy* definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (17)$$

com  $\mathbb{D}$  sendo o tensor constitutivo de quarta ordem e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  o tensor de deformação infinitesimal definido por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{grad}(\mathbf{u}) + [\operatorname{grad}(\mathbf{u})]^T \right\}. \quad (18)$$

## 6.2 Formulação Fraca

Selecionando um espaço dos deslocamentos admissíveis  $\mathcal{U} \subset H^1(\bar{\Omega}) = \{\mathbf{u} : \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \bar{\mathbf{u}}\}$  e o espaço das variações  $\mathcal{V} \subset H^1(\bar{\Omega}) = \{\mathbf{v} : \mathbf{v}|_{\Gamma_u} = 0\}$ , sendo  $H^1(\bar{\Omega})$  o espaço de *Sobolev* com primeira derivada quadrado integrável. A forma fraca do Problema 1 pode ser escrito como:

**Problema 2.** Dado  $\bar{\mathbf{b}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{\mathbf{u}} : \Gamma_u \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{\mathbf{t}} : \Gamma_t \rightarrow \mathbb{R}$ , encontre  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  tal que

$$\underbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \partial\Omega}_{a(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{b}} \partial\Omega}_{(v, \bar{\mathbf{b}})} + \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \partial\Gamma}_{(v, \bar{\mathbf{t}})_{\Gamma_t}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (19)$$

isto é, na forma bilinear

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (v, \bar{\mathbf{b}}) + (v, \bar{\mathbf{t}})_{\Gamma_t}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (20)$$

## 6.3 Sistema Discreto

Selecionando um subespaço das aproximações  $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$  de tal forma que  $\mathcal{V}^h = \{\mathbf{v}^h : \mathbf{v}^h|_{\Gamma_u} = 0\}$  e  $\mathcal{U}^h = \{\mathbf{u}^h : \mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \mathbf{q}^h, \mathbf{q}^h|_{\Gamma_u} = \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h\}$ . O Problema 2 pode ser escrita como:

**Problema 3.** Procure  $u^h \in \mathcal{U}^h$ , tal que

$$a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = (v^h, \bar{\mathbf{b}}) + (v^h, \bar{\mathbf{t}})_{\Gamma_t} - a(v^h, \mathbf{q}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h, \quad (21)$$

e os campos  $\mathbf{u}^h$  e  $\mathbf{v}^h$  são construídos com base na aproximação de XFEM, mostrada na Equação (1), ou seja,

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in I^*} \Psi_j(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j, \quad (22)$$



e

$$\mathbf{v}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i + \sum_{j \in I^*} \Psi_j(\mathbf{x}) \mathbf{c}_j. \quad (23)$$

O Problema 3 pode ser escrito como:

**Problema 4.** Encontre  $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$  tal que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \mathbf{D} \mathfrak{B} d\Omega \\ \int_{\Omega} (\mathfrak{B})^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega} (\mathfrak{B})^T \mathbf{D} \mathfrak{B} d\Omega \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix}}_d = \underbrace{\begin{Bmatrix} \int_{\Omega} \phi^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma} \Psi^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{Bmatrix}}_f, \quad (24)$$

isto é,

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad (25)$$

onde:  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do elemento;  $\mathbf{d}$  o vetor de parâmetros de deslocamentos;  $\mathbf{f}$  o vetor consistente de forças externas.

A matriz gradiente das funções de forma da parte intrínseca  $\mathbf{B}$  é definida como

$$\mathbf{B} = \text{grad } \phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \left| \right. & \phi_{2,x} & 0 & \left| \right. & \dots & \left| \right. & \phi_{n,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & \left| \right. & 0 & \phi_{2,y} & \left| \right. & \dots & \left| \right. & 0 & \phi_{n,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \left| \right. & \phi_{2,y} & \phi_{2,x} & \left| \right. & \dots & \left| \right. & \phi_{n,y} & \phi_{n,x} \end{bmatrix}^T, \quad (26)$$

a matriz gradiente da função de enriquecimento local  $\mathfrak{B}$  é dada por

$$\mathfrak{B} = \text{grad } \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{1,x} & 0 & \left| \right. & \Psi_{2,x} & 0 & \left| \right. & \dots & \left| \right. & \Psi_{n,x} & 0 \\ 0 & \Psi_{1,y} & \left| \right. & 0 & \Psi_{2,y} & \left| \right. & \dots & \left| \right. & 0 & \Psi_{n,y} \\ \Psi_{1,y} & \Psi_{1,x} & \left| \right. & \Psi_{2,y} & \Psi_{2,x} & \left| \right. & \dots & \left| \right. & \Psi_{n,y} & \Psi_{n,x} \end{bmatrix}^T, \quad (27)$$

e  $\mathbf{D}$  é a relação constitutiva elástica.

É de se notar, que devido ao fato dos campos de deslocamentos admissíveis e o campo das variações serem enriquecidos, surgem então termos provenientes do produto entre as diferentes matrizes gradiente,  $\mathbf{B}$  e  $\mathfrak{B}$ , na matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , como mostrado na Equação (24). Com isso, dependendo de como é adicionado os graus de liberdades enriquecidos na matriz de rigidez global haverá influência na banda da matriz.

## 6.4 Medidas de Erro

Algumas medidas de erro são definidas para a verificação das soluções obtidas pelo XFEM para alguns problemas que apresentam solução analítica.

A norma de energia pode ser definida como

$$\|u\|_{E(\Omega)} = \sqrt{a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + a(\mathbf{a}, \mathbf{a})}, \quad (28)$$

e a norma de deslocamentos  $L_2$  como

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{a}, \mathbf{a})}. \quad (29)$$

Com base na Equação (28) e Equação (29) define-se as seguintes medidas relativas de erro

$$\eta_{E(\Omega)} = \frac{\|u - u^h\|_{E(\Omega)}}{\|u\|_{E(\Omega)}}, \quad (30)$$

com  $\eta_{E(\Omega)}$  sendo o erro relativo com relação à norma de energia e

$$\eta_{L_2(\Omega)} = \frac{\|u - u^h\|_{L_2(\Omega)}}{\|u\|_{L_2(\Omega)}}, \quad (31)$$

com  $\eta_{L_2(\Omega)}$  o erro relativo com relação à norma de deslocamentos  $L_2$ .

## 7 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

As implementações computacionais foram realizadas no sistema computacional desenvolvido pelo grupo de pesquisa na linguagem FORTRAN. O uso deste sistema proporciona algumas vantagens, dentre elas a sua ampla biblioteca, composta por vários módulos que permitem implementações independentes e o controle sobre todos os aspectos numéricos relacionados à implementação. Para tanto, existe uma constante preocupação em conceber as implementações no mais alto nível de generalização, permitindo futuras ampliações sem a necessidade de grandes alterações no código preexistente.

As implementações foram feitas de forma que o sistema computacional executasse os problemas também pelo FEM, as principais rotinas implementadas foram:

1. Criação de uma estrutura que recebe e armazena os dados provenientes do *software* de pré-processamento com as informações da interface interna, funções de enriquecimento e integração numérica;
2. Cálculo das funções de distância assinaladas, de acordo com a Equação (6);
3. Identificação dos elementos enriquecidos, de acordo com a Equação (9);
4. Obtenção das matrizes que localizam a posição do grau de liberdade na matriz de rigidez global;
5. Montagem da matriz de rigidez e vetor de força do elemento, levando em conta o tamanho variável devido ao número de graus de liberdade do elemento, os valores interpolados da Equação (6) e a identificação da matriz constitutiva para os pontos de integração de *Gauss-Legendre*;
6. Montagem da matriz de rigidez global, levando em conta os graus de liberdades enriquecidos;
7. Modificação das rotinas que envolvem a solução de sistemas lineares: Método de solução *Sky-line* e método para matrizes cheias;
8. Obtenção das medidas de erros para os problemas analíticos.

## 8 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção é proposta a resolução de dois problemas de elasticidade infinitesimal, com solução analítica, para fins de verificação da implementação do XFEM. Primeiramente, é mostrado um caso simples: uma barra bimaterial engastada é solicitada por um deslocamento prescrito em uma das suas extremidades. O outro caso, trata-se de um problema de valor no contorno (PVC) com interface bimaterial que apresenta solicitação radial.

Os dois problemas foram resolvidos para as aproximações pelo XFEM com função de enriquecimento absoluto (XFEM-ABS), dado pela Equação (13) e pelo XFEM com função de enriquecimento cume (XFEM-CUME), dado pela Equação (15), com o objetivo de comparar as respostas para estas funções. Utilizou-se as funções de forma *Lagrangeanas* bilineares para ambas as bases, ou seja,  $\phi(\mathbf{x}) = \phi^*(\mathbf{x})$ . Preferiu-se utilizar um número grande de pontos de *Gauss*, assim, a integração numérica foi realizada com a quadratura de *Gauss-Legendre* com 64 pontos de integração. É considerada a hipótese de estado plano de deformação.

### 8.1 Barra bimaterial

Considere uma barra bimaterial  $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$  de comprimento  $L = 2$  com módulo elástico  $E_A = 10$  em  $\Omega_A$  e  $E_B = 1$  em  $\Omega_B$ , onde  $\Omega_A = (-1, \Gamma_I)$  e  $\Omega_B = (\Gamma_I, 1)$ , sendo a interface interna  $\Gamma_I$ . O corpo é mostrado na Figura 5. Para um problema com condições de contornos de *Dirichlet* com  $u(-1) = 0$  e  $u(1) = 1$ , sem forças de corpo, a solução exata em termos de deslocamento é dada por

$$u(x) = \begin{cases} (1+x)\alpha, & -1 \leq x \leq \Gamma_I \\ \frac{E_A}{E_B}(x-1)\alpha, & \Gamma_I \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (32)$$

onde

$$\alpha = \frac{E_B}{E_B(1 + \Gamma_I) - E_A(\Gamma_I - 1)}. \quad (33)$$

Para abordar este problema, considerou-se uma barra bidimensional com coeficientes de *Poisson*  $\nu_A$  e  $\nu_B$  nulos para reproduzir a resposta analítica que é unidimensional. Nota-se que a escolha do espaço bidimensional foi feita já que as funções de enriquecimento implementadas pertencem a este espaço. É realizada uma análise das medidas de erro, mostrada na Figura 9 no Apêndice, conforme a interface interna  $\Gamma_I$  é movida dentro de um determinado elemento, conforme a Figura 5, para uma malha de tamanho fixo ( $n^{el} \times n^{el}$ ,  $n^{el} = 10$ ). Para isso, deslocou-se a interface variando os valores de  $\Gamma_I = 0, 0.005, 0.01, \dots, 0.19, 0.195$  e  $0.2$ , sendo os nós, deste elemento, localizados em  $x = 0$  e  $x = 0.2$ . A interface foi discretizada com um elemento unidimensional.

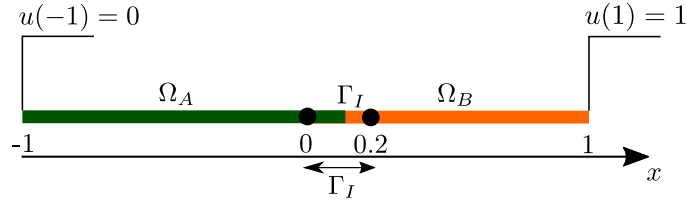


Figura 5: Configuração esquemática da geometria, interface interna e condições de contorno usadas para a barra bimaterial.

Como pode ser visto na Figura 9 no Apêndice, XFEM-CUME apresentou menor erro relativo para ambas as normas. Nota-se que existe uma variação do erro relativo conforme a interface se movimentava pelo elemento, tendo uma dependência da localização dos pontos de integração e da distância da interface ao nó. Na Figura 6 é possível verificar que o número de condição,  $n_{cond} = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ , sendo  $\lambda$  os autovalores, para a aproximação pelo XFEM-CUME cresce conforme  $\Gamma_I$  se aproxima de ambos os nós, tendendo a infinito quando o coincide. É de se notar que o mesmo não ocorre para XFEM-ABS.

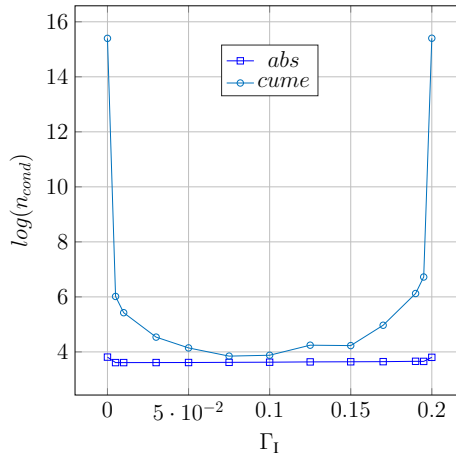


Figura 6: Número de condição conforme desloca-se a interface dentro de um elemento com nós localizados em  $x = 0$  e  $x = 0.2$ .

## 8.2 Problema de valor no contorno com interface bimaterial

Neste caso, uma placa circular  $\Omega_B$ , com  $E_B = 1$ ,  $\nu_B = 0.25$  e raio  $b$ , é solicitada por deslocamentos em seu contorno. Existe um campo de gradientes descontínuos pois essa placa apresenta

uma inhomogeneidade  $\Omega_A$ , com  $E_A = 10$ ,  $\nu_A = 0.3$  e raio  $a$ , no seu centro. Logo, o campo de gradientes fica descontínuo na interface quando  $r = a$ . É imposto um campo linear de deslocamentos:  $u_r(b, \theta) = r$  e  $u_\theta(b, \theta) = 0$ . O corpo é mostrado na Figura 7.

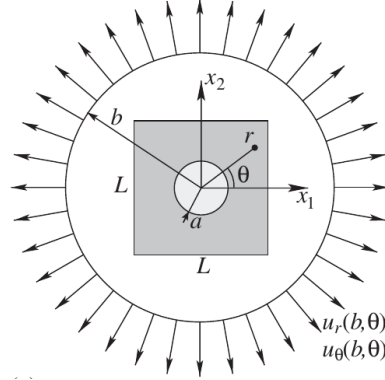


Figura 7: Configuração esquemática da geometria, interface interna e condições de contorno usadas para o PVC com interface bimaterial. Adaptado de Fries (2008).

A solução exata em termos de deslocamentos fica

$$u_r(r) = \begin{cases} \left[ \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \alpha + \frac{b^2}{a^2} \right] r, & 0 \leq r \leq a \\ \left[ \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \alpha - \frac{b^2}{r^2} \right] r, & a < r \leq b \end{cases}, \quad (34)$$

onde

$$\alpha = \frac{(\lambda_A + \mu_A + \mu_B)b^2}{(\lambda_B + \mu_B)a^2 + (\lambda_A + \mu_A)(b^2 - a^2) + \mu_B b^2}, \quad (35)$$

sendo  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé.

A deformação radial  $\varepsilon_{rr}$  e a deformação circunferencial  $\varepsilon_{\theta\theta}$  ficam definidas por

$$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = \begin{cases} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \alpha + \frac{b^2}{a^2}, & 0 \leq r \leq a \\ \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \alpha - \frac{b^2}{r^2}, & a < r \leq b \end{cases}, \quad (36)$$

e

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = \begin{cases} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \alpha + \frac{b^2}{a^2}, & 0 \leq r \leq a \\ \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \alpha - \frac{b^2}{r^2}, & a < r \leq b \end{cases}, \quad (37)$$

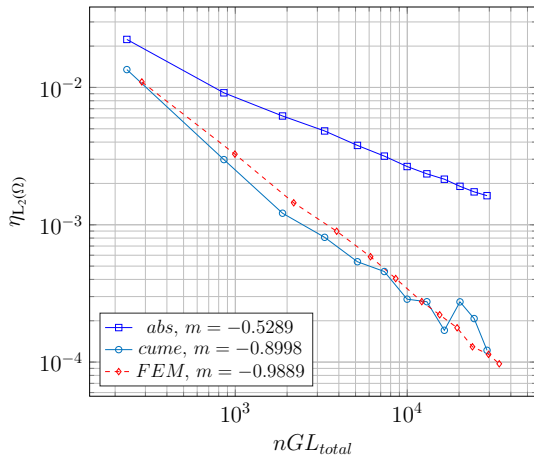
e a tensão radial  $\sigma_{rr}$  e a tensão circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  são determinadas por

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}), \quad (38)$$

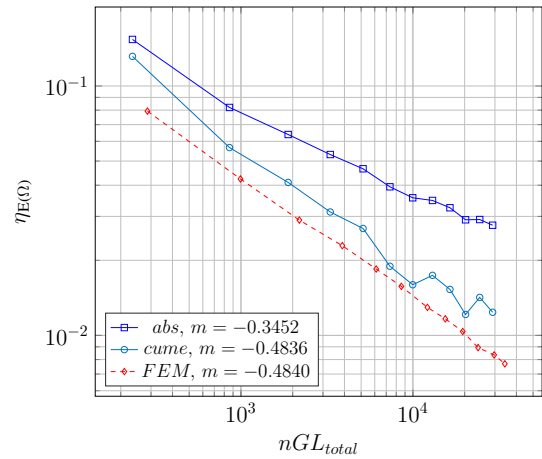
e

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}). \quad (39)$$

O modelo numérico foi feito considerando uma placa quadrada  $\Omega_B$  ( $L \times L$ ,  $L = 2$ ), apresentando uma inhomogeneidade circular  $\Omega_A$  ( $a = 0.4$  e  $b = 2.0$ ). É realizada uma análise de convergência



(a) Erro relativo com relação à norma de deslocamentos  $L_2$  com o aumento do número de graus de liberdade total.



(b) Erro relativo com relação à norma de energia com o aumento do número de graus de liberdade total.

Figura 8: Erros relativos conforme o aumento de número de graus de liberdade do PVC com interface bimaterial.

com tamanhos de malha ( $n^{el} \times n^{el}$ ) com  $n^{el}$  variando entre 10 e 120. A interface interna foi discretizada utilizando 1000 elementos unidimensionais, sendo o resultado da função de distância assinalada mostrada na Figura 10 no Apêndice. Além das aproximações realizadas pelo XFEM, foi resolvido o problema pelo FEM com malha conforme à interface, servindo como comparação.

A Figura 8a e 8b mostram a taxa de convergência para as medidas de erro relativo conforme aumenta-se o número de graus de liberdade total,  $nGL_{total}$ . A taxa de convergência  $m$  foi obtida por regressão linear dos pontos, com relação ao erro relativo e o  $nGL_{total}$ . A Figura 11a e 11b, presentes no Apêndice, mostram as normas com aumento do número de graus de liberdade enriquecidos,  $nGL_{enr}$ . Por fim, os resultados detalhados podem ser vistos na Tabela 1, para o XFEM-ABS, e na Tabela 2, para o XFEM-CUME, contidos no Apêndice.

A aproximação pelo FEM obteve  $m = -0.9889$  na norma de deslocamentos  $L_2$  e  $m = 0.4840$  na norma de energia. Já XFEM-ABS obteve taxa de convergência mais baixa, quando comparada com a aproximação pelo FEM, com  $m = -0.5289$  na norma de deslocamentos  $L_2$  e  $m = -0.3452$  na norma de energia, porém se manteve com taxa de convergência próxima de constante. É de se notar que a função de enriquecimento absoluto apresenta termos espúrios nos elementos de mistura e ainda apresentam valores não-nulos nas faces do elemento, justificando assim, a baixa taxa de convergência. A aproximação pelo XFEM-CUME obteve taxa de convergência próxima da obtida com a aproximação pelo FEM, com  $m = -0.8998$  na norma de deslocamentos  $L_2$  e  $m = -0.4836$  na norma de energia. Contudo, apresentou oscilações conforme o aumento do  $nGL_{enr}$ . Isso se deve, em parte, ao fato de existir um número maior de elementos divididos em que a interface passa muito próximo do nó, levando a uma baixa contribuição da função de enriquecimento na aproximação local do campo de deslocamentos, podendo levar a uma matriz de rigidez global mal condicionada e a oscilações na taxa de convergência.

Conforme a Figura 12a e 12b, presentes no Apêndice, mostra-se o padrão de esparsidade da matriz de rigidez global para a aproximação pelo XFEM-ABS e XFEM-CUME, respectivamente. Fica evidente que devido ao fato dos graus de liberdades enriquecidos terem sido adicionados no final da matriz de rigidez global, a matriz fica com a banda larga. É de se notar, que devido a função de enriquecimento cume ser nula nos elementos de mistura, ela apresenta menor número de termos não-nulos  $nz$ .

A função de enriquecimento para o problema de gradientes descontínuos tem como objetivo re-

presentar a interface de forma implícita, tornando parcialmente independente da malha. Visto que, agora ela é uma aproximação resultante da interpolação dos valores da função de distância assinalada. Com isso, almeja-se obter uma resposta que seja próxima da obtida pela aproximação pelo FEM. A função que representou melhor a interface, de acordo com a taxa de convergência, foi a função de enriquecimento cume, exposta na Figura 4b. É de se notar, que ela não apresenta termos espúrios e valores não-nulos na face do elemento, porém, pode levar a um mal condicionamento da matriz de rigidez global, podendo ficar singular se a interface cruzar um nó ou ficar alinhada e sobre a face de um elemento, como mostrado na Figura 6. Observa-se que a maior vantagem de utilizar o espaço de aproximação para representar a interface é que se houver um número grande de interfaces internas não será necessário que a malha seja conforme com a interface e caso a interface apresente uma lei de evolução, não será necessário remalhar.

Os resultados obtidos, bem como a eficiência da implementação do método, podem ser melhorados, em trabalhos futuros, caso:

- Utilize uma técnica que retire o enriquecimento dos nós que coincidem com a interface, melhorando a oscilação da taxa de convergência e o número de condição;
- Aumente a ordem de interpolação do LSM;
- Aumente a ordem das funções de forma utilizadas;
- Melhore a montagem da matriz de rigidez global, considerando os graus de liberdade enriquecidos, de modo a ficar com menor banda;
- Integre numericamente de forma mais eficiente, por exemplo, particionando o elemento de referência.

## 9 CONCLUSÃO

Com este trabalho foi possível desenvolver os aspectos teóricos e a implementação do método de elementos finitos estendidos para a solução de problemas bidimensionais de elasticidade infinitesimal que apresentam interfaces internas com gradientes descontínuos, como interfaces bimatéria. O método de curvas de nível mostrou-se eficaz para a representação implícita das interfaces internas e construção das funções de enriquecimento. Dentre as funções de enriquecimento utilizadas, a mais adequada, de acordo com a taxa de convergência, foi a função de enriquecimento cume. Porém, salienta-se que os resultados obtidos com esta função podem ser melhorados caso se utilize uma técnica que retire o enriquecimento dos nós que estão muito próximos da interface, já que o número de condição cresce neste caso. Notou-se que a função de enriquecimento absoluto leva à termos espúrios nos elementos de misturas, influenciando de forma direta na taxa de convergência dos problemas analisados, porém, mantém um número de condição baixo quando comparado ao da função de enriquecimento cume. O XFEM mostrou-se de fácil implementação podendo ser realizado adaptando um código de FEM convencional. De modo geral, os resultados apresentaram as características e efeitos esperados e explicados neste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDELAZIZ, Y.; BENDAHANE, K.; BARAKA, A. Extended Finite Element Modeling: Basic Review and Programming. **Engineering**, v. 03, n. 07, p. 713–718, 2011. ISSN 1947-3931, 1947-394X.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The Partition of Unity Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997. ISSN 1097-0207.
- BÉCHET, E.; SCHERZER, M.; KUNA, M. Application of the X-FEM to the fracture of piezoelectric materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 77, n. 11, p. 1535–1565, 2009. ISSN 1097-0207.
- BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, n. 5, p. 601–620, 1999. ISSN 1097-0207.
- BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, v. 17, n. 4, p. 043001, jun. 2009. ISSN 0965-0393, 1361-651X.
- BELYTSCHKO, T. et al. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. 2th. ed. [S.l.]: Wiley, 2014.
- BELYTSCHKO, T. et al. Arbitrary discontinuities in finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 4, p. 993–1013, 2001. ISSN 1097-0207.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1, p. 237–262, dez. 1996. ISSN 0045-7825.
- FRIES, T.-P. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 75, n. 5, p. 503–532, jul. 2008. ISSN 00295981, 10970207.
- FRIES, T.-P.; BELYTSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, ago. 2010. ISSN 00295981.
- FRIES, T.-P.; MATTHIES, H.-G. Classification and Overview of Meshfree Methods. **Informatik-Berichte der Technischen Universität Braunschweig**, Institut für Wissenschaftliches Rechnen, Braunschweig, v. 2003-03, p. 64, 2004.
- HETTICH, T.; HUND, A.; RAMM, E. Modeling of failure in composites by X-FEM and level sets within a multiscale framework. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 5, p. 414–424, jan. 2008. ISSN 0045-7825.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. ISBN 978-0-486-13502-1.
- HUYNH, D. B. P.; BELYTSCHKO, T. The extended finite element method for fracture in composite materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 77, n. 2, p. 214–239, 2009. ISSN 1097-0207.

- KARIHALOO, B. L.; XIAO, Q. Z. Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review. **Computers & Structures**, v. 81, n. 3, p. 119–129, fev. 2003. ISSN 0045-7949.
- KHOEI, A. R. **Extended Finite Element Method: Theory and Applications**. Edição: 1. [S.l.]: Wiley, 2014.
- MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1, p. 289–314, dez. 1996. ISSN 0045-7825.
- MOËS, N. et al. A computational approach to handle complex microstructure geometries. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, n. 28, p. 3163–3177, jul. 2003. ISSN 0045-7825.
- MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, n. 1, p. 131–150, 1999. ISSN 1097-0207.
- OSHER, S.; FEDKIW, R. P. **Level set methods and dynamic implicit surfaces**. New York: Springer, 2003. (Applied mathematical sciences, v. 153). ISBN 978-0-387-95482-0.
- OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. **Journal of Computational Physics**, v. 79, n. 1, p. 12–49, nov. 1988. ISSN 0021-9991.
- SETHIAN, J. Evolution, Implementation, and Application of Level Set and Fast Marching Methods for Advancing Fronts. **Journal of Computational Physics**, v. 169, n. 2, p. 503–555, maio 2001. ISSN 00219991.
- SINGH, I. V.; MISHRA, B. K.; BHATTACHARYA, S. XFEM simulation of cracks, holes and inclusions in functionally graded materials. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, v. 7, n. 3, p. 199, jul. 2011. ISSN 1573-8841.
- STOLARSKA, M. et al. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 51, n. 8, p. 943–960, jul. 2001. ISSN 1097-0207.
- STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, n. 1, p. 43–69, jan. 2000. ISSN 0045-7825.
- SUKUMAR, N.; CHOPP, D. L.; MO, N. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, p. 18, 2001.
- VENTURA, G.; BUDYN, E.; BELYTSCHKO, T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 58, n. 10, p. 1571–1592, nov. 2003. ISSN 0029-5981, 1097-0207.
- VENTURA, G.; XU, J. X.; BELYTSCHKO, T. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 54, n. 6, p. 923–944, jun. 2002. ISSN 0029-5981, 1097-0207.



YVONNET, J.; QUANG, H. L.; HE, Q. C. An XFEM/level set approach to modelling surface/interface effects and to computing the size-dependent effective properties of nanocomposites. **Computational Mechanics**, v. 42, n. 1, p. 119–131, abr. 2008. ISSN 1432-0924.

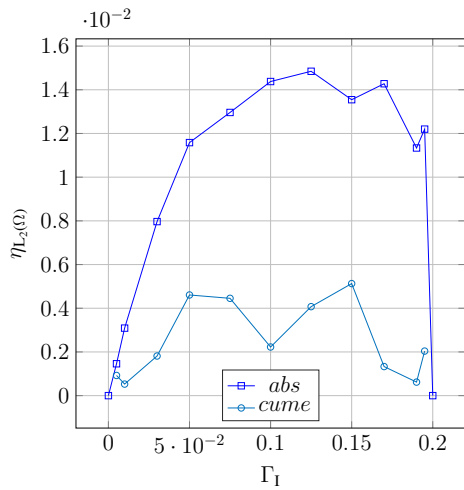
## APÊNDICE

Tabela 1: Resultados conforme o aumento do número de elementos do PVC com interface bimatéria utilizando aproximação XFEM-ABS conforme o aumento do número de elementos.

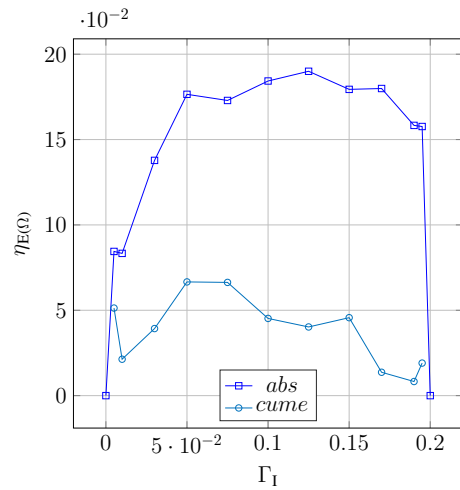
$n^{el}$	$nGL_{total}$	$nGL_{enr}$	$\ u\ _{L_2(\Omega)}$	$\eta_{L_2(\Omega)}$	$\ u\ _{E(\Omega)}$	$\eta_{E(\Omega)}$
10	234	72	2.1911	2.2367e-02	12.3520	1.5367e-01
20	858	136	2.2114	9.1382e-03	12.2439	8.2019e-02
30	1882	200	2.2147	6.1953e-03	12.2208	6.3898e-02
40	3306	264	2.2153	4.8216e-03	12.2147	5.3109e-02
50	5130	328	2.2155	3.7836e-03	12.2107	4.6561e-02
60	7354	392	2.2157	3.1617e-03	12.2076	3.9426e-02
70	9978	456	2.2158	2.6556e-03	12.2055	3.5625e-02
80	13002	520	2.2158	2.3486e-03	12.2048	3.4761e-02
90	16426	584	2.2158	2.1471e-03	12.2031	3.2494e-02
100	20250	648	2.2159	1.9054e-03	12.2028	2.9076e-02
110	24474	712	2.2159	1.7361e-03	12.2021	2.9142e-02
120	29098	776	2.2160	1.6291e-03	12.2010	2.7655e-02

Tabela 2: Resultados conforme o aumento do número de elementos do PVC com interface bimatéria utilizando aproximação XFEM-CUME conforme o aumento do número de elementos.

$n^{el}$	$nGL_{total}$	$nGL_{enr}$	$\ u\ _{L_2(\Omega)}$	$\eta_{L_2(\Omega)}$	$\ u\ _{E(\Omega)}$	$\eta_{E(\Omega)}$
10	234	72	2.1886	1.3488e-02	12.3112	1.3144e-01
20	858	136	2.2087	2.9828e-03	12.2232	5.6623e-02
30	1882	200	2.2129	1.2139e-03	12.2068	4.1055e-02
40	3306	264	2.2140	8.1023e-04	12.2035	3.1251e-02
50	5130	328	2.2145	5.3796e-04	12.2017	2.6837e-02
60	7354	392	2.2149	4.5658e-04	12.2001	1.8937e-02
70	9978	456	2.2151	2.8715e-04	12.1992	1.5963e-02
80	13002	520	2.2152	2.7522e-04	12.1991	1.7412e-02
90	16426	584	2.2154	1.7047e-04	12.1981	1.5284e-02
100	20250	648	2.2154	2.7456e-04	12.1981	1.2129e-02
110	24474	712	2.2155	2.0750e-04	12.1979	1.4203e-02
120	29098	776	2.2156	1.2185e-04	12.1973	1.2381e-02



(a) Erro relativo com relação à norma de deslocamentos  $L_2$ .



(b) Erro relativo com relação à norma de energia.

Figura 9: Erros relativos para uma interface que é deslocada dentro de um elemento com nós localizados em  $x = 0$  e  $x = 0.2$ . Nota-se que não foi possível obter resultados para a função de enriquecimento *cume*, quando  $x = 0$  e  $x = 0.2$ , devido ao número de condição.

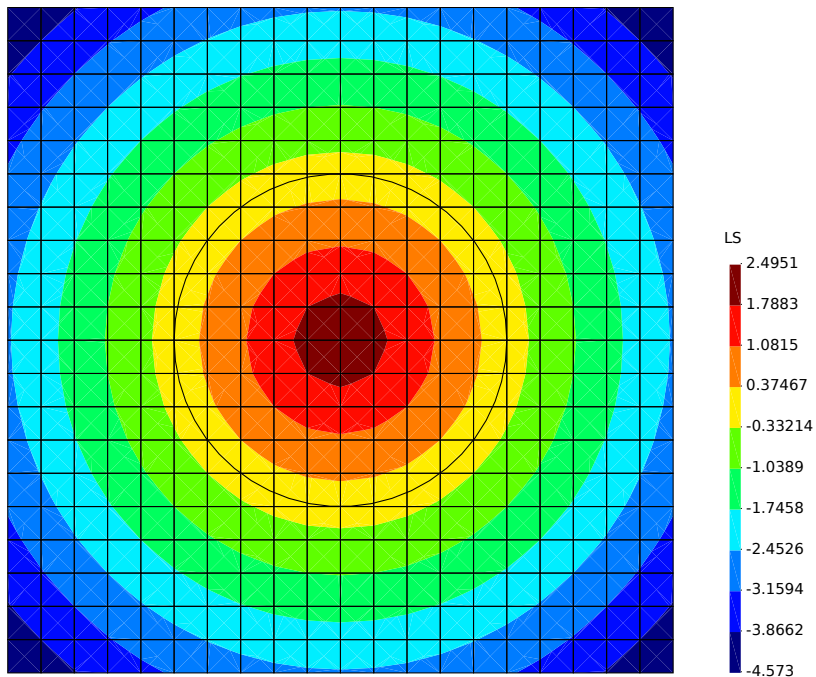
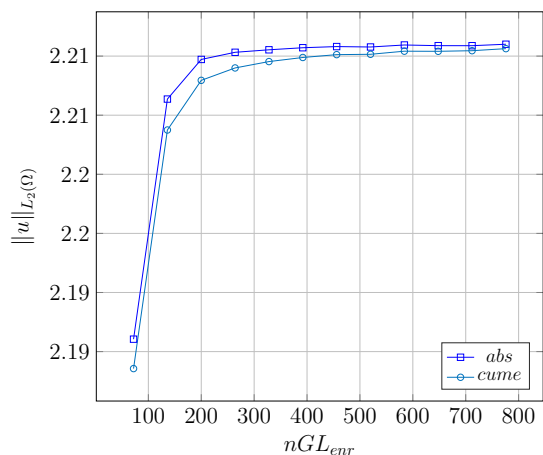
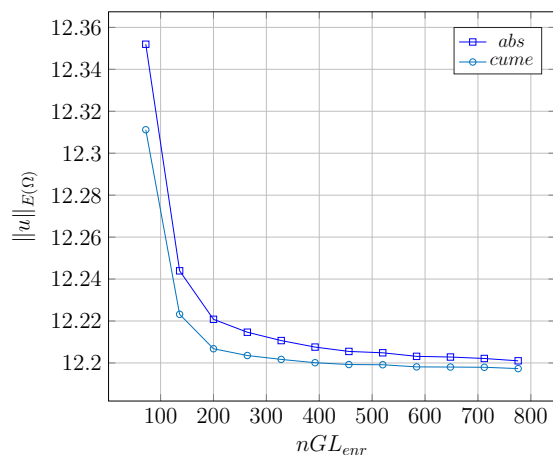


Figura 10: Curvas de nível para PVC com interface bimatéria.

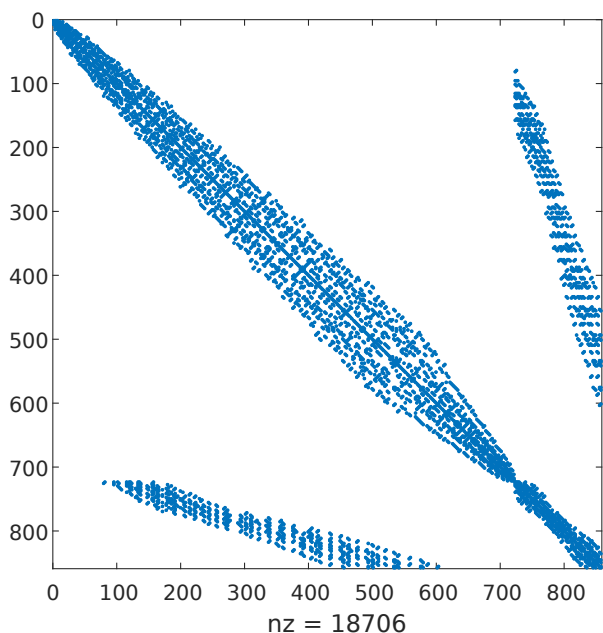


(a) Norma de deslocamentos  $L_2$  com o aumento do número de graus de liberdade enriquecidos.

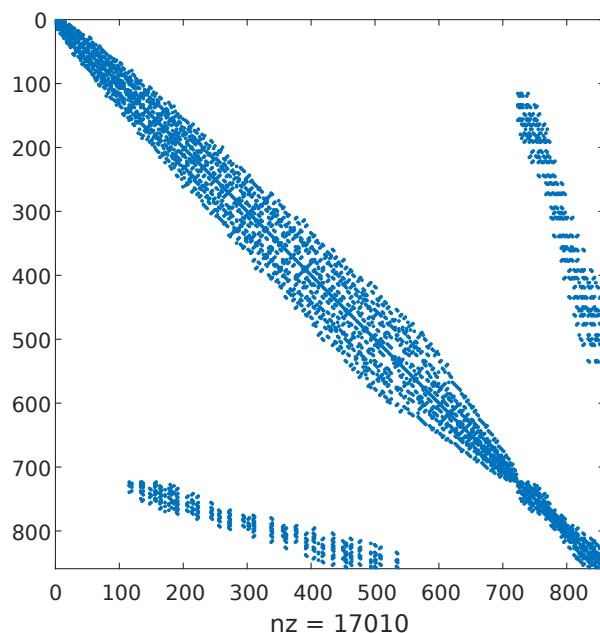


(b) Norma de energia com o aumento do número de graus de liberdade enriquecidos.

Figura 11: Normas conforme o aumento de número de graus de liberdade enriquecidos do PVC com interface bimaterial.



(a) Padrão de esparsidade da matriz de rigidez global para PVC com interface bimaterial utilizando aproximação XFEM-ABS para malha com  $n^{el} = 20$ .



(b) Padrão de esparsidade da matriz de rigidez global para PVC com interface bimaterial utilizando aproximação XFEM-CUME para malha com  $n^{el} = 20$ .

Figura 12: Padrão de esparsidade para PVC com interface bimaterial.