

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

UM ESTUDO COMPARATIVO DE CRITÉRIOS DE FALHA APLICADOS AO DANO  
PROGRESSIVO DE MATERIAIS LAMINADOS

por

Amanda Pereira Peres

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2019

## CIP - Catalogação na Publicação

Pereira Peres, Amanda  
Um Estudo Comparativo de Critérios de Falha  
Aplicados ao Dano Progressivo de Materiais Laminados /  
Amanda Pereira Peres. -- 2019.  
25 f.  
Orientador: Rogério José Marczak.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de  
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto  
Alegre, BR-RS, 2019.

1. materiais compósitos. 2. progressão de falha. 3.  
degradação de rigidez. I. Marczak, Rogério José,  
orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os  
dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Amanda Pereira Peres

UM ESTUDO COMPARATIVO DE CRITÉRIOS DE FALHA APLICADOS AO DANO  
PROGRESSIVO DE MATERIAIS LAMINADOS

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Mario Roland Sobczyk Sobrinho  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Nome: Daniel Milbrath De Leon

Prof. Nome: Jakson Manfredini Vassoler

Prof. Nome: Rogério José Marczak

Porto Alegre, 16, dezembro de 2019.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, especialmente aos meus pais, Luiz e Marcia, pelo incentivo e apoio ao longo dessa jornada.

Agradeço aos meus amigos, em especial ao Eduardo, pela amizade e pelo auxílio durante a realização desse trabalho e da graduação.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma_1$	Tensão normal longitudinal local da lâmina	[Pa]
$\sigma_2$	Tensão normal transversal local da lâmina	[Pa]
$\tau_{12}$	Tensão cisalhante local da lâmina	[Pa]
$Q_{ij}$	Coeficiente da matriz de rigidez local, $i, j = 1, 2, \dots, 6$	[Pa]
$\varepsilon_1$	Deformação longitudinal local da lâmina	[m/m]
$\varepsilon_2$	Deformação transversal local da lâmina	[m/m]
$\varepsilon_{12}$	Deformação cisalhante local da lâmina	[m/m]
$S_{ij}$	Coeficiente da matriz de flexibilidade, $i, j = 1, 2, \dots, 6$	[1/Pa]
$E_1$	Módulo de elasticidade longitudinal da lâmina	[Pa]
$E_2$	Módulo de elasticidade transversal da lâmina	[Pa]
$G_{12}$	Módulo de cisalhamento da lâmina	[Pa]
$\nu_{ji}$	Coeficiente de Poisson, $i, j = 1, 2, 3$	[Adimensional]
$\bar{Q}$	Matriz de rigidez global	[Pa]
$T$	Matriz de rotação	[Adimensional]
$\sigma_x$	Tensão normal longitudinal global da lâmina	[Pa]
$\sigma_y$	Tensão normal transversal global da lâmina	[Pa]
$\tau_{xy}$	Tensão cisalhante global da lâmina	[Pa]
$\bar{Q}_{ij}$	Coeficiente da matriz de rigidez global, $i, j = 1, 2, \dots, 6$	[Pa]
$\varepsilon_x$	Deformação longitudinal global da lâmina	[m/m]
$\varepsilon_y$	Deformação transversal global da lâmina	[m/m]
$\gamma_{xy}$	Deformação cisalhante global da lâmina	[m/m]
$A_{ij}$	Coeficiente da matriz de rigidez a tração, $i, j = 1, 2, \dots, 6$	[Pa m]
$B_{ij}$	Coeficiente da matriz de rigidez do acoplamento tração-flexão, $i, j = 1, 2, \dots, 6$	[Pa m]
$D_{ij}$	Coeficiente da matriz de rigidez a flexão, $i, j = 1, 2, \dots, 6$	[Pa m]
$z_k$	Espessura da k-ésima lâmina	
$\varepsilon_x^0$	Deformação longitudinal da superfície central	[m/m]
$\varepsilon_y^0$	Deformação transversal da superfície central	[m/m]
$\gamma_{xy}^0$	Deformação cisalhante da superfície central	[m/m]
$k_x$	Curvatura longitudinal da superfície central	[Adimensional]
$k_y$	Curvatura transversal da superfície central	[Adimensional]
$k_{xy}$	Curvatura cisalhante da superfície central	[Adimensional]
$N_x$	Força normal longitudinal	[N]
$N_y$	Força normal transversal	[N]
$N_{xy}$	Força cisalhante	[N]
$M_x$	Momento fletor na direção x da lâmina	[N m]

$M_y$	Momento fletor na direção y da lâmina	[N m]
$M_{xy}$	Momento torsor da lâmina	[N m]
$X_t$	Resistencia à tração longitudinal do laminado	[Pa]
$X_c$	Resistencia à compressão longitudinal do laminado	[Pa]
$Y_t$	Resistencia à tração transversal do laminado	[Pa]
$Y_c$	Resistencia à tração transversal do laminado	[Pa]
$S$	Resistência ao cisalhamento do laminado	[Pa]
$X_{\varepsilon_t}$	Resistencia à deformação trativa longitudinal do laminado	[Pa]
$X_{\varepsilon_c}$	Resistencia à deformação compressiva longitudinal do laminado	[Pa]
$Y_{\varepsilon_t}$	Resistencia à deformação trativa transversal do laminado	[Pa]
$Y_{\varepsilon_c}$	Resistencia à deformação compressiva transversal do laminado	[Pa]
$S_{\varepsilon}$	Resistência à deformação cisalhante do laminado	[Pa]
$X$	Resistencia a tração ou compressão longitudinal do laminado	[Pa]
$Y$	Resistencia a tração ou compressão transversal do laminado	[Pa]

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2019

UM ESTUDO COMPARATIVO DE CRITÉRIOS DE FALHA APLICADOS AO  
DANO PROGRESSO DE MATERIAIS LAMINADOS

**Peres, Amanda Pereira**

amandaperes09@hotmail.com

**Resumo.** *Materiais compósitos apresentam rigidez residual estrutural, mesmo após a falha em alguma lâmina, tornando relevante o conhecimento da ordem de falha das lâminas do material. Por essa razão, a Teoria Clássica de Laminação é utilizada para criar uma metodologia que calcule a sequência de falha em materiais laminados, através da criação de um código em linguagem Python. A metodologia aplica os critérios de falha Máxima Tensão, Máxima Deformação, Tsai-Hill e Tsai-Wu e uma degradação do tipo instantânea para encontrar a sequência de falha nos laminados  $[90/0]_s$ ,  $[90/0]_{3s}$  e  $[90/0]_{5s}$  de fibra de carbono T300 em matriz de epóxi 940C para as solicitações de flexão e torção. Os resultados encontrados mostram que a alteração do critério de falha influencia na ordem de falha, e que esse comportamento se mostra mais evidente em laminados com maior número de lâminas. Também é apresentada a alteração na rigidez e a distribuição das tensões ao longo da espessura do laminado conforme a ocorrência da falha.*

**Palavras-chave:** *material compósito, progressão de falha, degradação de rigidez.*

**Abstract.** *Composite materials can keep a residual strength even after the failure of a ply. For this reason, it is important to study the material Progressive Ply Failure (PPF). Therefore, a methodology that applies the Classical Lamination Theory in a code using Python programming language is developed to find the PPF of a laminated material. The methodology uses the Maximum Stress, Maximum Strain, Tsai-Hill and Tsai-Wu failure criteria and the instantaneous unloading material degradation model to discover the PPF of the  $[90/0]_s$ ,  $[90/0]_{3s}$  and  $[90/0]_{5s}$  composite laminates made of T300 carbon fiber in a 940C epoxy matrix. All of them are submitted to a torsion and flexure load. The results present that the different failure criteria affect the failure order and that this behavior becomes more evident in laminates with more plies. The strength variation and the stress distribution over the thickness according to the failure occurrence are also presented.*

**Keywords:** *composite material, progressive ply failure, material degradation.*

## 1. INTRODUÇÃO

Material compósito é a mistura macroscópica de dois materiais diferentes formando um terceiro com propriedades superiores. A união é macroscópica, pois os materiais podem ser vistos a olho nu (JONES, 1999). Essa combinação vem sendo utilizada desde os anos de 1500 A.C. pelos egípcios, que adicionavam palha para fortificar construções feitas de barro, porém somente após o desenvolvimento dos polímeros é que foi possível a criação da primeira fibra de vidro em 1935 pela empresa Owens Corning (NAGAVALLY, 2017). Ao longo dos anos seu uso foi crescendo na indústria aeronáutica e automobilística, em razão de apresentar propriedades como alta resistência, baixo peso, resistência a altos carregamentos, mesmo com falha, entre outras.

O fato de o material manter uma rigidez estrutural residual mesmo apresentando falha, torna importante o conhecimento da progressão da falha para possibilitar a previsão da máxima carga suportada pelo laminado antes do colapso e, assim, projetar de maneira mais eficiente seu uso.

Com esse propósito SLEIGHT (1999), desenvolveu um método para obter a previsão da falha em materiais compósitos. O método, que foi implementado no programa de análise de elementos finitos COMET, foi baseado na teoria clássica de laminação e utilizou diferentes critérios de falha para prever os mecanismos de falha do material, além de diversos modelos de degradação. Os resultados encontrados apresentaram correlação com dados experimentais, com exceção de estruturas onde tensões interlaminares são importantes, pois são suscetíveis a falhas como descolamento e delaminação.

COELHO (2016) previu a progressão de dano em materiais compósitos reforçados com fibra através da modelagem computacional no programa Abaqus, sem a utilização de sub-rotinas customizadas. Foi encontrado que a análise em elementos finitos pode prever a progressão e desenvolvimento da falha para diferentes fenômenos como delaminação, falha no plano da lâmina e comportamento em entalhes.

Também buscando a avaliação da progressão de falha em materiais compósitos ANGÉLICO (2009), utilizou resultados experimentais para identificar falhas intralaminares, além de uma análise numérica feita em um modelo de material laminado submetido a flexão de 3 pontos implementado no Abaqus. No modelo, quando algum dos critérios de falha utilizados encontra a falha, as propriedades do material são degradadas. Comparando os resultados experimentais e da simulação, concluiu-se que o modelo implementado é adequado para previsão da falha na primeira camada e para a redução da rigidez estrutural e resistência residual.

Em relação à degradação das lâminas falhadas, MURRAY; SCHWER (1990) utilizaram elementos finitos através de um código implementado no DYNA3D, para formular um modelo de degradação para materiais compósitos. O modelo consiste em um critério de falha iterativo e uma regra de degradação pós falha. O critério de falha de Chang foi utilizado, que divide a falha em trinca na matriz, falha compressiva na matriz e falha na lâmina. Quando um dos critérios é satisfeito, algumas ou todas as constantes elásticas do material na lâmina em questão são zeradas. Os resultados indicam que o modo de falha da fibra se assemelha aos resultados encontrados em ensaios biaxiais. No entanto, quando algumas hipóteses são feitas, o critério de trinca na matriz não modela a resistência sob determinados carregamentos.

O objetivo do presente trabalho foi criar uma rotina de cálculo em Python para calcular a *progressive ply failure* (PPF), ordem de falha no laminado, em materiais compósitos. Foi realizado o cálculo da PPF para três laminados, com 4, 12 e 20 lâminas orientados a 0° e 90°, formados por fibra de carbono T300 em uma matriz de epóxi 914C. Foram utilizados os critérios de falha Máxima Deformação e Tensão, Tsai-Hill e Tsai-Wu nos três laminados. Após a *first ply failure* (FPF), primeira lâmina que falha, foi utilizado um modelo de degradação na lâmina e novamente aplicado o critério de falha até o colapso do laminado.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1. Materiais ortotrópicos

Materiais ortotrópicos são materiais com três planos ortogonais de simetria das propriedades dos materiais (JONES, 1999). Quando as tensões e deformações estão alinhadas às coordenadas principais do material, não há acoplamento entre tensões normais e deformações cisalhantes. Para um modelo 2D, a relação tensão-deformação nas coordenadas principais para cada lâmina é apresentada na equação:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1).$$

A matriz  $Q$  também pode ser chamada de matriz de rigidez local, e quando não está alinhada às direções principais do material, não apresenta nenhum termo nulo.

A relação descrita pela Equação (1) pode ser apresentada com a deformação em evidência conforme a equação abaixo

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

sendo  $S$  a matriz de flexibilidade que pode ser escrita como

$$S = Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (3).$$

Uma consideração importante em relação aos materiais ortotrópicos é a relação entre os diferentes coeficientes de Poisson, definida como

$$\frac{\nu_{ij}}{\nu_i} = \frac{\nu_{ji}}{\nu_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \quad (4).$$

Quando o material analisado é um laminado formado por lâminas com diferentes orientações, a matriz local deve ser multiplicada por uma matriz de rotação, denominada  $T$ , de maneira que todas as lâminas sejam apresentadas com o mesmo referencial e não mais em relação às suas coordenadas principais. A matriz de rigidez se torna global e assume a notação  $\bar{Q}$ , e a relação tensão-deformação passa a depender da matriz de rigidez global. Para facilitar o entendimento este trabalho utiliza a nomenclatura local para tudo que está relacionado com as coordenadas da lâmina e global para o que está relacionado com as coordenadas globais.

$$\bar{Q} = T^{-1}QT^{-T} \quad (5)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

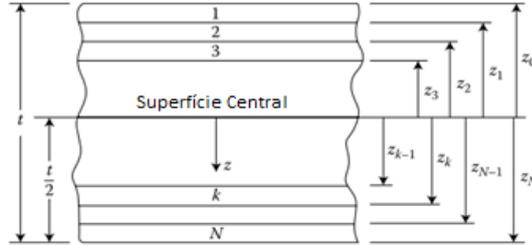
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (7).$$

## 2.2. Teoria clássica da laminação

A teoria clássica da laminação (TCL) é baseada na teoria de placas finas e, portanto, assume que o laminado é formado por lâminas ortotrópicas perfeitamente coladas, com as coordenadas principais orientadas em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . A hipótese de pequenas deformações é assumida, as deformações  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são negligenciadas, a espessura  $t$  da placa permanece constante e muito menor que as demais dimensões.

Os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  são considerados pequenos quando comparados à espessura, sendo  $u$  e  $v$  funções lineares da coordenada  $z$ . Aplicando a lei de Hooke, as tensões cisalhantes  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  resultam nulas nas superfícies da placa como consequência das hipóteses cinemáticas de placa fina (GIBSON, 2016). A posição relativa, bem como as espessuras das lâminas seguem a convenção da Figura 1.

Figura 1- Espessuras das lâminas em relação à superfície central.



A partir das matrizes de rigidez de cada lâmina calcula-se a matriz de rigidez do laminado, chamada matriz ABD. A matriz ABD é formada pela matriz A que representa a rigidez à tração, pela matriz B que consiste na rigidez do acoplamento entre flexão e tração, e pela matriz D que representa a rigidez à flexão. As matrizes A, B e D são calculadas conforme as equações a seguir.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (8)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (9)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (10).$$

### 2.2.1. Deformações no laminado

As deformações são consideradas contínuas ao longo da espessura do laminado e dependem das deformações e curvatura da superfície central. As deformações são definidas por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (11).$$

A partir da matriz ABD e das solicitações, obtêm-se as deformações em função da espessura em um laminado, conforme

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12).$$

Conhecendo os valores da deformação e curvatura da membrana encontra-se a tensão ao longo da espessura através da equação

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right] \quad (13).$$

Como os valores de  $\bar{Q}$  podem variar para cada lâmina, as tensões são descontínuas ao longo da espessura total do laminado.

### 2.3. Critérios de falha para materiais não isotrópicos

O presente trabalho utilizou critérios clássicos de falha para materiais laminados. Os detalhes referentes a cada critério são detalhados na literatura (JONES, 1999).

#### 2.3.1. Critério da máxima tensão

Avalia se todas as tensões nas coordenadas principais da lâmina são menores que as respectivas resistências, caso isso não ocorra a lâmina é considerada falhada. As equações a seguir devem ser satisfeitas para que não ocorra a falha.

$$\sigma_1 < X_t \quad \sigma_2 < Y_t \quad (14)$$

$$\sigma_1 > X_c \quad \sigma_2 > Y_c \quad (15)$$

$$|\tau_{12}| < S \quad (16).$$

#### 2.3.2. Critério da Máxima Deformação

Esse critério é semelhante ao de Máxima Tensão, porém as deformações é que são avaliadas em relação às respectivas resistências. Caso alguma das desigualdades apresentadas não seja satisfeita, a lâmina é considerada falhada. As desigualdades são dadas por

$$\varepsilon_1 < X_{\varepsilon_t} \quad \varepsilon_2 < Y_{\varepsilon_t} \quad (17)$$

$$\varepsilon_1 > X_{\varepsilon_c} \quad \varepsilon_2 > Y_{\varepsilon_c} \quad (18)$$

$$|\gamma_{12}| < S_\varepsilon \quad (19).$$

### 2.3.3. Critério Tsai-Hill

Esse critério propõe uma tensão de escoamento para materiais compósitos e é uma extensão do critério de falha de Von Mises. É composto por apenas um critério que determina se ocorre a falha na lâmina, esse critério considera a influência das diferentes tensões e resistências que atuam sobre a lâmina. Caso a equação abaixo não satisfaça a desigualdade, ocorre a falha.

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} < 1 \quad (20).$$

### 2.3.4. Critério Tsai-Wu

Assim como Tsai-Hill, o critério de Tsai-Wu também considera interação entre os modos de falha, além disso, o critério define mais uma resistência ( $F_{12}$ ), que representa a interação entre as tensões em duas direções. A desigualdade que deve ser satisfeita para o material não falhar é dada por

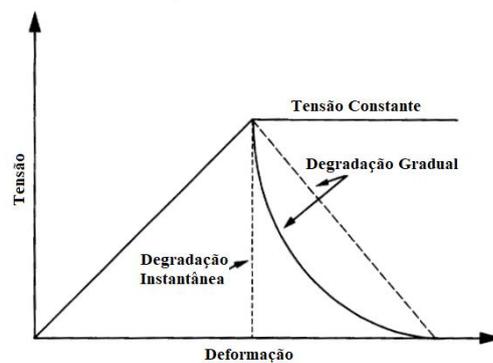
$$\left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}\right)\sigma_2 - \frac{1}{X_t X_c}\sigma_1^2 - \frac{1}{Y_t Y_c}\sigma_2^2 + \frac{\tau_{12}^2}{S} + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 < 1 \quad (21).$$

Segundo JONES (1999) a resistência  $F_{12}$  é obtida através de um ensaio biaxial. Como o ensaio biaxial é de difícil execução o valor da resistência pode ser igualado a zero, essa hipótese foi utilizada para o presente trabalho.

## 2.4. Modelo de degradação

Um modelo de degradação ajusta às propriedades do material de uma lâmina, quando a falha for detectada. Os modelos dividem-se basicamente nas categorias de degradação instantânea, onde as propriedades do material associadas com o modo de falha ocorrido são anuladas; de descarregamento gradual, quando as propriedades do material associadas com o modo de falha são reduzidas gradualmente; e de tensão constante na lâmina danificada, onde as propriedades do material são degradadas de maneira que o material não suporte nenhum carregamento adicional. A Figura 2 demonstra graficamente o comportamento dos diferentes modelos de degradação (SLEIGHT, 1999).

Figura 2 - Gráfico do comportamento dos modelos de degradação.



Fonte: SLEIGHT (1999)

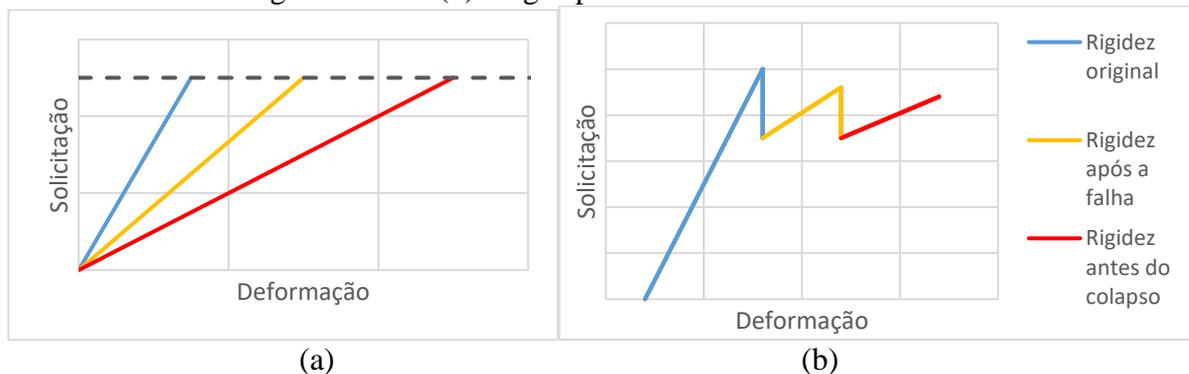
Um dos métodos mais comuns de degradação chama-se *ply-discount theory* (PDT) (SLEIGHT, 1999). Esse método está na categoria degradação instantânea e nele uma ou mais propriedades elásticas da lâmina são anuladas uma vez que a falha for detectada.

### 3. PROCEDIMENTO NUMÉRICO

Uma rotina de cálculo de falha em laminados foi desenvolvida no presente trabalho utilizando linguagem Python. Os dados de entrada são os materiais empregados no laminado, os limites de resistência de cada um, as solicitações aplicadas, a disposição e a quantidade de lâminas. O código utiliza a TCL para encontrar as matrizes de rigidez, tensões e deformações do laminado. As lâminas são numeradas de baixo para cima, ou seja, a primeira lâmina tem índice 1 e encontra-se na base inferior do laminado.

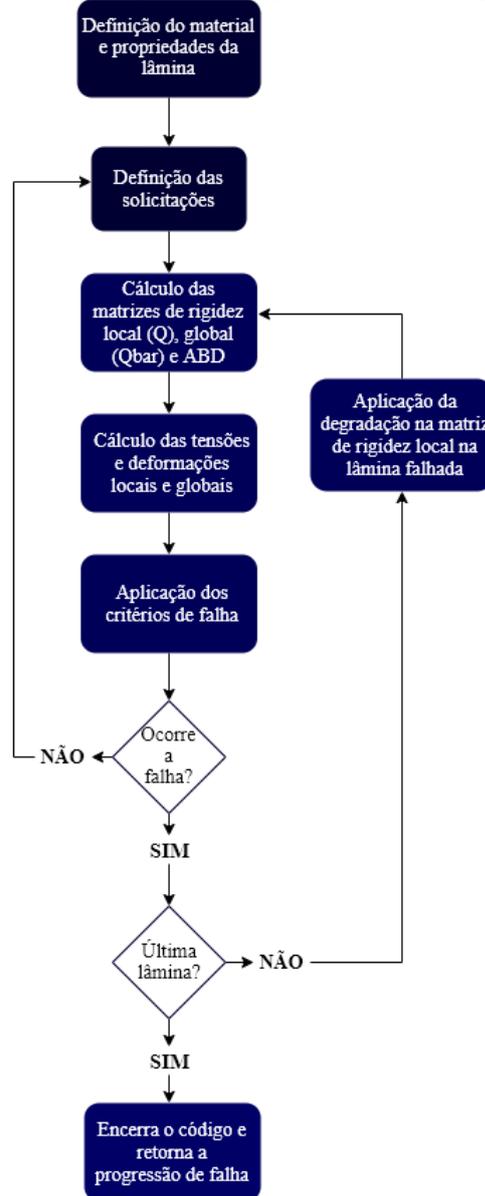
Para cada laminado a solicitação foi escolhida como a mínima necessária para que ocorra a FPF, e se manteve a mesma ao longo de todo o cálculo da PPF. A Figura 3 apresenta os gráficos da alteração da rigidez ao longo da PPF com a aplicação da carga constante, método utilizado no presente trabalho, e do comportamento quando a carga é aplicada de maneira incremental.

Figura 3 - Gráfico representando a alteração na rigidez ao longo da PPF (a) com aplicação da carga constante (b) carga aplicada incrementalmente.



Após a FPF, a relação constitutiva é degradada nas respectivas lâminas e o carregamento é novamente aplicado para proceder uma nova análise de falha nas lâminas íntegras remanescentes. A Figura 4 apresenta o fluxograma de operação do código.

Figura 4 - Fluxograma de operação do código.



Os cálculos para matrizes de rigidez, tensões, deformações e os critérios de falha são realizados dentro do laço. Como as tensões e deformações variam linearmente com a espessura de cada lâmina, essas são calculadas na base e no topo de cada lâmina. No primeiro laço, o programa calcula a FPF e retorna à posição na qual o laminado apresentou falha, assim como a lâmina equivalente àquela posição. É necessário que apenas a base ou o topo da lâmina falhe para a lâmina ser considerada falhada. Após a obtenção da falha é aplicada a degradação e o laço se repete até a obtenção de toda a progressão da falha.

### 3.1. Validação do Código

O programa Autodesk® Heliu Composite (2017) foi utilizado para fins de validação do código. Os resultados do código desenvolvido para as matrizes de rigidez e a FPF para cada critério de falha foram comparados com os resultados do Heliu Composite (2017). No entanto, o Heliu Composite (2017) possui limitações em relação ao código aqui desenvolvido:

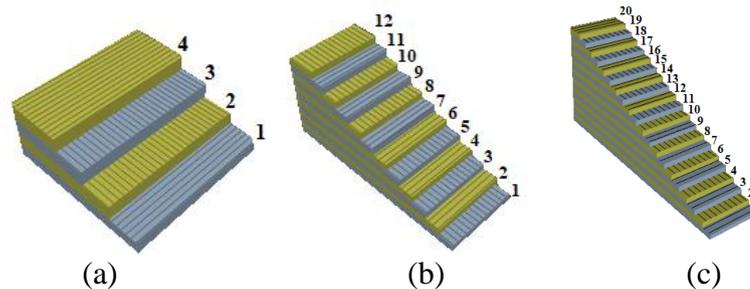
- O programa encontra apenas a FPF, não sendo possível realizar a degradação desta ou a PPF;

- É necessário definir se a análise de falha ocorrerá na base, no meio ou no topo. Não é possível encontrar mais de uma falha por vez.

#### 4. RESULTADOS

Foram avaliados três laminados, com configurações  $[90/0]_s$ ,  $[90/0]_{3s}$  e  $[90/0]_{5s}$ , todos com espessuras das lâminas de 1 mm. A Figura 5 apresenta os laminados e a numeração de suas lâminas como no código.

Figura 5 - (a) Laminado formado por 4 lâminas  $[90/0]_s$ . (b) Laminado formado por 12 lâminas  $[90/0]_{3s}$ . (c) Laminado formado por 20 lâminas  $[90/0]_{5s}$ .



Para cada laminado foram aplicadas as solicitações de torção e flexão e, para cada solicitação, foram aplicados os critérios de falha de Máxima Tensão, Máxima Deformação, Tsai-Hill e Tsai-Wu, totalizando 24 casos.

O material utilizado em todos os casos foi fibra de carbono T300 em uma matriz epóxi 914C (COELHO 2016). As Tabelas 1, 2 e 3 apresentam as propriedades do compósito e as resistências à tensão e à deformação aqui empregadas, respectivamente.

Tabela 1 - Propriedades do compósito formado por carbono e epóxi.

$E_1$	1,35E5	MPa
$E_2 = E_3$	9,60E3	MPa
$G_{12} = G_{13}$	5,80E3	MPa
$\nu_{12}$	0,31	
$\nu_{21}$	2,24E-2	

Fonte: COELHO (2016)

Tabela 2 - Resistências típicas à tensão.

$X_t$	1035	MPa
$X_c$	689	MPa
$Y_t$	41	MPa
$Y_c$	117	MPa
$S$	69	MPa

Fonte: JONES (1999)

Tabela 3 - Resistência à deformação de um compósito formado por carbono e epóxi.

$X_t$	7,67E-3	m/m
$X_c$	-5,10e-3	m/m
$Y_t$	4,27e-3	m/m
$Y_c$	-12,18e-3	m/m
$S$	11,89e-3	m/m

Os valores da Tabela 3 foram obtidos utilizando às resistências a tensão e os respectivos valores para o módulo de elasticidade.

O modelo de degradação escolhido para esse trabalho é do tipo degradação instantânea. A degradação foi aplicada zerando a matriz de rigidez local da lâmina que apresentou falha, e se assemelha ao modelo utilizado por MURRAY; SCHWER (1990), o qual zera todas as constantes elásticas do material na lâmina falhada. Esse modelo de degradação simula perda total de rigidez na lâmina, desconsiderando-a para o próximo laço.

#### 4.1. Validação do código

Para efeito de comparação com o Helius Composite (2017), o laminado  $[90/0]_{3s}$  submetido a uma flexão  $M_{yy} = 1,08e4 Nm$  foi analisado e os resultados de deformação obtidos estão apresentados na Tabela 4. Pode-se observar que o código desenvolvido apresenta concordância com o programa comercial utilizado para comparação.

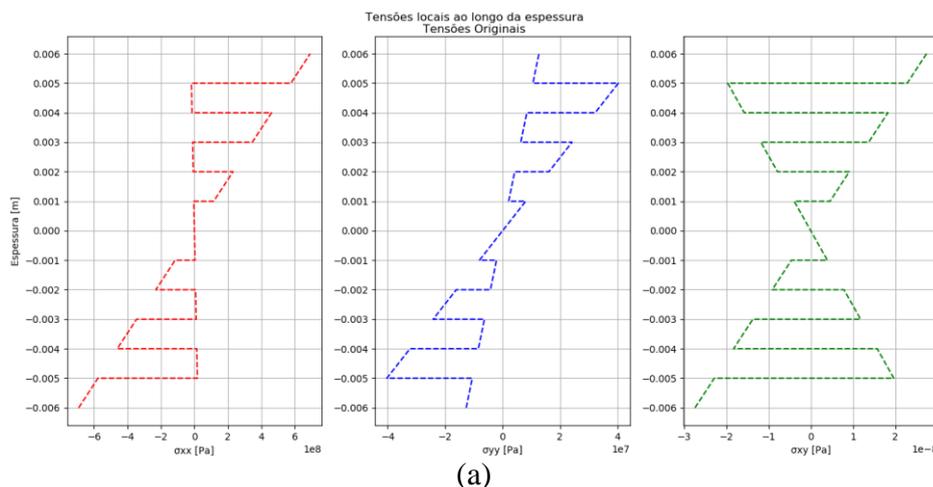
Tabela 4 - Comparação dos valores de deformação da membrana obtidos pelo código desenvolvido e pelo Helius Composite (2017).

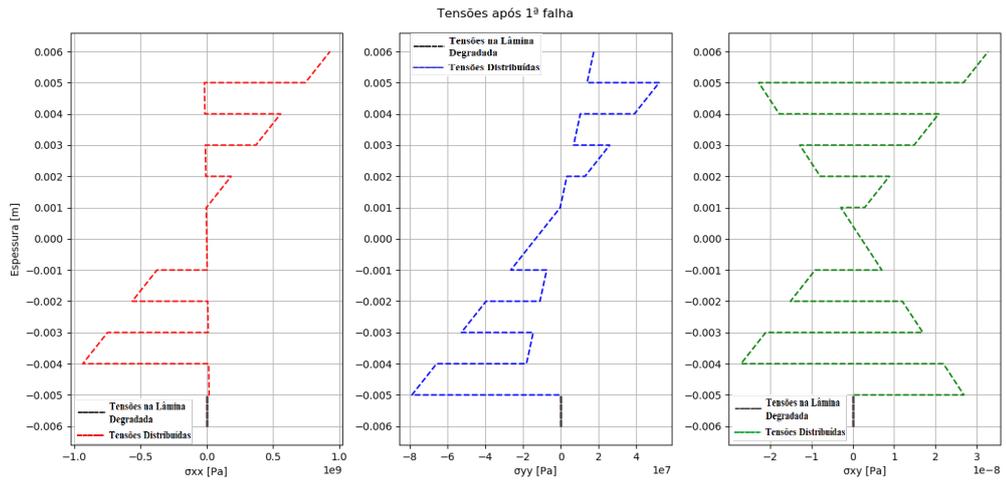
	Presente Trabalho	Helius Composite
$\epsilon_x^0$	-4,61E-21	-7,66E-21
$\epsilon_y^0$	-3,39E-19	1,14E-19
$\gamma_{xy}^0$	9,57E-35	-2,07E-34
$\kappa_x$	-4,46E-02	-1,46E-02
$\kappa_y$	8,48E-01	8,48E-01
$\kappa_{xy}$	-6,78E-16	6,77E-16

#### 4.2. Adequação da distribuição de tensões com a progressão da falha

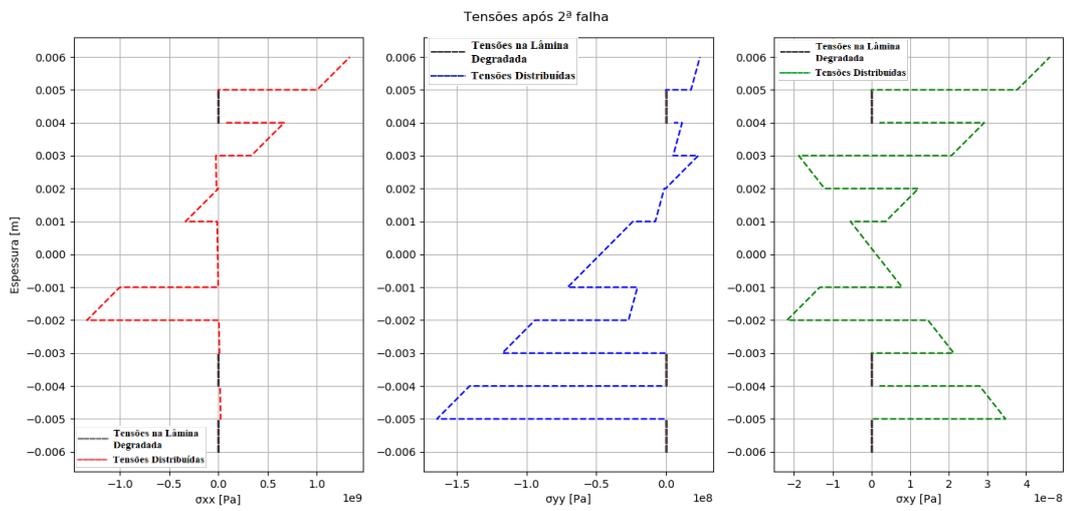
Conforme ocorrem falhas nas laminas e as mesmas perdem rigidez, as tensões no laminado se redistribuem para manter a resistência aos esforços impostos. Foram analisadas as tensões locais ao longo da espessura conforme as laminas foram falhando até a última falha antes do colapso. As Figuras 6 e 7 ilustram esse fenômeno para os casos dos laminados  $[90/0]_{3s}$  e  $[90/0]_s$ , ambos com solicitação de flexão e utilizando o critério de falha de Máxima Tensão.

Figura 6 - Distribuição das tensões locais ao longo da espessura do laminado de 12 lâminas sob flexão, utilizando o critério de falha de Máxima Tensão. (a) Tensões originais (b) Tensões após a 1ª falha (c) Tensões após a 2ª falha (d) Tensões após a 3ª falha.

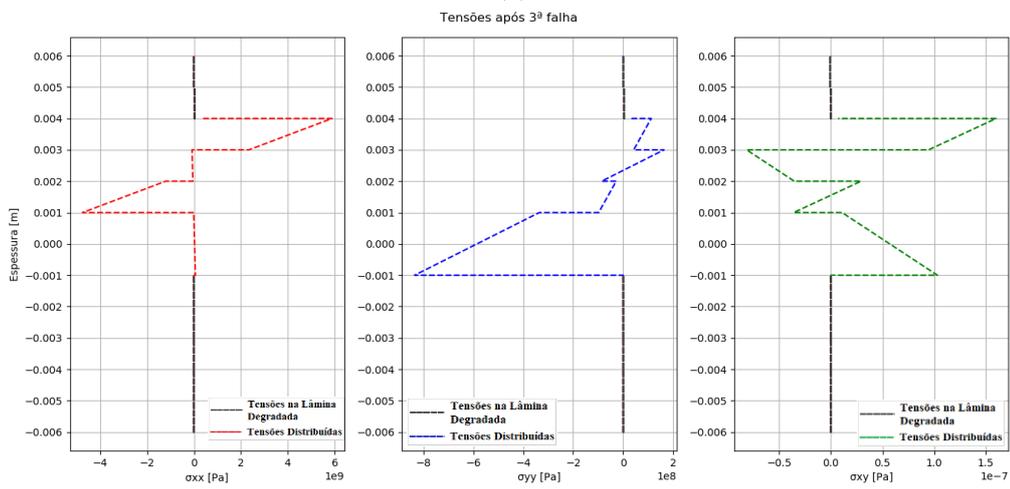




(b)

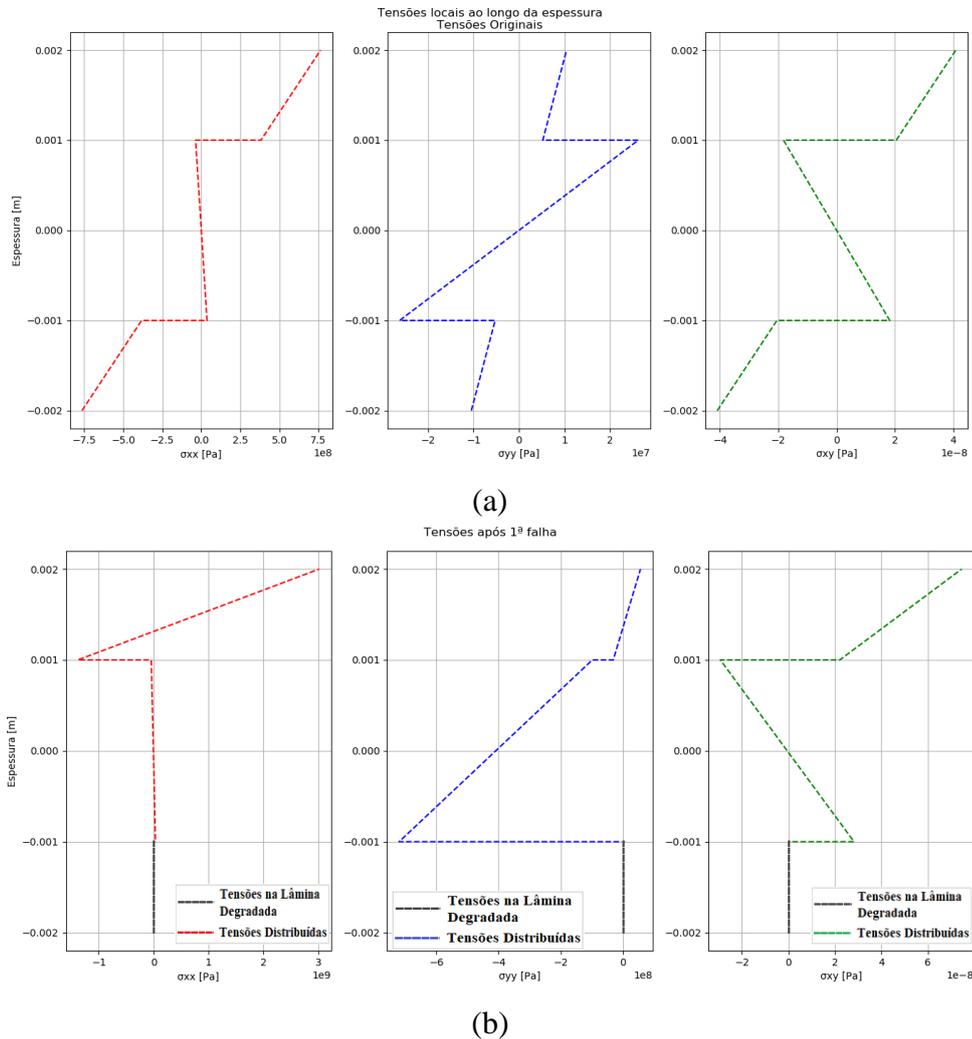


(c)



(d)

Figura 7 - Distribuição das tensões locais ao longo da espessura do laminado de 4 lâminas sob flexão, utilizando o critério de falha de Máxima Tensão. (a) Tensões originais (b) Tensões após a 1ª falha (c) Tensões após a 2ª falha (d) Tensões após a 3ª falha.



A sequência de falhas que ocorre durante a PPF é estudada nas subseções seguintes para os laminados  $[90/0]_{3s}$  e  $[90/0]_{5s}$ . Os resultados para o laminado  $[90/0]_s$  se encontram no APÊNDICE A.

### 4.3. Laminado $[90/0]_{3s}$

O laminado  $[90/0]_{3s}$  foi submetido à solicitação de flexão e de torção, os resultados da PPF e encontram-se nas Tabelas 5 e 6.

Tabela 5 – Sequência da PPF para o laminado  $[90/0]_{3s}$  submetido à flexão.

$M_{yy}$ para FPF	Critério de Falha	Ordem de Falha das Lâminas											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1,08E4 Nm	Máxima Tensão	1°	3°	2°	3°	3°	4°	4°	4°	4°	4°	2°	3°
1,10E4 Nm	Máxima Deformação	1°	3°	2°	3°	3°	4°	4°	4°	4°	4°	1°	3°
1,09E4 Nm	Tsai-Hill	1°	3°	2°	3°	3°	4°	4°	4°	4°	4°	2°	3°
1,18E4 Nm	Tsai-Wu	2°	4°	3°	4°	4°	5°	5°	5°	4°	4°	1°	3°

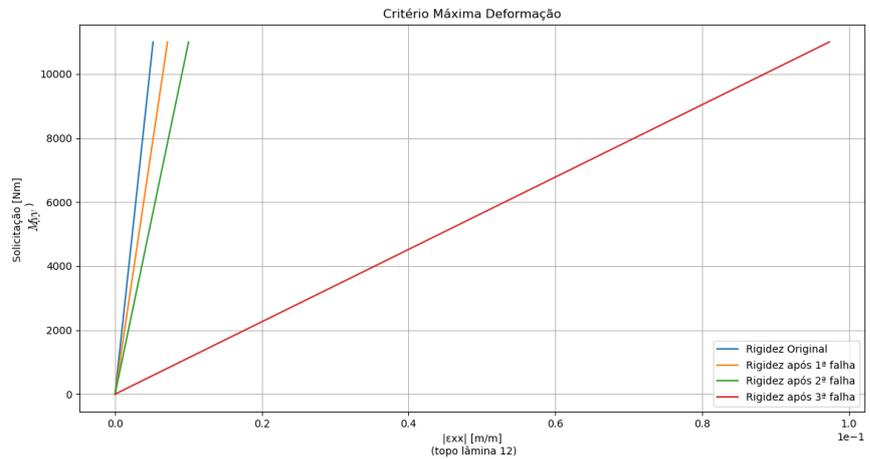
Tabela 6 – Sequência da PFF para o laminado  $[90/0]_{3S}$  submetido à torção.

$M_{xy}$ para FPF	Critério de Falha	Ordem de Falha das Lâminas											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1,70E3 Nm	Máxima Tensão	1°	2°	2°	3°	3°	3°	3°	3°	3°	2°	2°	1°
1,70E3 Nm	Máxima Deformação	1°	2°	2°	3°	3°	3°	3°	3°	3°	2°	2°	1°
1,70E3 Nm	Tsai-Hill	1°	2°	2°	3°	3°	3°	3°	3°	3°	2°	2°	1°
1,70E3 Nm	Tsai-Wu	1°	2°	2°	3°	3°	3°	3°	3°	3°	2°	2°	1°

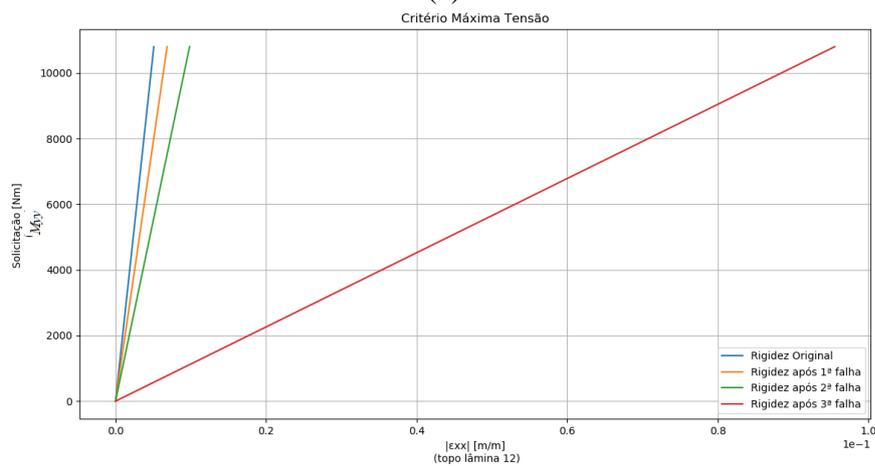
Observa-se que, para a flexão, a sequência de falha diferiu com a mudança de critério de falha. As cargas necessárias para produzir a FPF também apresentaram uma variação entre os critérios de falha utilizados.

A Figura 8 mostra a alteração na rigidez do laminado durante a flexão após a FPF para os diferentes critérios de falha.

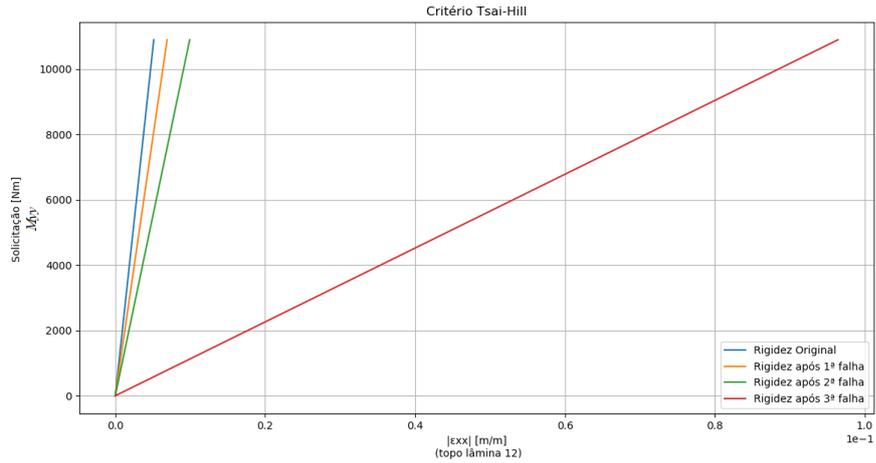
Figura 8 - Gráficos do momento  $M_{yy}$  [Nm] - deformação  $|\epsilon_{xx}|$  no topo da lâmina 12 para os casos de flexão no laminado  $[90/0]_{3S}$  utilizando os critérios (a) Máxima Deformação, (b) Máxima Tensão, (c) Tsai-Hill e (d) Tsai-Wu.



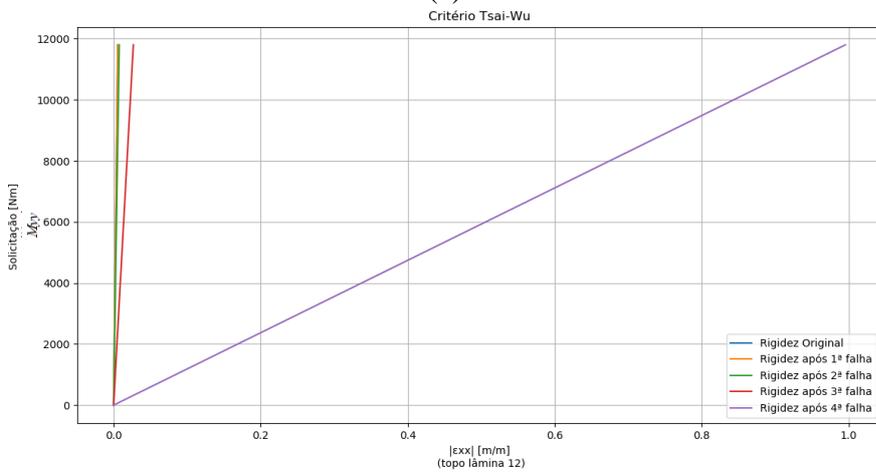
(a)



(b)



(c)



(d)

#### 4.4. Laminado [90/0]<sub>5s</sub>

O laminado [90/0]<sub>5s</sub> também foi submetido à sollicitação de flexão e de torção, os resultados da PPF e encontram-se nas Tabelas 7 e 8.

Tabela 7 – Sequência da PPF para o laminado [90/0]<sub>5s</sub> submetido à flexão.

$M_{yy}$ para <b>FPF</b>	<b>Critério de Falha</b>	<b>Ordem de Falha das Lâminas</b>																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3,30E4 Nm	Máxima Tensão	1°	3°	2°	3°	2°	4°	3°	4°	3°	4°	4°	4°	4°	4°	4°	2°	3°	1°	3°	
3,30E4 Nm	Máxima Deformação	1°	3°	2°	3°	2°	4°	3°	4°	3°	4°	4°	4°	4°	4°	4°	2°	3°	1°	3°	
3,30E4 Nm	Tsai-Hill	1°	3°	2°	3°	2°	3°	3°	4°	3°	4°	4°	4°	4°	4°	3°	3°	2°	3°	1°	2°
3,30E4 Nm	Tsai-Wu	1°	3°	2°	3°	3°	4°	3°	4°	4°	4°	4°	4°	4°	4°	3°	3°	2°	3°	1°	2°

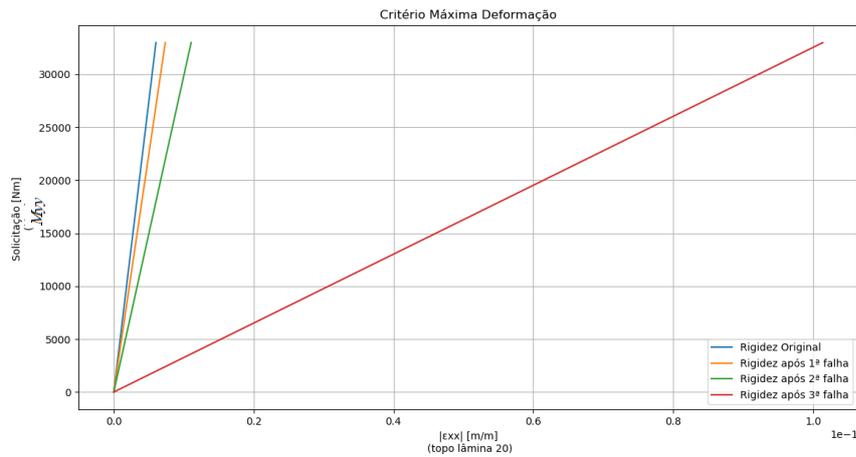
Tabela 8 – Sequência da PPF para o laminado [90/0]<sub>5s</sub> submetido à torção.

$M_{xy}$ para FPF	Critério de Falha	Ordem de Falha das Lâminas																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4,80E3 Nm	Máxima Tensão	1°	2°	2°	2°	3°	3°	3°	3°	4°	4°	4°	4°	3°	3°	3°	3°	2°	2°	2°	1°
4,80E3 Nm	Máxima Deformação	1°	2°	2°	2°	3°	3°	3°	3°	4°	4°	4°	4°	3°	3°	3°	3°	2°	2°	2°	1°
4,80E3 Nm	Tsai-Hill	1°	2°	2°	2°	3°	3°	3°	3°	4°	4°	4°	4°	3°	3°	3°	3°	2°	2°	2°	1°
4,80E3 Nm	Tsai-Wu	1°	2°	2°	2°	3°	3°	3°	3°	4°	4°	4°	4°	3°	3°	3°	3°	2°	2°	2°	1°

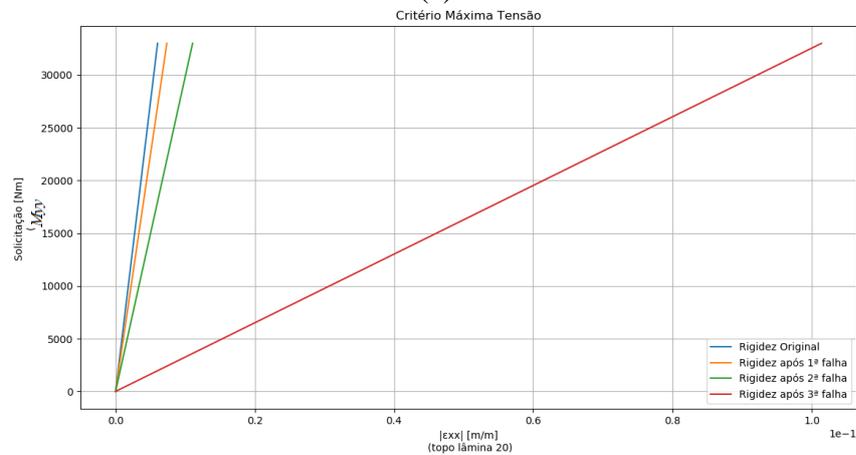
Observa-se que, assim como para a lâmina [90/0]<sub>3s</sub>, a sequência de falha foi alterada conforme a mudança do critério de falha para a sollicitação de flexão. Todavia, as cargas necessárias para produzir a FPF mantiveram-se as mesmas para todos os critérios.

A Figura 9 mostra a alteração na rigidez do laminado durante a flexão após a FPF para os diferentes critérios de falha.

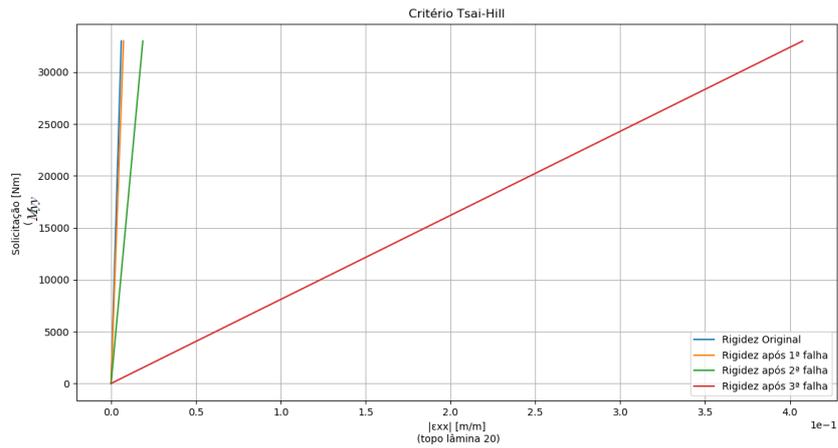
Figura 9 - Gráficos do momento  $M_{yy}$  [Nm] - deformação  $|\epsilon_{xx}|$  no topo da lâmina 20 para os casos de flexão no laminado [90/0]<sub>5s</sub> utilizando os critérios (a) Máxima Deformação, (b) Máxima Tensão, (c) Tsai-Hill e (d) Tsai-Wu.



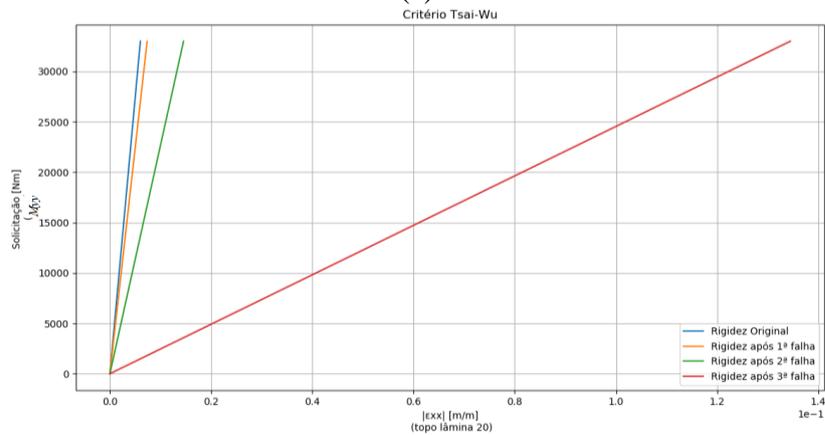
(a)



(b)



(c)



(d)

## 5. CONCLUSÃO

Através deste trabalho foi possível obter a ordem de falha em materiais laminados utilizando a Teoria Clássica de Laminação e diferentes critérios de falha. O código criado em Python se mostrou adequado, pois, além dos resultados encontrados para matrizes de rigidez serem semelhantes aos encontrados pelo software Heliuss Composite (2017), também apresentou a resposta para a progressão de falha para os diferentes laminados.

Os resultados obtidos mostram que a escolha do critério de falha pode interferir na ordem de falha das lâminas, mas esse aspecto se torna particularmente evidente para laminados com maior número de camadas. Além disso também se conclui que a força necessária para a obtenção da FPF pode ser alterada com a mudança do critério de falha.

Para trabalhos futuros sugere-se a aplicação de outros critérios de falha como Puck (PUCK; DEUSCHLE, 2002) ou Hoffman (JONES, 1999), a fim de comparar os resultados de PPF obtidos. Também seria interessante estudar outros modelos de degradação, pois a desconsideração total da rigidez de uma lâmina após sua falha parece ser uma escolha muito severa. Finalmente deve-se alterar o algoritmo para a aplicação incremental da carga com perda sucessiva de rigidez durante o processo de PPF.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGÉLICO, R. A. **Avaliação de Modelos de Falhas Progressivas para Estruturas em Material Compósito**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, [s. l.]. São Carlos. p. 105. 2009.

AUTODESK Helius Composite. Versão 2017.0.82.0: Autodesk Inc., 2017.

COELHO, A. M. G. Finite Element Guidelines for Simulation of Delamination Dominated Failures in Composite Materials Validated by Case Studies. **Archives of Computational Methods in Engineering**, [s. l.], 2016.

GIBSON, R. F. **Principals of Composite Material Mechanics**. 4th. ed. [s.l.] : CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016.

JONES, R. **Mechanics of Composite Materials**. 2th. ed. [s. l.]: Taylor and Francis Group, 1999.

MURRAY, Y.; SCHWER, L. Implementation and verification of fiber-composite damage models. **American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division, AMD**, [s. l.], v. 107, p. 21–30, 1990.

NAGAVALLY, R. R. Composite Materials - History, Types, Fabrication Techniques, Advantages, and Applications. **International Journal of Mechanical And Production Engineering**, [s. l.], v. 5, n. 9, p. 82–87, 2017.

PUCK, A.; DEUSCHLE, H. M. Progress in the Puck Failure Theory for Fibre Reinforced Composites : Analytical solutions for 3D-stress. **Composites Science and Technology**, [s. l.], v. 62, n. 3, p. 371–378, 2002.

SLEIGHT, D. W. Progressive Failure Analysis Methodology for Laminated Composite Structures. **Langley Research Center: National Aeronautics and Space Administration** [s. l.], Virginia, march 1999.

## APÊNDICE A

### Laminado [90/0]<sub>s</sub>

A sequência de falha das lâminas durante a PPF para o laminado [90/0]<sub>s</sub> submetido à flexão e torção encontram-se nas Tabelas 9 e 10.

Tabela 9 – Sequencia da PPF para o laminado [90/0]<sub>s</sub> submetido à flexão.

$M_{yy}$ para FPF	Critério de Falha	Ordem de Falha das Lâminas			
		1	2	3	4
2,00E3 Nm	Máxima Tensão	1°	2°	2°	2°
1,80E3 Nm	Máxima Deformação	1°	2°	2°	2°
2,00E3 Nm	Tsai-Hill	1°	2°	2°	2°
2,00E3 Nm	Tsai-Wu	1°	2°	2°	2°

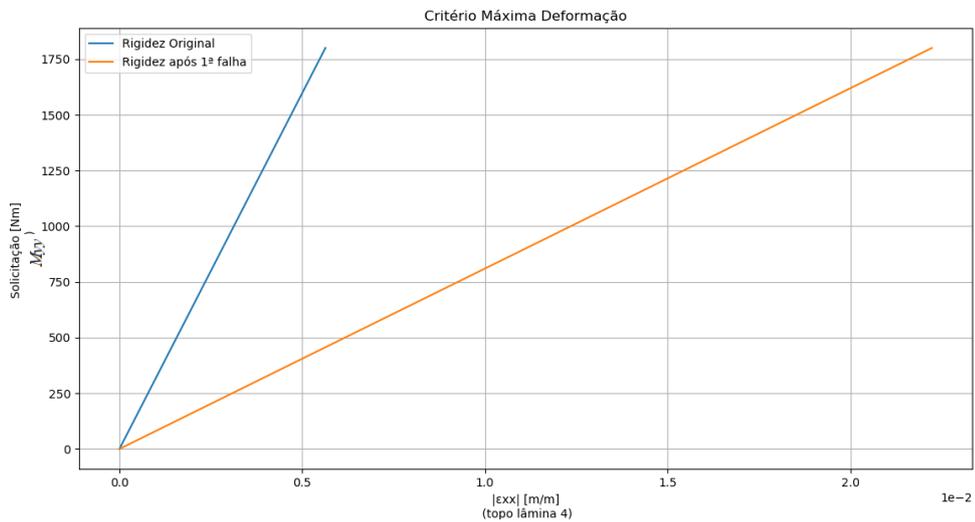
Tabela 10 – Sequência da PFF para o laminado [90/0]s submetido à torção.

$M_{xy}$ para FPF	Critério de Falha	Ordem de Falha das Lâminas			
		1	2	3	4
2,00E2 Nm	Máxima Tensão	1°	2°	2°	1°
2,00E2 Nm	Máxima Deformação	1°	2°	2°	1°
2,00E2 Nm	Tsai-Hill	1°	2°	2°	1°
2,00E2 Nm	Tsai-Wu	1°	2°	2°	1°

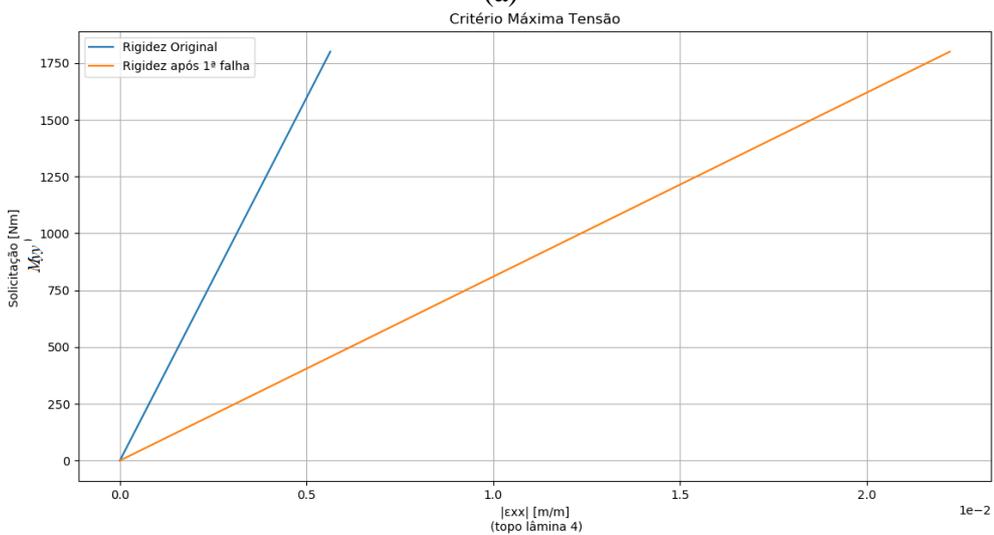
Observa-se que a sequência de falha para cada tipo de solicitação não diferiu de um critério de falha para outro e que as cargas necessárias para produzir a FPF alteraram pouco.

A Figura 10 mostra a alteração na rigidez do laminado durante a flexão após a FPF para os diferentes critérios de falha. Os gráficos equivalentes para torção encontram-se no APÊNDICE A.

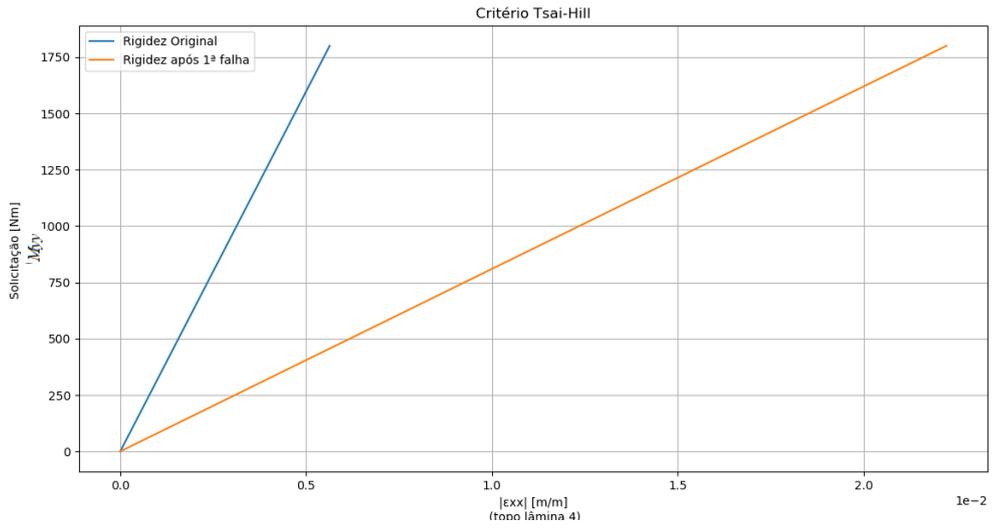
Figura 10 - Gráficos de momento  $M_{yy}$  [Nm] - deformação  $|\epsilon_{xx}|$  no topo da lâmina 4 para os casos de flexão no laminado [90/0]s utilizando os critérios (a) Máxima Deformação, (b) Máxima Tensão, (c) Tsai-Hill e (d) Tsai-Wu.



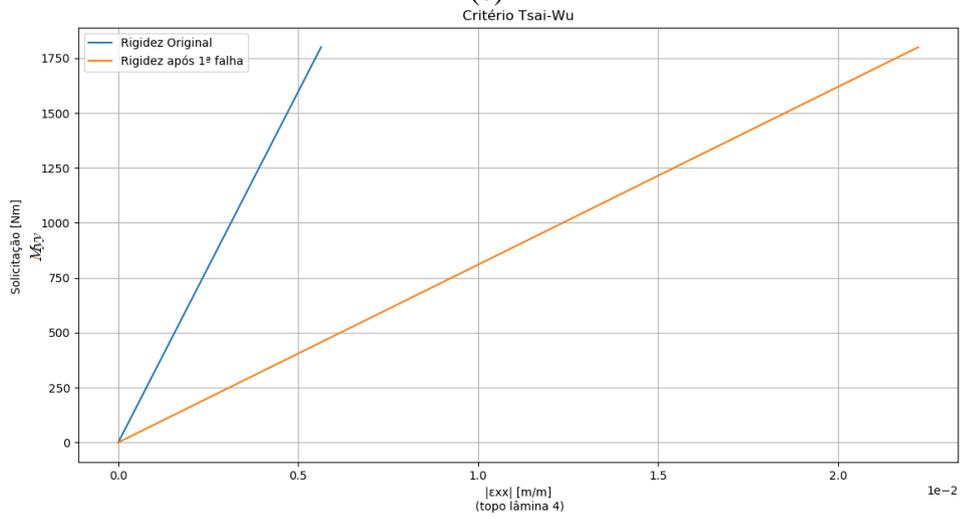
(a)



(b)



(c)



(d)