

Bruno F. de Moraes

Aplicações Econômicas do Sistema Predador-Presa

Brasil

25 de Novembro, 2019

Bruno F. de Moraes

Aplicações Econômicas do Sistema Predador-Presa

Trabalho monográfico acadêmico em conformidade com as normas ABNT apresentado à Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Faculdade de Ciências Econômicas

Orientador: João Plínio Juchem Neto

Brasil

25 de Novembro, 2019

Bruno F. de Moraes

Aplicações Econômicas do Sistema Predador-Presa/ Bruno F. de Moraes. – Brasil,
25 de Novembro, 2019 -
78p. ; 30 cm.

Orientador: João Plínio Juchem Neto

Tese (Graduação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS
Faculdade de Ciências Econômicas, 25 de Novembro, 2019 .

1. Predador-Presa. 2. Lotka-Volterra. 2. Richard Goodwin. 3. Ciclos Econômicos.
4. Aglomeração Econômica. I. João Plínio Juchem Neto. II. Universidade Federal do
Rio Grande do Sul. III. Faculdade de Ciências Econômicas. IV. Aplicações Econômicas
do Sistema Predador-Presa

Bruno F. de Moraes

Aplicações Econômicas do Sistema Predador-Presa

Trabalho monográfico acadêmico em conformidade com as normas ABNT apresentado à Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Trabalho aprovado. Brasil, 16 de dezembro de 2019:

João Plínio Juchem Neto
Orientador

Marcelo de Carvalho Griebeler
Convidado

Jorge Paulo de Araújo
Convidado

Brasil
25 de Novembro, 2019

*Este trabalho é dedicado à Nelson Ferreira de Moraes
cuja partida deixou um vazio em meu coração.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço o professor João Plínio Juchem Neto, cuja paciência, disciplina e extraordinária orientação possibilitaram a finalização deste trabalho. Em seguida, agradeço também aos professores Sérgio Marley Modesto Monteiro, Carlos Henrique Vasconcellos Horn e Fernando Boeira Sabino da Silva, que foram os principais responsáveis pela formação das minhas orientações como economista. Com especial carinho, agradeço meus pais, Nelson Ferreira de Moraes e Maria Imaculada Mendes Silva, pois, sem seu exemplo, não teria ambição nenhuma. Por último, agradeço aos contribuintes da receita federal, que, quebrando séculos de tradição, possibilitaram a educação da primeira geração desta família.

*There is in me an anarchy, a frightful disorder.
Creating costs me a thousand deaths, for it involves an order
and my whole being rebels against order.
But without it I would die, scattered to the winds.
(Albert Camus, Notebooks V.1: 1935-1942)*

Resumo

O objetivo deste trabalho é realizar uma breve introdução às aplicações econômicas do sistema de equações de Lotka-Volterra (LV), também conhecido como sistema predador-presa. Assim, no capítulo 2 derivamos formalmente o modelo, e em seguida, no capítulo 3, oferecemos a análise de estabilidade do mesmo. Apresentamos o trabalho de Richard Goodwin no capítulo 4, que consiste na primeira e principal aplicação econômica do LV, e, logo após, no capítulo 5, introduzimos modificações do modelo propostas por outros pesquisadores. Finalizamos no capítulo 6 com uma aplicação moderna do sistema, dentro da geografia econômica.

Palavras-chave: Predador-Presa. Lotka-Volterra. Richard Goodwin. Ciclos Econômicos. Aglomeração Econômica.

Abstract

The purpose of this thesis is to make a brief introduction to the economic applications of the Lotka-Volterra (LV) system of equations, also known as the predator-prey model. Thus, we start in chapter 2 by deriving the model, in its original form, and then proceed in chapter 3 to analyse its stability properties. We present Richard Goodwin's work in chapter 4, which consists of the first and most popular economic application of the LV system of equations. Shortly thereafter, in chapter 5, we introduce changes to the model proposed by researchers. We end in chapter 6 with a modern application of the system, within the domain economic geography.

Keywords: Predator-Prey. Lotka-Volterra. Richard Goodwin. Growth Cycles. Economic Agglomeration.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Solução do Modelo de Lotka-Volterra	27
Figura 2 – Campo de direções do sistema (3.14). A linha em vermelho representa a solução que passa sobre o ponto (1,1).	33
Figura 3 – Campo de direções do sistema (3.23). A linha em vermelho representa a solução que passa sobre os pontos (1,1) e (-1,-1).	36
Figura 4 – Diagrama de Estabilidade	38
Figura 5 – Campo de direções do Sistema Não Linear	40
Figura 6 – Campo de Direções do Sistema de Lotka-Volterra	42
Figura 7 – A taxa salarial e o emprego	48
Figura 8 – Ciclo de Crescimento de Goodwin	50
Figura 9 – Ciclos do Modelo Estendido	62
Figura 10 – A produtividade do trabalho ao longo do ciclo	64
Figura 11 – Crescimento Logístico e Exponencial	68
Figura 12 – Diagrama de Bifurcação	72
Figura 13 – Evolução Temporal	72

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
I	O MODELO DE LOTKA-VOLTERRA	21
2	DERIVAÇÃO DO MODELO DE LOTKA-VOLTERRA	23
2.1	Equações Diferenciais e Equações Diferenciais de Primeira Ordem	23
2.2	Modelando em um Sistemas de Equações Diferenciais	25
2.3	O Modelo de Lotka-Volterra	26
3	ANÁLISE DE ESTABILIDADE	29
3.1	Linearidade Local	29
3.2	A expansão de Taylor e a Matriz Jacobiana	30
3.3	Estabilidade da Origem de um Sistema Linear	31
3.3.1	Exemplo 1	32
3.3.2	Exemplo 2	34
3.3.3	Caso geral para um sistema 2×2	36
3.4	Estabilidade no Lotka-Volterra	38
II	APLICAÇÕES ECONÔMICAS	43
4	O MODELO DE GOODWIN	45
4.1	As Hipóteses Iniciais	45
4.2	O Modelo	46
4.3	Implicações Econômicas	49
5	MODIFICAÇÕES DO MODELO DE GOODWIN	53
5.1	Restrições Suficientes em um Lotka-Volterra Generalizado	54
5.1.1	Modelo de Goodwin Modificado	56
5.2	Outra modificação do Modelo de Goodwin	57
5.2.1	Implicações Econômicas	61
6	LOTKA-VOLTERRA NA GEOGRAFIA ECONÔMICA	67
6.1	Lotka Volterra Competitivo	67
6.2	Aglomeracão Econômica em um Modelo Capital-Trabalho	69
6.2.1	Exploração Numérica e Implicações Econômicas	71

7	CONCLUSÃO	75
	REFERÊNCIAS	77

1 Introdução

Na virada do século XVIII, no que eram os anos finais da Inglaterra Georgiana, um pastor até então desconhecido introduziu ao mundo o primeiro tratamento teórico definitivo da dinâmica demográfica populacional. No livro intitulado *An Essay on The Principle of Population*, Thomas Malthus observou que o aumento na produção alimentícia induzia a um aumento do bem-estar local, que era, entretanto, temporário. Seu argumento alegava que a expansão consequente da vitalidade, principalmente das camadas sociais menos afortunadas, provocava um crescimento populacional de mesma magnitude, o que, por seu turno, restaurava os níveis per capita originais de produção. Assim, o nível de bem-estar social deveria ser imutável no longo prazo.

O tempo provou a realização do mundo Malthusiano improvável, entretanto, a conjuntura analítica que singularizou seu trabalho se mostrou persistente, e foi eventualmente passada a diante. Quatro décadas depois da publicação do trabalho mencionado, em 1838, o matemático Pierre-François Verhulst derivou uma equação para descrever o comportamento autolimitador do crescimento de uma população biológica, que conquistou espaço definitivo na biologia matemática. A equação logística, como veio a ser conhecida, foi o primeiro passo na formalização de uma teoria da dinâmica populacional, entretanto, não seria até 1925, em um livro intitulado *Elements of Physical Biology*, por Alfred J. Lotka, que o próximo grande avanço seria feito. Lotka expande a equação de Verhulst via “lei de ação das massas”, um princípio originado na química, para representar a interação predatória entre duas espécies. Por volta da mesma época, o matemático italiano Vito Volterra publica independentemente uma série de trabalhos que efetivamente replicam o modelo de Lotka.

Hoje, o resultado da interação inusitada entre esta série de pensadores, dispersador no tempo e no espaço, culmina no sistema de equações diferenciais conhecido como “sistema predador-presa” ou “sistema de Lotka-Volterra”. Este modelo ainda é relevante na matemática biológica, mas, mais interessante que isto, é o fato de que não se limitou a esta disciplina. Em 1967, Richard M. Goodwin, um matemático e economista americano, introduz as equações de Lotka à teoria econômica, inaugurando a utilização de modelos populacionais advindos da biologia na teoria econômica.

É à elucidação desta transferência de conhecimento que este trabalho se dedica. Pretendemos oferecer um texto centralizado, contendo amostras das aplicações do sistema predador-presa na economia, acompanhado do instrumental matemático mais essencial ao seu entendimento. Entendemos que a assimilação desta coleção de trabalhos, por nós selecionada, serve de prelúdio ao indivíduo interessado na aplicação deste sistema de

equações na teoria econômica. Seguindo esta filosofia, no capítulo 2 derivamos formalmente o modelo de Lotka-Volterra, e em seguida, no capítulo 3, oferecemos a análise de estabilidade do mesmo. Apresentamos o trabalho original de Richard Goodwin no capítulo 4, o qual, como já articulamos, é a primeira aplicação do Lotka-Volterra na disciplina. Se Resume a um modelo endógeno de crescimento econômico, onde as taxas de crescimento são determinadas pela dinâmica entro nível de emprego e a distribuição de renda. Logo após, no capítulo 5, introduzimos modificações posteriores sugeridas por [Desai et al. \(2006\)](#) e [Harvie, Kelmanson e Knapp \(2006\)](#). O primeiro consiste em um ajuste simples nas equações, afim de resolver uma incoerência presente nos valores assumidos pelas variáveis centrais do modelo. O segundo, por outro lado, consiste numa expansão considerável do modelo, afim de ampliar sua interpretação econômica, e torna-lo mais realista. Finalizamos no capítulo 6 com uma aplicação mais moderna, como proposta por [Aly \(2012\)](#). Neste, encontraremos um modelo capaz de representar a migração de fatores de produção entre duas regiões, que reproduz um dos resultados fundameirais do modelo centro-periferia considerado pela Nova Geografia Econômica.

Parte I

O Modelo de Lotka-Volterra

2 Derivação do Modelo de Lotka-Volterra

O modelo de Lotka-Volterra, também conhecido como sistema predador-presa ou simplesmente como as equações de lotka-volterra, é um sistema acoplado de equações diferenciais não lineares de primeira ordem. Estas equações são frequentemente utilizadas nas ciências naturais para descrever a dinâmica de sistemas biológicos onde duas entidades interagem uma com a outra: uma como um predador, e outra como uma presa. A seguir, para possibilitar a introdução formal do modelo, revisitaremos alguns conceitos fundamentais relacionados às equações diferenciais.

2.1 Equações Diferenciais e Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Equações diferenciais são equações matemáticas que relacionam uma função com suas próprias derivadas. As maneiras nas quais se pode imaginar este tipo de correspondência são inúmeras, o que significa que equações diferenciais vem em muitas formas e cores diferentes. A seguir, apresentamos alguns exemplos.

$$\frac{dx}{dy} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{dt} + f(t)y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} + f(t)y = q(x) \tag{2.1}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\dot{y} + P(x)y = Q(x)y^n$$

note que a característica unificadora destas equações é o fato que envolvem sempre uma função qualquer e pelo menos uma de suas derivadas. Há também uma pluralidade de notações muito grande, entretanto, neste trabalho, utilizaremos sempre que possível $\dot{f}(t)$ para expressar a primeira derivada da função $f(t)$ em relação a t , e $f^n(t)$ para expressar a n -ésima derivada. Quando f for função de mais de uma variável independente, como em $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, utilizaremos f_{t_i} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ para expressar a respectiva derivada parcial.

Resolvido isso, vamos tentar introduzir intuitivamente o que é uma relação diferencial. Imagine que trabalhamos em um zoológico e é nosso dever acompanhar os hábitos reprodutivos de uma população de coelhos, a fim de inferir o número destes animais que estarão sob guarda da instituição no ano seguinte. Sabemos que no presente vivem x_0 desses animais. Decidimos modelar o crescimento da população com uma equação. As primeiras linhas do nosso relatório podem ter a seguinte forma: Represente a população total dos animais em certo dia t pela função $x(t)$. A quantidade desses animais que nasce em cada dia é a taxa na qual a população total $x(t)$ cresce, ou seja, é a sua primeira derivada em relação ao tempo, $\dot{x}(t)$. Dado o fato de que o ciclo reprodutivo desse mamífero é relativamente curto e homogêneo ao longo do ano, é razoável assumir que o número de coelhos que nasce em cada dia é diretamente proporcional ao tamanho da população no mesmo dia (i.e que a derivada $\dot{x}(t)$ é diretamente proporcional à sua primitiva). Assim, se as condições de reprodução são ideais, podemos descrever a variação diária na população de coelhos da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) \quad (2.2)$$

considerando também a condição inicial $x(0) = x_0$, temos o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde α é uma constante positiva que é determinada pela natureza (é encontrada experimentalmente). Podemos encontrar a função que resolve a expressão acima, isto é, $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$. Assim, para calcular a população de coelhos daqui a um ano, basta computar $x(360)$.

A equação (2.2) é uma das formas mais simples de uma equação diferencial. Ela é dita de primeira ordem, pois, a ordem da derivada mais alta é um. Além disso, também é dita linear, pois, quando escrita na sua forma geral, $\dot{x}(t) - \alpha x(t) = 0$, tem estrutura similar a um polinômio linear em x e suas derivadas.

Apesar de sua simplicidade, problemas como (2.3) podem ser utilizadas na realidade para descrever fenômenos naturais bem comportados, como, por exemplo, o resfriamento de um corpo ao longo do tempo (TRENCH, 2013). Entretanto, muito frequentemente nos depararemos com problemas mais complicados, onde a variável que desejamos descrever depende de mais elementos e não pode ser retratada precisamente por uma equação tão elementar. Se desejássemos apresentar um modelo que descrevesse de maneira fiel o comportamento da população de coelhos que apresentamos agora há pouco, a equação (2.2) seria insuficiente. Afinal, de acordo com (2.2), a população de coelhos cresce exponencialmente por toda a eternidade, e isso só é possível em condições ideais de reprodução, sem

interferência do meio ambiente. Todos podemos concordar que isso é um tanto irrealista. Descobriremos como desenvolver um modelo melhor, que mantém o poder intuitivo de (2.2), e, ao mesmo tempo, descreve o problema com mais fidelidade. Mas antes, vamos introduzir o conceito de sistemas de equações diferenciais em mais detalhes.

2.2 Modelando em um Sistemas de Equações Diferenciais

Ainda no exemplo da Seção 3.1, suponha que os coelhos são retirados do zoológico e retornados à natureza. Neste novo ambiente, a taxa de crescimento da população também pode depender do tamanho das populações de predadores e da disponibilidade de alimento. Precisamos de mais variáveis dependentes para construir um modelo.

Comece supondo que o local onde os nossos animais foram restituídos possui condições de reprodução ideais para eles. Ou seja, há alimento abundante e espaço para uma infinidade de seres vivos, como no antigo zoológico. Neste estado, como já vimos, coelhos crescem a uma taxa exponencial, que seria a representada pela equação (2.2). Entretanto, imagine também que outros animais habitam este local, e um deles, que ocupa um nicho diferente, é um predador natural de coelhos – raposas. Por simplicidade, suponha que as raposas se alimentam exclusivamente de coelhos. A população de raposas precisa caçar sua presa para se alimentar, caso contrário morre de fome. Assim, se este grupo estiver sozinho no ambiente, será privado de alimento, e seu número tenderá a diminuir com o tempo. É razoável supor que a quantidade de raposas que morre diariamente, na ausência da presa, é diretamente proporcional ao número de raposas que está viva no momento – se a população é grande, a quantidade bruta de raposas que deve morrer diariamente é maior. Ou seja:

$$\dot{y}(t) = -\beta y(t) \quad (2.4)$$

onde $y(t)$ é uma função que captura o tamanho da população de raposas no instante t , e β é uma constante positiva determinada pela natureza, análoga a α .

As equações (2.2) e (2.4) descrevem como a presa e o predador se comportam isoladamente no ambiente. O que acontece, então, se imaginarmos que agora eles interagem entre si? Em primeiro lugar, quanto maior for a população de ambos os animais, maiores as chances de um encontro entre uma raposa e um coelho acontecer. A população de coelhos deverá ser afetada negativamente por esse evento. Assim, é razoável supor que a queda na taxa de crescimento diária na população de coelhos é diretamente proporcional ao tamanho da população deles mesmos, e de raposas. Ou seja, $\dot{x}(t)$ cai em γxy . Por outro lado, a população de raposas será afetada positivamente, afinal, o coelho é seu alimento. Também é razoável supor que o aumento na taxa de crescimento destas é diretamente proporcional

ao tamanho da sua população, e da população de coelhos. Em outras palavras, $\dot{y}(t)$ sobe em δxy . Com essas informações, podemos montar um modelo mais complexo, que descreve a dinâmica destas populações em conjunto:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha x(t) - \gamma x(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= \delta x(t)y(t) - \beta y(t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde (2.5) nada mais é que um sistema de equações diferenciais. x e y , como já colocado, representam a população de coelhos e raposas, respectivamente. Em ambas as equações, um dos termos representa o comportamento da população isoladamente, e o outro representa o efeito do contato com a outra espécie. γ e δ representam a intensidade do efeito desta interação em cada uma das populações.

2.3 O Modelo de Lotka-Volterra

O sistema (2.5) é o que se chama de modelo de Lotka-Volterra. O exercício que realizamos com a população de coelhos e raposas ilustra o motivo deste também ser conhecido como predador-presa. Entretanto, suas aplicações teóricas não se reduzem a descrição dessa relação biológica. Como o leitor pode já ter imaginado, qualquer relação que justificadamente possa ser descrita em termos da sua taxa de crescimento, onde a mesma depende da sua densidade e da sua associação com a densidade de outra variável, é capaz de ser representada por (2.5). Por exemplo, este sistema tem uma longa história de uso na teoria econômica, desde a sua introdução por Goodwin (GANDOLFO, 2008), como veremos adiante em 4.

A seguir, no capítulo 3, estudaremos analiticamente o comportamento do sistema (2.5). Por enquanto, apresentamos uma simulação numérica das soluções na Figura 1, para parâmetros $(\alpha, \gamma, \delta, \beta) = (0.85, 0.62, 0.35, 0.51)$ e condição inicial unitária. Apenas adiantamos que uma das características marcantes deste sistema é que, se α, β, γ e δ são positivos, a linearização das equações nos retorna uma solução similar ao movimento harmônico simples.

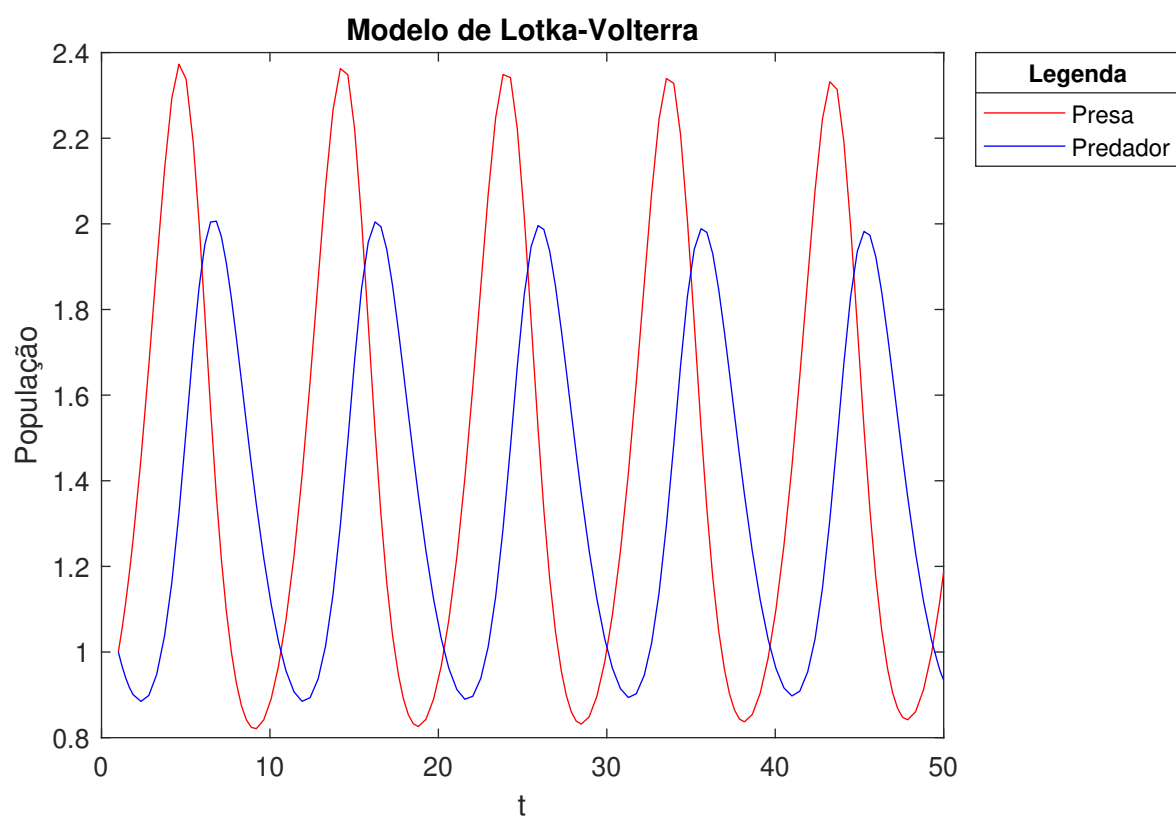


Figura 1 – Solução do Modelo de Lotka-Volterra

3 Análise de Estabilidade

No capítulo 2 vimos como montar um sistema de equações diferenciais que descreve a interação predatória entre duas espécies que coexistem em um mesmo ambiente. Como a maioria das equações diferenciais não pode ser resolvida analiticamente de uma maneira conveniente, podemos extrair informações qualitativas sobre o seu comportamento através do que chamamos de análise de estabilidade. Consideraremos os pontos críticos do sistema¹, ou seja, os pontos onde $\dot{\vec{X}} = (\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$. Esses pontos são interessantes pois correspondem a soluções de equilíbrio do sistema, onde esta é uma constante. Entretanto, antes de estudar o comportamento de um sistema como (2.5), que não é linear, devemos aprender a realizar sua linearização, como é feito na Seção 3.1. Em seguida, nas seções 3.2 e 3.3, apresentamos a análise de estabilidade. Para uma discussão mais profunda sobre a estabilidade de um sistema de equações diferenciais, ver [Boyce e DiPrima \(2012\)](#).

3.1 Linearidade Local

Considere o seguinte sistema não linear, em notação vetorial:

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + \vec{G}(\vec{X}) \quad (3.1)$$

e o seguinte sistema linear, na mesma notação:

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X} \quad (3.2)$$

onde \vec{X} , \vec{G} são funções vetoriais $\vec{X} = (x(t), y(t))^T$ e $\vec{G} = (g_1(x, y), g_2(x, y))^T$. Uma maneira de investigar o comportamento de um sistema não linear, na vizinhança de um ponto crítico \vec{X}_0 , é encontrar um sistema linear cuja trajetória o representa localmente. Suponha que $\vec{X} = 0$ é um ponto crítico isolado de (3.1), e, também, que o determinante da matriz de coeficientes é diferente de zero, $\det(A) \neq 0$, de maneira que $\vec{X} = 0$ também é um ponto crítico isolado do sistema (3.2). Note que se $\vec{G}(\vec{X})$ é suficientemente pequeno, o sistema (3.1) se aproxima de (3.2). Mais precisamente, se os componentes de G possuem derivadas parciais contínuas e satisfazem a seguinte condição:

¹ neste texto os termos, “ponto crítico” e “ponto fixo” são equivalentes, significando a mesma coisa em contextos diferentes. O primeiro será utilizado quando estivermos tratando de funções, o segundo quando estivermos tratando de trajetórias

$$\vec{X} \rightarrow 0 \implies \frac{\|\vec{G}(\vec{X})\|}{\|\vec{X}\|} \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

dizemos que o sistema não linear (3.1) é um sistema localmente linear ao redor do ponto $\vec{x} = 0$. Estas condições definem a linearização e o correspondente sistema linearizado de um sistema não linear. Entretanto, há uma maneira mais prática de trabalhar com esse problema, que envolve o uso da expansão de Taylor. Esta será a técnica que utilizaremos para estudar o comportamento de (2.5), e a apresentamos a seguir.

3.2 A expansão de Taylor e a Matriz Jacobiana

Considere o seguinte sistema não linear bidimensional. Primeiro vamos escrevê-lo em notação escalar, para facilitar a visualização.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

o sistema (3.4) é localmente linear na vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0) quando as funções f e g possuem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem (i.e $f, g \in C^2$). Tome a expansão de Taylor ao redor de (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + n_1(x, y) \\ g(x, y) &= g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) + n_2(x, y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

é facilmente verificado que

$$(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \implies \frac{n_1(x, y)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}} \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

o mesmo valendo para a n_2 . Como (x_0, y_0) é um ponto crítico, $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Além disso, note que $dx/dt = d(x - x_0)/dt$ e que $dy/dt = d(y - y_0)/dt$. Assim, o sistema (3.4) pode ser reduzido para:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(x, y) \\ n_2(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

em notação matricial:

$$\dot{\vec{U}} = J_{x_0} \vec{U} + \vec{N} \quad (3.8)$$

onde $\vec{U} = (x - x_0, y - y_0)^T$, $\vec{N} = (n_1, n_2)^T$ e J_{x_0} é a matriz das derivadas parciais, avaliada no ponto (x_0, y_0) .

Esse resultado nos diz que para um sistema não linear qualquer, se suas respectivas funções f e g são duas vezes diferenciáveis, ele é localmente linear ao redor de um ponto crítico $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$. Ele satisfaz automaticamente a condição (3.3). Simultaneamente, também obtemos o sistema linear que o aproxima, dado pela parte linear de (3.7), que é:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde $(u_1, u_2) = (x - x_0, y - y_0)$

A matriz de coeficientes de (3.9), a qual chamamos de J_{x_0} em (3.8) é dita a *matriz jacobiana*, ou simplesmente o *jacobiano* de f e g em relação a x e y , calculado no ponto (x_0, y_0) . Não se esqueça que assumimos no começo deste capítulo que o determinante da matriz de coeficientes é diferente de zero, caso contrário o ponto crítico isolado do sistema não linear não é necessariamente também ponto crítico isolado da sua aproximação linear, que, de fato, deixa de ser uma aproximação.

3.3 Estabilidade da Origem de um Sistema Linear

Nesta Seção, iremos introduzir o processo de análise de estabilidade de um sistema de equações diferenciais que sejam de primeira ordem, lineares, homogêneas e de coeficientes constantes.

Seja A uma matriz $n \times n$ e \vec{X} uma função vetorial $\vec{X} = \vec{X}(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Considere o sistema de primeira ordem:

$$\dot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t) \quad (3.10)$$

procuramos soluções da forma:

$$\vec{X}(t) = e^{\lambda t} \vec{v} \quad (3.11)$$

substituindo (3.11) em (3.10) obtemos:

$$\lambda e^{\lambda t} \vec{v} = e^{\lambda t} A \vec{v} \implies \quad (3.12)$$

$$A \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad (3.13)$$

logo, a função $\vec{X}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$ é uma solução do sistema $\dot{\vec{X}}(t) = A \vec{X}$ se, e somente se, $A \vec{v} = \lambda \vec{v}$. Ou seja, se λ é um autovalor de A e \vec{v} é um autovetor associado a λ .

3.3.1 Exemplo 1

Considere o seguinte exemplo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -12 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

vamos procurar soluções que satisfaçam (3.13):

$$\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -12 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} (10 - \lambda)x - 9y &= 0 \\ -12x + (-2 - \lambda)y &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

a condição para que (3.16) tenha solução não trivial é:

$$\det \begin{bmatrix} 10 - \lambda & -9 \\ -12 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3.17)$$

ou ainda

$$\lambda^2 - 8\lambda - 128 = 0 \quad (3.18)$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 16$ e $\lambda_2 = -8$. Substituindo λ_1 em (3.16) obtemos $3y = -2x$. Escolhendo $x = 3$ obtemos $y = -2$. Portanto, $(3, -2)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 16$. Similarmente, obtemos o autovetor $(1, 2)$ para o autovalor $\lambda_2 = -8$. De (3.11), temos que duas soluções do sistema são:

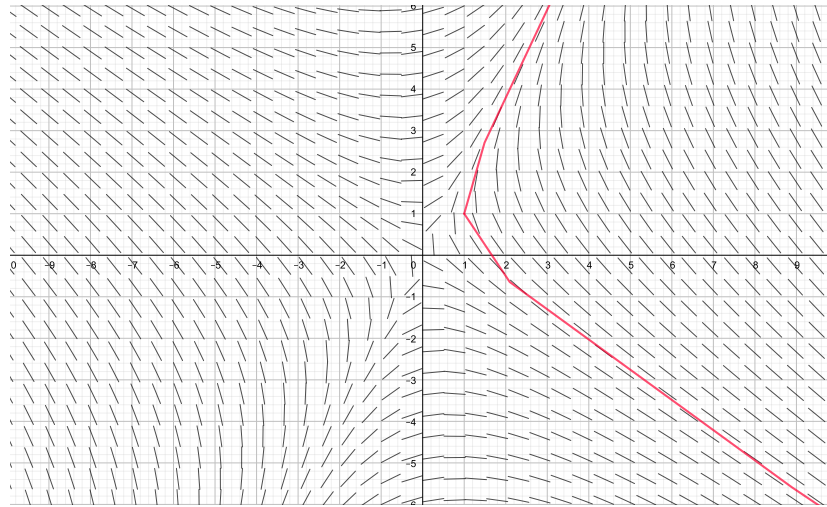


Figura 2 – Campo de direções do sistema (3.14). A linha em vermelho representa a solução que passa sobre o ponto (1,1).

$$s_1(t) = e^{16t}(3, -2) \quad (3.19)$$

$$s_2(t) = e^{-8t}(1, 2) \quad (3.20)$$

a solução geral do sistema é a família das combinações lineares de s_1 e s_2 :

$$\vec{X}(t) = C_1 e^{16t}(3, -2) + C_2 e^{-8t}(1, 2) = (3C_1 e^{16t} + C_2 e^{-8t}, -2C_1 e^{16t} + 2C_2 e^{-8t}) \quad (3.21)$$

em notação escalar:

$$\begin{aligned} x(t) &= 3C_1 e^{16t} + C_2 e^{-8t} \\ y(t) &= -2C_1 e^{16t} + 2C_2 e^{-8t} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Agora nos perguntamos: o que acontece com as soluções do sistema conforme $t \rightarrow \infty$? Note que a resposta desta pergunta muda de acordo com os valores que escolhermos para C_1 e C_2 . As soluções convergem para a origem, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = 0$ se e somente se $C_1 = 0$. Para qualquer outra combinação de valores (C_1, C_2) , as soluções dispersam-se. Isso acontece, algebricamente, pois os valores λ_1 e λ_2 , são expoentes na solução geral, e tem sinais opostos. Em geral, quando os autovalores da matriz de coeficientes são números reais com sinais opostos, nos deparamos com esta situação, e dizemos que a origem é um *ponto de sela*, e é um ponto crítico instável. Na Figura 2, apresentamos o campo de

direções da solução do sistema (3.14), ou seja, da equação (3.21). O campo de direções compila pequenas linhas que representam um segmento da reta na direção da derivada da solução naquele ponto. Perceba que ele descreve graficamente exatamente o que expomos acima.

3.3.2 Exemplo 2

Considere agora este outro exemplo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

analogamente ao procedimento anterior, encontramos os autovalores que satisfazem:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

que são $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$. O autovetor associado a $2i$ é $(1, -1 + 2i)$. Ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - 2i \end{bmatrix} = 2i \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

e não será necessário encontrar o autovetor associado a $\lambda_2 = -2i$. Isso se deve ao fato de que os autovalores que encontramos são imaginários puros, e, nesse caso, ao encontrar uma solução, é possível obter indiretamente uma segunda, através do conjugado da primeira. Note que se:

$$\vec{X}(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 \quad (3.26)$$

é uma solução de

$$\dot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t) \quad (3.27)$$

onde a matriz de coeficientes A é composta apenas por números reais, então, substituindo (3.26) em (3.27):

$$(e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1)' = A e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 \quad (3.28)$$

aplicando a regra do conjugado em (3.28), lembrando que $\bar{A} = A$:

$$(\overline{e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1})' = A \overline{e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1} \quad (3.29)$$

que é a mesma coisa que:

$$\overline{\dot{X}(t)} = A \overline{X(t)} \quad (3.30)$$

onde $\overline{X(t)} = \overline{e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1}$. Em outras palavras, $\overline{e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1}$, o conjugado da solução original, também é solução do problema. Ainda mais, sabemos que uma combinação linear de duas soluções também deve ser solução de (3.27), então os seguintes termos:

$$\frac{e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + \overline{e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1}}{2} \quad (3.31)$$

$$\frac{e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 - \overline{e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1}}{2i} \quad (3.32)$$

são soluções. É possível mostrar que também são L.I. Como para qualquer número do tipo $\alpha + \beta i$ a combinação $\frac{(\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i)}{2} = \alpha$ e $\frac{(\alpha + \beta i) - (\alpha - \beta i)}{2i} = \beta$, os valores (3.31) e (3.32) são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de $e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1$.

Assim, podemos achar duas soluções L.I. considerando a parte real e a parte imaginária de $e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1$.

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + 2i \end{bmatrix} e^{2it} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + 2i \end{bmatrix} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2t) + i \sin(2t) \\ -\cos(2t) - \sin(2t) + i(\cos(2t) - \sin(2t)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde, no primeiro passo, utilizamos a formula de Euler, que nos diz que $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$. Separando a parte real e a parte imaginária:

$$e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

ou seja, são soluções:

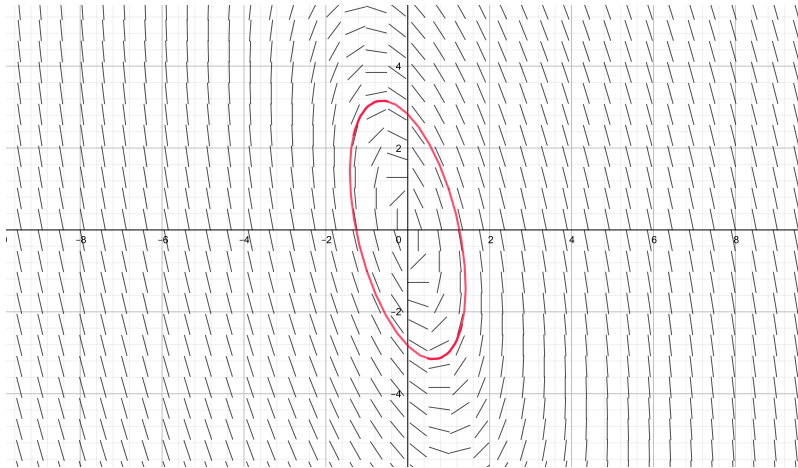


Figura 3 – Campo de direções do sistema (3.23). A linha em vermelho representa a solução que passa sobre os pontos (1,1) e (-1,-1).

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix} \\ s_2(t) &= \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

que, combinadas, dão a solução geral:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) \\ y(t) &= (C_2 - C_1) \cos(2t) - (C_1 + C_2) \sin(2t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Com (3.36) em mãos, o que podemos dizer sobre a estabilidade da origem do sistema? Para qualquer valor de C_1 e C_2 , as coordenadas x e y são funções periódicas com período 2π . Assim, as soluções têm trajetórias que formam curvas fechadas. É possível ser mais específico e mostrar que as curvas são ou círculos, ou elipses. Entretanto, isso não será feito no momento. Em geral, quando os autovalores da matriz de coeficientes são números imaginários puros, nos deparamos com uma situação análoga a essa, e dizemos que a origem é um *centro* do sistema, e é um ponto crítico estável. Na Figura 3, esse comportamento é explicitado através do campo de direções da solução geral do sistema.

3.3.3 Caso geral para um sistema 2×2

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, o polinômio definido por:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) \quad (3.37)$$

é dito o polinômio característico de A . As raízes deste polinômio são autovalores da matriz A . Se $N = 2$, podemos encontrar uma formula para (3.37). Seja A mais precisamente definida como a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

então (3.37) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= [(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})] - [a_{12}a_{21}] \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde $\text{tr}(A)$ é o traço da matriz A . As raízes do polinômio, então, tem a forma:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2} \quad (3.40)$$

Seja A a matriz de coeficientes de um sistema linear. Como observamos nas seções anteriores, a forma e o sinal dos autovalores de A são importantes para determinar o tipo de equilíbrio da origem do sistema. Com a equação (3.40), é possível demonstrar que:

1. se $\text{tr}(A)^2 = 4 \det(A)$, então $\lambda_1 = \lambda_2$, e necessariamente são números reais. Em particular, se:
 - a) $\text{tr}(A) > 0$ e $\det(A) > 0$ as raízes são reais, iguais, e positivas, e a origem é um *nó instável*
 - b) $\text{tr}(A) < 0$ e $\det(A) > 0$ as raízes são reais, iguais, e negativas, e a origem é um *nó estável*

2. se $\text{tr}(A)^2 > 4 \det(A)$, então λ_1, λ_2 são números reais e distintos. Em particular, se:
- $\det(A) < 0$, então elas também tem sinais diferentes, e a origem do sistema é dita um *ponto de sela*, que é instável.
 - $\det(A) > 0$, os sinais das raízes são iguais, e a origem é um *nó impróprio*, que pode ser estável, se $\text{tr}(A) < 0$, ou instável, se $\text{tr}(A) > 0$.
3. se $\text{tr}(A)^2 < 4 \det(A)$, então λ_1, λ_2 são números complexos conjugados. Em particular, se:
- $\text{tr}(A) = 0$ e $\det(A) > 0$, as raízes são imaginários puros, e a origem é um *centro* do sistema, que é estável.
 - $\text{tr}(A) > 0$ e $\det(A) > 0$ as raízes são complexos com parte real positiva, é a origem é um *foco espiral instável*
 - $\text{tr}(A) < 0$ e $\det(A) > 0$ as raízes são complexos com parte real negativa, e a origem é um *foco espiral estável*.

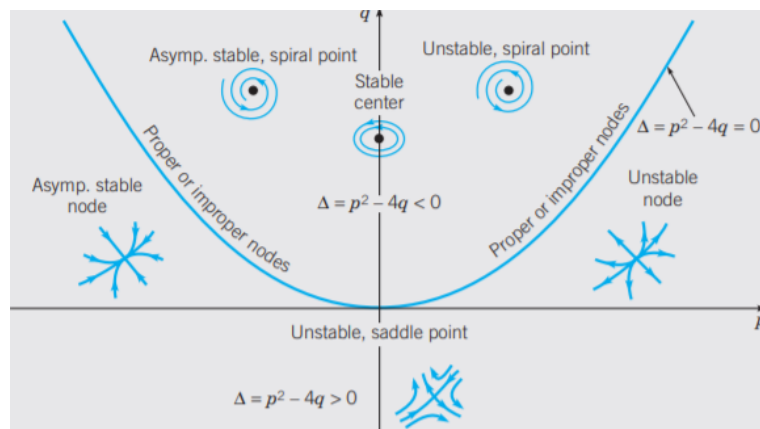


Figura 4 – Diagrama de Estabilidade
Fonte: Boyce e DiPrima (2012)

A Figura 4 sumariza os itens acima. Nela, p e q são o traço e o determinante do sistema linear. Para mais detalhes sobre a estabilidade do sistema e sua relação com o polinômio característico, ver [Shone \(2002\)](#), p. 178–183.

3.4 Estabilidade no Lotka-Volterra

Nesta Seção apresentaremos a análise de estabilidade do sistema de Lotka-Volterra. Dado o contexto deste capítulo, e tudo que apresentamos até agora, o leitor pode imaginar que para realizar este exercício bastará combinar os dois processos apresentados anteriormente, ou seja, linearizar o sistema ao redor de seus pontos críticos, e em seguida proceder com a análise de estabilidade do sistema linearizado. Entretanto, devemos antes nos fazer

a seguinte pergunta: o comportamento do sistema linear resultado da linearização de um sistema não linear representa fielmente o comportamento do sistema original? De fato, a resposta é "nem sempre". Considere por exemplo o seguinte problema, retirado de Epstein (1997), p. 114-115:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= y(t) - ax(t)(x^2(t) + y^2(t)) \\ \dot{y}(t) &= -x(t) + ay(t)(x^2(t) + y^2(t))\end{aligned}\tag{3.41}$$

que possui um ponto de equilíbrio em $(x, y) = (0, 0)$, para verificar isto, substitua estes valores no sistema. Assim, a matriz de coeficientes do sistema linearizado ao redor de $(0, 0)$ é o Jacobiano de (3.41) no ponto $(0, 0)$, ou seja:

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\tag{3.42}$$

cujo polinômio característico é:

$$\lambda^2 + 1 = 0\tag{3.43}$$

e suas raízes são $\lambda_{1,2} = \pm i$, que são imaginários puros. No caso linear, estes autovalores indicariam uma estabilidade do tipo centro. Entrando, note que, convertendo o sistema (3.41) para coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -1 \\ \dot{r} &= ar^3\end{aligned}\tag{3.44}$$

com um equilíbrio em $(r, \theta) = (0, -1)$. Fica evidente que o comportamento assintótico da solução de (3.44) depende do valor de a . Na Figura 5 ilustramos graficamente a solução, e o leitor pode observar que a estabilidade é do tipo centro se e somente se $a = 0$.

Este exemplo mostra que, como regra geral, a linearização não é confiável para avaliar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não linear. Na verdade, mais precisamente, ela não é confiável quando o ponto fixo de nosso interesse é *não hiperbólico*.

Definição 1 *Um equilíbrio \vec{x}_0 de um sistema não linear é dito hiperbólico se e somente se todos os autovalores do Jacobiano, em \vec{x}_0 , tem parte real não nula. Ele é dito não hiperbólico caso contrário.*

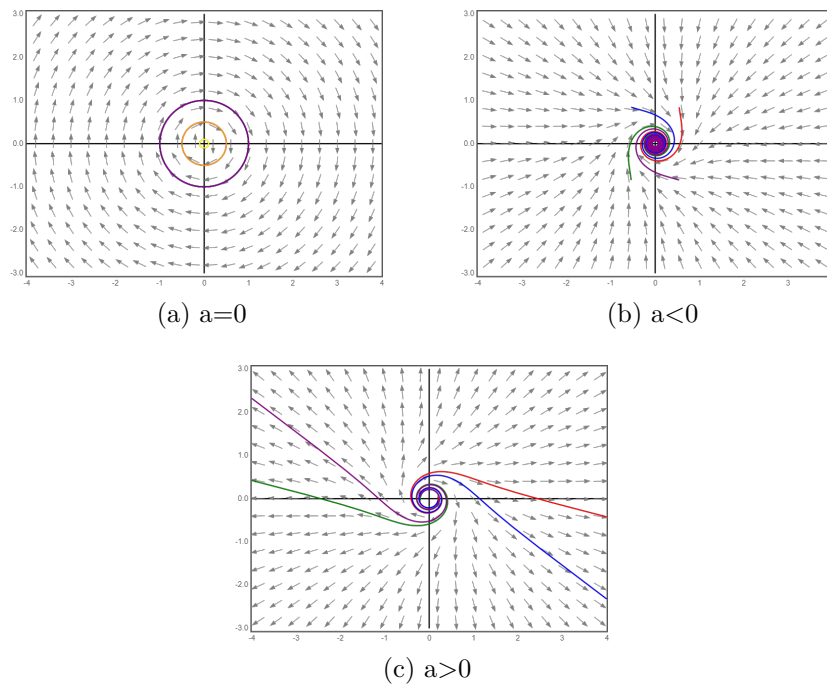


Figura 5 – Campo de direções do Sistema Não Linear

Para contornar este problema, utilizaremos dois resultados importantes, a seguir apresentados como os Teoremas 1 e 2.

Teorema 1 (Hartman-Grobman) *Se $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ é um equilíbrio hiperbólico do sistema $\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + \vec{G}(\vec{X})$, então existe uma vizinhança de \vec{x}_0 onde este é topologicamente equivalente ao sistema dado por $\dot{\vec{U}} = J_{x_0}\vec{U}$, onde $\vec{U} = (x - x_0, y - y_0)^T$.*

Teorema 2 (Poincaré) *Um equilíbrio do tipo centro em um sistema linearizado indica necessariamente um equilíbrio do tipo ou centro ou foco no sistema não linear original.*

As provas formais destes podem ser encontradas em Epstein (1997), p. 107-116. O Teorema 1 nos diz que existe um *homeomorfismo*, ou seja, um mapeamento contínuo, inversível, e com inversa contínua, entre os conjuntos definidos pelas órbitas do sistema linear e do não linear. Assim, as propriedades topológicas do sistema não linear são preservadas pela linearização. Este teorema garante a confiabilidade da linearização para um ponto fixo hiperbólico. O Teorema 2 é autoexplicativo. Assim, quando tratamos de um ponto fixo não hiperbólico, é necessário derivar as órbitas da solução matematicamente para inferir corretamente o tipo de equilíbrio. Isto resolvido, podemos prosseguir.

Considere novamente o sistema de Lotka Volterra:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha x(t) - \gamma x(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= \delta x(t)y(t) - \beta y(t)\end{aligned}\tag{3.45}$$

os pontos críticos desse sistema são os que satisfazem, por definição, a seguinte condição:

$$\begin{aligned}x(\alpha - \gamma y) &= 0 \\ y(\delta x - \beta) &= 0\end{aligned}\tag{3.46}$$

ou seja, são os pontos $a = (0, 0)$ e $b = (\beta/\delta, \gamma/\alpha)$. Linearizando ao redor do primeiro ponto, o sistema é aproximado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\tag{3.47}$$

os autovalores e autovetores são: $\lambda_1 = \gamma$, $\lambda_2 = -\beta$ e $\vec{v}_1 = (1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1)$. Logo, a solução geral toma a forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\gamma t} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\beta t}.\tag{3.48}$$

como no primeiro exemplo da Seção anterior, a origem é um ponto de sela. Agora, considere a aproximação linear ao redor do ponto $b = (\beta/\delta, \gamma/\alpha)$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma\beta/\delta \\ -\delta\gamma/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\tag{3.49}$$

onde $u = x - (\beta/\delta)$ e $v = (y - \gamma/\alpha)$. Os autovalores desse sistema são $\pm i\sqrt{\gamma\beta}$, logo, este ponto fixo é não hiperbólico, e é um centro no sistema linearizado. Mais ainda, também podemos encontrar a forma da trajetória do sistema linear, basta dividir a segunda equação pela primeira em (3.49)

$$\frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{dv}{du} = -\frac{(\delta\gamma/\alpha)u}{(\gamma\beta/\delta)v}\tag{3.50}$$

ou

$$(\delta^2\gamma u)du + (\gamma^2\beta v)dv = 0\tag{3.51}$$

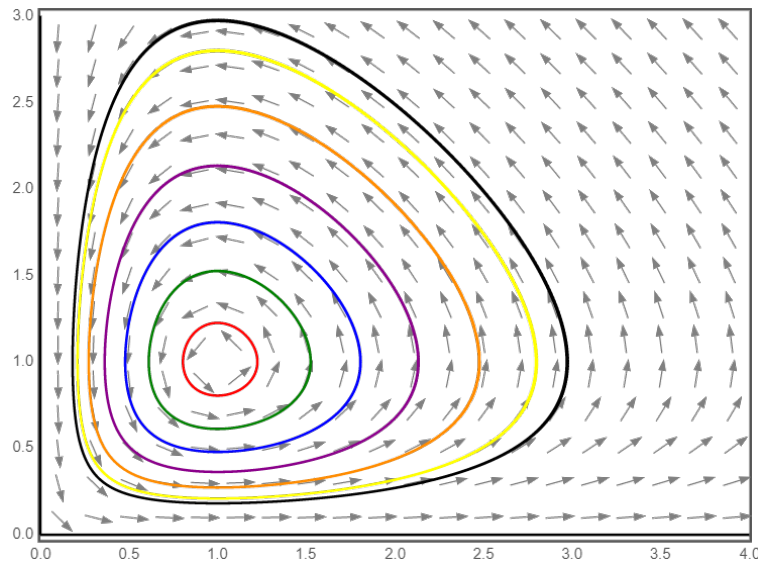


Figura 6 – Campo de Direções do Sistema de Lotka-Volterra

então

$$\delta^2 \gamma u^2 + \gamma^2 \beta v^2 = k \quad (3.52)$$

onde k é uma constante de integração não negativa. A equação (3.52) nos diz que as trajetórias, no sistema linear, são elipses. Sabemos pelo Teorema 2 que o equilíbrio no sistema original é um centro ou um foco, precisamos voltar a (3.45) e encontrar a órbita precisa do mesmo. Dividindo a segunda pela primeira equação, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{\delta x(t)y(t) - \beta y(t)}{\alpha x(t) - \gamma x(t)y(t)} \\ &= \frac{y(\delta x - \beta)}{x(\alpha - \gamma y)} \end{aligned} \quad (3.53)$$

que é separável, e tem solução:

$$\alpha \ln y - \gamma y + \beta \ln x - \delta x = C \quad (3.54)$$

onde C é uma constante de integração. Para um valor fixo desta constante, o gráfico da equação (3.54) é uma curva fechada ao redor do ponto crítico $b = (\beta/\delta, \gamma/\alpha)$, ou seja, o equilíbrio também é um centro no sistema original.. A Figura 6 mostra esta trajetória para todos os parâmetros com valor unitário, e C variando.

Parte II

Aplicações Econômicas

4 O Modelo de Goodwin

Hoje, o estudo da evolução de sistemas dinâmicos tem sido tópico de pesquisa na economia há algumas décadas, com intenção de melhorar o entendimento de fenômenos diversos, principalmente no que concerne crescimento e ciclos econômicos. Richard Murphey Goodwin foi um dos primeiros economistas – e também um dos mais militantes – a propor a necessidade da aplicação da teoria sistemas não lineares à macroeconomia, produzindo uma série de publicações fundamentais sobre o assunto. Dentro de sua carreira prolífica, um trabalho que se tornou icônico dentro da disciplina é [Goodwin \(1967\)](#), onde derivou um modelo para explicar endogenamente flutuações econômicas como resultado da luta de classes, baseado na competição entre os fatores de produção pela renda da economia. O “modelo de Goodwin”, como veio a ser conhecido, é pelo menos tão famoso entre economistas quanto o sistema de Lotka-Volterra é entre matemáticos [Gandolfo \(2009\)](#), e consiste de duas equações diferenciais não lineares, onde, no lugar da interação biológica entre animais, o nível de emprego (v) atua como presa e a proporção da renda recebida pelos trabalhadores (u) como predador. Esta interação leva a emergência de ciclos periódicos nas taxas de crescimento da economia, seguindo a dinâmica apresentada na Seção 4.3. Nas Seções 4.1 e 4.2 apresentamos o modelo e suas hipóteses.

4.1 As Hipóteses Iniciais

O Modelo de Goodwin se formula sobre as seguintes hipóteses:

1. Progresso técnico constante, desincorporado (*disembodied*). Se for a a taxa de produto-trabalhador (a produtividade do trabalho), e α uma constante positiva, então:

$$\frac{Y}{L} = a = a_0 e^{\alpha t} \quad (4.1)$$

2. Crescimento constante da força de trabalho N

$$N = N_0 e^{\beta t} \quad (4.2)$$

Com β sendo uma constante positiva. Perceba que N e L são respectivamente a força de trabalho e a força de trabalho efetivamente empregada. Ambas são definidas separadamente, e não são necessariamente iguais. Ou seja, não há hipótese de pleno emprego.

3. Existem apenas dois fatores de produção: capital e trabalho
4. Todas as variáveis são reais e em valores líquidos.
5. Todos os salários são consumidos; todo o lucro é poupado e investido.
6. A razão capital/renda é constante $k = \frac{K}{Y}$
7. A taxa de variação do salário real w surge na vizinhança do pleno emprego (na forma de uma curva de phillips)

4.2 O Modelo

Seja u a proporção da renda recebida pelos trabalhadores. Então:

$$u = \frac{wL}{Y} = \frac{w}{a} \quad (4.3)$$

pois $\frac{Y}{L} = a$. Consequentemente, a proporção da renda recebida pelos capitalistas é:

$$1 - \frac{w}{a} \quad (4.4)$$

que implica que a taxa de lucro é dada por:

$$\frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right) Y}{K} \quad (4.5)$$

logo, pelas hipóteses (4),(5) e (6), temos que:

$$\frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right) Y}{K} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y} \quad (4.6)$$

onde \dot{K}, \dot{Y} são as derivadas em relação ao tempo.

Retome agora à equação (4.1). Tomando o logarítmo natural, temos:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{L} &= a_0 e^{\alpha t} \\ \ln \frac{Y}{L} &= \ln a_0 e^{\alpha t} \\ \ln Y - \ln L &= \ln a_0 + \alpha t \ln e \end{aligned} \quad (4.7)$$

derivando em relação a t

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\ln Y - \ln L) &= \frac{d}{dt}(\ln a_0 + \alpha t \ln e) \\ \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} &= \alpha \\ \frac{\dot{L}}{L} &= \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha\end{aligned}\tag{4.8}$$

que, com (4.6), implica:

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} - \alpha\tag{4.9}$$

Agora, definimos a taxa de emprego v como:

$$v = \frac{L}{N}\tag{4.10}$$

tomando o logarítmo natural e diferenciando em relação a t :

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{N}}{N}\tag{4.11}$$

mas perceba que, pela equação (4.2), $\frac{\dot{N}}{N} = \beta$. Além disso, utilizando o resultado (4.9), o termo acima pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{v}}{v} &= \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} - (\alpha + \beta) \\ &= \frac{1 - u}{k} - (\alpha + \beta)\end{aligned}\tag{4.12}$$

Reconsidere agora a hipótese (7). Matematicamente, ela significa que $\frac{\dot{w}}{w} = f(v)$, com f uma função crescente do tipo exposta na Figura 7. A análise pode feita com com este $f(v)$, mas para fins elucidação e facilitação, tomaremos a aproximação linear (GOODWIN, 1967). Escrevemos:

$$f(v) = \frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v\tag{4.13}$$

onde γ e ρ são constantes positivas.

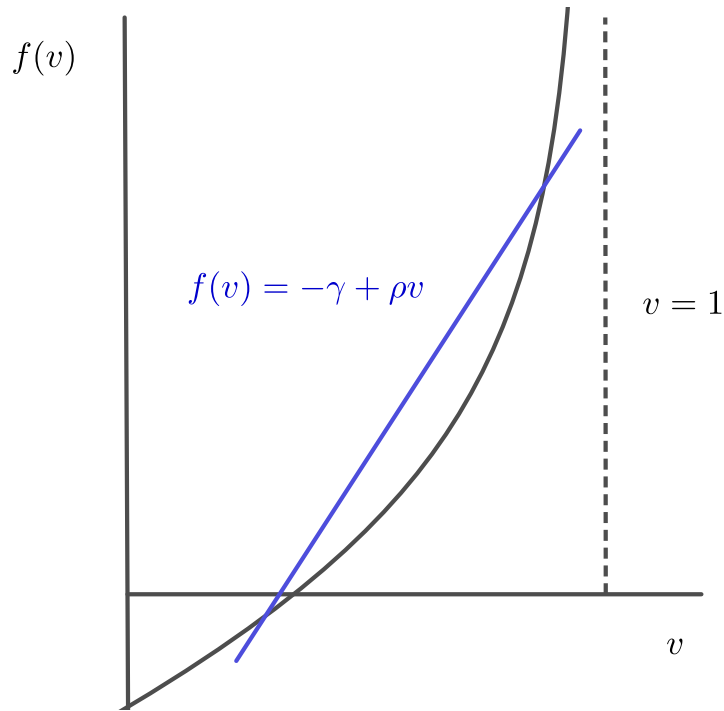


Figura 7 – A taxa salarial e o emprego

Agora volte à equação (4.3). Tome o logaritmo natural e derive em relação ao tempo:

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{\dot{w}}{w} - \alpha \quad (4.14)$$

dado (4.13):

$$\frac{\dot{u}}{u} = -(\alpha + \gamma) + \rho v \quad (4.15)$$

Assim, de (4.12) e (4.15), obtemos as equações fundamentais do modelo:

$$\begin{cases} \dot{v} = \left[\left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{1}{k} u \right] v \\ \dot{u} = [-(\alpha + \gamma) + \rho v] u \end{cases} \quad (4.16)$$

escrevendo:

$$\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) = a_1, \quad \frac{1}{k} = b_1, \quad (\alpha + \gamma) = a_2, \quad \rho = b_2 \quad (4.17)$$

temos o sistema de equações de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dot{v} = (a_1 - b_1 u) v \\ \dot{u} = -(a_2 - b_2 v) u \end{cases} \quad (4.18)$$

4.3 Implicações Econômicas

Aplicando os procedimentos apresentados na Seção 3.4, podemos derivar as curvas do modelo no plano $u \times v$. Perceba que em nossa construção do Lotka-Volterra, o plano no qual as curvas foram traçadas é construído na ordem inversa. Assim, no modelo de Goodwin a direção de movimento ao longo de uma curva é horária (em contraste com a direção anti-horária da Figura 6). Por definição $u, v \in [0, 1]$ ¹, e cada segmento de reta no eixo u representa uma distribuição de renda: a distância da origem ao ponto u_0 é a proporção paga aos trabalhadores, e o valor complementar, ou seja, $1 - u_0$, a proporção paga aos capitalistas. Este último valor multiplicado por $\frac{1}{k}$ retorna taxa de lucro, que, por sua vez é igual à taxa de crescimento da renda (ver equação (4.6)). De u podemos derivar a taxa de crescimento do salário. Representamos as órbitas do sistema na Figura 8. Dado o ponto fixo C e uma condição inicial arbitrária, u navega entre u_1 e u_2 , enquanto v navega entre v_1 e v_2 . Assim, temos ciclos na taxa de emprego e na taxa de crescimento da renda.

Quando a taxa de lucro atinge seu valor máximo, $u = u_1$, o nível de emprego está em seu valor médio $v = a_2/b_2$, e o rápido crescimento da renda empurra o emprego para seu nível máximo v_2 . Isto comprime a taxa de lucro, até que esta caia para seu valor médio a_2/b_1 . Conseqüentemente, há uma desaceleração na velocidade de crescimento, que reduz o nível de emprego para um valor inferior ao seu valor médio. A redução no nível de emprego continua até que a taxa de lucro alcance novamente seu valor máximo u_1 . Finalmente, o ciclo se repete. Nas palavras de Goodwin, “The improved profitability carries the seed of its own destruction by engendering a too vigorous expansion of output and employment, thus destroying the reserve army of labour and strengthening labour’s bargaining power” (GOODWIN, 1967)

Outra implicação interessante do modelo de Goodwin é a irrelevância de choques externos. Qualquer deslocamento nas dotações em (u, v) resulta apenas no rearranjo dos pontos representativos, gerando outra órbita ao redor do mesmo ponto fixo. Outra maneira de dizer isso é observando a seguinte propriedade do modelo: Os valores médios assintóticos de u e v , que são as coordenadas do ponto fixo C , são independentes das condições iniciais. A prova é como se segue:

Aplicando o logaritmo natural e derivando em relação a t , em (4.18)

$$\begin{aligned} \frac{d \ln v}{dt} &= a_1 - b_1 u \\ \frac{d \ln u}{dt} &= -a_2 + b_2 v \end{aligned} \tag{4.19}$$

integrando no intervalo (t_b, t_a)

¹ As variáveis não respeitam o espaço onde estão definidas. Esta é uma incoerência interna do modelo, e veremos mais sobre isso a seguir

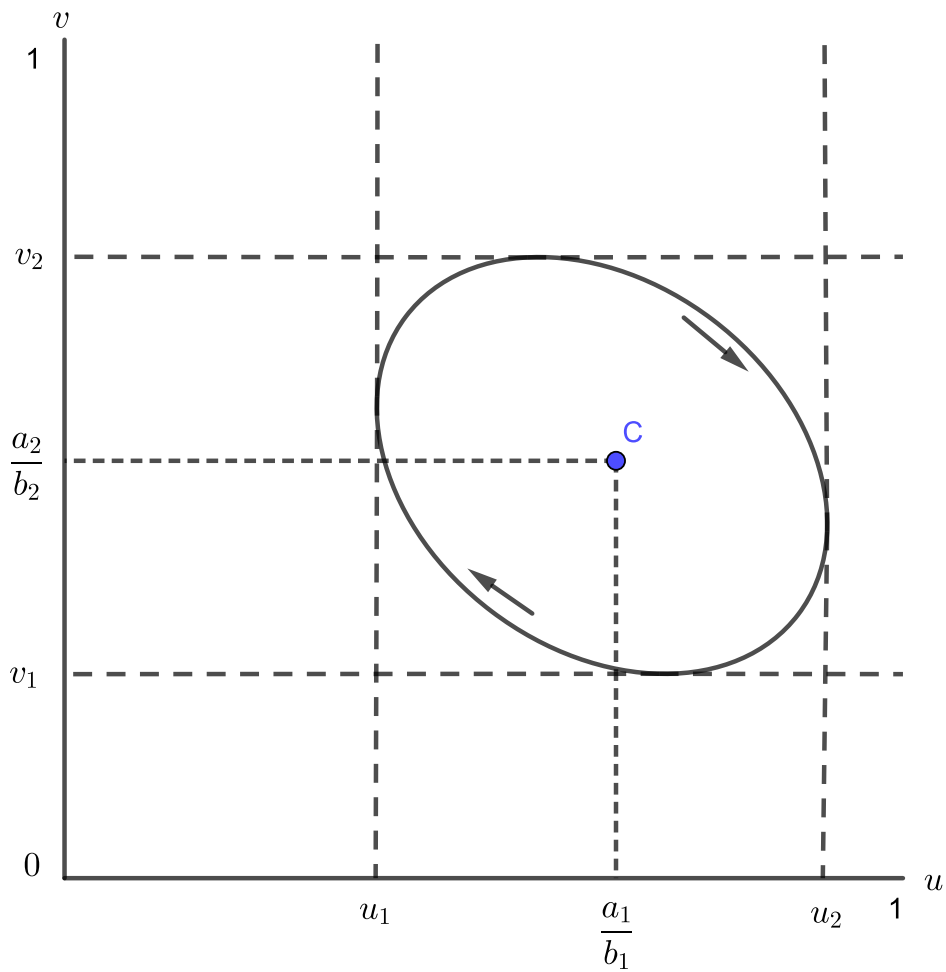


Figura 8 – Ciclo de Crescimento de Goodwin

$$\begin{aligned} \ln \frac{v(t_a)}{v(t_b)} &= a_1(t_a - t_b) - b_1 \int_{t_b}^{t_a} u dt \\ \ln \frac{u(t_a)}{u(t_b)} &= -a_2(t_a - t_b) + b_2 \int_{t_b}^{t_a} v dt \end{aligned} \quad (4.20)$$

seja T o período de oscilação. Suponha que $|t_a - t_b| = T$. Segue que $v(t_a) = v(t_b)$. Então:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 T - b_1 \int_0^T u dt \\ 0 &= -a_2 T + b_2 \int_0^T v dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

ou seja

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T u dt &= \frac{a_1}{b_1} \\ \frac{1}{T} \int_0^T v dt &= \frac{a_2}{b_2}\end{aligned}\tag{4.22}$$

Assim, as coordenadas de $C = (\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2})$, o valor médio de u e v , são constantes ao longo de qualquer ciclo.

5 Modificações do Modelo de Goodwin

O modelo de ciclos econômicos de Goodwin capturou a atenção de muitos economistas, e isto foi de maneira tão significativa que, hoje, cinco décadas desde a sua construção, ele ainda serve de última inspiração para muitos artigos em produção. O motivo por trás deste fenômeno não é tópico de discussão neste trabalho, mas, podemos pelo menos dizer parte da explicação recai sobre a simplicidade e a elegância na qual Goodwin simula um comportamento complexo das economias contemporâneas. Entretanto, nem tudo são flores. Parte significativa da literatura subsequente, notadamente [Harvie, Kelmanson e Knapp \(2006\)](#), [Desai \(1973\)](#), [Desai et al. \(2006\)](#), [Shah e Desai \(1981\)](#) e [Foley \(2003\)](#), se dedicou principalmente a resolver problemas tanto técnicos quanto teóricos presentes no modelo original. Um dos destaques mais relevantes é em relação as variáveis u e v , que são incoerentes com o comportamento das órbitas do sistema. Por exemplo, perceba que u e v , na medida que são definidas como proporções, devem ser tais que o par ordenado (u, v) está restrito ao espaço $U = [0, 1] \times [0, 1]$. Entretanto, isto não acontece necessariamente. Considere a segunda equação de (4.16), $\dot{u} = [-(\alpha + \gamma) + \rho v] u$. No ponto fixo não nulo, v toma o valor $v^* = \frac{\alpha + \gamma}{\rho}$. Mas perceba que nada impede que α, γ e ρ sejam tais que $(\alpha + \gamma) > \rho$, e então $u^* > 1$ ¹. Este tipo de incoerência implica que para grande parte das condições iniciais que escolhermos, as variáveis chave do modelo não irão fazer sentido. Outro destaque é em relação a simetria dos ciclos econômicos. Apesar do modelo ser não linear, as curvas geradas pela solução do sistema são quase simétricas nos ciclos com menor amplitude, que são os mais realísticos do ponto de vista econômico. Entretanto, a assimetria dos ciclos econômicos já é reconhecido dentro da academia pelo menos desde [Keynes \(1936\)](#).

Neste capítulo apresentaremos duas Modificações do Modelo de Goodwin que exploram alguns dos problemas recorrentes na literatura. Começamos na Sessão 5.1 introduzindo as modificações de [Desai et al. \(2006\)](#), que propõe um ajuste simples nas equações para garantir que as variáveis centrais do modelo estejam contidas em U . Em seguida, apresentamos na Sessão 5.2 as modificações de [Harvie, Kelmanson e Knapp \(2006\)](#), que expandem consideravelmente o sistema original, restringem as soluções ao espaço desejado, e também acrescenta novos parâmetros que nos permitem obter ciclos mais realistas.

¹ Mesmo que o ponto fixo esteja contido em U , nada garante que as curvas ao redor deste também estejam.

5.1 Restrições Suficientes em um Lotka-Volterra Generalizado

Considere a seguinte generalização do Sistema de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x} = xf(y) - ax = G(x, y) \\ \dot{y} = cy - yg(x) = F(x, y) \end{cases} \quad (5.1)$$

note que se fizermos $g(y) = dx$, $f(x) = by$, este sistema tem a mesma forma de (2.5), mas com parâmetros a, b, c, d ao invés de $\alpha, \gamma, \delta, \beta$. Também invertamos o significado das variáveis, para ser coerente com o trabalho de [Desai et al. \(2006\)](#), assim sendo, x representa o predador e y a presa. Quais restrições ao sistema de Lotka-Volterra são necessárias para que as órbitas da solução ao redor do ponto fixo não nulo sejam menores que a unidade?

Suponha f, g continuamente diferenciáveis no intervalo $(0, 1)$, e $a, c > 0$. Também, tome que sejam verdadeiras as seguintes condições:

1. $\dot{f}, \dot{g} > 0$ em $(0, 1)$
2. $f(0) < a$ e $g(0) < c$
3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(y) = \infty$

então, todas as trajetórias no quadrante $x, y > 0$ se restringem a seção do R^2 definida por $[0, 1] \times [0, 1]$. Vamos verificar a veracidade desta afirmação.

Primeiro, considere o ponto fixo $z^* = (x^*, y^*)$. Por definição, em z^* é um ponto onde o valor das derivadas de x e y em relação ao tempo são nulas, ou seja, $\dot{x}, \dot{y} = 0$. Logo, as coordenadas de z^* são dadas por:

$$z^* = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{-1}(c) \\ f^{-1}(a) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

expandido por Taylor o lado direito de (5.1) ao redor de z^* , temos:

$$\begin{aligned} F(x, y) &\approx DF(z) = \frac{dF}{dx}(x - x^*) + \frac{dF}{dy}(y - y^*) \\ G(x, y) &\approx DG(z) = \frac{dG}{dx}(x - x^*) + \frac{dG}{dy}(y - y^*) \end{aligned} \quad (5.3)$$

pois $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$. Este sistema pode ser reescrito como:

$$\dot{z} \approx \begin{bmatrix} 0 & x^* \dot{f}(y^*) \\ -y^* \dot{g}(x^*) & 0 \end{bmatrix} (z - z^*) = \vec{A}(z - z^*) \quad (5.4)$$

onde os autovalores de \vec{A} são dados pelo polinômio característico:

$$\lambda^2 + x^* y^* \dot{f}(y^*) \dot{g}(x^*) = 0 \quad (5.5)$$

pela condição 1:

$$x^* y^* \dot{f}(y^*) \dot{g}(x^*) > 0 \quad (5.6)$$

o que implica que λ_1, λ_2 , as raízes do polinômio, são imaginários puros.

Pelo que vimos em 3.3.3, segue que z^* é um centro para a versão linearizada do sistema, com todas suas trajetórias na forma de uma curva fechada. Oras, mas também vimos em 3.4 que o centro de um sistema linearizado é ou um centro ou um foco espiral no sistema original. Peceba que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{cy - yg(x)}{-ax + xf(y)} \quad (5.7)$$

que é uma equação separável, então:

$$\int \left(\frac{-a}{y} + \frac{f(y)}{y} \right) dy = \int \left(\frac{c}{x} - \frac{g(x)}{x} \right) dx \quad (5.8)$$

a equação da trajetória que passa pelo ponto arbitrário (x_0, y_0) é dada por:

$$-a(\ln y - \ln y_0) + \int_{y_0}^y \frac{f(s)}{s} ds = c(\ln x - \ln x_0) - \int_{x_0}^x \frac{g(s)}{s} ds \quad (5.9)$$

seja $x = P$, $p \in (0, 1)$ uma reta qualquer. Ela encontra a curva acima quando:

$$-a(\ln y - \ln y_0) + \int_{y_0}^y \frac{f(s)}{s} ds = c(\ln P - \ln x_0) - \int_{x_0}^x \frac{g(s)}{s} ds = P \quad (5.10)$$

Isto ocorrerá no máximo uma vez. Prova: Se escrevermos o lado esquerdo da equação acima como $F(y)$, então:

$$\dot{F}(y) = \frac{-a}{y} + \frac{f(y)}{y} \quad (5.11)$$

que, com as condições 1,2,3, tem exatamente uma raiz no intervalo $(0, 1)$.

Assim, a trajetória não pode ser espiral (pois cruzaria com a reta infinitas vezes), e logo, deve ser um centro. Mais ainda, qualquer trajetória que inicia em $(0, 1) \times (0, 1)$ deve continuar dentro do mesmo espaço, pela condição 3. Caso contrário, a trajetória deverá atravessar ou a linha $x = 1$ ou $y = 1$, onde o sistema não é definido.

5.1.1 Modelo de Goodwin Modificado

Uma primeira adaptação facilmente introduzida no Modelo de Goodwin é alcançada através da especificação de uma nova equação para o movimento do salário real. Desai et al. (2006) utiliza o modelo originalmente proposto por Phillips (1958), com as variáveis em significado real, e não nominal. Ou seja:

$$f(v) = \frac{\dot{w}}{w} = -\dot{\gamma} + \rho(1 - v)^{-k} \quad (5.12)$$

onde, como anteriormente, $\rho, \gamma > 0$ são constantes positivas (como a equação é outra, o valor das constantes é diferentes das constantes do modelo original, estamos utilizando os mesmos símbolos apenas para economizar na notação), $\beta = \frac{\dot{N}}{N}$ e v é o a taxa de emprego. Além disso, veja que $v \rightarrow 1$ implica que $\frac{\dot{w}}{w} \rightarrow \infty$, que tem a forma apresentada na Figura 7, ou seja, é coerente com a formulação de Goodwin. Assim sendo, a primeira equação do Modelo, (4.15), tem a nova forma:

$$\frac{\dot{u}}{u} = -(\gamma + \alpha) + \rho(1 - v)^{-k} \quad (5.13)$$

onde $\alpha = \frac{\dot{a}}{a}$. É importante ressaltar que, desde que seja $\rho < \gamma + \alpha$, (5.13) respeita as condições 1 à 3.

A segunda equação do Modelo assume que todos os lucros são investidos, todos os salários são consumidos e k e N são constantes. Estas hipóteses são utilizadas para derivar a equação (4.12), que repetimos a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}}{v} &= \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} - (\alpha + \beta) \\ &= \frac{1 - u}{k} - (\alpha + \beta) \end{aligned} \quad (5.14)$$

uma alternativa plausível, que relaxa a conjectura de que todo lucro é investido (Hipótese 5, no modelo original), é a especificação de uma equação onde a taxa de investimento é

uma função da diferença da taxa de lucro realizada μ e da taxa de lucro de reserva², $\bar{\mu}$. Estes termos podem ser considerados em sua relação com u , a proporção da renda paga aos trabalhadores. Seja $\bar{u} < 1$ a participação máxima dos trabalhadores que é tolerada pelos capitalistas, então, conforme μ se move para baixo em direção a $\bar{\mu}$, u se move para cima na direção de \bar{u} , e a acumulação de capital se esgota. Ou seja, são equivalentes as seguintes proposições: (i) $u \rightarrow \bar{u}$, (ii) $\mu \rightarrow \bar{\mu}$ e (iii) $\dot{K} \rightarrow -\infty$. A seguinte equação, que possui estas características, é proposta:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{K}}{K} &= \lambda \ln \frac{\bar{u} - u}{1 - \bar{u}} \\ &= -\lambda \ln(1 - \bar{u}) + \lambda \ln(\bar{u} - u) \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde $\lambda > 0$ é a velocidade de reação. Assim, podemos derivar a seguinte equação alternativa para v :

$$\frac{\dot{v}}{v} = -[\lambda \ln(1 - \bar{u}) - (\alpha + \beta)] + \lambda(\bar{u} - u) \quad (5.16)$$

Perceba que $\lim_{u \rightarrow \bar{u}-} \ln(\bar{u} - u) = -\infty$. Como K e v estão definidos apenas para $u < \bar{u}$, a condição 3 é satisfeita. Além disso, a condição 1 é satisfeita, e também a condição 2, desde que escolhamos \bar{u} que satisfaça $\alpha + \beta < \lambda \ln \frac{\bar{u}}{1 - \bar{u}}$.

Então, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{u} = [-(\gamma + \alpha) + \rho(1 - v)^{-k}]u \\ \dot{v} = [-[\lambda \ln(1 - \bar{u}) - (\alpha + \beta)] + \lambda(\bar{u} - u)]v \end{cases} \quad (5.17)$$

que, como foi visto, respeita as condições apresentadas e, além disso, relaxa algumas hipóteses do modelo original. Assim sendo, garante que as trajetórias das órbitas do modelo estejam integralmente contidas no espaço $[0, 1] \times [0, \bar{u}]$, $\bar{u} < 1$.

5.2 Outra modificação do Modelo de Goodwin

Harvie, Kelmanson e Knapp (2006) argumenta que uma grande fonte de discórdia no modelo de Goodwin é o fato de que a distribuição corrente de renda depende exclusivamente do nível de emprego. Assim, podemos tornar mais realista a forma na qual consideramos este problema se supormos que: a velocidade na qual a proporção da renda paga a cada fator de produção cresce (ou, reflexivamente, decresce) depende também da sua própria

² a taxa de lucro de reserva é a taxa de lucro mínima que os capitalistas aceitam receber.

densidade. Ou seja, fazemos com que $\dot{u}, \dot{v} \rightarrow 0$ quando $u, v \rightarrow 1$. Isto pode ser alcançado através da introdução de *barrier functions*³, na seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\dot{u}}{u} = [-(\gamma + \alpha) + \rho v] f_1(u) \\ \frac{\dot{v}}{v} = \left[\left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{1}{k} u \right] f_2(v) \end{cases} \quad (5.18)$$

onde $f_1(u) \rightarrow 0$ conforme $u \rightarrow 1$ e $f_2(v) \rightarrow 0$ conforme $v \rightarrow 1$. Para o modelo ser economicamente realista, também deve ser considerado que as funções são positivas para todo valor $u, v < 1$. Os parâmetros $\alpha, \beta, \rho, \gamma$ correspondem aos parâmetros de mesmo nome no modelo original, mas seu significado no novo modelo não é exatamente o mesmo, como veremos mais adiante. As seguintes formas são escolhidas para as funções f_1, f_2 :

$$\begin{aligned} f_1(u) &= m_1(1 - u), \quad m_1 > 0 \\ f_2(v) &= m_2(1 - v), \quad m_2 > 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde m_1 e m_2 são constantes. Então, podemos escrever o modelo como:

$$\begin{cases} \frac{\dot{u}}{u} = m_1(1 - u)[-(\gamma + \alpha) + \rho v] \\ \frac{\dot{v}}{v} = m_2(1 - v) \left[\left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{1}{k} u \right] \end{cases} \quad (5.20)$$

O sistema resultante é tal que as trajetórias das soluções que passam por pontos contidos em $U = [0, 1] \times [0, 1]$, no plano $u \times v$, se restringem integralmente U . Perceba que os termos $(1 - u)$ e $(1 - v)$ representam respectivamente a proporção da renda paga aos capitalistas (o lucro) e a proporção da força de trabalho desempregada. Conforme cada um destes termos se aproxima de zero (quando $u \rightarrow 1$ para o primeiro, e $v \rightarrow 1$ para o segundo), a equação na qual o termo está acoplado também tende a zero ($\dot{u}, \dot{v} \rightarrow 0$), de maneira que previne que u e v excedam a unidade.

Até agora, as modificações realizadas sobre o sistema são tais que uma maior densidade de u reduz a taxa de crescimento de u . O mesmo acontece para v . Esta modificação faz do modelo mais realista, mas está incompleta. Os autores argumentam que, na realidade, o efeito de *feedback* na densidade da variável sobre sua taxa de crescimento pode ser tanto positivo quanto negativo, e as modificações que realizamos até agora capturam apenas um dos lados desta relação. A fim de acrescentar esta observação ao modelo, fazemos uma segunda extensão, modificando f_1 e f_2 de maneira que tanto *feedbacks* negativos quanto positivos sejam capturados.

³ Na otimização restrita, uma *barrier function* (ou “função barreira”) é uma função contínua cujo valor no ponto tende ao infinito conforme o ponto se aproxima da região factível associada ao problema de otimização.

As novas formas para f_1 e f_2 são:

$$\begin{aligned} f_1(u) &= m_1 u^{\mu_1} (1-u)^{\eta_1}, \quad m_1 > 0, \mu_1 \geq 0, \eta_1 > 0 \\ f_2(v) &= m_2 v^{\mu_2} (1-v)^{\eta_2}, \quad m_2 > 0, \mu_2 \geq 0, \eta_2 > 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde os termos μ_i, η_i e m_i , $i = 1, 2$, serão chamados de parâmetros de ajuste. Isto se deve ao fato que estas constantes nos permitem gerar ciclos assimétricos, uma vez que fazem com que a dinâmica do ciclo varie ao longo de suas fases. O modelo agora toma a forma:

$$\begin{cases} \frac{\dot{u}}{u} = m_1 u^{\mu_1} (1-u)^{\eta_1} [-(\gamma + \alpha) + \rho v] \\ \frac{\dot{v}}{v} = m_2 v^{\mu_2} (1-v)^{\eta_2} \left[\left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{1}{k} u \right] \end{cases} \quad (5.22)$$

perceba que para reduzir 5.22 ao modelo de goodwin, basta escolher $\mu_1 = \eta_1 = \mu_2 = \eta_2 = 0$ e $m_1 = m_2 = 1$.

Isto feito, podemos agora realizar a análise de estabilidade do modelo modificado. Por razões de simplificação da notação, reescrevemos o modelo 5.22 da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = m_1 u^{\mu_1+1} (1-u)^{\eta_1} [-a_1 + b_1 v] \\ \dot{v} = m_2 v^{\mu_2+1} (1-v)^{\eta_2} [-a_2 + b_2 u] \end{cases} \quad (5.23)$$

onde

$$a_1 = \alpha + \gamma, \quad b_1 = \rho, \quad a_2 = \frac{1}{k} - (\alpha + \beta), \quad b_2 = \frac{1}{k} > 0 \quad (5.24)$$

agora, considere os pontos críticos do modelo, ou seja, os pontos onde $\dot{u} = \dot{v} = 0$. Obtemos cinco pares ordenados distintos: Os quatro vértices de U e $(u^*, v^*) = (\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1})$. O ponto interno (u^*, v^*) é o único economicamente relevante, assim sendo, linearizamos o sistema 5.23 ao redor deste, e obtemos o seguinte jacobiano (ver Sessão 3.3):

$$J_{u^*, v^*} = \begin{bmatrix} 0 & m_1 b_1 (u^*)^{\mu_1+1} (1-u^*)^{\eta_1} \\ -m_2 b_2 (v^*)^{\mu_2+1} (1-v^*)^{\eta_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

cuja equação característica é

$$\lambda^2 + m_1 m_2 b_1 b_2 (u^*)^{\mu_1+1} (1-u^*)^{\eta_1} (v^*)^{\mu_2+1} (1-v^*)^{\eta_2} = 0 \quad (5.26)$$

perceba que o segundo termo do lado esquerdo é sempre positivo, então teremos $\lambda = \Omega i$, onde:

$$\Omega^2 = m_1 m_2 b_1 b_2 (u^*)^{\mu_1+1} (1-u^*)^{\eta_1} (v^*)^{\mu_2+1} (1-v^*)^{\eta_2} \quad (5.27)$$

segue que, como os autovalores são puramente imaginários, o ponto (u^*, v^*) é um centro do sistema linearizado. Isto implica que, via Teorema 2, (u^*, v^*) é ou um centro ou um foco no sistema original. Assim, devemos derivar a equação da trajetória das soluções. Dividimos a segunda equação pela primeira em 5.23:

$$\frac{dv}{du} = \frac{m_2 v^{\mu_2+1} (1-v)^{\eta_2} [-a_2 + b_2 u]}{m_1 u^{\mu_1+1} (1-u)^{\eta_1} [-a_1 + b_1 v]} \quad (5.28)$$

que é separável, e tem a primeira integral na forma:

$$\int_0^u \frac{a_2 - b_2 u}{m_1 (u)^{\mu_1+1} (1-u)^{\eta_1}} du + \int_0^v \frac{a_1 - b_1 v}{m_2 (v)^{\mu_2+1} (1-v)^{\eta_2}} dv = \ln K \quad (5.29)$$

vamos mostrar que 5.29 tem a forma de uma curva fechada. Defina:

$$\varrho_i \equiv (m_i, \mu_i, \eta_i, a_i, b_i) \quad (5.30)$$

$$h(\epsilon; \varrho_i) \equiv \frac{a_i - b_i \epsilon}{m_i \epsilon^{\mu_i+1} (1-\epsilon)^{\eta_i}} d\epsilon, 0 < a_i < b_i \quad (5.31)$$

$$H(\epsilon; \varrho_i) \equiv \int_0^\epsilon h(\epsilon; \varrho_i) d\epsilon, 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (5.32)$$

$$G(\epsilon, \varrho_i) \equiv \exp(H(\epsilon; \varrho_i)) \quad (5.33)$$

tal que seja verdade:

$$G(u; \varrho_1) G(v; \varrho_2) = K \quad (5.34)$$

então temos:

$$\frac{dG(u; \varrho_i)}{d\epsilon} = \exp(H(\epsilon; \varrho_i)) \frac{dH(\epsilon; \varrho_i)}{d\epsilon} = G(v; \varrho_i) h(\epsilon; \varrho_i) \quad (5.35)$$

onde o termo $G(v; \varrho_i)$ é claramente não negativo para todo $\epsilon \in [0, 1]$. Notamos de (5.30) e (5.31) que:

$$H(\epsilon; \varrho_i) \approx -\frac{a_i}{m_i \mu_i} \epsilon^{-\mu_i} + \frac{\eta_i - b_i}{m_i (1 - \mu_i)} \epsilon^{1-\mu_i} + O(\epsilon^{2-\mu_i}), \epsilon \rightarrow 0^+ \quad (5.36)$$

onde, como $\mu_i > 0$, tende para $-\infty$ conforme $\epsilon \rightarrow 0^+$. Assim, por (5.32), $G(v; \varrho_i) \rightarrow 0^+$ conforme $\epsilon \rightarrow 0^+$ e por (5.33), G deve crescer monotonicamente de zero até o valor máximo $G_{max} = \exp(H(\frac{a_i}{b_i}; \varrho_i))$. Após este ponto, entretanto, decresce monotonicamente. Logo, G tem um ponto máximo unico no intervalo unitário, o que implica que os pares (u, v) em U se encontram sob curvas fechadas.

A fim de ilustrar as curvas obtidas pelo modelo estendido, acrescentamos a Figura 9, retirada de Harvie, Kelmanson e Knapp (2006). Esta é resultado de testes numéricos realizados pelos autores, nos quais, manipulando os parâmetros de ajuste, constroem curvas assimétricas ao redor do ponto fixo. Além do mapeamento das curvas fechadas, a Figura também inclui a evolução temporal de u e v associada a cada curva. Podemos observar o comportamento periódico usual do sistema de Lotka-Voterra, com, entretanto, seu período e amplitude sendo visivelmente modificado pela escolha de parâmetros.

5.2.1 Implicações Econômicas

Esta versão modificada do modelo de Goodwin tem uma interpretação econômica mais rica, e reflete aspectos dos ciclos econômicos que estão ausentes no original. Como veremos a seguir, são levantadas questões relacionadas ao comportamento da demanda agregada, ao nível de utilização do capital, ao crescimento da produtividade e da força de trabalho.

Vamos começar entendendo o significado dos parâmetros do modelo. Lembre-se que no modelo original, $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ e k representavam o valor real da taxa de crescimento da produtividade, da taxa de crescimento da força de trabalho, e do intercepto e da inclinação da curva de phillips. Além disso, estes eram entendidos como constantes. Aqui, entretanto, estes parâmetros tem outra interpretação, e representam de fato um “valor base” para cada um destes elementos, enquanto o “valor real” varia ao longo do ciclo.

Sejam $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\rho}$ e \hat{k} os valores reais dos respectivos elementos no modelo modificado. Da equação 4.14 temos

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{\dot{w}}{w} - \hat{\alpha} \quad (5.37)$$

e da definição de a na hipótese 4.1, podemos escrever $L = Y/a$. Também, a definição de v é dada por $v = L/N$. Juntando estas duas equações, escrevemos:

$$v = \frac{Y}{aN} \quad (5.38)$$

e então, podemos escrever:

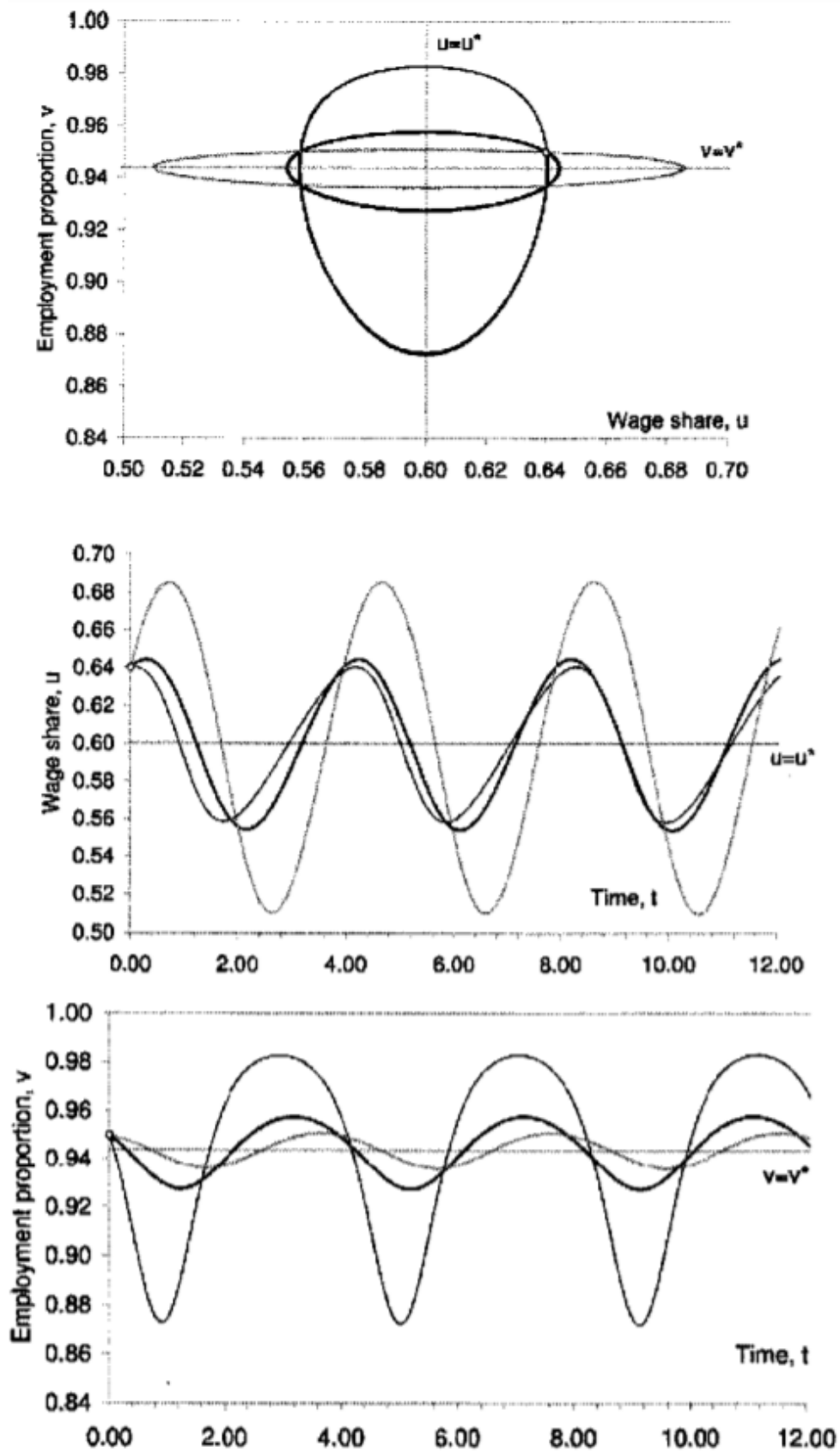


Figura 9 – Ciclos do Modelo Estendido
 Fonte: Harvie, Kelmanson e Knapp (2006)

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{N}}{N} = \frac{q}{q} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \quad (5.39)$$

segue, do sistema 5.22:

$$\begin{cases} \frac{\dot{w}}{w} - \hat{\alpha} = m_1 u^{\mu_1} (1-u)^{\eta_1} [-(\gamma + \alpha) + \rho v] \\ \frac{q}{q} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} = m_2 v^{\mu_2} (1-v)^{\eta_2} \left[\left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{1}{k} u \right] \end{cases} \quad (5.40)$$

da primeira equação, temos:

$$\hat{\alpha} = m_1 u^{\mu_1} (1-u)^{\eta_1} \alpha = f_1(u) \alpha \quad (5.41)$$

$$\hat{\gamma} = m_1 v^{\mu_1} (1-u)^{\eta_1} = f_1(u) \gamma \quad (5.42)$$

$$\hat{\rho} = m_1 u^{\mu_1} (1-u)^{\eta_1} f_1 \rho = f_1(u) \rho \quad (5.43)$$

e da segunda:

$$\hat{k} = \frac{1}{m_2 v^{\mu_2} (1-v)^{\eta_2}} k = \frac{1}{f_2(v)} k \quad (5.44)$$

$$\widehat{\alpha + \beta} = m_2 v^{\mu_2} (1-v)^{\eta_2} (\alpha + \beta) = f_2(v) (\alpha + \beta) \quad (5.45)$$

Vamos considerar primeiramente o valor real do crescimento da produtividade, $\hat{\alpha}$. Ela é dada explicitamente pela equação (5.41) como uma função de u . Note que esta se anula em $u = 0$ e $u = 1$, e é positiva no intervalo $0 < u < 1$, onde tem um ponto de máximo. Derivando (5.41) em relação a u , descobrimos que este ponto é dado por $u = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \eta_1}$. Assim, a relação entre $\hat{\alpha}$ e u tem forma similar ao da Figura 10, com o formato exato da curva à depender dos parâmetros k_1, μ_1, η_1 e α .

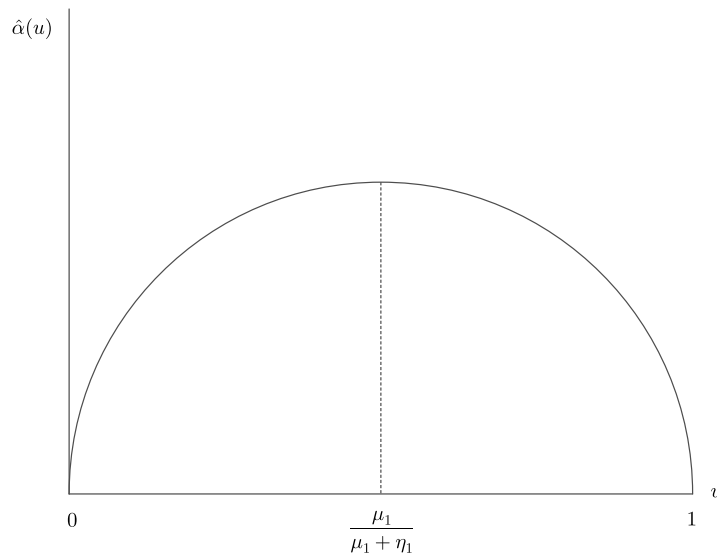


Figura 10 – A produtividade do trabalho ao longo do ciclo

Esta relação (em forma de U invertido) é congruente com boa parte da teoria econômica, e pode ser explicada de uma miríade de maneiras distintas. Por exemplo, nas linhas da teoria do crescimento endógeno, o seguinte pode ser dito: conforme cresce a participação dos salários na renda (u), maior é o incentivo que recai sobre as firmas de investir em estratégias de redução dos custos, ação esta que, em geral, tem por efeito o aumento da produtividade do trabalho (\hat{a}). Entretanto, após um certo ponto, deve-se esperar que esta relação crescente entre u e \hat{a} inverta sua direção. Isto ocorre pois, se for grande o suficiente, a massa salarial terá reduzido o nível de lucro a tal ponto que as expectativas futuras sobre a produção serão revisadas para baixo, conforme se esgotam as possibilidades das firmas de investir em mais atividades de redução de custo.

A produtividade do trabalho também aparece na equação (5.45), mas não pode ser separada do termo para o crescimento da força de trabalho, $\hat{\beta}$. Esta nos descreve como o nível de emprego se movimenta, *coeteris paribus*, em resultado dos efeitos combinados da variação na produtividade e na força de trabalho. Sua forma é similar a equação (5.41), com zeros em $v = 0$ e $v = 1$, positiva entre estes valores, e com máximo em $v = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \eta_2}$. Novamente, esta forma é congruente com a teoria econômica. Considerando primeiro \hat{a} , e imaginando a proporção do emprego v como uma proxy para a demanda efetiva, a relação descrita por (5.45) é coerente com a hipótese de *deman-pulled innovations* apresentada por Schmookler (1966).

Por outro lado, considerando o parametro para o valor real da taxa de crescimento da força de trabalho, $\hat{\beta}$, a equação (5.45) nos diz que mais pessoas se juntam a força de trabalho conforme o nível de emprego cresce. Entretanto, a partir de um certo valor crítico $v = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \eta_2}$, esta relação se inverte – níveis de emprego muito altos fazem com que a colocação individual na força de trabalho seja menos urgente, o que leva muitos indivíduos

a sair em busca de atividades não produtivas, como educação – emulando o fenômeno experimentado por muitas economias capitalistas avançadas nas décadas de 60 e 70.

As equações (5.42) e (5.43) nos retornam os valores reais dos parâmetros para o intercepto e a inclinação da curva de phillips. Estas equações nos dizem que, apesar do valor para $\hat{\gamma}$ e $\hat{\beta}$ variarem, a sua razão se mantém constante. Assim sendo, conforme nos movimentamos ao longo do ciclo, a curva de phillips rotaciona ao redor do ponto $(v, \frac{\dot{w}}{w}) = (\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}}, 0)$. Ou seja, a responsividade do crescimento do salário ao nível de emprego é dependente da distribuição de renda.

E finalmente, considerando a verdadeira razão capital-produto (\hat{k}), a equação (5.44) nos diz que a relação entre esta variável e o nível de emprego tem a forma de U, com mínimo em $v = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \eta_2}$. Quando v está em um nível anterior a este valor crítico, a relação é decrescente: O nível de emprego cresce, e também cresce o nível de utilização do capital, logo, a razão capital-produto cai. Entretanto, altos níveis de utilização de capital requerem altos níveis de flexibilidade no trabalho (como no horário de trabalho, por exemplo). Assim, a partir de um ponto crítico, o alto nível de emprego entra em conflito com a necessidade de flexibilidade, uma vez que os trabalhadores utilizam do seu poder de barganha (que é proporcional ao nível de emprego) para combater estas novas práticas requeridas pelas firmas.

6 Lotka-Volterra na Geografia Econômica

6.1 Lotka Volterra Competitivo

No capítulo 2 derivamos um modelo populacional onde o crescimento de uma espécie depende do tamanho de sua própria população, e também da população de uma outra espécie, com a qual esta se relaciona como predador ou presa. A base do argumento que gera este modelo se fundamenta na suposição que, isoladamente, as espécies crescem (ou decaem) exponencialmente. Por exemplo, considera a equação 2.2

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) \quad (6.1)$$

onde $x(t)$ é a população da presa no instante t , em um universo onde não há interação com seu predador. Dada a condição inicial $x(0) = x_0$, a função que resolve a expressão acima é:

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} \quad (6.2)$$

ou seja, x cresce exponencialmente em t , com fator de crescimento e e constante de tempo $\frac{1}{\alpha}$

Este tipo de crescimento, entretanto, apesar de convenientemente modelado por uma equação diferencial simples, não é representativo do comportamento populacional de muitas espécies. Afinal, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_0 e^{\alpha t} = \infty$, e basta visitar um zoológico para notar que, mesmo na ausência de predadores diretos, será difícil encontrar uma infinidade de qualquer um dos animais em cativeiro. Isto ocorre pois existem fatores outros, que não a interação predador-presa, responsáveis por limitar o crescimento de uma dada espécie: a competição intraespecífica (um antílope caçado por um leão é um antílope a menos disponível para outro leão), o comportamento reprodutivo (cavalos vivem por mais tempo, e requerem mais recursos para reproduzir que, por exemplo, cyanobacterias) e as características do ambiente (a quantidade de recursos disponíveis, o clima, etc). Isto dito, podemos então argumentar que seria um pouco mais realista se o modelo incorporasse algum fator autônomo limitador do crescimento. Considere a seguinte equação:

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) \quad (6.3)$$

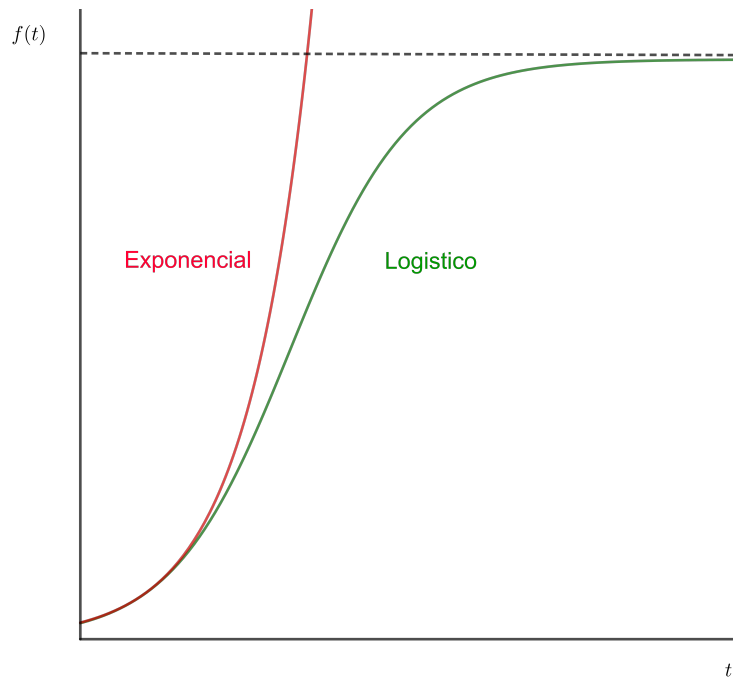


Figura 11 – Crescimento Logístico e Exponencial

onde x é o tamanho da população, r é a taxa inerente de crescimento, K é a capacidade de carga¹ do ambiente. O primeiro termo, rx , representa o crescimento inicial da espécie, que é quase exponencial, e é análogo ao termo αx de 6.1. Entretanto, conforme x cresce e se aproxima de K , o segundo termo, $\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ se aproxima de zero, e a taxa \dot{x} fica infinitamente pequena. A equação 6.3 é dita logística, e o tipo de crescimento que modela é chamado de, sugestivamente, “crescimento logístico”. A Figura 11 ilustra o comportamento das equações 6.1 e 6.3

A pergunta que nasce naturalmente é a seguinte: é possível adaptar o modelo de Lotka-Volterra para abarcar o crescimento do tipo logístico? A resposta é sim. O sistema que nasce desta modificação é chamado de Lotka-Volterra Competitivo, e tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \left(\frac{x_1 + \alpha_{12} x_2}{K_1}\right)\right) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \left(\frac{x_2 + \alpha_{21} x_1}{K_2}\right)\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Onde x_1 e x_2 são duas populações dadas, distintas uma da outra. Os parâmetros $r_i, K_i, i = 1, 2$ tem o mesmo significado que em 6.3, exceto que o subscrito indica à qual população está associado. E, finalmente, $\alpha_{ij}, i, j = 1, 2$ representa o efeito que a espécie j

¹ A capacidade de carga de uma espécie biológica num ambiente é o tamanho populacional máximo que o meio pode sustentar indefinidamente, ao considerar alimento, habitat, água e outras necessidades disponíveis.

tem na população da espécie i . Diferentemente do modelo apresentado no capítulo 2, o sistema 6.4 pode inclusive ser generalizado para $N = 1, 2, 3, 4, \dots$ espécies:

$$\dot{x}_i(t) = r_i x_i \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j(t)}{K_i} \right) \quad (6.5)$$

O sistema 6.5 possui propriedades distintas das encontradas no modelo original, e uma exploração analítica mais profunda destas pode ser encontrada em [Smale \(1976\)](#), [Hirsch \(1985\)](#) e [Hirsch \(1988\)](#).

6.2 Aglomeração Econômica em um Modelo Capital-Trabalho

Nós vimos nos capítulos 4 e 5 como o modelo de Lotka-Volterra pode ser aplicado fora da biologia matemática, onde foi gestado. Em particular, vimos como pode ser utilizado para modelar ciclos de crescimento. Assim sendo, o leitor pode ter imaginado que a versão competitiva do sistema, como apresentada em (6.5), também possa ter seu lugar na teoria econômica. Vamos mostrar uma aplicação interessante do mesmo, em uma área significativamente distinta: na geografia econômica.

Imagine duas economias distintas, homogêneas, espacialmente separadas, e adimensionais. Chamaremos estas economias de A e B. Ambas são dotadas de uma quantidade arbitrária de dois fatores de produção: 1) capital e 2) trabalho. Estas dotações, começando em $t = 0$, migram livremente entre A e B, seguindo a seguinte regra: ambos os fatores evitam regiões onde suas respectivas densidades são altas. O capital se move em direção à região onde o trabalho é abundante, e a força de trabalho se move em direção à região onde há postos de trabalho disponíveis.

Denote a quantidade de postos de trabalho em uma economia, no tempo t , por $C_i(t)$, $i = a, b$, onde $C_a(t)$ e $C_b(t)$ representam, respectivamente, postos de trabalho disponíveis nas economias A e B. Esta quantidade é positivamente correlacionada com o estoque de capital da economia. Similarmente, denote a força de trabalho total, no tempo t , por $L_i(t)$, $i = a, b$. Suponha que a quantidade de postos de trabalho disponível cresça logisticamente na ausência da força de trabalho. Ao mesmo tempo, suponha que a força de trabalho cresça logisticamente na ausência de investimento em capital. A interação entre estas duas economias, uma vez iniciada a migração, é descrita por:

$$\begin{aligned}
\dot{C}_a(t) &= C_a(t) \left(\epsilon - \frac{\epsilon}{K_1} C_a(t) - \alpha L_a(t) \right) \\
&\quad + d_1 (\rho_1(L_b(t)) C_b(t) - \rho_1(L_a(t)) C_a(t)) \\
\dot{L}_a(t) &= L_a(t) \left(\gamma + \beta C_a(t) - \frac{\gamma}{K_2} L_a(t) \right) \\
&\quad + d_2 (\rho_2(C_b(t)) L_b(t) - \rho_2(C_a(t)) L_a(t)) \\
\dot{C}_b(t) &= C_b(t) \left(\epsilon - \frac{\epsilon}{K_1} C_b(t) - \alpha L_b(t) \right) \\
&\quad + d_1 (\rho_1(L_a(t)) C_a(t) - \rho_1(L_b(t)) C_b(t)) \\
\dot{L}_b(t) &= L_b(t) \left(\gamma + \beta C_b(t) - \frac{\gamma}{K_2} L_b(t) \right) \\
&\quad + d_2 (\rho_2(C_a(t)) L_a(t) - \rho_2(C_b(t)) L_b(t))
\end{aligned} \tag{6.6}$$

onde ϵ é a taxa natural de crescimento dos postos de trabalho disponíveis, γ é a taxa natural de crescimento da força de trabalho, K_1 é o nível máximo teórico dos postos disponíveis, e α é a taxa na qual a força de trabalho preenche os postos disponíveis. K_2 é o máximo teórico da força de trabalho, e β é a taxa na qual a quantidade de postos aumenta o crescimento da força de trabalho. $d_i, i = 1, 2$ são os coeficientes de difusão, que medem a intensidade da migração entre as economias, e $\rho_i(x)$ é uma função positiva decrescente, que mede a densidade de x . Assim sendo, $\dot{\rho}_i < 0$ e $\rho_i \in C^1$.

O modelo (6.6) foi derivado por [Aly \(2012\)](#), e é uma representação interessante (e peculiar) da dinâmica do capital e da força de trabalho, entre duas economias distintas que interagem uma com a outra. Perceba que podemos reduzir as equações do modelo acima à forma do Lotka-Volterra competitivo. Tomando a primeira equação de (6.6), fazendo $d_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{C}_a(t) &= C_a(t) \left(\epsilon - \frac{\epsilon}{K_1} C_a(t) - \alpha L_a(t) \right) \\
\dot{C}_a(t) &= \epsilon C_a(t) \left(1 - \left(\frac{1}{K_1} C_a(t) + \frac{\alpha}{\epsilon} L_a(t) \right) \right) \\
\dot{C}_a(t) &= \epsilon C_a(t) \left(1 - \left(\frac{C_a(t) + \frac{K_1 \alpha}{\epsilon} L_a(t)}{K_1} \right) \right)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

fazendo $\frac{K_1 \alpha}{\epsilon} = \alpha_{ab}$ temos:

$$\dot{C}_a(t) = \epsilon C_a(t) \left(1 - \left(\frac{C_a(t) + \alpha_{ab} L_a(t)}{K_1} \right) \right) \tag{6.8}$$

que é analoga as equações em (6.4). Operações similares mostram que as outras equações de (6.6) tem forma similar. Este é, no fim das contas, um sistema de Lotka-Volterra competitivo.

Através da análise de estabilidade deste modelo, o autor deriva os seguintes resultados, que, na próxima Sessão, ilustraremos numericamente:

Teorema 3 *O ponto de equilíbrio $(\bar{C}_a, \bar{L}_a, \bar{C}_b, \bar{L}_b)$ é assintoticamente estável se $\dot{\rho}_1 \dot{\rho}_2 / \rho_1 \rho_2$, d_1 e d_2 são suficientemente pequenos; Se $\dot{\rho}_1 \dot{\rho}_2 / \rho_1 \rho_2$ ou então d_1 and d_2 são suficientemente grandes, então $(\bar{C}_a, \bar{L}_a, \bar{C}_b, \bar{L}_b)$ perde a sua estabilidade.*

6.2.1 Exploração Numérica e Implicações Econômicas

Para os parâmetros $\epsilon = 3, K_1 = 2, K_2 = 1, \alpha = 0.4, \beta = 0.4, \gamma = 0.1, m_2 = m_1 = 1$. e escolhendo as funções ρ tal que $\rho_1(u_2) = m_1 \exp(-u_2/m_1)$ e $\rho_2(u_1) = m_2 \exp(-u_1/m_2)$, realizamos testes numéricos com o modelo.

A simulação nos mostra que, de fato, se o coeficiente de difusão d_i , $i = 1, 2$ (i.e. a taxa de migração) for suficientemente pequeno, então o modelo é assintoticamente estável. Neste caso, ambas as regiões sempre convergem para os mesmos níveis de capital e trabalho, independente das condições iniciais. Por outro lado, para valores grandes de d_i , o sistema perde sua estabilidade na forma de uma bifurcação, onde disparidades iniciais geram aglomeração econômica em uma região. Na Figura 12 apresentamos o diagrama de bifurcação para os postos de trabalho em A, C_a , onde $d_2 = 0.1$ é mantido fixo, enquanto d_1 varia de 0 a 50. Em $d_1 = 24.878$ o equilíbrio perde sua estabilidade, e os estoques de fatores convergem majoritariamente para uma região.

Na Figura 13 apresentamos a evolução temporal das variáveis das duas regiões em um cenário instável onde $d_1 = 50$, considerando três condições iniciais. Em (a), ambas as regiões iniciam com os mesmos níveis de capital e trabalho, e assintoticamente convergem para um steady-state espacialmente homogêneo. Em (b) a região B inicia com mais capital do que A; neste caso, no steady-state, B apresenta maior estoque de capital e trabalho do que A, constituindo-se assim em um maior aglomerado econômico. Finalmente, em (c) apresentamos o caso inverso, onde A inicia com mais capital do que B.

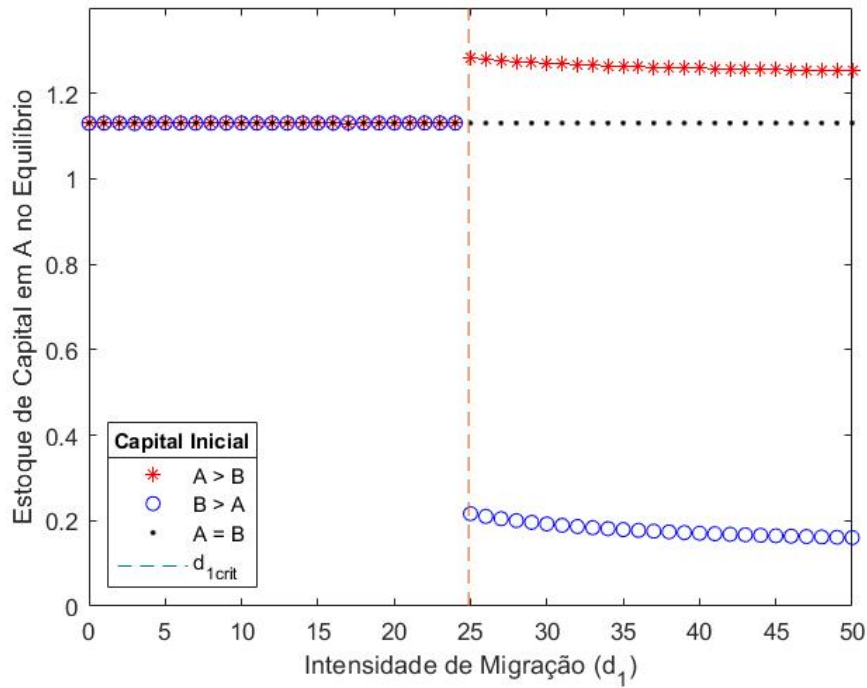


Figura 12 – Diagrama de Bifurcação

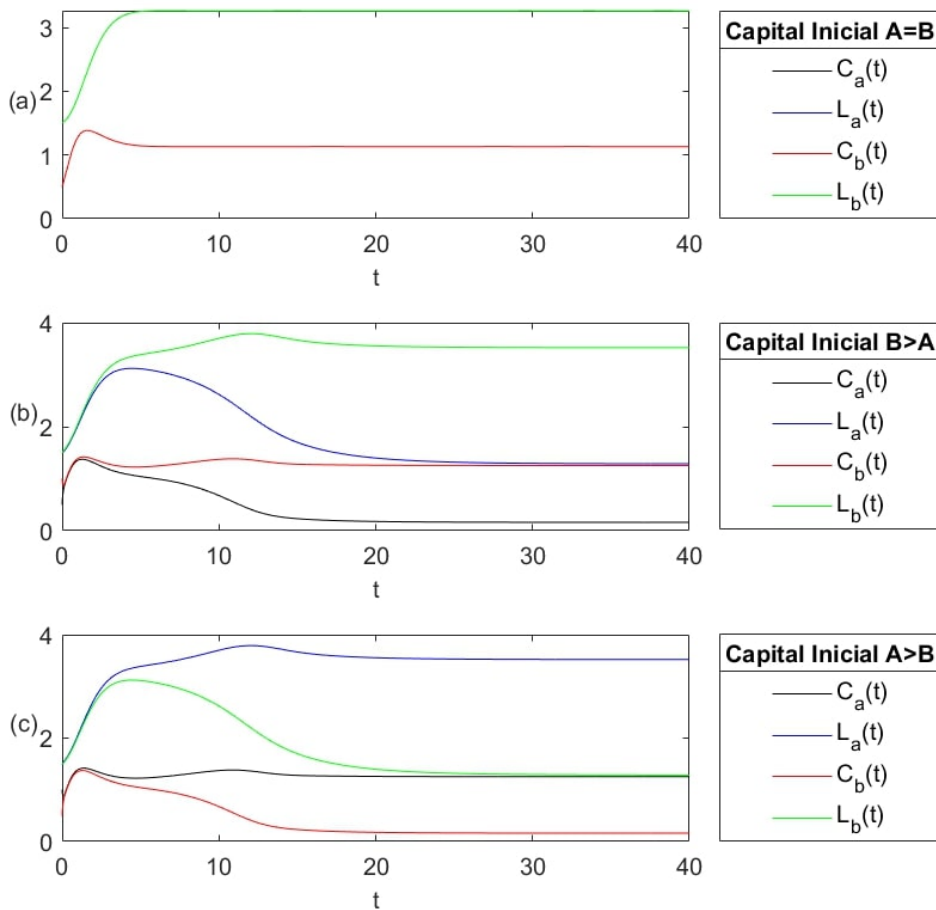


Figura 13 – Evolução Temporal

O modelo de Aly nos diz que a migrao de meios de produo entre duas regiões diferentes potencialmente explica a existência de agregados econômicos. O equilíbrio instável do modelo  reforçador de desigualdades. Assim, a depender das dotaes iniciais dos fatores de produo, duas economias que trocam livremente seus estoques de capital e trabalho de acordo com uma regra arbitrária de retornos decrescentes, estão fadadas a ou equalizarem seus estoques (no equilíbrio estável) ou reforçar disparidades prévias (no equilíbrio instável). Uma migrao forte dos fatores colocar as economias neste segundo estado, enquanto uma migrao fraca as colocar no primeiro. Tal comportamento emula, utilizando uma estratégia de modelagem distinta, um dos resultados fundamentais do modelo centro-periferia considerado pela Nova Geografia Econômica (ver [Krugman \(1991\)](#)).

7 Conclusão

O sistema de Lotka-Volterra se mostrou, desde a sua incorporação à teoria por Richard Murphy Goodwin, uma ferramenta alternativa e interessante para descrever diversos fenômenos pertinentes à disciplina. A simplicidade e a versatilidade do modelo foi apontada por [Gandolfo \(2009\)](#) como uma das razões para a adaptação bem-sucedida à economia, e mostramos que o modelo de fato é capaz de transferir com sucesso a sua intuição biológica original, sem necessariamente ser disparatado.

Entretanto, o modelo de Goodwin possui uma série de problemas sérios que comprometem as interpretações econômicas que oferece. Em particular, dois são colocados em foco: a incoerência levantada pelos valores que as variáveis u e v (a proporção da renda recebida pelos trabalhadores (u) e o nível de emprego (v)) assumem em algumas curvas. Como são definidas como proporções, devem estar contidas no espaço $U = [0, 1] \times [0, 1]$, entretanto, vimos que isto não necessariamente acontece; e a simetria dos ciclos econômicos, que é altamente irrealista.

Assim, vimos como as adaptações de [Desai et al. \(2006\)](#) e [Harvie, Kelmanson e Knapp \(2006\)](#) resolvem estes problemas. [Desai et al. \(2006\)](#) delimita um conjunto de restrições sobre um sistema de Lotka-Volterra generalizado, que são suficientes para garantir que as variáveis u e v estejam contidas na caixa unitária U . Em seguida, constrói uma versão modificada do modelo de Goodwin, cujas equações respeitam as restrições propostas, sem perder o seu significado econômico. Na verdade, este significado é expandido, uma vez que o aspecto monetário do sistema é enriquecido pela introdução de uma curva de Phillips inspirada no trabalho original de [Phillips \(1958\)](#). [Harvie, Kelmanson e Knapp \(2006\)](#), por sua vez, utiliza-se de *barrier functions* para delimitar as variáveis ao espaço U , e modifica acentuadamente o modelo. Acaba estendendo significativamente a sua abrangência teórica, incorporando questões de demanda e investimento. Em especial, adiciona parâmetros que são capazes de gerar ciclos assimétricos.

Por fim, notamos que apesar da presença do sistema de Lotka-Volterra ser predominante na macroeconomia, seu uso não se restringe a ela. Mostramos como também tem forte potencial na Geografia Econômica. De fato, apresentamos o modelo de [Aly \(2012\)](#), que consiste num sistema de Lotka-Volterra acoplado, capaz de emular a migração de meios de produção entre duas regiões diferentes. Este modelo nos diz que a formação de agregados econômicos é potencialmente explicada pelo termo de difusão do sistema, que, em linguagem econômico, representa a intensidade das forças migratórias.

Referências

- ALY, S. Spatial inhomogeneity due to turing instability in a capital-labour model. *Applied Mathematics*, v. 3, p. 172–176, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 20, 70 e 75.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Elementary differential equations and boundary value problems*. 10. ed. [S.l.]: Wiley, 2012. Citado na página 29.
- DESAI, M. Growth cycles and inflation in a model of class struggle. *Journal of Economic Theory*, v. 6, p. 527–545, 1973. Citado na página 53.
- DESAI, M. et al. A clarification of the goodwin model of growth cycle. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 30, p. 2661–2670, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 20, 53, 54, 56 e 75.
- EPSTEIN, J. M. *Nonlinear dynamics, mathematical biology and social science*. [S.l.]: David Goehring, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- FOLEY, D. K. Endogenous technical change with externalities in a classical growth model. *Journal of Economic Behavior and Organization*, v. 52, p. 167–189, 2003. Citado na página 53.
- GANDOLFO, G. Giuseppe palomba and the lotka-volterra equations. *Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali*, v. 19, p. 347–357, 12 2008. Citado na página 26.
- GANDOLFO, G. *Economic dynamics*. 4. ed. [S.l.]: Springer, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 75.
- GOODWIN, R. A growth cycle. In: FEINSTEIN, C. (Ed.). *Socialism, capitalism, and economic growth*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1967. Citado 3 vezes nas páginas 45, 47 e 49.
- HARVIE, D.; KELMANSON, M. A.; KNAPP, D. G. A dynamical model of business-cycle asymmetries: Extending goodwin. *Economic Issues*, v. 12, p. 53–92, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 20, 53, 57, 61, 62 e 75.
- HIRSCH, M. Systems of differential equations which are competitive or cooperative iii: Competing species. *Nonlinearity*, v. 1, p. 51–71, 1988. Citado na página 69.
- HIRSCH, M. W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative ii: Convergence almost everywhere. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, v. 16, n. 3, p. 423–439, 1985. Citado na página 69.
- KEYNES, J. M. *The General Theory of Employment, Interest and Money*. 1. ed. London: Macmillan, 1936. Citado na página 53.
- KRUGMAN, P. Increasing returns and economic geography. *Journal of Political Economy*, v. 99, n. 3, p. 483–499, 1991. Citado na página 73.
- PHILLIPS, A. W. H. The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the united kingdom, 1861-1957. *Economica*, v. 25, n. 283-299, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 75.

- SCHMOOKLER, J. *Invention and Economic Growth*. [S.l.]: Harvard University Press, 1966. v. 1. Citado na página 64.
- SHAH, A.; DESAI, M. Growth cycles and induces technical change. *Economic Journal*, v. 31, p. 224–236, 1981. Citado na página 53.
- SHONE, R. *Economic dynamics: phase driagrams and their economic application*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. Citado na página 38.
- SMALE, S. J. On the differential equations of species in competition. *Journal of Mathematical Biology*, v. 3, p. 5–7, 1976. Citado na página 69.
- TRENCH, W. F. *Elementary differential equations*. 1.01. ed. Publicado Online, 2013. 4–5 p. Disponível em: <http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH_FREE_DIFFEQ_I.PDF>. Citado na página 24.