UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CADERNOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
SÉRIE B: TRABALHO DE APOIO DIDÁTICO

EXPERIMENTOS FATORIAIS

JOÃO RIBOLDI

SÉRIE B, Nº 28
PORTO ALEGRE, MAIO 1995

PREFÁCIO

As presentes notas destinam-se ao apoio didático da disciplina AGRP01 - Análise Estatística dos Cursos de Pós-Graduação em Agronomia. Surgiram da experiência acumulada ao longo dos anos e tem por objetivo servir como um guia aos conteúdos abordados e não como um limitante dos assuntos, não prescindindo, evidentemente, da consulta de bibliografia especializada para complementação.

Apesar de serem de objetivo específico, podem também servir como texto de apoio didático a outras disciplinas a nível de graduação e pós-graduação.

Agradecemos a todos que colaboraram na organização destas notas e em especial aos bolsistas Stela, Flávio e Anna Christina pelo trabalho de digitação.

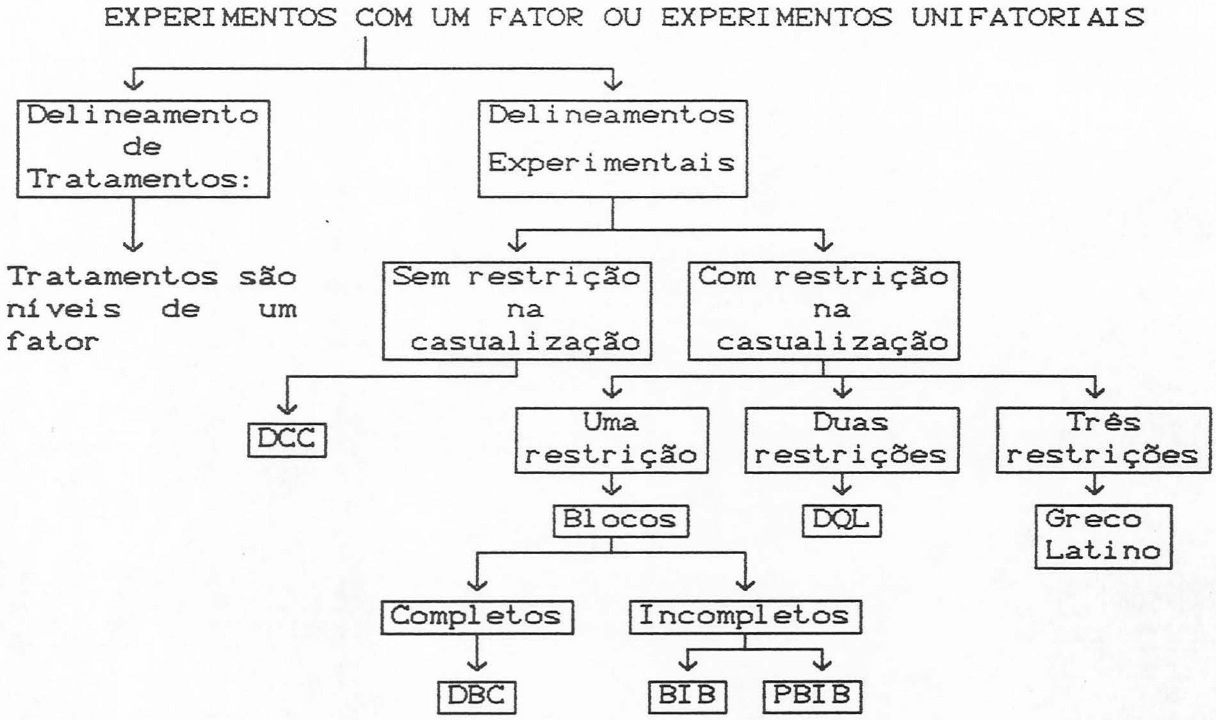
Porto Alegre, 17 de Maio de 1995.

Prof. João Riboldi

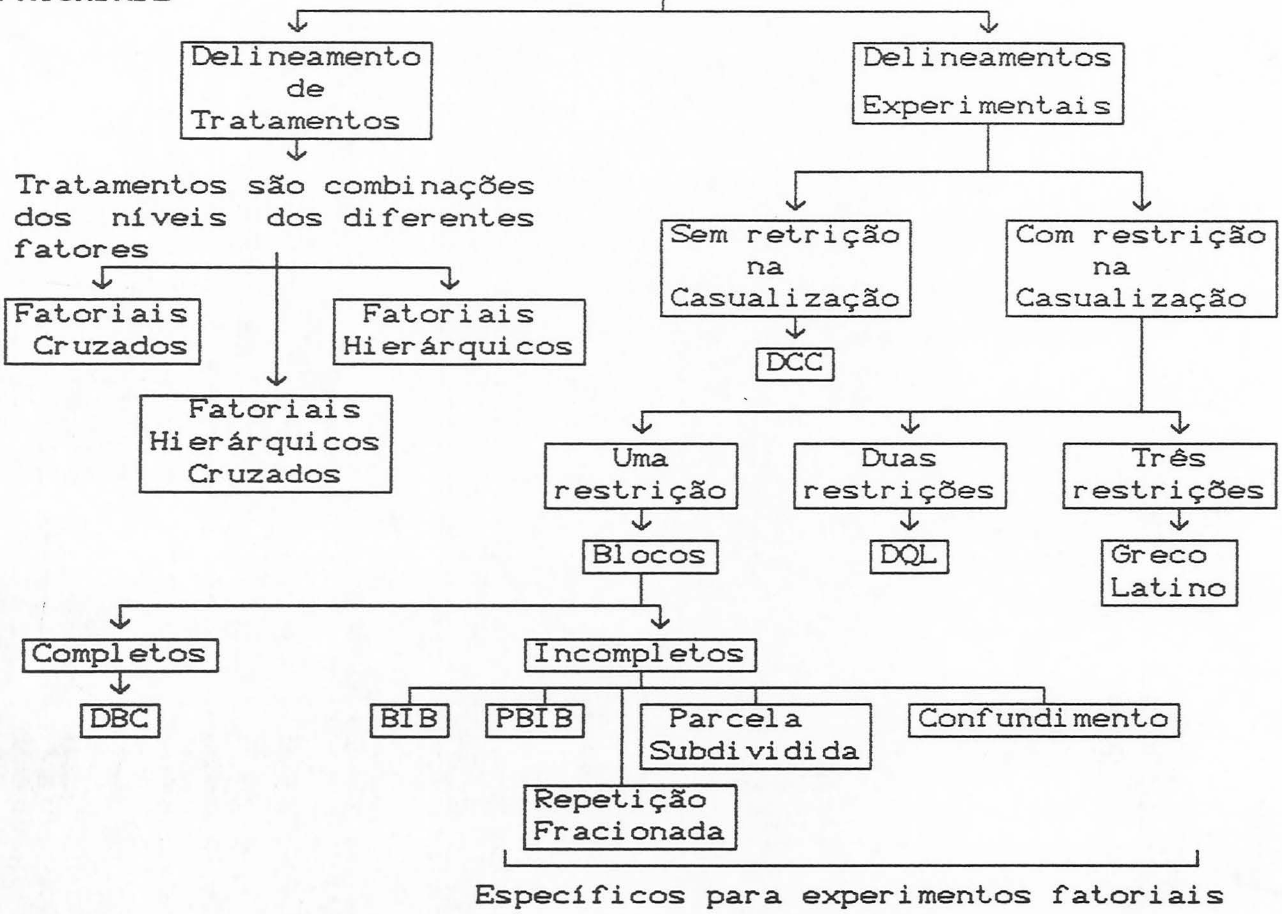
ÍNDICE

EXPERIMENTOS FATORIAIS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS



EXPERIMENTOS COM DOIS OU MAIS FATORES OU EXPERIMENTOS FATORIAIS



EXPERIMENTOS FATORIAIS COM DOIS FATORES

<u>Exemplos</u>

<u>Exemplo 1</u> : Uma empresa tem interesse em investigar o efeito do preço de venda e do tipo de campanha publicitária , na venda de um de seus produtos. Para tanto realiza um experimento com três preços de venda (100,110,120) e dois tipos de campanha publicitária (rádio e jornal).

<u>Dois fatores</u>
- → Fator A : 3 níveis : 100,110,120
  preço de venda
- → Fator B : 2 níveis : rádio e jornal
  tipo de campanha publicitária

Fatorial

$3 \times 2 = 6$ tratamentos

$\left.\begin{matrix}100\\110\\120\end{matrix}\right\}$ rádio $\left.\begin{matrix}100\\110\\120\end{matrix}\right\}$ jornal

O exemplo 1 é um <u>FATORIAL CRUZADO</u> : os níveis de um fator (preço) combinam-se com todos os níveis do outro fator (campanha publicitária).

<u>Exemplo 2</u> : Um industrial tem três máquinas que produzem um tipo de bacia de plástico. Dois operadores diferentes trabalham em cada uma das máquinas. O objetivo é avaliar o efeito de máquina e operador na flexibilidade do produto.

<u>Dois fatores</u> :

Fator A : Três níveis : 1 , 2 e 3
máquinas

Fator B : Dois níveis : 1 e 2
Operadores

$3 \times 2 = 6$ tratamentos

$\left.\begin{matrix}M_1\ O_1 & M_2\ O_1 & M_3\ O_1\\ M_1\ O_2 & M_2\ O_2 & M_3\ O_2\end{matrix}\right\}$ operadores diferentes de máquina a máquina

O exemplo 2 é um <u>FATORIAL HIERARQUICO</u> :
Os níveis do segundo fator (operadores) são diferentes para cada nível do primeiro (máquinas).

1.1. CARACTERIZAÇÃO DE EXPERIMENTOS FATORIAIS.

(1) Envolvem combinações de níveis de dois ou mais fatores (qualitativos ou quantitativos).

(i) Variedades e Doses de N
(3) (4)

$V_1\ N_1$	$V_2\ N_1$	$V_3\ N_1$
$V1\ N_2$	$V_2\ N_2$	$V_3\ N_2$
$V_1\ N_3$	$V_2\ N_3$	$V_3\ N_3$
$V_1\ N_4$	$V_2\ N_4$	$V_3\ N_4$

$\Rightarrow$ 12 tratamentos $\Rightarrow$ Fatorial 3×4

(ii) N ; P ; K
(2) (2) (2)

$N_0\ P_0\ K_0$ 0 0 0   1 0 0

$N_0\ P_0\ K_1$ $\Leftrightarrow$ 0 0 1   1 0 1 $\Rightarrow$ 8 tratamentos

$N_0\ P_1\ K_0$ 0 1 0   1 1 0

$N_0\ P_1\ K_1$ 0 1 1   1 1 1

Fatorial 2 x 2 x 2 ou Fatorial 2^3 ← número de fatores (série fatorial 2^k)

↑ número de níveis

(iii) N ; P ; K $\Rightarrow$ 27 tratamentos

(3) (3) (3)

Fatorial 3 x 3 x 3 ou Fatorial 3^3 (série fatorial 3^k)

(iv) Fatorial 5^3 ou Fatorial 5 x 5 x 5 (série fatorial 5^k)

→ 125 tratamentos

(2) Constitui um delineamento de tratamentos (forma de organizar níveis de fatores) e para instalação adota-se um delineamento experimental (forma de organizar as UE).

(3) Os fatoriais podem ser completos ou incompletos (onde se incluem os fatoriais fracionários).

Fatoriais Completos : (i) ; (ii) ; (iii) e (iv)

Fatoriais Fracionários : $\frac{1}{5}\ 5^3$

Fatoriais Incompletos :

· Delineamento da FAO

$N_0\ P_0\ K_0$ $N_0\ P_1\ K_1$ $N_1\ P_0\ K_1$ $N_1\ P_1\ K_0$ $N_1\ P_1\ K_1$ + Calcário

$N_1\ P_1\ K_1$

$N_2\ P_1\ K_1$ $N_1\ P_2\ K_1$ $N_1\ P_1\ K_2$

· Delineamento Central Composto

$2^k + 2k + 1$

k = número de fatores ; cinco níveis para cada fator

k = 3

$2^3 + 2 \times 3 + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$ tratamentos

Fatorial 5^3 = 125 tratamentos

(4) Vantagens no uso de fatoriais

- Maior eficiência no uso de recursos experimentais disponiveis , uma vez que permitem tirar conclusões mais amplas a respeito dos fatores estudados simultaneamente.
- Informação sobre interação de fatores
- Maior precisão para estimativa de efeitos principais de fatores dada a existência de repetições não-aparentes (do delineamento de tratamentos).

  (Repetições intrínsecas ou do delineamento de tratamentos)

→ Repetições extrínsecas ou do delineamento experimental são as repetições aparentes.

(5) Desvantagem do uso de Fatoriais

(a) Maior dificuldade na seleção de UE homogêneas , devido ao grande número de tratamentos.

(b) Se houver um grande número de fatores a serem estudados ⇒

- Dificuldades na escolha do delineamento experimental.
- Dificuldades de execução do experimento.

(c) Certos tratamentos (certas combinações de níveis dos fatores) podem ser de pouco interesse e alguns recursos experimentais estariam sendo desperdiçados.

(6) <u>Exemplo</u>

2 cultivares de trigo : c_1 , c_2

2 fertilizantes : f_1 , f_2

Tratamentos : c_1f_1 c_1f_2 c_2f_1 c_2f_2

Cultivares	Fertilizantes f_1	Fertilizantes f_2
c_1	c_1f_1	c_1f_2
c_2	c_2f_1	c_2f_2

$$\text{Fatorial } \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cultivares}}}{2} \times \overset{\substack{\text{fertilizantes} \\ \uparrow}}{2}$$

- Diferenças entre as cultivares pode ser a mesma para os diferentes fertilizantes ⇒ maior amplitude dos resultados.
- Diferenças entre as cultivares varia de fertilizante a fertilizante ⇒ fato novo identificando interação dos fatores (só presente em experimento fatoriais)

Valor Observado ← tratamento
- → Efeito de cultivar
- → Efeito de fertilizante
- → Efeito da interação cultivar e fertilizante

1.2. NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES

FATOR : A , B , C , ...

→ Qualitativo : Níveis são Tipos, Formas, Procedimentos, ...

Ex : Cultivares , rações , produtos quimicos , ...

→ Quantitativo : Níveis ou doses

Doses de N , P , K ; doses de suplemento proteico , densidades de semeadura , espaçamentos , ...

Níveis do Fator :

Fator A : a_1 , a_2 , a_3 , ...

Fator B : b_1 , b_2 , b_3 , ...

Exemplo :

Fatores : A B

Níveis : a_1, a_2 b_1, b_2

Tratamentos : a_1b_1 a_1b_2 a_2b_1 a_2b_2

Fatorial 2 x 2 ← 2 níveis do fator B

↳ 2 níveis do fator A

Representação dos Tratamentos

Fator A	Forma completa b_1	Forma completa b_2	Fator B b_1	Fator B b_2	b_1	b_2
a_1	a_1b_1	a_1b_2	(1)	b	0 0	0 1
a_2	a_2b_1	a_2b_2	a	ab	1 0	1 1

(1) → Testemunha

Forma completa → Fatores qualitativos

Formas abreviadas → Fatores quantitativos

a_1 , b_1 = ausência = 0

a_2 , b_2 = presença = 1

1.3. EFEITO SIMPLES , EFEITO PRINCIPAL E INTERAÇÃO

· EFEITO SIMPLES : Efeito de um fator dentro de cada nível do outro.

· EFEITO PRINCIPAL : Média dos efeitos simples.

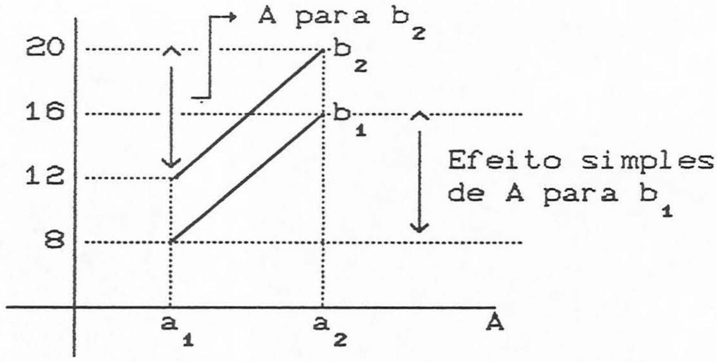
· INTERAÇÃO : Magnitude de efeito adicional observado no efeito de um dos fatores na presença dos níveis do outro fator , efeito adicional este que não é produzido por nenhum dos fatores isoladamente.

Exemplo 1 : INTERAÇÃO NULA

Fator A	Fator B b_1	b_2	efeito simples de B $b_2 - b_1$
a_1	8	12	4
a_2	15	19	4
E.F DEA { $a_2 - a_1$	7	7	

$$\text{Efeito Principal de A} = \frac{7 + 7}{2} = 7$$

$$\text{Efeito Principal de B} = \frac{4 + 4}{2} = 4$$



$$\text{Interação A x B} = \frac{1}{2}\left[(a_2b_2 - a_1b_2) - (a_2b_1 - a_1b_1)\right] = \frac{1}{2}\left[7 - 7\right] = 0$$

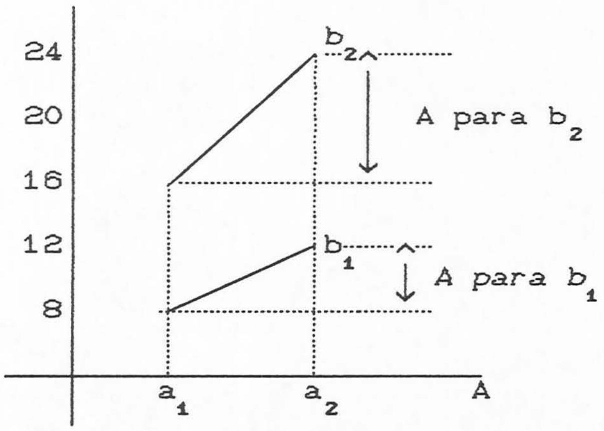
Quando o Efeito Principal = Efeito Simples → não há interação

<u>Exemplo 2</u> : INTERAÇÃO POSITIVA (Mudança taxa de incremento)
(Efeito Sinérgico dos fatores)

Fator A	Fator B b_1	b_2	E.S. de B $b_2 - b_1$
a_1	8	15	7
a_2	12	24	12
$a_2 - a_1$ (E.S. de A)	4	9	

E.P. de A = (4 + 9)/2 = 6,5

E.P. de B = (7 + 12)/2 = 9,5



$$\text{Interação } A \times B = \frac{1}{2}\left[(24 - 15)-(12 - 8)\right] = \frac{1}{2}\left[9 - 4\right] = 2,5$$

E.S. diferente EP $\Rightarrow$ há interação

Há interação positiva pois ocorre diferença na magnitude da resposta.

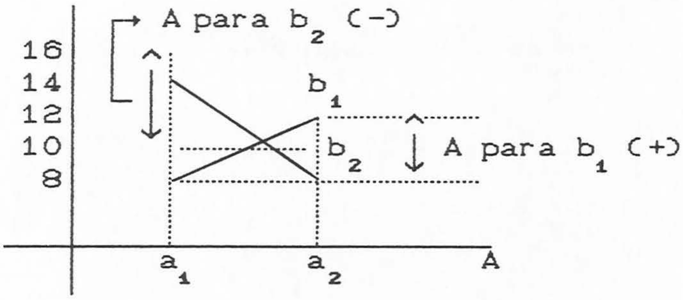
Há efeito sinergético , ou seja a combinação dos níveis mais altos dos fatores dá um efeito mais favorável do que o nível mais alto de cada fator combinado com o nível mais baixo do outro.

Exemplo 3 : INTERAÇÃO NEGATIVA (Inversão ; Efeito Antagônico dos fatores)

Fator A	Fator B b_1	b_2	E.S. de B $b_2 - b_1$
a_1	8	15	7
a_2	12	10	-2
$a_2 - a_1$ (E.S. de A)	4	-5	

E.S. diferente E.P. $\Rightarrow$ há interação

E.P. de A = - 0,5   E.P. de B = 2,5   A x B = - 4,5



Há interação negativa , devido a mudança no sentido (direção) e magnitude da resposta.

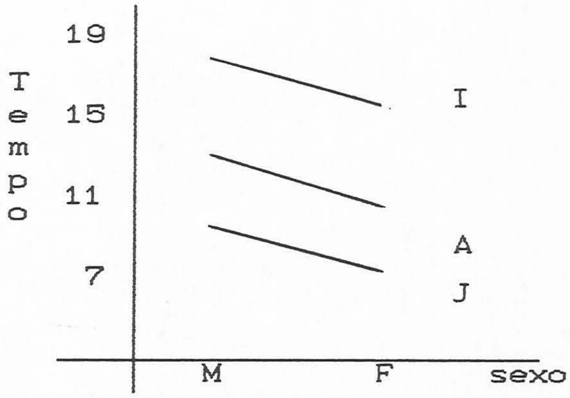
Há efeito antagônico , ou seja a combinação dos níveis mais altos dos fatores dá um efeito menos favorável do que o nível mais alto de cada fator com o nível mais baixo do outro.

<u>Exemplo 4</u>

Distribuição do tempo médio de aprendizagem , em minutos , segundo o sexo e a idade.

1º Caso :

fator A (sexo)	Fator B (idade) Jovem	Adulto	Idoso
Masculino	11	13	18
feminino	7	9	14



· Efeito de Sexo ; sexo feminino menor tempo de aprendizagem

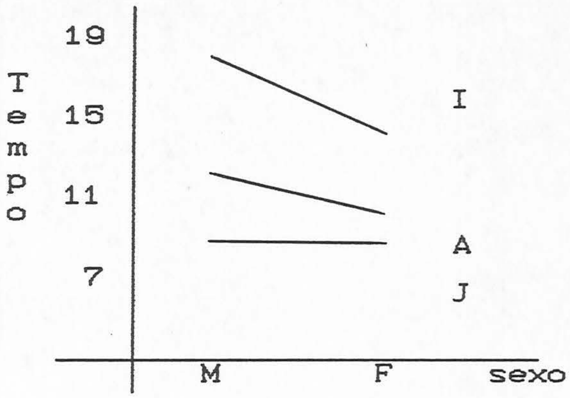
· Retas paralelas ⇒ ausência de interação ; efeito de sexo independe da idade

· Efeito de Idade ; tempo cresce com a idade

· Retas paralelas ⇒ ausência de interação ; efeito de idade independe do sexo

2º Caso :

fator A (sexo)	Fator B (idade) Jovem	adulto	idoso
Masculino	9	12	18
feminino	9	10	14



· Retas não paralelas ⇒ presença de interação

· Efeito de sexo na dependência de idade pois para jovens não há efeito de sexo e o efeito de sexo é mais acentuado para idosos do que para adultos

· Retas não paralelas ⇒presença de interação

· Efeito de idade está na dependência de sexo,pois o efeito de idade é mais acentuado para masculino do que para feminino.

INTERAÇÃO

- Significativa : os fatores não são independentes. O efeito de um fator depende do nível do outro.

  E.S. ≠ E.P.

  ↳ interesse

- Não-significativa : Os fatores são independentes. O efeito é o mesmo para todos os níveis do outro.

  E.S. = E.P.

  ↳ interesse

INTERAÇÃO

- De dois fatores = Interação de 1ª ordem = Interação Simples
- De três fatores = Interação de 2ª ordem = Interação Tríplice
- De quatro fatores = Interação de 3ª ordem = Interação Quádrupla

  ⋮

- De k fatores = Interação de (k-1)ª ordem

2 - EXPERIMENTOS FATORIAIS COM 2 FATORES CRUZADOS FIXOS

Modelo: Admitindo instalação em DCC

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$i = 1, 2, \ldots, a$; $j = 1, 2, \ldots, b$; $k = 1, 2, \ldots, r$, onde:

μ é a média geral

α_i é o efeito do i-ésimo nível do fator A, definido como:

$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu$$

β_j é o efeito do j-ésimo nível do fator B, definido como:

$$\beta_j = \mu_{.j} - \mu$$

$\alpha\beta_{ij}$ é o efeito de interação entre o i-ésimo nível de A e o j-ésimo nível de B e é definido como:

$$\alpha\beta_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu$$

ε_{ijk} é um erro aleatório associado à observação y_{ijk}

Das definições dos parâmetros do modelo seguem-se as restrições:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{a} \alpha\beta_{ij} = 0 , & \forall j \\ \sum_{j=1}^{b} \alpha\beta_{ij} = 0 , & \forall i \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \alpha\beta_{ij} = 0$$

Suposições:

$$\varepsilon_{ijk} \overset{IID}{\cap} N(0, \sigma^2)$$

Como conseqüência das suposições feitas sobre a distribuição dos erros, tem-se que:

$$y_{ijk} \cap N(\mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} , \sigma^2)$$

e independentes

Quadro de observações

(i) Fator A	(j) Fator B	(k) repetições 1 2 ... r	Totais de tratamentos
1	1 2 ⋮ b		
2	1 2 ⋮ b	$\boxed{y_{ijk}}$	$\boxed{y_{ij.}}$
3	1 2 ⋮ b		
			$y_{...}$

↓

Tabela de Interação

A x B

Fator A	Fator B 1 2 ... b	Total	Média
1 2 ⋮ a	$\boxed{y_{ij.}}$	$\boxed{y_{i..}}$	$\bar{y}_{i..}$
Total	$y_{.j.}$	$y_{...}$	
Média	$\bar{y}_{.j.}$	$\bar{y}_{...}$	

Hipóteses

(i) Ho: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$ (não existe efeito do fator A)

(ii) Ho: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0$ (não existe efeito do fator B)

(iii) Ho: $\alpha\beta_{11} = \alpha\beta_{12} = \ldots = \alpha\beta_{ab} = 0$ (não existe efeito de interação)

Decomposição da Soma de Quadrados Total

Consideremos a identidade:

$$\left(y_{ijk}-\bar{y}_{...}\right) = \left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)+\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)+\left(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...}\right)$$
$$+\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}\right)$$

Elevando ao quadrado os dois membros da relação e somando em relação aos índices i, j e k obtemos :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{...}\right)^2}_{\text{SQTotal}} = \underbrace{br\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)^2}_{\text{SQA}} + \underbrace{ar\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)^2}_{\text{SQB}} +$$

$$+\underbrace{r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...}\right)^2}_{\text{SQAxB}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}\right)^2}_{\text{SQE}}$$

Alternativamente

$$\text{SQTotal} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{...}\right)^2 = \sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 - \underbrace{\frac{y_{...}^2}{abr}}_{\text{FC}}$$

$$\text{SQA} = \sum_{i=1}^{a} br\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)^2 = \sum_{i}\frac{y_{i..}^2}{rb} - \text{FC}$$

$$\text{SQB} = \sum_{j=1}^{b} ar\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)^2 = \sum_{j}\frac{y_{.j.}^2}{ar} - \text{FC}$$

$$\text{SQAxB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} r\left(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...}\right)^2$$

$$= \underbrace{\sum_{ij}\frac{y_{ij.}^2}{r}}_{\text{SQTratamentos}} - \text{FC} - \text{SQA} - \text{SQB}$$

$$SQE = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{r} \left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} \right)^2 = SQTotal - SQA - SQB - SQAxB$$

Estimação dos Parâmetros do Modelo

Solucionando-se o sistema de equações normais sob as restrições

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{a} \alpha\beta_{ij} = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{b} \alpha\beta_{ij} = 0$$

obtém-se os seguintes estimadores para os parâmetros:

Parâmetro	Estimador
μ	$\bar{y}_{...}$
α_i	$\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$
β_j	$\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$
$\alpha\beta_{ij}$	$\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$
$\mu_{i.}$	$\bar{y}_{i..}$
$\mu_{.j}$	$\bar{y}_{.j.}$
μ_{ij}	$\bar{y}_{ij.}$

Análise de Variância

Causas de Variação	GL	SQ	QM	E(QM)	F
A	$a-1$	SQA	QMA	$\sigma^2+\frac{br}{(a-1)}\sum_i \alpha_i^2$	$\frac{QMA}{QME}$
B	$b-1$	SQB	QMB	$\sigma^2+\frac{ar}{(b-1)}\sum_j \beta_j^2$	$\frac{QMB}{QME}$
AxB	$(a-1)(b-1)$	SQAxB	QMAxB	$\sigma^2+\frac{r}{(a-1)(b-1)}\sum_{ij} \alpha\beta_{ij}^2$	$\frac{QMAxB}{QME}$
ERRO	$ab(r-1)$	SQE	QME	σ^2	
Total	$abr-1$	SQTotal			

Rejeita-se H_o: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_a = 0$ se $F = \frac{QMA}{QME} > F_\alpha\,[(a-1);ab(r-1)]$

Rejeita-se H_o: $\beta_1 = \ldots = \beta_b = 0$ se $F = \frac{QMB}{QME} > F_\alpha\,[(b-1);ab(r-1)]$

Rejeita-se H_o: $\alpha\beta_{11} = \ldots = \alpha\beta_{ab} = 0$ se $F = \frac{QMAxB}{QME} > F_\alpha\,[(a-1)(b-1);ab(r-1)]$

Modelo: Admitindo instalação em DBC

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Efeito de bloco}}}{R_k} + \varepsilon_{ijk}$$

SQBlocos é calculado da maneira usual e o cálculo das demais SQ não se modifica.

Análise de Variância

Causas de Variação	GL	SQ	QM	F
Blocos	r - 1	SQBlocos	QMBlocos	QMBlocos/QME
A	a - 1	SQA	QMA	QMA/QME
B	b - 1	SQB	QMB	QMB/QME
AxB	(a-1)(b-1)	SQAxB	QMAxB	QMAxB/QME
Erro Exp.	(ab-1)(r-1)	SQE	QME	
Total	abr - 1	SQTotal		

Fatorial com 2 Fatores

Fator A	Fator B 1	2	...	b	Médias
1	r	r	...	r	rb
2	r				
⋮	⋮				
a	r				
Médias	ra				rab

Erro padrão da média de um tratamento para um fatorial com a níveis do fator A b níveis do fator B e r repetições.

	Comparação	Exemplo	$s_{\bar{y}}$	Nº de Tratamentos
	∘ Entre 2 médias de A	$a_1 - a_2$ $(\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{2..})$	$\sqrt{\frac{QME}{rb}}$	a
	∘ Entre 2 médias de B	$b_1 - b_2$ $(\bar{y}_{.1.} - \bar{y}_{.2.})$	$\sqrt{\frac{QME}{ra}}$	b
* A x B	∘(i) Entre 2 médias de A no mesmo nível de B	$a_1b_1 - a_2b_1$ $(\bar{y}_{11.} - \bar{y}_{21.})$	$\sqrt{\frac{QME}{r}}$	a
	(ii) Entre 2 médias de B no mesmo nível de A	$a_1b_1 - a_1b_2$ $(\bar{y}_{11.} - \bar{y}_{12.})$	$\sqrt{\frac{QME}{r}}$	b
	(iii) Qualquer 2 médias na tabela de Interação	$a_1b_1 - a_2b_2$ $(\bar{y}_{11.} - \bar{y}_{22.})$	$\sqrt{\frac{QME}{r}}$	ab

Para o caso do erro padrão da diferença entre 2 médias, s_d, considerar o valor 2 no numerador do radical.

Os procedimentos de comparações múltiplas são executados da forma usual considerando $s_{\bar{y}}$ ou s_d conforme o teste escolhido.

Exemplo 1: Um experimentador deseja verificar os efeitos de dois tipos de comunicação persuasiva (unilateral, ou seja, com a apresentação apenas de argumentos favoráveis ao objetivo da comunicação persuasiva; e bilateral, ou seja, com argumentos pró e contra o objetivo da comunicação persuasiva, prevalecendo, todavia, os prós). Tendo ele desconfiado que o nível de sofisticação intelectual e educacional da audiência a que a comunicação persuasiva se destina influi nos resultados, decidiu introduzir esse fator no experimento com 2 níveis, sendo um grupo de pessoas de alto nível intelectual e educacional e outro de pessoas de baixo nível.

Nesse caso tem-se um experimento fatorial 2x2, com os fatores:

Fator A: Comunicação Persuasiva: a_1: Unilateral

a_2: Bilateral

Fator B: Nível intelectual e educacional da audiência:

b_1: Alto

b_2: Baixo

4 tratamentos: 4 grupos: a_1b_1 a_1b_2 a_2b_1 a_2b_2

A variável dependente do experimento foi a mudança de atitude verificada no sentido da comunicação persuasiva.

Os 4 grupos foram aleatoriamente constituídos com 5 sujeitos cada um. Os resultados hipotéticos foram os seguintes:

	a_1		a_2		
	b_1	b_2	b_1	b_2	
	6	12	10	5	
	7	10	10	8	
	5	10	14	9	
	9	11	10	8	
	4	12	15	10	
Total	31	55	61	40	187

	a_1	a_2	Total
b_1	31	61	92
b_2	55	40	95
Total	86	101	187

ANOVA

Causas de Variação	GL	SQ	QM	F
A	1	11,25	11,25	3,48
B	1	0,45	0,45	< 1
AxB	1	101,25	101,25	31,35 **
Erro	16	59,60	3,23	
Total	19	164,55		

$$F_{.05}(1,16) = 4,49$$

$$F_{.01}(1,16) = 8,53$$

Efeito da comunicação persuasiva está na dependência do nível intelectual e educacional da audiência.

	a_1	a_2	Média	
b_1	6,2 b	12,2 a	9,2	a
b_2	11,0 a	8,0 b	9,5	a
	8,6	10,1		
	a	x a		

x

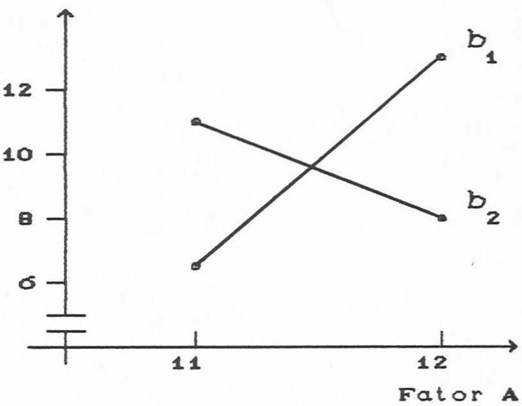
DMS 5% = 2,41

$$(\text{DMS } 5\% = t_{.05}(\text{GLE})\, s_d)$$

$$= t_{.05}(16)\, s_d$$

$$= (2,120)(1,1367)$$

$$s_d = \sqrt{\frac{2\ \text{QME}}{r}} = \sqrt{\frac{2(2,23)}{5}} = 1,1367$$



A comunicação unilateral é mais eficaz que a bilateral quando a audiência é de baixo nível intelectual e educacional, enquanto que a comunicação bilateral é mais eficiente que a unilateral com audiência do tipo intelectualizado e de elevado nível educacional.

Exemplos 2:

Num experimento fatorial, instalado em blocos casualizados com 4 repetições, os fatores foram:

Adubo Mineral (A) (sem = a_1 ; com = a_2) e

Adubo Orgânico (B) (sem = b_1 ; com = b_2) obteve-se os seguintes resultados em termos de rendimento de determinada cultura:

(t/ha)

Blocos	Tratamentos a_1b_1	a_1b_2	a_2b_1	a_2b_2	Totais
1	18,0	19,6	20,6	19,2	77,4
2	8,6	15,0	21,0	19,6	64,2
3	9,4	14,6	18,6	18,4	61,0
4	11,4	15,8	20,6	20,2	68,0
Totais	47,4	65,0	80,8	77,4	270,6

(A) Adubo Mineral	(B) Adubo Orgânico b_1	b_2	Total
a_1	47,4	65,0	112,4
a_2	80,8	77,4	158,2
Total	128,2	142,4	270,6

$$\text{SQ A. M.} = \frac{(112,4)^2 + (158,2)^2}{\underset{\substack{\uparrow \\ r}}{4} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nº de níveis de A.O.}}}{2}} - \frac{(270,6)^2}{16} = 131,11$$

$$\text{SQ A. O.} = \frac{(128,2)^2 + (142,4)^2}{\underset{\substack{\uparrow \\ r}}{4} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nº de níveis de A.M.}}}{2}} - \underbrace{\frac{(270,6)^2}{16}}_{FC} = 12,61$$

$$SQ\ AM{\times}AO = \frac{(47,4)^2 + (65,0)^2 + (80,8)^2 + (77,4)^2}{\underset{\nwarrow r}{4}} - FC$$

$$- SQ\ AM - SQ\ AO$$

$$= SQTrat. - SQ\ AM - SQ\ AO$$

$$= 171,29 - 131,11 - 12,61 = 27,57$$

Outra forma de calcular SQ

Tratamentos	Coeficientes			Totais	Contrastes		
	AM	AO	AMxAO	Trat.	AM	AO	AMxAO
$a_1b_1 \Leftrightarrow (1)$	–	–	+	47,4	-47,4	-47,4	47,4
$a_1b_2 \Leftrightarrow b$	–	+	–	65,0	-65,0	65,0	-65,0
$a_2b_1 \Leftrightarrow a$	+	–	–	80,8	80,8	-80,8	-80,8
$a_2b_2 \Leftrightarrow ab$	+	+	+	77,4	77,4	77,4	77,4
Total				270,6	45,8	14,2	-21,0

$$SQ\ AM = \frac{(AM)^2}{rk} = \frac{(45,8)^2}{4\ .\ 4} = 131,11$$

repetições ↗ soma dos quadrados dos coeficientes ↖

$$SQ\ AO = \frac{(14,2)^2}{4\ .\ 4} = 12,61$$

$$SQ\ AMxAO = \frac{(-21,0)^2}{4 \times 4} = 27,57$$

Tabela de Análise de Variância

Causas de Variação	GL	SQ	QM	F
Blocos	3	37,83		
AM	1	131,11	131,11	31,29 **
AO	1	12,61	12,61	3,01
AMxAO	1	27,57	27,57	6,58 *
Erro Experiemntal	9	37,70	4,19	
Total	15	246,80		

$F_{.05}(1,9) = 5,12$

$F_{.01}(1,9) = 10,56$

Conclusões:

X
- Existe efeito de AM independentemente de AO
- Não se evidencia efeito de AO independentemente de AM
- Existe interação entre AM e AO, estando a indicar que o efeito de AM depende dos níveis de AO e vice-versa.

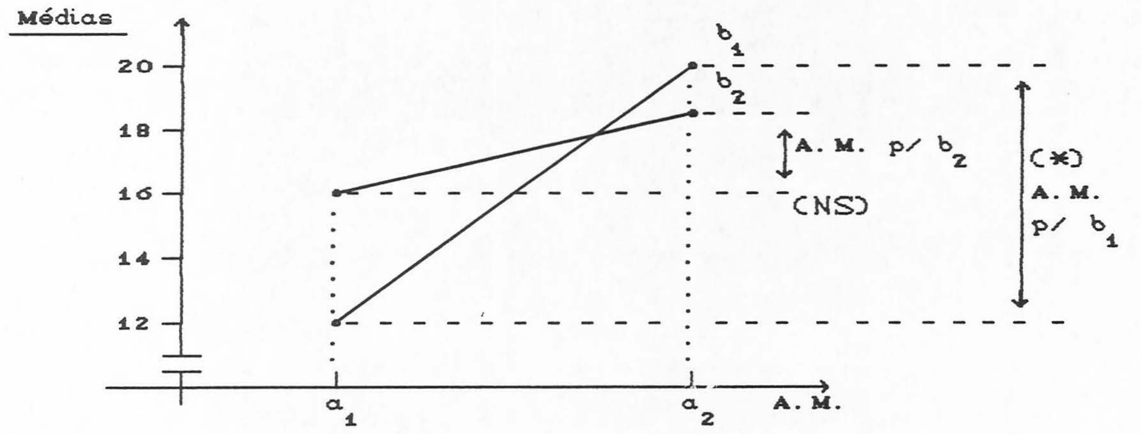
X

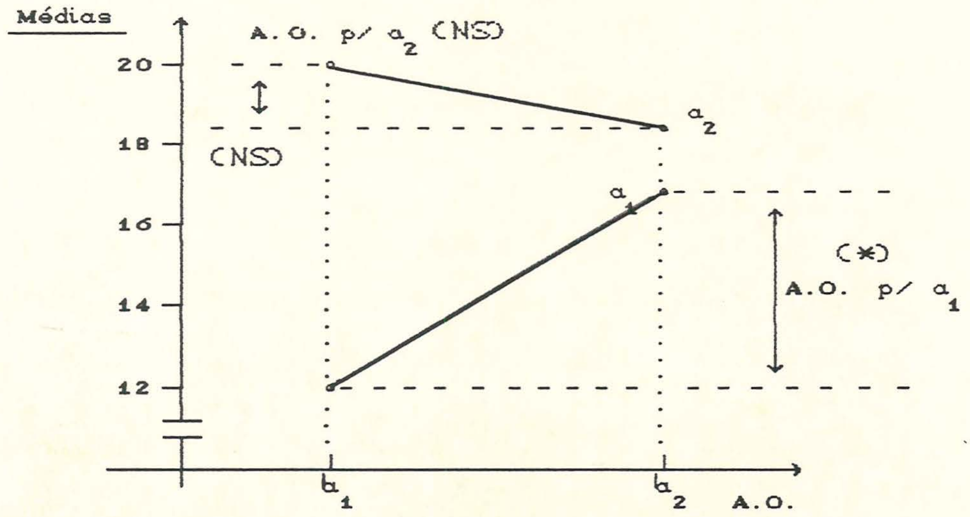
Se interação NS $\Rightarrow$ conclusão com base em efeitos principais.
Se interação $*$ $\Rightarrow$ conclusão com base em efeitos simples.

Médias

A.M.	A. O. b_1	b_2
a_1	11,9 b (b)	16,2 a (a)
a_2	20,2 a (a)	$\boxed{19,4}$ a (a)

Médias seguidas de mesma letra (coluna) e de mesma letra entre parênteses (linhas) não diferem significativamente pelo teste DMS 5% .





$$\text{DMS } 5\% = t_{.05}(9)\ s_d$$
$$= (2{,}263)(1{,}45)$$
$$= 3{,}3$$

$$s_d = \sqrt{\frac{2\ QME}{r}} = \sqrt{\frac{2(4{,}19)}{4}} = 1{,}45$$

Poder-se-ia conduzir a análise da seguinte maneira:

DECOMPOSIÇÃO OU DESDOBRAMENTO

1°) AM 1GL

$$\left.\begin{array}{ll} AO/a_1 & 1GL \\ AO/a_2 & 1GL \end{array}\right\} AO+AMxAO$$

- $AO/a_1 \Leftrightarrow$ AO na ausência de AM

$$SQAO/a_1 = \frac{(47,4)^2 + (65,0)^2}{4} - \frac{(112,4)^2}{8} = 38,72$$

- $AO/a_2 \Leftrightarrow$ AO na presença de AM

$$SQAO/a_2 = \frac{(80,8)^2 + (77,4)^2}{4} - \frac{(158,2)^2}{8} = 1,46$$

2°) AO 1GL

$$\left.\begin{array}{ll} AM/b_1 & 1GL \\ AM/b_2 & 1GL \end{array}\right\} AM+AMxAO$$

- $AM/b_1 \Leftrightarrow$ AM na ausência de AO

$$SQAM/b_1 = \frac{(47,4)^2 + (80,8)^2}{4} - \frac{(128,2)^2}{8} = 139,44$$

- $AM/b_2 \Leftrightarrow$ AM na presença de AO

$$SQAM/b_2 = \frac{(65,0)^2 + (77,4)^2}{4} - \frac{(142,4)^2}{8} = 19,23$$

1° DECOMPOSIÇÃO

C.VARIAÇÃO	GL	SQ	QM	F
Blocos	3	37,83		
AM	1	131,11	131,11	31,29**
AO na ausência de AM	1	38,72	38,72	9,24*
AO na presença de AM	1	1,45	1,45	0,35
Erro	9	37,68	4,19	

Existe

- Efeito de AO na ausência de AM
- Não se evidencia efeito de AO na presença de AM

2° DECOMPOSIÇÃO

C.VARIAÇÃO	GL	SQ	QM	F
Blocos	3	37,83		
AO	1	12,61	12,61	3,01
AM na ausência de AO	1	139,44	139,44	33,28**
AM na presença de AO	1	19,23	19,23	4,58
Erro	9	37,68	4,19	

Existe

- Efeito de AM na ausência de AO
- Não se evidencia efeito de AM na presença de A.O.

Exemplo 3:

Um experimento, usando 3 variedades de cana-de-açúcar (v_1, v_2, v_3), e 3 níveis de nitrogênio (n_1, n_2, n_3) foi conduzido no delineamento blocos casualizados com 4 repetições. Os níveis de nitrogênio foram, respectivamente, 170, 240 e 310 kg/ha. Os rendimentos de cana foram:

TRATAMENTOS

Blocos	v_1n_1	v_1n_2	v_1n_3	v_2n_1	v_2n_2	v_2n_3	v_3n_1	v_3n_2	v_3n_3	Total
1	70,5	67,3	79,9	58,6	64,3	64,4	65,8	64,1	56,3	591,2
2	67,5	75,9	72,8	65,2	48,3	67,3	68,3	64,8	54,7	584,8
3	63,9	72,2	64,8	70,2	74,0	78,0	72,7	70,9	66,2	632,9
4	64,2	60,5	86,3	51,8	63,6	72,0	67,6	58,3	54,4	578,7
Totais	266,1	275,9	303,8	245,8	250,2	281,7	274,4	258,1	231,6	2387,6

ANÁLISE DE VARIÂNCIA

Causas de variação	GL	SQ	QM	F
Blocos	3	200,68	66,89	1,52
Variedades (V)	2	319,37	159,69	3,64 *
Nitrogênio (N)	2	56,54	28,27	0,64 NS
V x N	4	559,79	139,95	3,19
Erro experimental	24	1053,78	43,91	
Total	35	2190,16		

$$\text{SQ Total} = (70,5)^2 + (67,3)^2 + \ldots + (54,4)^2 - \underbrace{(2387,6)^2 / 36}_{\text{FC}}$$

$$\text{SQBlocos} = \frac{(591,2)^2 + \ldots + (578,7)^2}{9} - FC$$

NITROGÊNIO

Variedades	n_1	n_2	n_3	Total
v_1	266,1	275,9	303,8	845,8
v_2	245,8	250,2	281,7	777,7
v_3	274,4	258,1	231,6	764,1
Total	786,3	784,2	817,1	2387,6

$$SQV = \frac{(845,8)^2 + (777,7)^2 + (764,1)^2}{12} - FC$$

$$SQN = \frac{(785,3)^2 + (784,2)^2 + (817,1)^2}{12} - FC$$

NPK

N P K

$$\text{SQV x N} = \underbrace{\frac{(266,1)^2+\ldots+(231,6)^2}{4} \quad FC}_{\text{SQT}} \quad SQV \quad SQN$$

SQ Erro experimental = SQ Total - SQ Blocos - SQV - SQN - SQV x N P

IRRELEVANTES $\begin{cases} \text{V* } \rightarrow \text{ As variedades se diferenciam independentemente dos níveis de N} \\ \text{N ns } \rightarrow \text{ Não se evidencia} \neq \text{entre níveis de N independentemente de variedades} \end{cases}$

V x N * $\rightarrow$ Efeito de V está na dependência de N e o efeito de N está na dependência de V.

ESTUDO DE VARIEDADES DE DENTRO DOS NÍVEIS DE N $\Rightarrow$ TUKEY

Variedades	n_1	n_2	n_3	médias	
v_1	66,52 a	68,98 a	75,95 a	70,48	a
v_2	61,45 a	62,55 a	70,42 a	64,81	ab
v_3	68,60 a	64,52 a	57,90 b	63,68	b
médias	65,82	65,35	68,12	66,32	

Médias seguidas de mesma letra na coluna não diferem significativamente pelo teste Tukey a 5%

TUKEY

(i) Para variedades dentro de N

$$s_{5\%} = q_{05}(3,24)s\bar{y} \qquad s\bar{y} = \sqrt{\frac{QME}{r}} = \sqrt{\frac{43,91}{4}} = 3,313$$

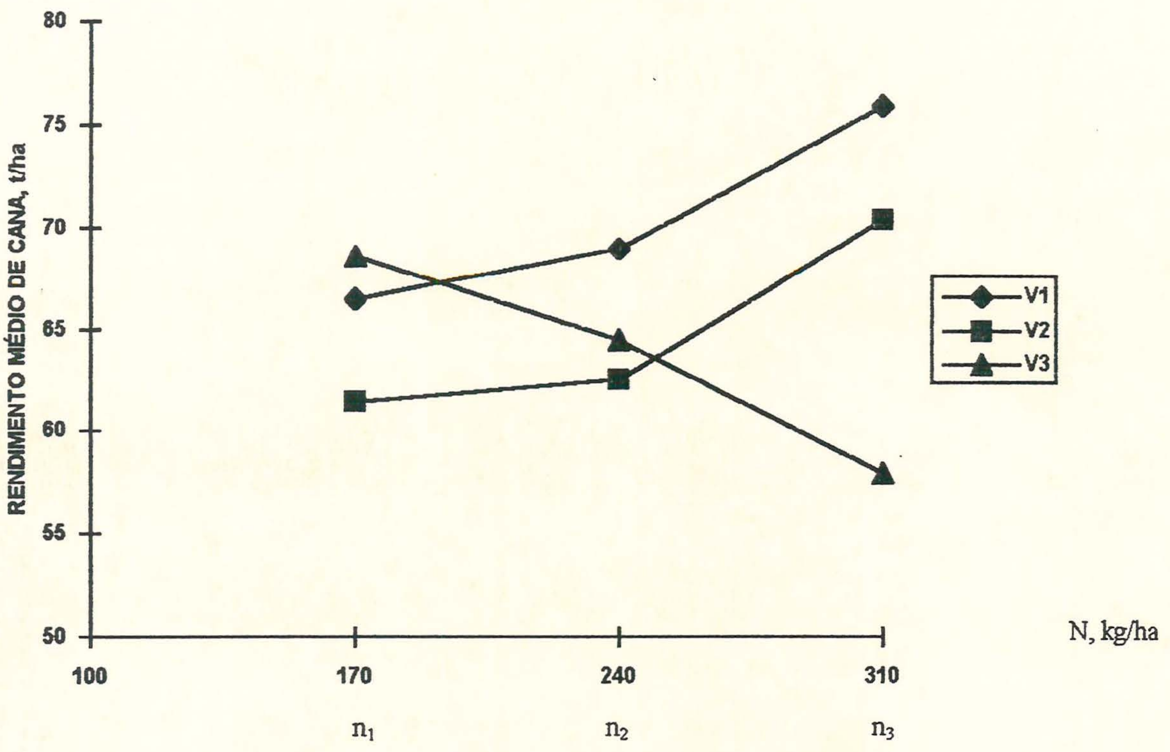
$$= 3,53(3,3132)$$
$$= 11,7$$

(ii) Para variedades independentemente de N

$$s_{5\%} = q_{05}(3,24)s\bar{y} \qquad s\bar{y} = \sqrt{\frac{QME}{rb}} = \sqrt{\frac{43,91}{(4)(3)}} = 1,9129$$

$$= 3,53(1,9129)$$
$$= 6,75$$

Estudo de N dentro de variedades ⇒ Análise de Regressão



Exemplo 4:

Lotes de sementes de feijão foram submetidos a diferentes tratamentos, com o objetivo de observar o efeito desses tratamentos sobre a emergência. Especificamente, procurou-se informação sobre o efeito de um inseticida, na presença e na ausência de diferentes fungicidas. Os níveis de fator inseticida B foram , b_o ausência e b_1, presença. Os níveis dos fungicidas A, foram a_o , ausência, e a_1, a_2, a_3 e a_4, correspondendo a 4 diferentes fungicidas comerciais. Tanto o inseticida, como os fungicidas, foram aplicados nas sementes nas doses recomendadas. O delineamento usado no campo foi blocos casualizados, com 5 repetições, com parcelas de uma fila de 10 m para cada combinação de tratamentos, e 100 sementes de feijão por fila. A emergência registrada foi a seguinte, por parcela:

Combinação de tratamentos	Blocos 1	2	3	4	5
$a_o b_o$	55	69	71	78	68
$a_o b_1$	47	37	58	48	54
$a_1 b_o$	94	89	92	98	96
$a_1 b_1$	76	97	90	93	92
$a_2 b_o$	91	76	92	92	95
$a_2 b_1$	84	94	94	96	92
$a_3 b_o$	91	89	97	91	93
$a_3 b_1$	68	79	82	78	92
$a_4 b_0$	89	92	97	96	94
$a_4 b_1$	58	72	85	90	69

TABELA DE ANÄLISE DE VARIÂNCIA

Causas da variação	GL	SQ	QM	F
Blocos	4	881,4	220,35	6,07
Fungicidas (A)	4	7409,4	1852,35	51,04
Inseticidas (B)	1	1352,0	1352,00	37,26
Interação AB	4	920,6	230,15	6,34
Erro Experimental	36	1306,6	36,29	
Total	49	11870,0		

AS MÉDIAS OBTIDAS FORAM:

Inseticidas	a_o	a_1	a_2	a_3	a_4	Médias
b_o	58,2	93,8	89,2	92,2	93,6	87,4
b_1	48,8	89,6	92,0	79,8	74,8	77,0
Médias	58,5	91,7	90,6	86,0	84,2	82,2

3 - VERIFICAÇÃO DA ADEQUABILIDADE DO MODELO DE ANÁLISE DE VARIÂNCIA PARA EXPERIMENTOS FATORIAIS

Exemplo:

A voltagem máxima de saída de um tipo particular de bateria pensa-se ser influenciada pelo tipo de material usado nas placas e pela temperatura no local onde a bateria é instalada. Quatro repetições de um experimento fatorial são realizadas em laboratório para 3 tipos de materiais e 3 temperaturas, obtendo-se os seguintes resultados:

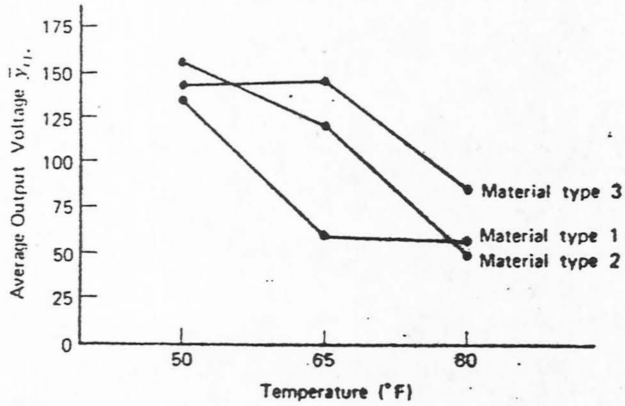
Tipo de Material	Temperatura (°F)						$y_{i..}$
	50		65		80		
1	130 155 74 180	$\boxed{539}$	34 40 80 75	$\boxed{229}$	20 70 82 58	$\boxed{230}$	998
2	150 188 159 126	$\boxed{623}$	136 122 106 115	$\boxed{479}$	25 70 58 45	$\boxed{198}$	1300
3	138 110 168 160	$\boxed{576}$	174 120 150 139	$\boxed{583}$	96 104 82 60	$\boxed{342}$	1501
$y_{.j.}$	1738		1291		770		$3799=y_{...}$

Causas de Variação	SQ	GL	QM	F
Tipo de Material	10,683.72	2	5,341.86	7.91 *
Temperatura	39,118.72	2	19,558.36	28.97 *
Interação	9,613.78	4	2,403.44	3.56 *
Erro	18,230.75	27	675.21	
Total	77,646.97	35		

$F_{.05}(2,37) = 3,35$

$F_{.05}(4,27) = 2,73$

Voltagem média em função do tipo de Material e Temperatura



Resíduos e_{ijk}

Tipo de Material	Temperatura (°F)					
	50		65		80	
1	-4.75	20.25	-23.75	-17.25	-37.50	12.50
	-60.75	45.25	22.75	17.75	24.50	0.50
2	-5.75	32.25	16.25	2.25	-24.50	20.50
	3.25	-29.75	-13.75	-4.75	8.50	-4.50
3	-6.00	-34.00	28.25	-25.75	10.50	18.50
	24.00	16.00	4.35	-6.75	-3.50	-25.50

Gráfico de Probabilidade Normal

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk}$$

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}$$

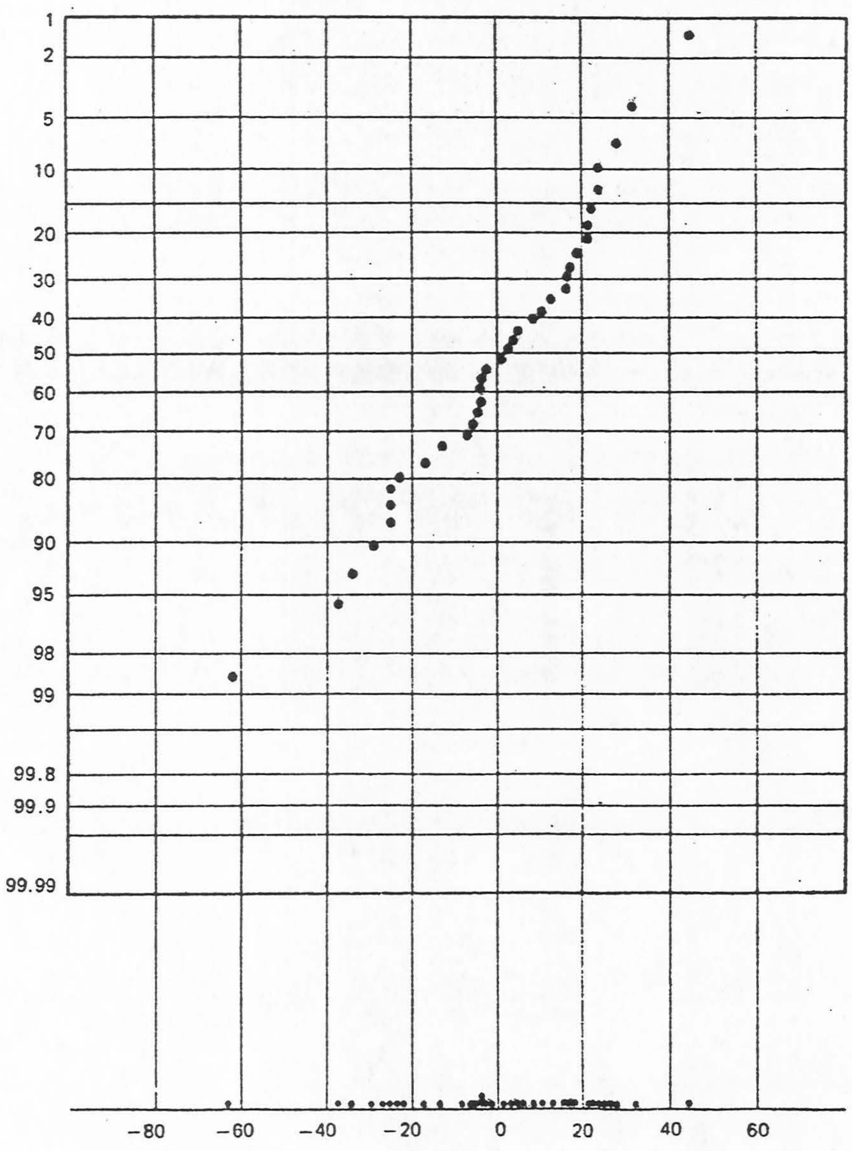


Gráfico de Resíduos versus $\hat{y}_{ijk}$

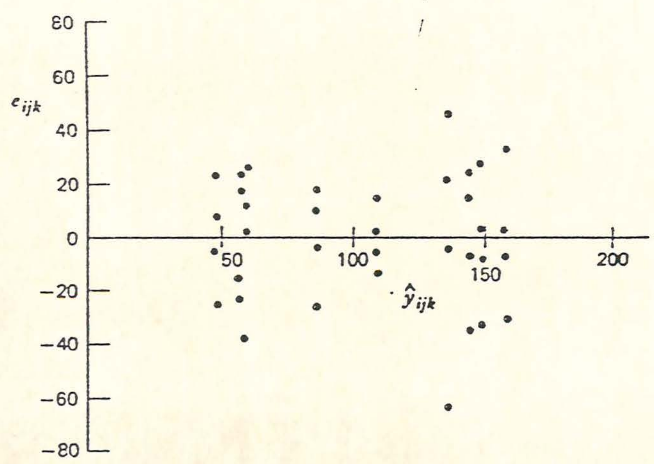


Gráfico de Resíduos versus Tipo de Material

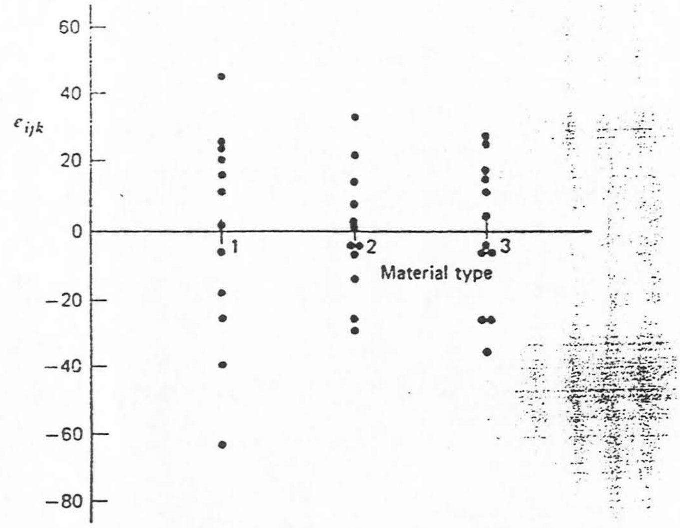
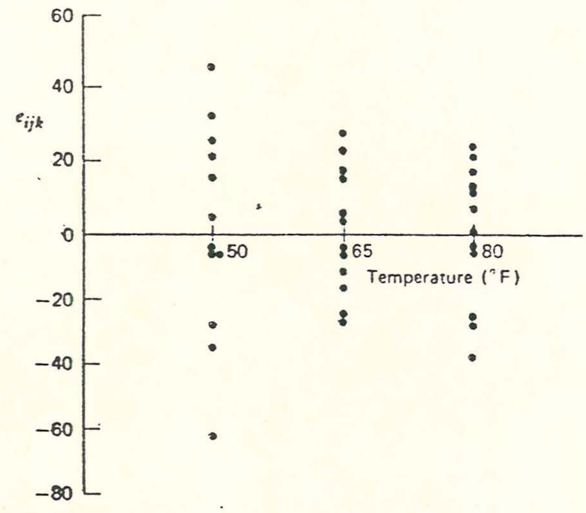


Gráfico de Resíduos versus Temperatura



4 - EXPERIMENTOS FATORIAIS COM 3 FATORES CRUZADOS FIXOS

DCC:

$$y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + C_k + AB_{ij} + AC_{ik} + BC_{jk} + ABC_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

DBC:

$$y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + C_k + AB_{ij} + AC_{ik} + BC_{jk} + ABC_{ijk} + R_l + \varepsilon_{ijkl}$$

$i = 1, 2, \ldots, a$ — ↑ índice do fator A

$j = 1, 2, \ldots, b$ — ↑ índice do fator B

$k = 1, 2, \ldots, c$ — ↑ índice do fator C

$l = 1, 2, \ldots, r$ — ↑ índice de repetição

$$\left.\begin{array}{ll} abc & \text{tratamentos} \\ r & \text{repetições} \end{array}\right\} \rightarrow abcr \ \text{UE}$$

Fator A	Fator B	Fator C	Repetições 1	2	...	r	Totais de Tratamentos
1	1	1	y_{1111}	y_{1112}	...	y_{111r}	$y_{111.}$
		2					$y_{112.}$
		⋮					⋮
		c					
	2			$\boxed{y_{ijkl}}$			$\boxed{y_{ijk.}}$
	⋮						
	b						
2							
⋮							
a							
							$y_{....}$

Suposições:

$$\varepsilon_{ijkl} \overset{\text{IID}}{\cap} N\,(0,\sigma^2)$$

Estimativas dos componentes do modelo

Restrições:

$$\sum_i A_i = 0 \quad ; \quad \sum_j B_j = 0 \quad ; \quad \sum_k C_k = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_i AB_{ij} = 0 \\ \sum_j AB_{ij} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{ij} AB_{ij} = 0 \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \sum_i AC_{ik} = 0 \\ \sum_k AC_{ik} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{ik} AC_{ik} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_j BC_{jk} = 0 \\ \sum_k BC_{jk} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{jk} BC_{jk} = 0 \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \sum_i ABC_{ijk} = 0 \\ \sum_j ABC_{ijk} = 0 \\ \sum_k ABC_{ijk} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{ijk} ABC_{ijk} = 0$$

Estimativas dos Parâmetros

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{....} \quad ; \quad \hat{A}_i = \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....} \quad ; \quad \hat{B}_j = \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....} \quad ; \quad \hat{C}_k = \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....}$$

$$\widehat{AB}_{ij} = \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{....} \quad ; \quad \widehat{AC}_{ik} = \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....}$$

$$\widehat{BC}_{jk} = \bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....} \quad ; \quad ABC_{ijk} = \bar{y}_{ijk.} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{.jk.} + \bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....}$$

Hipóteses

(i) Ho: $A_1 = A_2 = \ldots = A_a = 0$ (não existe efeito do fator A)

(ii) Ho: $B_1 = B_2 = \ldots = B_b = 0$ (não existe efeito do fator B)

(iii) Ho: $C_1 = C_2 = \ldots = C_c = 0$ (não existe efeito do fator C)

(iv) Ho: $AB_{11} = \ldots = AB_{ab} = 0$ (não existe efeito da interação AB)

(v) Ho: $AC_{11} = \ldots = AC_{ac} = 0$ (não existe efeito da interação AC)

(vi) Ho: $BC_{11} = \ldots = BC_{bc} = 0$ (não existe efeito da interação BC)

(vii) Ho: $ABC_{111} = \ldots = ABC_{abc} = 0$ (não existe efeito da interação ABC)

Fator A	Fator B 1	2	...	b	Total
1	$y_{11..}$	$y_{12..}$		$y_{1b..}$	$y_{....}$
2	$y_{21..}$				
⋮	⋮	$\boxed{y_{ij..}}$			
a	$y_{a1..}$				
Total	$y_{.1..}$				$y_{....}$

$y_{i...}$ $y_{.j..}$

$$SQA = \sum_i \frac{y_{i...}^2}{rbc} - \underbrace{\frac{y_{....}^2}{rabc}}_{FC}$$

$$SQB = \sum_j \frac{y_{.j..}^2}{rac} - FC$$

$$SQAB = \sum_{i,j} \frac{y_{ij..}^2}{rc} - FC - SQA - SQB$$

Fator A	Fator C 1	2	...	c	Total	
1	$y_{1.1.}$	$y_{1.2.}$	...	$y_{1.c.}$	$y_{1...}$	$y_{i...}$
2						
⋮		$\boxed{y_{i.k.}}$				
a						
Total	$y_{..1.}$				$y_{....}$	
	$y_{..k.}$					

$$SQC = \sum_{k} \frac{y_{..k.}^{2}}{rab} - FC$$

$$SQAC = \sum_{i,k} \frac{y_{i.k.}^{2}}{rb} - FC - SQA - SQC$$

Fator B	Fator C 1	2	...	c	Total	
1	$y_{.11.}$	$y_{.12.}$	...	$y_{.1c.}$	$y_{.1..}$	$y_{.j..}$
2						
⋮		$\boxed{y_{.jk.}}$				
b						
Total	$y_{..1.}$				$y_{....}$	
	$y_{..k.}$					

$$SQBC = \sum_{j,k} \frac{y_{.jk.}^{2}}{ra} - FC - SQB - SQC$$

$$SQABC = \underbrace{\sum_{i,j,k} \frac{y_{ijk.}^{2}}{r}}_{SQTratamentos} - FC - SQA - SQB - SQC - SQAB - SQAC - SQBC$$

C. Variação	GL	
A	a-1	
B	b-1	
C	c-1	
AB	(a-1)(b-1)	abc-1
AC	(a-1)(c-1)	
BC	(b-1)(c-1)	
ABC	(a-1)(b-1)(c-1)	
Erro Experimental	abc (r-1)	
Total	abcr - 1	

Erro Padrão da Média de um Tratamento no caso de 3 Fatores:

a níveis de A c níveis de C

b níveis de B r repetições

Comparação	Exemplo	$s_{\bar{y}}$
◦ Entre médias de A	$a_1 - a_2$	$\sqrt{\frac{QME}{rbc}}$
◦ Entre médias de B	$b_1 - b_2$	$\sqrt{\frac{QME}{rac}}$
◦ Entre médias de C	$c_1 - c_2$	$\sqrt{\frac{QME}{rab}}$
* ◦ Entre médias de A no mesmo nível de B ; entre médias de B no mesmo nível de A ; entre qquer 2 médias na tabela de interação AxB .	$a_1b_1 - a_2b_2$ ou $a_1b_1 - a_1b_2$ ou $a_1b_1 - a_2b_2$	$\sqrt{\frac{QME}{rc}}$
** ◦ Entre médias de A no mesmo nível de C ; entre médias de C no mesmo nível de A ; entre qquer 2 médias na tabela de interação AxC .	$a_1c_1 - a_2c_1$; $a_1c_1 - a_1c_2$; $a_1c_1 - a_2c_2$	$\sqrt{\frac{QME}{rb}}$

Comparação	Exemplo	$\hat{s}_{\bar{y}}$
*** . Entre médias de B no mesmo nível de C ; entre médias de C no mesmo nível de B ; entre qquer 2 médias na tabela de interação BxC .	$b_1c_1 - b_2c_1$; $b_1c_1 - b_1c_2$; $b_1c_2 - b_2c_2$	$\sqrt{\frac{QME}{ra}}$
**** . Entre médias de A no mesmo nível de B e C ; entre médias de B no mesmo nível A e C ; entre médias de C no mesmo nível de A e B ; entre qquer 2 médias na tabela de interação AxBxC .	$a_1b_1c_1 - a_2b_1c_1$; $a_1b_1c_1 - a_1b_2c_1$; $a_1b_1c_1 - a_1b_1c_2$; $a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1$; $a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2$; $a_1b_1c_1 - a_1b_2c_2$; $a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2$	$\sqrt{\frac{QME}{r}}$

* Se interação AxB significativa

** Se interação AxC significativa

*** Se interação BxC significativa

**** Se interação AxBxC significativa

Exemplo 1

Num experimento fatorial 2^3 de adubação NPK em cana-de-açúcar, as produções, em t/ha, foram as seguintes:

Tratamentos		Blocos I	II	III	IV	Totais
N P K						
0 0 0	⇔ (1)	63,9	43,1	58,9	57,2	223,1
1 0 0	n	32,5	50,3	50,3	68,4	201,5
0 1 0	p	64,9	61,1	58,2	71,2	255,4
0 0 1	k	46,5	40,1	56,0	51,8	194,4
1 1 0	np	59,7	73,2	73,7	82,7	289,3
1 0 1	nk	45,2	58,4	53,7	76,0	233,3
0 1 1	pk	73,6	45,3	88,8	62,7	270,4
1 1 1	npk	70,8	68,5	78,7	84,9	302,9
Totais		457,1	440,0	518,3	554,9	1970,3

As doses de nutrientes usadas foram:

N: 0 - 60 kg/ha de N

P: 0 - 75 KG/ha de P_2O_5

K: 0 - 75 kg/ha de K_2O

(8) N	P P_0	P_1	Total
N_0	417,5	525,8	943,3
N_1	434,8	592,2	1027,0
Total	852,3	1118,0	1970,3

$$FC = \frac{(1970,3)^2}{32} = 121315,06$$

SQN , SQP e SQNxP

$$SQN = \frac{1}{16}\,[(943,3)^2 + (1027,0)^2] - FC = 218,93$$

$$SQP = \frac{1}{16}\,[(852,3)^2 + (1118,0)^2] - FC = 2206,14$$

$$SQNxP = \frac{1}{8}\,[(417,5)^2 + \ldots + (592,2)^2] - FC - SQN - SQP = 75,34$$

(8) N	K K_0	K_1	Total
N_0	478,5	464,8	943,3
N_1	490,8	536,2	1027,0
Total	969,3	1001,0	1970,3

$$SQK = \frac{1}{16}\,[(1969,3)^2 + (1001,0)^2] - FC = 31,40$$

$$SQNxK = \frac{1}{8}\,[(478,5)^2 + \ldots + (536,2)^2] - FC - SQN - SQK = 109,15$$

(80) P	K: K_0	K_1	Total
P_0	424,6	427,7	852,3
P_1	544,7	573,3	1118,0
Total	969,3	1001,0	1970,3

$$SQP\times K = \frac{1}{8}[(424,6)^2 + \ldots + (573,3)^2] - FC - SQP - SQK = 20,32$$

$$SQN\times P\times K = SQT - SQN - SQP - SQK - SQN\times P - SQN\times K - SQP\times K = 119,74$$

onde $SQT = \frac{1}{4}[(223,1)^2 + \ldots + (302,9)^2] - FC = 2781,02$

<u>Outra forma de cálculo</u>

Efeito Fatorial	Tratamentos: (1)	n	p	k	np	nk	pk	npk
N	−	+	−	−	+	+	−	+
P	−	−	+	−	+	−	+	+
K	−	−	−	+	−	+	+	+
NxP	+	−	−	+	+	−	−	+
NxK	+	−	+	−	−	+	−	+
PxK	+	+	−	−	−	−	+	+
NxPxK	−	+	+	+	−	−	−	+
Totais de Tratamentos	223,1	201,5	255,4	194,4	289,3	232,3	270,4	302,9

Est. do Ef. Fatorial	SQ
83,7	218,93
265,7	2206,14
31,7	31,40
49,1	75,34
59,1	109,15
25,5	20,32
-61,9	119,74
-1970,3	2781,02

C. Variação	GL	SQ	QM	F
Blocos	3	1071,10		
N	1	218,93	218,93	2,30
P	1	2206,14	2206,14	23,16 **
K	1	31,40	31,40	0,33
NxP	1	75,34	75,34	0,79
NxK	1	109,15	109,15	1,15
PxK	1	20,32	20,32	0,21
NxPxK	1	119,74	119,74	1,26
Erro Experimental	21	2000,05	95,24	
Total	31	5852,17		

◦ Efeito de P independentemente de N e K.

Exemplo 2:

Realizou-se um experimento fatorial utilizando-se 3 fatores e dois níveis por fator, verificando-se a influência dos mesmos sobre a emergência de plantas, sendo as sementes plantadas em vasos em casa de vegetação. O delineamento experimental utilizado foi blocos casualizados com 3 repetições. A unidade experimental foi o vaso, com 100 sementes. Os fatores, com respectivos níveis, foram os seguintes:

A= Espécies: a_1 = alfafa ; a_2 = trevo vermelho
B= Tipo de solo: b_1 = arenoso ; b_2 = argiloso
C= Fungicida: c_1 = sem ; c_2 = com

O número de plantas emergentes, soma de 3 repetições, para os oito tratamentos, foi o seguinte:

	a_1				a_2		
	b_1	b_2	Total		b_1	b_2	Total
c_1	286	66	352	c_1	289	167	456
c_2	271	215	486	c_2	292	203	495
Total	557	281	838	Total	582	370	951

SQBlocos = 356 SQE = 1330

Análise de Variância

C.Variação	GL	SQ	QM	F
Blocos	2	356	178	1,87
Espécies (A)	1	532	532	5,60 *
Tipo de solo (B)	1	9882	9882	104,02 *
Fungicida (C)	1	1247	1247	13,13 *
AxB	1	176	176	1,85
AxC	1	376	376	3,96
BxC	1	1617	1617	17,02
AxBxC	1	715	715	7,53
Erro Exoerimental	14	133	95	

Efeito	Tratamentos								Estimativa
	$a_1b_1c_1$	$a_1b_1c_2$	$a_1b_2c_1$	$a_1b_2c_2$	$a_2b_1c_1$	$a_2b_1c_2$	$a_2b_2c_1$	$a_2b_2c_2$	do efeito
Fatorial	(1)	c	b	bc	a	ac	ab	abc	fatorial
A	-	-	-	-	+	+	+	+	113
B	-	-	+	+	-	-	+	+	-487
C	-	+	-	+	-	+	-	+	173
AB	+	+	-	-	-	-	+	+	65
AC	+	-	+	-	-	+	-	+	-95
BC	+	-	-	+	+	-	-	+	197
ABC	-	+	+	-	+	-	-	+	-131
Total tral.	286	274	66	215	289	292	167	203	

A=[289 + 292 +167 + 203] - [286 + 271 + 66 + 215] = 113

$$SQA = \frac{[A]^2}{r\sum C_i^2} = \frac{(113)^2}{3x8} = 532; \; SQB = \frac{(-487)^2}{3x8} = 9882 \; ;$$

$$SQC = \frac{(173)^2}{3x8} = 1247; \quad SQAB = \frac{(65)^2}{24} = 176 \; ;$$

$$SQAC = \frac{(-95)^2}{24} = 376 \; ; \quad SQBC = \frac{(197)^2}{24} = 1617 \; ;$$

$$SQABC = \frac{(-131)^2}{24} = 715$$

ABC * A – Espécies
B = Tipo de Solo
C= Fungicida

- C dentro de b_1/a_1

$$SQ = \frac{286^2 + 271^2}{3} - \frac{(557)^2}{6} = 38 \quad ; \quad 1 \text{ GL}$$

- C dentro de b_1/a_2

$$SQ = \frac{289^2 + 292^2}{3} \quad \frac{(581)^2}{6} = 2 \quad ; \quad 1 \text{ GL}$$

- C dentro de b_2/a_1

$$SQ = \frac{66^2 + 215^2}{3} - \frac{(281)^2}{6} = 3700 \quad ; \quad 1 \text{ GL}$$

- C dentro de b_2/a_2

$$SQ = \frac{167^2 + 203^2}{3} - \frac{(370)^2}{6} = 216 \quad ; \quad 1 \text{ GL}$$

C.Variação	GL	SQ	QM	F
C d. b1/a1	1	38	38	0,40
C d. b1/a2	1	2	2	0,02
C d. b2/a1	1	3700	3700	39,00 *
C d. b2/a2	1	216	216	2,27
Erro	14	1330	95	

$F.05(1,14) = 4,60$

Conclusão:

- Fungicida eficiente no solo argiloso para alfafa, para trevo vermelho ineficiente.
- Para solo arenoso fungicida não evidenciou eficiência tanto para alfafa como para trevo vermelho.

BC *

- C dentro de b_1 1 GL ; QME =45

$$SQ = \frac{575^2 + 563^2}{6} - \frac{(1138)^2}{12} = 12 \quad \text{NS}$$

fungicida ineficiente para o solo arenoso independente da espé cie

- C dentro de b_2

$$SQ = \frac{233^2 + 418^2}{6} - \frac{(651)^2}{12} = 2852 \quad *$$

fungicida eficiente para solo argiloso, independente da espé cie

	B	
C	b_1	b_2
c_1	$\underbrace{286+284}_{575}$	$\underbrace{66+167}_{233}$
c_2	$\underbrace{271+292}_{563}$	$\underbrace{215+203}_{418}$
	1138	651

O detalhe da interação simples perde consistência quando a interação tríplice é significativa.

5 - EXPERIMENTOS FATORIAIS CRUZADOS ALEATORIOS

EXPERIMENTOS FATORIAIS COM DOIS FATORES CRUZADOS ALEATÓRIOS

$$\left.\begin{array}{l}\text{FATOR A}\\ \text{FATOR B}\end{array}\right\}\ \text{ALEATÓRIOS} \Rightarrow \text{Modelo Aleatório ou Modelo II}$$

MODELO:

$y_{ijk} = \mu + \alpha i + \beta j + (\alpha\beta)ij + \varepsilon ijk$

$i=1,2,\ldots,a$; $j=1,2,\ldots,b$; $k=1,2,\ldots,r$

ab tratamentos abr observações

SUPOSIÇÕES:

$\alpha i \overset{IID}{\cap} N(0,\sigma^2_A)$

$\beta j \overset{IID}{\cap} N(0,\sigma^2_B)$

$(\alpha\beta)ij \overset{IID}{\cap} N(0,\sigma^2AB)$

$\varepsilon ijk \overset{IID}{\cap} N(0,\sigma^2)$

$\alpha i, \beta j, (\alpha\beta)ij$ e εijk são independentes

CONSEQUÊNCIA

$Y_{ijk} \cap N(\mu;\sigma^2A + \sigma^2B + \sigma^2AB + \sigma^2)$

$cov(yijk, yijk') = \sigma^2A + \sigma^2B + \sigma^2AB$

[observações do mesmo tratamento]

$cov(yijk, yi'j'k) = 0$

[observações de tratamentos diferentes]

HIPÓTESES

(i) $Ho: \sigma^2A=0$

(ii) $Ho: \sigma^2B=0$

(iii) $Ho: \sigma^2AB=0$

ANÁLISE DE VARIÂNCIA

causas de variação	GL	SQ	QM	F	E(QM)
A	a-1	SQA	QMA	QMA/QMAxB	$\sigma^2+r\sigma^2AB+br\sigma^2A$
B	b-1	SQB	QMB	QMB/QMAxB	$\sigma^2+r\sigma^2AB+ar\sigma^2B$
AxB	(a-1)(b-1)	SQAxB	QMAxB	QMAxB/QME	$\sigma^2+r\sigma^2AB$
ERRO	ab(r-1)	SQE	QME		σ^2
TOTAL	abr-1	SQtotal			

Soma de quadrados : mesmas expressões do caso de fatores fixos

Esperanças dos quadrados médios : regra de Hicks

Estimativa dos componentes de variâncias

$$\hat{\sigma}^2 = QME$$

$$\hat{\sigma}^2+r\hat{\sigma}^2AB = QMAxB \Rightarrow \hat{\sigma}^2AB = \frac{QMAxB - QME}{r}$$

$$\hat{\sigma}^2+r\hat{\sigma}^2AB+ar\hat{\sigma}^2B = QMB \Rightarrow \hat{\sigma}^2B = \frac{QMB - QMAxB}{ar}$$

$$\hat{\sigma}^2+r\sigma^2AB+br\hat{\sigma}^2A = QMA \Rightarrow \hat{\sigma}^2A = \frac{QMA - QMAxB}{br}$$

EXPERIMENTOS FATORIAIS COM DOIS FATORES CRUZADOS MISTOS

A: Fixo   A: aleatório

B: aleatório   B: Fixo

Esse modelo é combinação do modelo fixo e modelo aleatório.

<u>REGRA DE HICKS PARA OBTENÇÃO DAS E(QM)</u>

1ª) Estrutura-se uma tabela com efeitos fatoriais nas linhas e com os subscritos (índices) dos efeitos fatoriais nas colunas . Acima dos subscritos escreve-se a dimensão , isto é , o numero de níveis e se o efeito associado ao subscrito for fixo escreve-se F se for aleatório escreve-se A.

2ª) Em cada linha escreve-se a dimensão dos subscritos não associados ao efeito da linha considerada.

3ª) Em cada linha escreve-se um para as colunas referentes aos subscritos que aparecem entre parenteses.

4ª) Completa-se os demais espaços com um ou zero , um se o efeito for aleatório e zero se o efeito for fixo.

5ª) Para a obtenção da ECQMD cobre-se as colunas referentes aos subscritos do efeito e faz-se o produto dos demais. Se os subscritos estiverem entre parenteses não se cobre as colunas respectivas.

EXPERIMENTOS FATORIAIS COM TRÊS FATORES CRUZADOS ALEATÓRIOS

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}\right\} \text{ALEATÓRIOS} \Rightarrow \text{Modelo aleatório ou Modelo II}$$

MODELO:

$$y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + AB_{ij} + AC_{ik} + BC_{jk} + ABC_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

$i=1,2,\ldots,a$; $j=1,2,\ldots,b$; $k=1,2,\ldots,c$; $l=1,2,\ldots,r$

SUPOSIÇÕES:

$A_i \overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2_A)$ $\quad AB_{ij} \overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2_{AB})$ $\quad ABC_{ijk} \overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2_{ABC})$

$B_j \overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2_B)$ $\quad AC_{ik} \overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2_{AC})$ $\quad \varepsilon_{ijkl} \overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2)$

$C_k \overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2_C)$ $\quad BC_{jk} \overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2_{BC})$

A_i , B_j , C_k , AB_{ij} , AC_{ik} , BC_{jk} , ABC_{ijk} , ε_{ijkl} independentes

HIPÓTESES:

(i) $\sigma^2_A=0$ $\quad$ (iv) $\sigma^2_{AB}=0$ $\quad$ (vii) $\sigma^2_{ABC}=0$

(ii) $\sigma^2_B=0$ $\quad$ (v) $\sigma^2_{AC}=0$

(iii) $\sigma^2_C=0$ $\quad$ (vi) $\sigma^2_{BC}=0$

ANÁLISE DE VARIANCIA

Causas de Variação	GL	SQ	QM	F
A	a-1	SQA	QMA	QMA+QMABC/QMAB+QMAC
B	b-1	SQB	QMB	QMB+QMABC/QMAB+QMBC
C	c-1	SQC	QMC	QMC+QMABC/QMAC+QMBC
AB	(a-1)(b-1)	SQAB	QMAB	QMAB/QMABC
AC	(a-1)(c-1)	SQAC	QMAC	QMAC/QMABC
BC	(b-1)(c-1)	SQBC	QMCB	QMBC/QMABC
ABC	(a-1)(b-1)(c-1)	SQABC	QMABC	QMBC/QME
erro	abc(r-1)	SQE	QME	

$$A \Rightarrow n1 = \frac{(QMA + QMABC)^2}{\frac{(QMA)^2}{(a-1)} + \frac{(QMABC)^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}}$$

$$n2 = \frac{(QMAB + QMAC)^2}{\frac{(QMAB)^2}{(a-1)(b-1)} + \frac{(QMAC)^2}{(a-1)(c-1)}}$$

6 - QUADRADOS MÉDIOS ESPERADOS NA ANÁLISE DE VARIANCIA DE EXPERIMENTOS FATORIAIS CRUZADOS

6.1. - Experimentos Fatoriais com 2 Fatores

Modelo Matemático: $Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + AB_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

Quadrados Médios Esperados

C. Variação	GL	QM	Modelo II	Modelo I
A	a-1	QMA	$\sigma^2+r\sigma^2_{AB}+rb\sigma^2_A$	$\sigma^2+rb\sum_i A_i^2/(a-1)$
B	b-1	QMB	$\sigma^2+r\sigma^2+ra\sigma^2_B$	$\sigma^2+ra\sum_j B_j^2/(b-1)$
AB	(a-1)(b-1)	QMAB	$\sigma^2+r\,^2_{AB}$	$\sigma^2+r\sum_{i,j} AB^2_{ij}/(a-1)(b-1)$
Erro Exper.	ab(r-1)	QME	σ	σ^2

C. Variação	Modelo Misto A Fixo. B Aleatório
A	$\sigma^2+r\sigma^2_{AB}+rb\sum_i A_i^2/(A-1)$
B	$\sigma^2+ ra\sigma^2_B$
AB	$\sigma^2+r\sigma^2_{AB}$
Erro Exper.	σ^2

Modelo II -Para A: $F=\frac{QMA}{QMAB}$; Para B: $F=\frac{QMB}{QMAB}$: Para AB: $F=\frac{QMAB}{QME}$

$i = 1,2,\dots,a$
$j = 1,2,\dots,b$
$k = 1,2,\dots,r$

Modelo I -Para A: $F=\frac{QMA}{QME}$; Para B: $F=\frac{QMB}{QME}$; Para AB: $F=\frac{QMAB}{QME}$

Modelo Misto -Para A: $F=\frac{QMA}{QMAB}$; Para B: $F=\frac{QMB}{QME}$; Para AB: $F=\frac{QMAB}{QME}$

Regras para a organização dos quadrados médios esperados:

1ª) Quando ambos os fatores são fixos, não há termos para a interação; quando ambos os fatores são aleatórios, ambos apresentam o componente da interação; quando um fator é fixo e outro é aleatório, só o fator fixo tem componente para a interação.

2ª) O coeficiente para qualquer termo ou componente é dado pelas letras não incluídas no subscrito do respectivo termo ou componente.

3ª) Para cálculo de F, o quadrado médio do denominador deve incluir todos os componentes do numerador, menos o componente ou termo a ser testado.

6.2. - EXPERIMENTOS FATORIAIS COM 3 FATORES

Modelo Matemático: $Y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + C_k + AB_{ij} + AC_{ik} + BC_{jk} + ABC_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$

$i = 1,2,\ldots,a$ $j = 1,2,\ldots,b$ $k = 1,2,\ldots,c$ $l = 1,2,\ldots,r$

C. Variação	GL	QM	Quadrados Médios Esperados Modelo I	Modelo II
A	a-1	QMA	$\sigma^2 + rbc\sum_i A_i^2/(a-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{ABC} + rc\sigma^2_{AB} + rb\sigma^2_{AC} + rbc\sigma^2_{A}$
B	b-1	QMB	$\sigma^2 + rac\sum_k B_j^2/(b-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{ABC} + rc\sigma^2_{AB} + ra\sigma^2_{BC} + rac\sigma^2_{B}$
C	c-1	QMC	$\sigma^2 + rab\sum_k C_k^2/(c-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{ABC} + rb\sigma^2_{AC} + ra\sigma^2_{BC} + rab\sigma^2_{C}$
AB	(a-1)(b-1)	QMAB	$\sigma^2 + rc\sum_{i,j} AB_{ij}^2/(a-1)(b-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{ABC} + rc\sigma^2_{AB}$
AC	(a-1)(c-1)	QMAC	$\sigma^2 + rb\sum_{i,k} AC_{ik}^2/(a-1)(c-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{ABC} + rb\sigma^2_{AC}$
BC	(b-1)(c-1)	QMBC	$\sigma^2 + ra\sum_{j,k} BC_{jk}^2/(b-1)(c-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{ABC} + ra\sigma^2_{BC}$
ABC	(a-1)(b-1)(c-1)	QMABC	$\sigma^2 + r\sum_{i,j,k} ABC_{ijk}^2/(a-1)(b-1)(c-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{ABC}$
Erro Exp	abc(r-1)	QME	σ^2	σ^2

Teste F

Modelo I: todos os efeitos são testados fazendo-se a razão do quadrado médio do componente com o QME.

Modelo II: Para ABC: QME como denominador

Para AB, AC, BC: QMABC como denominador

Para A: $F = \dfrac{QMA+QMABC}{QMAB+QMAC}$

GL do numerador $n'_1 = \dfrac{(QMA+QMABC)^2}{\dfrac{QMA^2}{n_A} + \dfrac{QMABC}{n_{ABC}}}$

GL do denominador $n'_2 = \dfrac{(QMAB+QMAC)^2}{\dfrac{QMAB^2}{n_{AB}} + \dfrac{QMAC^2}{n_{AC}}}$

Para B: $F = \dfrac{QMB + QMABC}{QMAB + QMBC}$ GLs de maneira similar a A

Para C: $F = \dfrac{QMC + QMABC}{QMAC + QMBC}$ GLs de maneira similar a A

C. Variação	GL	QM	Quadrado Médio Esperado Modelo Misto: A fixo;B e C Aleatórios
A	(a-1)	QMA	$\sigma^2+r\sigma^2ABC+cr\sigma^2_{AB}+br\sigma^2_{AC}+bcr\sum_i A_i^2/(a-1)$
B	(b-1)	QMB	$\sigma^2+ar\sigma^2_{BC}+acr\sigma^2_{B}$
C	(c-1)	QMC	$\sigma^2+ar\sigma^2_{BC}+abr\sigma^2_{C}$
AB	(a-1)(b-1)	QMAB	$\sigma^2+\sigma^2_{ABC}+cr\sigma^2_{AB}$
AC	(a-1)(c-1)	QMAC	$\sigma^2+r\sigma^2_{ABC}+br\sigma^2_{AC}$
BC	(b-1)(c-1)	QMBC	$\sigma^2+ar\sigma^2_{BC}$
ABC	(a-1)(b-1)(c-1)	QMABC	$\sigma\ +r\sigma^2_{ABC}$
Erro Exper	abc(r-1)	QME	σ^2

Teste F Modelo misto: A fixo, B e C Aleatórios

Para ABC, BC, usa-se como denominador QME

Para AB e AC, usa-se como denominador QMABC

Para B e C, usa-se como denominador QMBC

Para A $\quad F=\dfrac{QMA+QMABC}{QMAB+QMAC}$

Os GLs são os mesmos daqueles do modelo aleatório.

Regras para organização dos quadrados médios esperados:

1ª) Fator Fixo: Terá componente de interação simples quando o outro fator de interação for aleatório. Terá componente da interação tríplice se os outros dois fatores forem aleatórios.

2ª) Fator Aleatório: Terá componente da interação simples se o outro fator da interação for aleatório. No modelo misto não tem componente de interação tríplice.

3ª)Interação Simples: Terá componente da interação tríplice se o terceiro fator fator aleatório.

7 - EXPERIMENTOS FATORIAIS HIERARQUICOS

1. Com dois Fatores

Fatores	modelo I ou modelo fixo	modelo II ou modelo aleatório	modelo misto	
A	fixo	aleatório	fixo	aleatório
B	fixo	aleatório	aleatório	fixo

MODELO: DCC

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$$

- ε_{ijk} — erro
- $\beta_{j(i)}$ — efeito do j-ésimo nível do fator B dentro do i-ésimo nível do fator A
- α_i — efeito do i-ésimo nível do fator A
- μ — média

$i=1,2,\ldots,a$ $\quad j=1,2,\ldots,b$ $\quad k=1,2,\ldots,r$

EXEMPLO:

FATOR A : 2 NÍVEIS

FATOR B : 3 NÍVEIS

A: a_1 — B: b_1 b_2 b_3

A: a_2 — B: b_1 b_2 b_3

QUADRO DE OBSERVAÇÕES:

FATOR A	FATOR B	repetições 1	2	...	r	$y_{ij.}$	$y_{i..}$	$y_{...}$
1	1							
	2		y_{ijk}					
	⋮							
	b							
2								
⋮								
r								

2. Com 3 fatores:

FATORES	modelo I	modelo II	modelo misto
A	fixo	aleatório	1 fator fixo e 2 aleatórios
B	fixo	aleatório	2 fatores fixos e 2 aleatórios
C	fixo	aleatório	

MODELO: DCC

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + C_{k(j)} + \varepsilon_{ijkl}$$

- ε_{ijkl} — erro
- $C_{k(j)}$ — efeito do k-ésimo nível do fator C dentro do j-ésimo nível do fator B
- $\beta_{j(i)}$ — idem ao caso de dois fatores
- α_i — idem ao caso de dois fatores
- μ — média

$i=1,2,\dots,a$ $j=1,2,\dots,b$ $k=1,2,\dots,c$ $l=1,2,\dots,r$

QUADRO DE OBSERVAÇÕES:

			repetições							
FATOR A	FATOR B	FATOR C	1	2	...	r	$y_{ijk.}$	$y_{ij..}$	$y_{i...}$	$y_{....}$
1	1	1								
		2								
	2	:								
2	:	c				y_{ijkl}				
:	b									
a										

EXPERIMENTOS FATORIAIS HIERÁRQUICOS - 2 fatores

1. SUPOSIÇÕES, RESTRIÇÕES E HIPÓTESES:

Modelo: $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$ $\quad$ $i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, b$; $k = 1, 2, \dots, r$

Característica	Modelo I	Modelo II
Suposições	$\varepsilon_{ijk} \cap N(0,\sigma^2)$; Independentes $\downarrow$ $y_{ijk} \cap N(\mu+\alpha_i+B_{j(i)},\sigma^2)$; Independentes	$\alpha_i \cap N(0,\sigma^2 A)$; Independentes $B_{j(i)} \cap N(0,\sigma^2 B)$; Independentes $\varepsilon_{ijk} \cap N(0,\sigma^2)$; Independentes α_i, $B_{j(i)}$ *e* ε_{ijk} *são independentes* $\downarrow$ $y_{ijk} \cap N(\mu,\sigma^2+\sigma^2 A+\sigma^2 B)$ *e independentes se estão em caselas diferentes.*
Restrições	$\sum_{i=1}^{a} \hat{\alpha}_i = 0$ $\sum_{j=1}^{b} \hat{B}_{j(i)} = 0;\ \forall\ i$	———
Hipóteses	Ho: $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_a = 0$ [não existe efeito do fator A] Ho: $B_{1(i)}=B_{2(i)}=\dots=$ $=B_{b(i)} = 0\ ;\ \forall\ i$ [não existe efeito do fator B dentro do i-ésimo nível do fator A, $\forall$ i]	Ho: $\sigma^2 A = 0$ Ho: $\sigma^2 B = 0$

Característica	Modelo Misto: A fixo B aleatório
Suposições	$B_{j(i)} \cap N(0,\sigma^2 B)$; Independentes $\varepsilon_{ijk} \cap N(0,\sigma^2)$; Independentes $B_{j(i)}$ e ε_{ijk} são independentes $\downarrow$ $y_{ijk} \cap N(\mu+\alpha_i;\sigma^2+\sigma^2 B)$ e independentes se estão em caselas diferentes.
Restrições	$\sum_{i=1}^{a} \hat{\alpha}_i = 0$
Hipóteses	Ho: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$ Ho: $\sigma^2 B = 0$

2. ANÁLISE DE VARIÂNCIA:

Causas de variação	GL	SQ	QM
A	a-1	SQA	QMA
B (A)	a(b-1)	SQB(A)	QMB(A)
Erro	ab(r-1)	SQE	QME
Total	abr-1	SQTotal	

C. de Var.	Quadrados Médios Esperados		
	Modelo I	Modelo II	Modelo Misto
A	$\sigma^2 + \dfrac{rb}{a-1} \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2$	$\sigma^2 + r\sigma^2 B + rb\sigma^2 A$	$\sigma^2 + r\sigma^2 B + \dfrac{rb}{a-1} \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2$
B (A)	$\sigma^2 + \dfrac{r}{a(b-1)} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} B_{j(i)}^2$	$\sigma^2 + r\sigma^2 B$	$\sigma^2 + r\sigma^2 B$
Erro	σ^2	σ^2	σ^2
Total			

Causas de Variação	F	
	Modelo I	Modelo II e Misto
A	$\dfrac{QMA}{QME}$	$\dfrac{QMA}{QMB(A)}$
B (A)	$\dfrac{QMB(A)}{QME}$	$\dfrac{QMB(A)}{QME}$
Erro		
Total		

Regra para a construção dos QM Esperados: O fator (A) terá o componente do subfator (B) se o subfator (B) for aleatório.

3. SOMA DE QUADRADOS:

Tem-se a identidade:

$$(y_{ijk} - \bar{y}_{...}) = (Y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}) + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})$$

Elevando-se os 2 membros ao quadrado e somando em relação a i, j e k obtém-se:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2}_{\text{SQ Total}}=\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2}_{\text{SQE}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}r(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..})^2}_{\text{SQB(A)}}+$$

$$+\underbrace{\sum_{i=1}^{a}rb(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2}_{\text{SQA}}$$

Destas expressões chega-se às expressões usuais para a obtenção das SQ que são as seguintes:

$$SQTotal = \sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 - FC \; ; \qquad FC = \frac{y_{...}^2}{rab}$$

$$SQA = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{rb} - FC$$

$$SQB(A) = \sum_{i,j} r(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 = \sum_{i,j} \frac{y_{ij.}^2}{r} - FC - SQA$$

$$SQE = SQTotal - SQA - SQB(A)$$

A SQB(A) pode ser desdobrada em <u>a</u> somas de quadrados do tipo:

$$SQB(A_i) = \sum_{j=1}^{b} r(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 \; ; \; i = 1, 2, \ldots, a$$

onde $SQB(A_i)$ é uma medida da variabilidade entre médias dos níveis de B dentro do i-ésimo nível do fator A e cada parte tem b-1 GL. Esse desdobramento é de maior interesse quando se tratar de modelo I ou modelo fixo e utilizável (apesar de ser geral) quando a hipótese Ho: $B_{1(i)}=B_{2(i)}=B_{b(i)}=0$ for rejeitada, onde procura-se verificar dentro de quais níveis de A ocorre diferença entre os níveis de B, testando-se portanto <u>a</u> hipótese do tipo

Hoi: $B_{1(i)} = B_{2(i)} = \ldots = B_{b(i)} = 0$

A estatística do teste é dada por:

$$F = \frac{QMB(A_i)}{QME}$$

Exemplo:

Uma companhia adquire matéria-prima de três diferentes fornecedores. A companhia deseja determinar se a pureza da matéria-prima é a mesma para cada fornecedor. Das partidas (lotes) de matéria-prima existentes de cada fornecedor, selecionou-se aleatoriamente 4 lotes para cada um dos fornecedores e dos lotes selecionados foram tomadas três determinações de pureza. Os dados codificados, isto é,

$$\boxed{y_{ijk} = \text{PUREZA} - 93}$$

são os seguintes:

Fornecedores	1				2				3			
Lotes	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
	1	-2	-2	1	1	-0	-1	0	2	-2	1	3
	-1	-3	0	4	-2	4	0	3	4	0	-1	2
	0	-4	1	0	-3	2	-2	2	0	2	2	1
Totais de lotes ($y_{ij.}$)	0	-9	-1	5	-4	6	-3	5	6	0	2	6
Totais de fornecedores ($y_{i..}$)	-5				4				14			
												13 = $y_{...}$

A análise de variância é a seguinte:

Causas de Variação	GL	SQ	QM	E(QM)	F
Fornecedores	2	15,06	7,53	$\sigma^2 + 3\sigma_B^2 + 6\sum_i \alpha_i^2$	0,97
Lotes/fornecedores	9	69,92	7,77	$\sigma^2 + 3\sigma_B^2$	2,94 *
Erro	24	63,33	2,64	σ^2	
Total	35	148,31			

- Não se evidencia diferença entre os fornecedores quanto à pureza da matéria-prima fornecida;
- A pureza da matéria-prima difere de lote a lote para um mesmo fornecedor, ou seja, existe variabilidade na pureza de lote a lote para cada fornecedor.

EXPERIMENTOS FATORIAIS HIERÁRQUICOS - 3 fatores

Modelo: $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + C_{k(j)} + \varepsilon_{ijkl}$

$i = 1,2,\ldots,a$
$j = 1,2,\ldots,b$
$k = 1,2,\ldots,c$
$l = 1,2,\ldots,r$

1. SUPOSIÇÕES, RESTRIÇÕES E HIPÓTESES:

Característica	Modelo I	Modelo II
Suposições	$\varepsilon_{ijkl} \cap N(0,\sigma^2)$ Independentes $\downarrow$ $y_{ijkl} \cap N(\mu + \alpha_i + B_{j(i)} + C_{k(j)}, \sigma^2)$ Independentes	$\alpha_i \cap N(0,\sigma^2_A)$; Independentes $B_{j(i)} \cap N(0,\sigma^2_B)$; Independentes $C_{k(j)} \cap N(0,\sigma^2_C)$; Independentes $\varepsilon_{ijkl} \cap N(0,\sigma^2)$; Independentes α_i, $B_{j(i)}$, $C_{k(j)}$, ε_{ijkl} são independentes $\downarrow$ $y_{ijkl} \cap N(\mu, \sigma^2 + \sigma^2_A + \sigma^2_B + \sigma^2_C)$ e independentes se estão em caselas diferentes.
Restrições	$\sum_{i=1}^{a} \hat{\alpha}_i = 0$ $\sum_{j=1}^{b} \hat{B}_{j(i)} = 0$; $\forall\ i$ $\sum_{k=1}^{c} \hat{C}_{k(j)} = 0$: $\forall\ j$	————————
Hipóteses	Ho: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$ Ho: $B_{1(i)} = B_{2(i)} = \ldots = B_{b(i)} = 0$; $\forall\ i$ Ho: $C_{1(j)} = C_{2(j)} = \ldots = C_{k(j)} = 0$; $\forall\ j$	Ho: $\sigma^2_A = 0$ Ho: $\sigma^2_B = 0$ Ho: $\sigma^2_C = 0$

Característica	Modelo Misto: A fixo, B e C aleatórios
Suposições	$B_{j(i)} \cap N(0,\sigma^2_B)$; Independentes $C_{k(j)} \cap N(0,\sigma^2_C)$; Independentes $\varepsilon_{ijkl} \cap N(0,\sigma^2)$; Independentes $B_{j(i)}$, $C_{k(j)}$ e ε_{ijkl} são independentes $\downarrow$ $y_{ijkl} \cap N(\mu + \alpha_i, \sigma^2 + \sigma^2_B + \sigma^2_C)$ e independentes se estão em caselas diferentes
Restrições	$\sum_{i=1}^{a} \hat{\alpha}_i = 0$
Hipóteses	Ho: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$ Ho: $\sigma^2_B = 0$ Ho: $\sigma^2_C = 0$

2. ANÁLISE DE VARIANCIA:

Causas de variação	GL	SQ	QM
A	a-1	SQA	QMA
B (A)	a(b-1)	SQB(A)	QMB(A)
C (B)	ab(c-1)	SQC(B)	QMC(B)
Erro	abc(r-1)	SQE	QME
Total	abcr-1	SQ Total	

Causas de Variação	Quadrados Médios Esperados	
	Modelo I	Modelo II
A	$\sigma^2 + \frac{rbc}{(a-1)} \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2$	$\sigma^2 + r\sigma_C^2 + rc\sigma_B^2 + rbc\sigma_A^2$
B (A)	$\sigma^2 + \frac{rb}{a(b-1)} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} B_{j(i)}^2$	$\sigma^2 + r\sigma_C^2 + rc\sigma_B^2$
C (B)	$\sigma^2 + \frac{r}{ab(c-1)} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} C_{k(j)}^2$	$\sigma^2 + r\sigma_C^2$
Erro	σ^2	σ^2
Total		

Causas de Variação	Quadrados Médios Esperados	F	
	Modelo Misto	Modelo I	Modelo II e Misto
A	$\sigma^2 + r\sigma_C^2 + rc\sigma_B^2 + \frac{rbc}{(a-1)} \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2$	$\frac{QMA}{QME}$	$\frac{QMA}{QMB(A)}$
B (A)	$\sigma^2 + r\sigma_C^2 + rc\sigma_B^2$	$\frac{QMB(A)}{QME}$	$\frac{QMB(A)}{QMC(B)}$
C (B)	$\sigma^2 + r\sigma_C^2$	$\frac{QMC(B)}{QME}$	$\frac{QMC(B)}{QME}$
Erro	σ^2		
Total			

Regras para a construção dos QM Esperados:

- O fator (A) terá componente do subfator (B) e do subsubfator (C) se o subfator e o subsubfator forem aletórios;
- O subfator (B) terá componente do subsubfator (C) se o subsubfator for aleatório.

3. SOMAS DE QUADRADOS:

Quadro de observações

Fator A	Fator B	Fator C	Repetições 1 2 ... r				
1	1	1 2 ... c					
	2		y_{ijkl}	$y_{ijk.}$	$y_{ij..}$	$y_{i...}$	$y_{....}$
	⋮						
	b						
2							
⋮							
a							

$$SQTotal = \sum_{ijkl} y_{ijkl}^2 - FC \quad ; \quad FC = \frac{y_{....}^2}{abcr}$$

$$SQA = \sum_{i} \frac{y_{i...}^2}{bcr} - FC$$

$$SQB(A) = \sum_{ij} \frac{y_{ij..}^2}{rc} - FC - SQA$$

$$SQC(B) = \sum_{ijk} \frac{y_{ijk.}^2}{r} - FC - SQB(A) - SQ(A)$$

$$SQE = SQTotal - SQA - SQB(A) - SQC(B)$$

EXPERIMENTOS FATORIAIS HIERÁRQUICOS - CRUZADOS

Exemplo: Fator A, Fator B — Cruzados > fixos

Fator C > Hierárquico a B > Aleatório

Modelo matemático:

$$y_{ijkl} = \mu + \underbrace{A_i + B_j + AB_{ij}}_{\text{Fixos}} + \underbrace{C_{k(j)} + AC_{ik(j)}}_{\text{Aleatórios}} + \varepsilon_{ijkl}$$

$i = 1, 2, \ldots, a$ $\qquad j = 1, 2, \ldots, b$

$k = 1, 2, \ldots, c$ $\qquad l = 1, 2, \ldots, r$

Quadro de observações

Fator A	Fator B	Fator C	Repetições 1 2 ... r				
		1					
	1	2					
		⋮					
1	2	c					
	⋮						
	b						
2			y_{ijkl}	$y_{ijk.}$	$y_{ij..}$	$y_{i...}$	$y_{....}$
⋮							
a							

$y_{.j..}$

$y_{.jk.}$

Hipóteses: (i) Ho: $A_1 = A_2 = \ldots = A_a = 0$ $\qquad$ (iv) Ho: $\sigma^2_C = 0$

(ii) Ho: $B_1 = B_2 = \ldots = B_b = 0$ $\qquad$ (v) Ho: $\sigma^2_{AC} = 0$

(iii) Ho: $AB_{11} = \ldots = AB_{ab} = 0$

Causas de Variação	GL	SQ	QM	E(QM)	F
A	a-1	SQA	QMA	$\sigma^2+r\sigma^2_{AC}+\dfrac{bcr}{a-1}\sum_i A_i^2$	QMA/QMAXC(B)
B	b-1	SQB	QMB	$\sigma^2+ar\sigma^2_C+\dfrac{acr}{b-1}\sum_j B_j^2$	QMB/QMC(B)
AXB	(a-1)(b-1)	SQAXB	QMAXB	$\sigma^2+r\sigma^2_{AC}+cr\dfrac{1}{(a-1)(b-1)}\sum_{ij} AB_{ij}^2$	QMAXB/ QMAXC(B)
C(B)	b(c-1)	SQC(B)	QMC(B)	$\sigma^2+ar\sigma^2_C$	QMC(B)/QME
AXC(B)	b(a-1)(c-1)	SQAXC(B)	QMAXC(B)	$\sigma^2+r\sigma^2_{AC}$	QMAXC(B)/QME
Erro	abc(r-1)	SQE	QME	σ^2	
Total	abcr-1	SQTotal			

Regras para a obtenção das expressões de somas de quadrados e graus de liberdade:

Regra 1: subtrai-se um das letras que não aparecem dentro dos parênteses no índice dos efeitos;

Regra 2: desenvolve-se algebricamente as expressões obtidas pela regra 1;

GL: substituindo-se os índices pelas suas dimensões na regra 1 obtém-se os GL;

SQ: considerando-se G e os índices de operação da regra 2 obtém-se as expressões das SQ.

Exemplo: Fatorial Cruzado-Hierárquico com 3 fatores
A e B cruzados
C hierárquico p/ B

$i = 1, 2, \ldots, a$ $\qquad k = 1, 2, \ldots, c$

$j = 1, 2, \ldots, b$ $\qquad l = 1, 2, \ldots, r$

Efeitos	Índice de Efeitos	Regra 1	Regra 2	GL	SQ
A	i	$i-1$	$i-1$	$a-1$	$G_i - G$
B	j	$j-1$	$j-1$	$b-1$	$G_j - G$
AB	ij	$(i-1)(j-1)$	$ij-i-j+1$	$(a-1)(b-1)$	$G_{ij} - G_i - G_j + G$
C/B	$k(j)$	$j(k-1)$	$jk-j$	$b(c-1)$	$G_{jk} - G_j$
AC/B	$ik(j)$	$j(i-1)(k-1)$	$ijk-ij-jk+j$	$b(a-1)(c-1)$	$G_{ijk} - G_{ij} - G_{jk} + G_j$
Erro	$(ijk)l$	$ijk(l-1)$	$ijkl-ijk$	$abc(r-1)$	$G_{ijkl} - G_{ijk}$
Total	$ijkl$	$ijkl-1$	$ijkl-1$	$abcr-1$	$G_{ijkl} - G$

$$G = \frac{y_{....}^2}{abcr} \qquad G_{jk} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\frac{y_{.jk.}^2}{ar}$$

$$G_i = \sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i...}^2}{bcr} \qquad G_{ijk} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\frac{y_{ijk.}^2}{r}$$

$$G_j = \sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j..}^2}{acr} \qquad G_{ijkl} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{r} y_{ijkl}^2$$

$$G_{ij} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij..}^2}{cr}$$

A: Nitrogênio — com N / sem N

DCC 2 repetições

y = rendimento/parcela

B: Cultivares de Trigo — C_1 / C_2 / C_3

$r = 2$
$a = 2$
$b = 3$
$c = 3$ | 36

C: Linhagens; 3 para cada cultivar

N	Cultivares	Linhagens	Repetições 1	Repetições 2	$y_{ijk.}$	$y_{ij..}$	$y_{i...}$	$y_{....}$
		1	20,2	24,1	44,3			
com	1	2	26,2	26,9	53,1	146,1		
		3	23,8	24,9	48,7			
		1	22,0	23,5	45,5			
	2	2	22,6	24,6	47,2			
		3	22,9	25,0	47,9	140,6		
		1	23,1	22,9	46,0			
	3	2	22,9	23,7	46,6			
		3	21,8	23,5	45,3	137,9	424,6	
		1	14,2	16,2	30,4			
sem	1	2	18,0	19,1	37,1			
		3	12,5	15,4	27,9	95,4		
		1	14,1	16,1	30,2			
	2	2	14,0	18,1	32,1			
		3	13,7	16,0	29,7	92,0		
		1	14,1	16,1	30,2			
	3	2	12,2	13,8	26,0			
		3	12,7	15,1	27,8	84,0	271,4	
								696,0

Cultivares	Linhagens	$y_{.jk.}$	$y_{.j..}$
	1	74,7	
1	2	90,2	
	3	76,6	241,5
	1	75,7	
2	2	79,3	
	3	77,6	232,6
	1	76,2	
3	2	72,6	
	3	73,1	221,9

$$G = \frac{696^2}{36} = 13456$$

$$SQTotal = \underbrace{G_{ijkl}}_{20,2^2 + \ldots + 15,1^2} - G = 760,76$$

$SQ_A = G_i - G = 651,95$ $\quad G_i = \dfrac{424.6^2 + 271,4^2}{18}$

(SQ_N)

$SQ_B = G_j - G = 16,05$ $\quad G_j = \dfrac{214,5^2 + 232,6^2 + 221,9^2}{12}$

(SQ_C)

$SQ_{AB} = G_{ij} - G_i - G_j + G = 1,19$ $\quad G_{ij} = \dfrac{146,1^2 + \ldots + 84,0^2}{6}$

(SQ_{NC})

$SQ_{C/B} = G_{jk} - G_j = 39,23$ $\quad G_{jk} = \dfrac{74,7^2 + \ldots + 73,1^2}{4}$

$(SQ_{L/C})$

$SQ_{AC/B} = G_{ijk} - G_{ij} - G_{jk} + G_j = 10,75$ $\quad G_{ijk} = \dfrac{44,3^2 + \ldots + 27,8^2}{2}$

$SQ_{Erro} = G_{ijkl} - G_{ijk} = 41,59$

Causas de Variação	GL	SQ	QM	
N	1	651,95	651,95	364,22*
C	2	16,05	8,02	1,23
NC	2	1,19	0,60	0,34
L/C	6	39,23	6,54	2,83*
NL/C	6	10,75	1,79	0,77
Erro	18	41,59	2,31	
Total	35	760,76		

F. 05 (1,6) = 5,99

F. 05 (6,18)= 2,66

8 - FATORIAIS NÃO - BALANCEADOS

CLASSIFICAÇÃO:

- Balanceada : número constante de observações para todas as combinações dos níveis dos fatores , ou seja dos tratamentos.
- Não - balanceada : caso contrário

CLASSIFICAÇÕES BALANCEADAS :

- As estimativas e as somas de quadrados necessárias para os diversos testes de significância podem ser obtidas pelos totais marginais .
- Consenso quanto as hipóteses que estão sendo testadas .

CLASSIFICAÇÕES NÃO-BALANCEADAS :

(1) Modelo de classificação simples : o número diferente de observações por tratamento não modifica a análise tradicionalmente feita através dos totais marginais .
(2) Número de observações por tratamento é diferente mas proporcional : ortogonalidade das estimativas , obtida através dos totais marginais é mantida .
(3) Número de observações por tratamento é diferente e desproporcional : requerem tipo especial de análise para que as estimativas obtidas não resultem confundidas .

EXEMPLO:

Fator A	Fator B 1	Fator B 2	Total
1	6	4	10
2	6 42	12	60
Total	54	16	70

$$SQA = \frac{10^2}{2} + \frac{60^2}{3} - \frac{(70)^2}{5} = 270$$

$$SQB = \frac{54^2}{3} + \frac{16^2}{2} - \frac{(70)^2}{5} = 120$$

$$SQ\ A \times B = \underbrace{\frac{6^2}{1} + \frac{4^2}{1} + \frac{48^2}{2} + \frac{12^2}{1}}_{(368)=\ SQTratamentos} - \frac{(70)^2}{5} - \underset{(270)}{SQA} - \underset{(120)}{SQB} = -22$$

$$SQ_{\ Total} = 6^2+4^2+...+12^2 - \frac{(70)^2}{5} = 1016$$

SQE Erro Experimental= $SQ_{Total}-SQ_{Tratamentos}$=1016-368=648

Na análise de Fatoriais Não-balanceados a soma de quadrados de interação não pode ser computada por diferença .

EXEMPLO

LINHA (FATOR A)	COLUNA (FATOR B) 1	COLUNA (FATOR B) 2	TOTAL
1	6,0	4,0	10
2	6,0 ; 42,0	12,0	60
TOTAL	54	16	70

Seja o modelo completo :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Matricialmente o modelo é posto em forma $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, onde para o presente caso tem-se :

$$
\begin{bmatrix} Y111 \\ Y121 \\ Y211 \\ Y212 \\ Y221 \end{bmatrix}
=
\underset{\underset{\sim}{Y}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 42 \\ 12 \end{bmatrix}}
=
\underset{X}{\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} \mu & \alpha1 & \alpha2 & \beta1 & \beta2 & \alpha\beta11 & \alpha\beta12 & \alpha\beta21 & \alpha\beta22 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}}
\underset{\underset{\sim}{\beta}}{\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha1 \\ \alpha2 \\ \beta1 \\ \beta2 \\ \alpha\beta11 \\ \alpha\beta12 \\ \alpha\beta21 \\ \alpha\beta22 \end{bmatrix}}
+ \underset{\sim}{\varepsilon}
$$

O sistema de equações normais é dado por $X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}=X'\underset{\sim}{y}$ onde para o exemplo considerado tem-se :

$$
X'X = \left[\begin{array}{c|cc|cc|cccc}
5 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
\hline
3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\qquad
X'\underset{\sim}{y} = \left[\begin{array}{c}
70 \\ \hline 10 \\ 60 \\ \hline 54 \\ 16 \\ \hline 6 \\ 4 \\ 48 \\ 12
\end{array}\right]
$$

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha}1 \\ \hat{\alpha}2 \\ \hat{\beta}1 \\ \hat{\beta}2 \\ \hat{\alpha\beta}11 \\ \hat{\alpha\beta}12 \\ \hat{\alpha\beta}21 \\ \hat{\alpha\beta}22 \end{bmatrix}$$

X'X tem posto 4 e é portanto singular e o sistema de equações normais é indeterminado . Uma das formas de solucionar o SEN é usar inversas generalizadas . Então :

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = (X'X)^{-} X'\underset{\sim}{y}$$

Logo :

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \left[\begin{array}{c|cccc} \emptyset & & \emptyset & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 70 \\ 10 \\ 60 \\ 54 \\ 16 \\ \hline 6 \\ 4 \\ 48 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 6 \\ 4 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix}$$

SQParâmetros = $R\,(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta) = \underset{\sim}{\hat{\beta}}'\, X'\underset{\sim}{Y} =$

$$= \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 24 & 12 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 70 \\ 10 \\ 60 \\ 54 \\ 16 \\ \hline 6 \\ 4 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix} = 36+16+1152+144 = 1348$$

PARAMETRIZAÇÕES SUCESSIVAS

(a) Seja o modelo :

$$y_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$$

Nesse caso tem-se somente a primeira coluna da matriz X, então $X'X = 5$

$$\hat{\mu} = (X'X)^{-1}\, X'\underset{\sim}{Y} = 1/5(70) = 70/5$$

$$SQ\mu = R(\mu) = \hat{\mu}\,(X'\underset{\sim}{y}) = \underbrace{70/5\ (70)}_{FC} = 4900/5 = 980$$

Desta forma tem-se :

$$SQTratamentos = SQparâmetros - SQ\mu = R\ (\mu,\alpha,\beta,\alpha\beta) - R\ (\mu)$$

$$R\ (\alpha,\beta,\alpha\beta \text{ ajustado para } \mu) = R\ (\mu,\alpha,\beta,\alpha B) - R\ (\mu) =$$
$$= 1348 - 980 = 368 = SQTratamentos$$

(b) Seja o modelo :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$$

Nesse caso tem-se somente as três primeiras colunas da matriz X , e então :

$$X'X = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha}1 \\ \hat{\alpha}2 \end{bmatrix} = (X'X)^{-} \underset{\sim}{X'Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 10 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } SQ\ (\mu,\alpha) = R\ (\mu,\alpha) = \underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{X'Y} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 10 \\ 60 \end{bmatrix} = 50 + 1200 = 1250$$

$$SQ\ (\alpha \text{ aj } \mu) = R\ (\alpha \text{ aj } \mu) = R\ (\mu,\alpha) - R\ (\mu) = 1250 - 980 = 270$$

└ SQA ignorando B

Alternativamente poder-se-ia considerar o modelo :

$$y_{ijk} = \varepsilon + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

e nesse caso tem-se $X = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mu & \beta 1 & \beta 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ e então $X'X = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\beta}1 \\ \hat{\beta}2 \end{bmatrix} = (X'X)^{-} \underset{\sim}{X'Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 54 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } SQ\ (\mu,\beta) = R\ (\mu,\beta) = \underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{X'Y} = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 54 \\ 16 \end{bmatrix} = 1100$$

$$SQ\ (\beta \text{ aj } \mu) = R\ (\beta \text{ aj } \mu) = R\ (\mu,\beta) - R\ (\mu) = 1100 - 980 = 120$$

└ SQB ignorando A

(c) Seja o modelo :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

Nesse caso tem-se as cinco primeiras colunas de X e então :

$$X'X = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Com r (X'X) = 3 então $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-} X'\underset{\sim}{Y}$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha}1 \\ \hat{\alpha}2 \\ \hat{\beta}1 \\ \hat{\beta}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6/7 & -4/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & -4/7 & 5/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & -3/7 & 2/7 & 5/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 10 \\ 60 \\ 54 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 96/7 \\ 62/7 \\ 8/7 \end{bmatrix}$$

$$SQ\ (\mu,\alpha,\beta) = R\ (\mu,\alpha,\beta) = \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 96/7 & 62/7 & 8/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 10 \\ 60 \\ 54 \\ 16 \end{bmatrix} =$$

$$= 96(60)/7 + 62(54)/7 + 8(16)/7 = 9236/7 = 1319{,}4$$

$R\ (\mu,\alpha,\beta) = R\ (\mu) + R\ (\alpha,\beta/\mu)$

$R\ (\alpha,\beta \text{ aj } \mu) = R\ (\mu,\alpha,\beta) - R(\mu) = 1319{,}4 - 980 = 339{,}4$

Nesse caso pode-se obter as partições :

$R\ (\alpha,\beta \text{ aj } \mu) = R\ (\alpha \text{ aj } \mu) + R\ (\beta \text{ aj } \mu \text{ e } \alpha)$

$\Rightarrow \underbrace{R\ (\beta \text{ aj } \mu \text{ e } \alpha)}_{\text{SQB aj A}} = R\ (\alpha,\beta \text{ aj } \mu) - R\ (\alpha,\beta \text{ aj } \mu) - R\ (\alpha \text{ aj } \mu) =$

$= 339{,}4 - 270 = 69{,}4$

e $R\ (\alpha,\beta \text{ aj } \mu) = R\ (\beta \text{ aj } \mu) + R(\alpha \text{ aj } \mu \text{ e } \beta)$

$\Rightarrow \underbrace{R\ (\alpha \text{ aj } \mu \text{ e } \beta)}_{\text{SQA aj B}} = R\ (\alpha,\beta \text{ aj } \mu) - R\ (\beta \text{ aj } \mu) =$

$= 339.4 - 120 = 219{,}4$

(D) Seja o modelo completo :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$R(\mu,\alpha,\beta,\alpha\beta) = R(\mu) + R(\alpha,\beta,\alpha\beta \text{ aj } \mu) \text{ e}$$

$$R(\alpha\beta \text{ aj } \mu,\alpha,\beta) = R(\mu,\alpha,\beta,\alpha\beta) - R(\mu,\alpha,\beta)$$

$$\Rightarrow R(\alpha\beta \text{ aj } \mu,\alpha,\beta) = 1348 - 1319{,}4 = 28{,}6$$

Portanto o quadro da análise de variância será o seguinte :

C.V	G.L	S.Q.
A ajustado p/B	1	219,4
B ajustado p/A	1	69,4
A*B ajustado p/A,B	1	28,6
RESIDUO	1	648,0

SQA não ajustado = 270

SQB não ajustado = 120

<u>SANEST</u> (ajuste de constantes)

C.V.	G.L	SQ
A ajust.	1	219,4
B ajust.	1	69,4
A*B aujst.	1	28,6
RESIDUO	1	648,0

SQA não ajust. = 270

SQB não ajust. = 120

SAS

C. V.	GL	soma de quadrados tipo I	tipo II	tipo III	tipo IV
A	1	270,0	219,4	193,1	193,1
B	1	69,4	69,4	56,0	56,0
A*B	1	28,6	28,6	28,6	28,6
Erro	1	648,0	648,0	648,0	648,0

SPSS

C. V.	GL	PADRÃO	HIERARQUICO	REGRESSÃO
A	1	219,4	270,0	193,1
B	1	69,4	69,4	56,0
A*B	1	28,6	28,6	28,6
Erro	1	648,0	648,0	648,0

B I B L I O G R A F I A

CAMPOS, H., 1984. **Estatística Aplicada à Experimentação com Cana-de-açúcar** FEALQ.

COCHRAN, W.G. & G.M. COX, 1957. **Experimental Designs.** John Wiley.

GOMEZ, K.A. & A.A.GOMEZ, 1984. **Statistical Procedures for Agricultura Research.** John Wiley.

MARKUS, R., 1977. **Elementos de Estatística Aplicada, Partes I e II** Faculdade de Agronomia/UFRGS.

MONTGOMERY, D.C., 1991. **Design and Analysis of Experiments.** John Wiley.

OSTLE, B. & R.W. MENSING, 1975. **Statistics in Research.** Iowa Stat University.

PERES, C.A. & C.D. SALDIVA, 1982. **Planejamento de Experimentos.** 5º Simpósi Nacional de Probabilidade e Estatística. IME/USP.

PIMENTEL GOMES, F., 1985. **Curso de Estatística Experimental.** Liv. Nobel.

SNEDECOR, G.M. & W.G. COCHRAN, 1980. **Statistical Methods.** Iowa Stat University.

STEEL, R.G. & J.H.TORRIE, 1980. **Principles and Procedures of Statistics.** McGraw-hill.

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série B: Trabalho de Apoio Didático

1. Elsa Mundstock - Curso Básico Sobre Wordstar 3.45 - MAR/89

2. Jaime B. Ripoll - Introdução ao Cálculo Diferencial Via Funções de Uma Variável Real - OUT/89

3. Edmund R. Puczylowski - Dimension of Modular Lattices - JUN/90

4. Marcos Sebastiani - Geometrias Não Euclidianas - JUL/90

5. Sandra R. C. Pizzatto - Cálculo Numérico - AGO/91

6. Vera Clotilde G. Carneiro - Elementos de Cálculo para Biologia - AGO/91

7. Elsa Mundstock - Iniciação ao SPSS/PC - SET/91

8. Elisa Hagg, Loiva C. de Zeni, Maria Alice Gravina e Vera Carneiro - Notas da 1ª Oficina de Matemática da UFRGS - JAN/92

9. Paulo Werlang de Oliveira, Elisabete Rambo, Suzana Lima dos Santos, Coordenação: Profª Maria Alice Gravina - A Tartaruga no Espaço Tridimensional - FEV/92

10. Silvio Possoli - Análise Multivariada - JUL/92

11. Dinara Westphalen Fernandez - Números Índices - OUT/92

12. Maria Teresinha Albanese - Coeficiente de Fidedignidade de um Instrumento de Medida - OUT/92

13. Vera Clotilde Carneiro e Sérgio Cláudio Ramos - Gráficos na Escola - DEZ/92.

14. João Riboldi - Elementos Básicos de Estatística - JAN/93

15. Paulo W. de Oliveira e M. Alice Gravina - Logo: Manual do Usuário - MAR/93

16. Ruben Markus, Elsa C. de Mundstock, Dinara W. X. Fernandez e João Riboldi - Exercícios de Métodos Estatísticos - AGO/93

17. Loiva C. de Zeni e M. Alice Gravina - Sugestões de Atividades no Ambiente Logo para a Exploração de Conteúdos Matemáticos dos Currículos Escolares de 1º e 2º Grau - SET/93

18. João Riboldi - Delineamentos Experimentais de Campo, Parte 1 - SET/93

19. Marlusa Benedetti, Patrícia P. Gil, Shirley I. Techera, Angela Andreotti, Milene Milan, Marlise Moraes, Luciana Santos, Augustinho Zimmermann, Coordenação: Profª Maria Alice Gravina - Atividades em Geometria Usando Recortes - OUT/93

20. João Riboldi - Delineamentos Experimentais de Campo, Parte 2 - OUT/93

21. Anne C. Rutsatz, Édina R. de C. Alexandre, Gorete Losada, M. Alice Gravina, Rosamary P. Disconzi, Shirley Techera e Vera C. G. Carneiro - O Pensamento e a Linguagem da Álgebra: Tabelas, Gráficos e Equações - DEZ/93

22. Dinara W. X. Fernandez - Estatística Descritica I - JAN/94

23. João Riboldi - Planejamento e Análise de Experimentos, Parte 1 - FEV/94

24. Dinara W. X. Fernandez - Estatística Descritiva II - AGO/94

25. João Riboldi e Lídia do C. S. C. do Nascimento - Metodologia de Superfície de Resposta: Uma Abordagem Introdutória - NOV/94

26. Júlio Cesar Ruiz Claeyssen - Métodos Operacionais e Computacionais em Álgebra Matricial - MAR/95

27. João Riboldi - Análise de Variância - MAR/95

28. João Riboldi - Experimentos Fatoriais - MAI/95

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRACURRICULARES

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:

Série A: Trabalho de Pesquisa

Série B: Trabalho de Apoio Didático

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

Série D: Trabalho de Graduação

Série F: Trabalho de Divulgação

Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:

NAEC - NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRACURRICULARES
INSTITUTO DE MATEMATICA - UFRGS
AV. BENTO GONÇALVES, 9500 - PRÉDIO 43111
CEP 91509 - 900 AGRONOMIA - POA/RS
FONE: 336 92 22 OU 339 13 55 OU 228 16 33
RAMAL 6197
FAX: 336 15 12