SABI: 109236-6

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CADERNOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
SÉRIE B: TRABALHO DE APOIO DIDÁTICO

PLANEJAMENTO E ANÁLISE DE EXPERIMENTOS
PARTE 2

JOÃO RIBOLDI

SÉRIE B, Nº 29
PORTO ALEGRE, JUNHO 1995

UFRGS
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

PREFACIO

As presentes notas destinam-se ao apoio didático das disciplinas de Planejamento de Experimentos do curso de Bacharelado em Estatística. Surgiram da experiência acumulada ao longo dos anos e tem por objetivo servir como um guia aos conteúdos abordados e não como um limitante dos assuntos, não prescindindo, evidentemente, da consulta de bibliografia especializada para complementação.

Apesar de serem de objetivo específico, podem também servir como texto de apoio didático a outras disciplinas a nível de graduação e pós-graduação.

Agradecemos a todos que colaboraram na organização destas notas e em especial aos bolsistas Stela e Flávio pelo trabalho de digitação.

Porto Alegre, 25 de Abril de 1995.

Prof. João Riboldi

UFRGS
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

INDICE

1. DELINEAMENTO BLOCOS CASUALIZADOS (DBC).....01

1.1. Caracterização.....01

1.2. Análise de Variância.....03

1.3. Exemplo.....07

1.4. Eficiência Relativa.....10

1.5. Estimação de Valores Perdidos.....10

1.6. Modelo Linear para Experimentos em Blocos Casualizados.....13

1.7. Modelo Linear para Experimentos em Blocos.....21

1.8. Análise de Variância para Experimentos em Blocos Casualizados usando o Modelo de Regressão com Variáveis Indicadoras.....29

2. DELINEAMENTO QUADRADO LATINO.....31

2.1. Caracterização.....31

2.2. Montagem dos Quadrados Latinos.....32

2.3. Análise de Variância.....32

2.4. Estimativa de Valores Perdidos.....40

2.5. Análise de Variância quando se utiliza mais de um Quadrado Latino.....41

2.6. Eficiência Relativa.....41

2.7. Modelo Linear para Experimentos em Quadrados Latinos.....42

3. QUADRADO GRECO-LATINO.....44

3.1. Caracterização.....44

3.2. Modelo Linear.....44

3.3. Análise de Variância.....44

3.4. Exemplo: Exemplo Quadrado Latino.....45

4. BLOCOS INCOMPLETOS.....46

4.1. Caracterização.....46

4.2. Análise Estatística.....47

4.3. Casualização.....47

4.4. Blocos Incompletos Balanceados.....47

5. RETICULADOS (LATTICES).....63

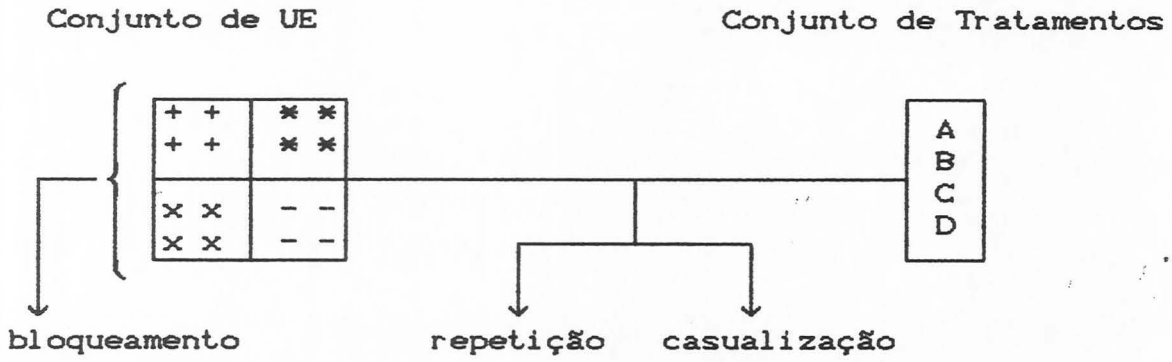
5.1. Reticulados Equilibrados.....63

5.2. Reticulados.....64

BIBLIOGRAFIA 67

1. DELINEAMENTO BLOCOS CASUALIZADOS (DBC)

1.1 CARACTERIZAÇÃO



- Forma-se grupos (blocos) de UE semelhantes
- Uma restrição na casualização
- Casualização dos tratamentos dentro de cada bloco

Blocos	Tratamentos			
+	D	B	C	A
*	A	C	D	B
×	A	B	D	C
-	C	D	B	A

nº UE/bloco = nº de tratamentos

nº de repetições = nº de blocos

OBJETIVO DA FORMAÇÃO DE BLOCOS

- Controle de uma causa de variação maior entre as UE decorrente da variação intrínseca das UE ou de fatores que atuam sobre as UE → agrupamento de UE semelhantes no mesmo bloco → homogeneidade dentro do bloco → maior precisão.
- Dar maior flexibilidade ao experimento , permitindo subdivisão do trabalho experimental dado que a execução deve ser uniforme dentro de cada bloco → técnica experimental mais uniforme → maior precisão.

Nº de Blocos : minimo de dois ; associado ao nº de repetições.

Nº de Tratamentos : Dependência do material a investigar (tamanho da parcela) ; experimentação a campo : não mais de 12 a 10 tratamentos.

fertilidade
do solo

− ↓	B	D	C	A	bloco 1
	A	C	D	B	bloco 2
+	B	D	A	C	bloco 3

As comparações entre tratamentos são feitas dentro de cada bloco e portanto são mais eficientes e tanto mais eficientes é o delineamento blocos casualizados em relação do DCC , quanto mais semelhantes forem as UE dentro de cada bloco não importando as diferenças de bloco a bloco.

CRITÉRIOS DE BLOQUEAMENTO :

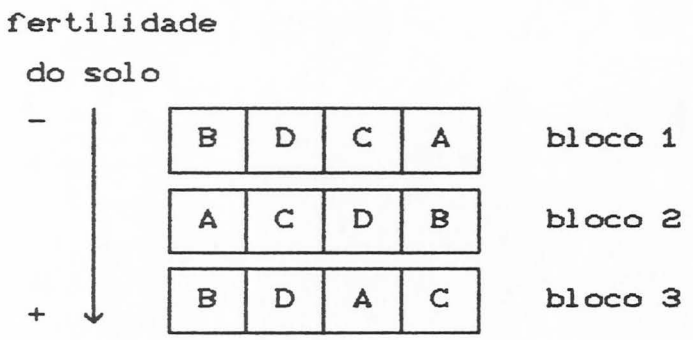
· Características associadas com a unidade :

Para pessoas : sexo , idade , renda , inteligência , educação , experiência de trabalho , atitudes , etc.

Para áreas geográficas : tamanho da população , renda média , etc.

Para animais : raça , idade , peso , ...

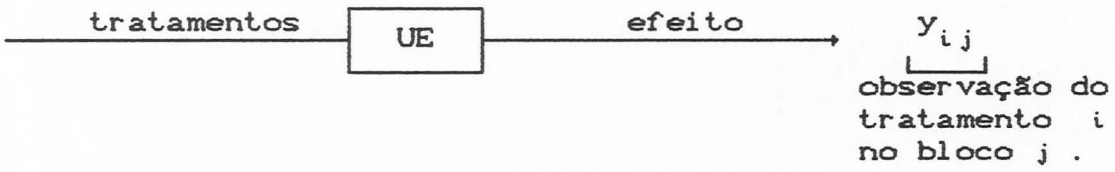
Em experimentação a campo : fertilidade do solo



· Características associadas com a situação experimental

Operadores
Tempo de processamento
Máquinas
Partidas ou procedência do material
Instrumentos de medida
Etc...

1.2 ANALISE DE VARIANCIA



i → índice de tratamento

$i = 1 , 2 , \ldots , t$

j → índice de bloco ou repetição

$j = 1 , 2 , \ldots , r$

rt UE ou observações

tratamentos	blocos 1	2	...	r	totais de tratamento	médias de tratamentos
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1r}	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2r}	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
⋮	⋮	⋮	$\boxed{y_{ij}}$	⋮	⋮	⋮
t	y_{t1}	y_{t2}	...	y_{tr}	$y_{t.}$	$\bar{y}_{t.}$
					$y_{i.}$	$\bar{y}_{i.}$
totais de blocos	$y_{.1}$	$y_{.2}$	...	$y_{.r}$	$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$
	$y_{.j}$				↑ total geral	↑ média geral
médias de blocos	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	...	$\bar{y}_{.r}$		
	$\bar{y}_{.j}$					

Variação Total (SQTotal)

- → Variação entre tratamentos ou devida a tratamentos (SQTratamentos ou SQT)
- → Variação entre blocos ou devida a blocos (SQBlocos ou SQB)
- → Variação não devida a tratamentos e blocos ou devida ao erro experimental (SQErro experimental ou SQE)

TABELA DE ANÁLISE DE VARIÂNCIA

Causas da variação	GL	SQ	QM	F
Blocos	r-1	SQB	QMB	QMB/QME
Tratamentos	t-1	SQT	QMT	QMT/QME
Erro experimental	(t-1)(r-1)	SQE	QME	
Total	rt-1	SQTotal		

$\underline{GL}$: $\bar{y}_{..}$ $\Rightarrow$ GLTotal = r-1 ; GLB = r-1 ; GLT = t-1

$\bar{y}_{i.}$ e $\bar{y}_{.j}$ $\Rightarrow$ GLE = (t-1)(r-1)

$\underline{SQ}$: $y_{ij} - \bar{y}_{..} = y_{ij} - \bar{y}_{..} + \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..} - \bar{y}_{..}$

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = \left[\left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \right) + \left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \right) \right] + \left[\left(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..} \right) \right]$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} \left(y_{ij} - \bar{y}_{..} \right)^2}_{\text{SQ Total}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{t} r \left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \right)^2}_{\text{SQT}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{r} t \left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \right)^2}_{\text{SQB}}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} \left(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..} \right)^2}_{\text{SQE}}$$

$$\text{SQTotal} = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - FC \quad ; \quad FC = \frac{y_{..}^2}{rt}$$

$$\text{SQT} = \sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^2}{r} - FC$$

$$\text{SQB} = \sum_{j=1}^{r} \frac{y_{.j}^2}{t} - FC$$

$$\text{SQE} = \text{SQTotal} - \text{SQB} - \text{SQT}$$

UFRGS
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

TESTE F PARA TRATAMENTOS

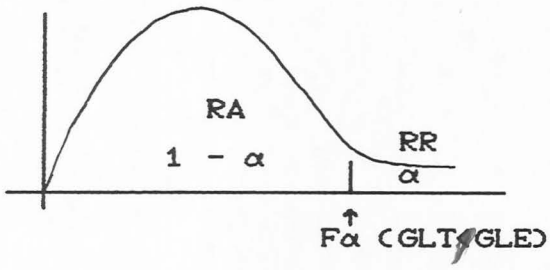
$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_t \quad \Leftrightarrow \quad H_o : \tau_i = 0 \quad \forall i$

H_a : Pelo menos duas médias de tratamentos diferem

$\Leftrightarrow$ ($\tau_i \neq 0$ para pelo menos um i)

Rejita-se H_o se

$$F = \frac{QMT}{QME} > F\alpha \ (GLT, GLE)$$



TESTE F PARA BLOCOS

$$F = \frac{QMB}{QME} > F\alpha \ (GLB, GLE) \Rightarrow \text{blocos se diferenciam}$$

$H_o : \sigma_B^2 = 0$

$H_a : \sigma_B^2 \neq 0$

} efeito de blocos aleatórios

efeito de blocos fixos

$H_o : \beta_j = 0 \ ; \ \forall \ j$

$H_a : \beta_j \neq 0$ para pelo menos um j

modelo : $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

TESTE F PARA BLOCOS

- Em condições normais de experimentação , blocos é controle $\Rightarrow$ teste F irrelevante.
- Em algumas situações teste F para blocos pode ter algum interesse.
- Se bloco * $\Rightarrow$ bloqueamento eficiente pois maior precisão.
- Se bloco * $\Rightarrow$ maior generalidade do experimento.
- Se bloco ns $\Rightarrow$ bloqueamento não eficiente no acréscimo em

precisão , muito embora os ganhos de execução , pois encara-se cada bloco como se fosse um experimento.

· Quando diferença entre blocos muito grande , pode provocar heterogeneidade do erro (cuidado).

1.3 EXEMPLO

Num experimento comparativo de cinco cultivares (variedades) de trigo foi usado o delineamento blocos casualizados com quatro repetições. O bloqueamento teve por finalidade controlar diferenças de fertilidade do solo na área experimental .

Os rendimentos de grãos por parcela , em t/ha foram os seguintes :

cultivares	blocos 1	2	3	4	totais($y_{i.}$)	médias($\bar{y}_{i.}$)
A	1,9	1,7	1,7	1,3	6,6	1,65
B	2,4	2,8	2,7	2,2	10,1	2,52
C	2,4	1,9	2,3	1,7	8,3	2,08
D	3,6	2,8	2,5	2,7	11,6	2,90
E	2,7	2,3	2,2	1,9	9,1	2,28
totais ($y_{.j}$)	13,0	11,5	11,4	9,8	45,7	2,28

r = 4

t = 5

ANOVA

causas de variação	GL	SQ	QM	F
blocos	3	1,0255	0,3418	5,49*
tratamentos (cultivares)	4	3,5330	0,8832	14,19**
Erro experimental	12	0,7470	0,0622	
Total	19	5,3055		

F.05(3,12) = 3,49 F.01(4,12) = 5,41

$$CV = \frac{\sqrt{QME}}{\bar{y}_{..}} \times 100 = \frac{\sqrt{0,0622}}{2,28} \times 100 = 10,9\ \%$$

TESTE F PARA BLOCOS

$F = 5,49 > F.05(3,12) = 3,49 \Rightarrow$ Os blocos se diferenciam

O bloqueamento foi eficiente para controlar diferenças de fertilidade do solo .

TESTE F PARA TRATAMENTOS

$H_o : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu_E$

H_a : pelo menos duas médias diferem

$F = 14,19 > F.01(4,12) = 5,41 \Rightarrow$ rejeita-se H_o

As cultivares de trigo investigadas se diferenciam em termos de rendimento .

COMPLEMENTAÇÃO DA ANÁLISE : Fator qualitativo não estruturável

Trabalho de alta responsabilidade : teste de Tukey

$\Delta = q.05\ (5,12)\ s\bar{y} = 4,51(0,1247) = 0,56$

$q.05\ (5,12) = 4,51$

$$s\bar{y} = \sqrt{\frac{QME}{r}} = \sqrt{\frac{0,00622}{4}} = 0,1247$$

cultivares	médias , t/ha		
D	2,90 a	→	superior
B	2,52 a b	}	intermediárias
E	2,28 b	}	intermediárias
C	2,08 b c	}	intermediárias
A	1,65 c	→	inferior

médias seguidas de mesma letra não diferem significativamente pelo teste de Tukey a 5%

	Cultivares	Médias	Totais	c_{1i}	c_{2i}	c_{3i}	c_{4i}
origem genética 1	D	2,90	11,6	1	1	1	0
	B	2,52	10,1	1	1	-1	0
origem genética 2	E	2,28	9,1	1	-1	0	1
	C	2,08	8,3	1	-1	0	-1
Testemunha	A	1,15	6,6	-4	0	0	0
SQ contraste				2,0161	1,1556	0,2813	0,0800= 3,5130
F contraste				32,41**	18,58**	4,52	1,24 = SQT

F.05(1,18) = 4,75 F.01(1,12) = 9,33

c_1 : Teste vs resto ⇔ A vs (B + C + D + E)

c_2 : Origem genética um vs origem genética dois ⇔ (D + B)vs(E + C)

c_3 : Dentro da origem genética um ⇔ D vs B

c_4 : Dentro da origem genética dois ⇔ E vs C

1.4 - EFICIÊNCIA RELATIVA

A Eficiência Relativa do Delineamento Blocos Casualizados (DBC) em relação ao Delineamento Completamente Casualizado (DCC) é dada por

$$\boxed{ER = \frac{\hat{\sigma}^2_C}{\hat{\sigma}^2_B} \; \frac{(GLB + 1)(GLC + 3)}{(GLB + 3)(GLC + 1)} \times 100}$$

onde $\hat{\sigma}^2_C$ = QME p/ DCC

$\hat{\sigma}^2_B$ = QME p/ DBC

GLC = GL Erro p/ DCC = t(r-1)

GLB = GL Erro p/ DBC = (t-1)(r-1)

e $\hat{\sigma}^2_C$ é estimado por

Quadrado Médio de Blocos.

$$\boxed{\hat{\sigma}^2_C = \frac{(r-1)\ QMB + r(t-1)\ QME}{rt - 1}}$$

Quadrado Médio do Erro no DBC.

1.5 - ESTIMAÇÃO DE VALORES PERDIDOS (↔ PARCELAS PERDIDAS)

(i) Um valor perdido (uma parcela perdida)

A estimativa de um valor perdido não acrescenta informação ao experimento, mas simplesmente facilita a análise dos dados restantes.

Considerando:

Tratamentos	Blocos 1	2 ... r	
1	X	T	
2	B		
⋮			
t			
			G

A estimativa da parcela perdida é dada por:

$$X = \frac{rB + tT - G}{(r-1)(t-1)}$$

O valor X é colocado no lugar da parcela perdida e faz-se a análise da maneira usual. A única diferença é que se perde 1 GL para o erro.

Causas de Variação	GL
Blocos	r-1
Tratamentos	t-1
Erro	(t-1)(r-1)-1

A parcela perdida nada contribui para o erro experimental, ou seja, a SQE é corretamente estimada, enquanto que a SQT está ligeiramente exagerada.

A correção para a SQT é dada por:

$$SQT_{aj} = SQT - U \quad , \text{ onde } \quad U = \frac{t-1}{t}\left(X - \frac{B}{t-1}\right)^2$$

Justifica-se o uso da correção da SQT, quando o F calculado para tratamentos sem correção for superior e estiver próximo do valor tabelado.

Testes de comparações múltiplas de médias

Para se obter o erro padrão da média de um tratamento ($\sigma_{\bar{y}}$) ou o erro padrão da diferença entre duas médias de tratamentos (σ_d), usa-se o método do nº efetivo de repetições, ou seja

Tratamentos		Nº de repetições	
A	B	r_A	r_B
ocorre	ocorre	1	1
ocorre	não ocorre	(t-2)/(t-1)	0
não ocorre	ocorre	0	(t-2)/(t-1)
não ocorre	não ocorre	0	0

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{QME}{2}\left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B}\right)} \qquad \sigma_d = \sqrt{QME\left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B}\right)}$$

Dois valores perdidos (↔ duas parcelas perdidas)

- Estimativas por ciclos
- 2 GL a menos para o erro
- Correção da SQT pelo método do resíduo condicional
- Nº efetivo de repetições para obtenção de $\sigma_{\bar{y}}$ e σ_d .

1.6. MODELO LINEAR PARA EXPERIMENTOS EM BLOCOS CASUALIZADOS

(a) MODELO LINEAR

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

y_{ij} → observação do tratamento i no bloco j

ε_{ij} → erro não observável associado à observação ij

β_j → efeito do bloco j

τ_i → efeito do tratamento i

μ → efeito da média geral

$$\left.\begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, t \\ j = 1, 2, \ldots, r \end{array}\right\} \Rightarrow rt \text{ UE ou observações}$$

(b) SUPOSIÇÃO

$$\varepsilon_{ij} \overset{IID}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

(c) MODELO NA FORMA MATRICIAL

$$\underset{\sim}{y} = x \underset{\sim}{\theta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

$\underset{\sim}{\theta}$ → vetor dos parâmetros

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ → vetor dos erros

x → matriz do delineamento ; matriz dos coeficientes dos parâmetros

$\underset{\sim}{y}$ → vetor das observações

(d) EXEMPLO

Tratamentos	blocos 1	2	3	totais	médias
1	5	4	3	12	4
2	4	5	6	15	5
3	6	3	9	18	6
4	7	6	8	21	7
5	3	2	4	9	3
totais	25	20	30	75	5
médias	5	4	6		

$t = 5$

$r = 3$

$rt = 15$

As equações das observações são :

$$
\begin{aligned}
y_{11} &= \mu + \tau_1 + \beta_1 + \varepsilon_{11} \\
y_{12} &= \mu + \tau_1 + \beta_2 + \varepsilon_{12} \\
y_{13} &= \mu + \tau_1 + \beta_3 + \varepsilon_{13} \\
&\vdots \\
y_{53} &= \mu + \tau_5 + \beta_3 + \varepsilon_{53}
\end{aligned}
$$

Na forma matrical tem-se :

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \\ y_{41} \\ y_{42} \\ y_{43} \\ y_{51} \\ y_{52} \\ y_{53} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{y}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{y}}
=
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\underbrace{\begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\theta}}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{41} \\ \varepsilon_{42} \\ \varepsilon_{43} \\ \varepsilon_{51} \\ \varepsilon_{52} \\ \varepsilon_{53} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\varepsilon}}
$$

UFRGS
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

SIETEMA DE EQUAÇÕES NORMAIS

$$x'x\hat{\underset{\sim}{\theta}} = x'\underset{\sim}{y}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|ccc}
15 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\
\hline
3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\
5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\
5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\hat{\mu} \\
\hline
\hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \\ \hat{\tau}_4 \\ \hat{\tau}_5 \\
\hline
\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
y_{..} \\
\hline
y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \\ y_{4.} \\ y_{5.} \\
\hline
y_{.1} \\ y_{.2} \\ y_{.3}
\end{array}\right]$$

Genericamente o SEN é dado por :

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|ccccc}
rt & r & r & \cdots & r & & t & t & \cdots & t & \\
\hline
r & r & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\
r & 0 & r & \cdots & 0 & & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \boxed{R} & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \boxed{N} \\
r & 0 & 0 & \cdots & r & & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\
\hline
t & 1 & 1 & \cdots & 1 & & t & 0 & \cdots & 0 & \\
t & 1 & 1 & \cdots & 1 & & 0 & t & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \boxed{N'} & \vdots & \vdots & & \vdots & \boxed{K} \\
t & 1 & 1 & \cdots & 1 & & 0 & 0 & \cdots & t &
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\hat{\mu} \\
\hline
\hat{\tau}_{1.} \\ \hat{\tau}_{2.} \\ \vdots \\ \hat{\tau}_{t.} \\
\hline
\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_r
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
y_{..} \\
\hline
y_{1.} \\ y_{2.} \\ \vdots \\ y_{t.} \\
\hline
y_{.1} \\ y_{.2} \\ \vdots \\ y_{.r}
\end{array}\right]$$

Escrevendo o SEN temos :

$$rt\,\hat{\mu} + r\hat{\tau}_1 + r\hat{\tau}_2 + \ldots + r\hat{\tau}_t + t\hat{\beta}_1 + t\hat{\beta}_2 + \ldots + t\,\hat{\beta}_r = y_{..}$$

$$rt\,\hat{\mu} + r(\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_t) + t(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \ldots + \hat{\beta}_r) = y_{..}$$

$$r\hat{\mu} + r\hat{\tau}_1 \qquad\qquad + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \ldots + \hat{\beta}_r = y_{1.}$$

$$r\hat{\mu} \qquad + r\hat{\tau}_2 \qquad\qquad + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \ldots + \hat{\beta}_r = y_{2.}$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$r\hat{\mu} \qquad\qquad + r\hat{\tau}_t + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \ldots + \hat{\beta}_r = y_{t.}$$

$$t\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_t + t\hat{\beta}_1 = y_{.1}$$

$$t\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_t \qquad + t\hat{\beta}_2 = y_{.2}$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$t\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_t \qquad\qquad + t\hat{\beta}_r = y_{.r}$$

Duas equações combinações linear das demais → sistema indeterminado → para solucionar uma das formas é introduzir duas restrições nas soluções .

Geralmente introduz-se $\sum_{i=1}^{t} \hat{\tau}_i = \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_t = 0$

$$\sum_{j=1}^{r} \hat{\beta}_j = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \ldots + \hat{\beta}_r = 0$$

Na primeira equação tem-se :

$$rt\hat{\mu} = y_{..} \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{y_{..}}{rt} = \bar{y}_{..}$$

Na segunda equação

$$r\hat{\mu} + r\hat{\tau}_1 = y_{1.} \Rightarrow \hat{\tau}_1 = \frac{y_{1.}}{r} - \hat{\mu} = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..}$$

Genericamente

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

Da equação para $\hat{\beta}_1$ tem-se : $\hat{\beta}_1 = \frac{y_{.1}}{t} - \hat{\mu} = \bar{y}_{.1} - \bar{y}_{..}$

Genericamente $\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$

Portanto os valores ajustados $\hat{y}_{ij}$ são dados por

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j = \bar{y}_{..} + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) = \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

e os residuos e_{ij} são :

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}$$

SOMA DE QUADRADOS

$$SQT = \sum_{i=1}^{t} \hat{\tau}_i y_{i.} = \sum_{i=1}^{t} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) y_{i.} = \sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^2}{r} - \underbrace{\frac{y_{..}^2}{rt}}_{FC} = r \sum_{i=1}^{t} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$$

$$SQB = \sum_{j=1}^{r} \hat{\beta}_j y_{.j} = \sum_{j=1}^{r} (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) y_{.j} = \sum_{j=1}^{r} \frac{y_{.j}^2}{t} - \frac{y_{..}^2}{rt} = t \sum_{j=1}^{r} (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

$$SQE = \sum_{ij} e_{ij}^2 = \sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$

VALORES AJUSTADOS

Tratamento	$\hat{y}_{ij}$ blocos 1	2	3	Total	Médias
1	4	3	5	12	4
2	5	4	6	15	5
3	6	5	7	18	6
4	7	6	8	21	7
5	3	2	4	9	3
Total	25	20	30	75	
Médias	5	4	6	5	

Residuos

Tratamento	e_{ij} blocos 1	2	3	Total	SQ
1	1	1	-2	0	6
2	-1	1	0	0	2
3	0	-2	2	0	8
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
Total	0	0	0	0	16
SQ	2	6	8	16	

SQE

$$SQT = 3\left[(4-5)^2 + \ldots (3-5)^2\right] = 3(10) = 30$$

$$SQB = 5\left[(5-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2\right] = 10$$

C. Variação	GL	SQ	QM	F
Blocos	2	10	5	2,5 NS
Tratamentos	4	30	7,5	3,75 NS
Erro	8	16	2	
Total	14	56		

$F_{.05}(2,8) = 4,46$

$F_{.05}(4,8) = 3,84$

MODELOS PARA ANÁLISE EM BLOCOS CASUALIZADOS

$$y_{ij} = \underbrace{\mu}_{\text{constante}} + \tau_i + \beta_j + \underbrace{\varepsilon_{ij}}_{\overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2)}$$

$i = 1,2,\ldots,t$

$j = 1,2,\ldots,r$

$\left.\begin{matrix}\tau_i \\ \beta_j\end{matrix}\right\}$ fixos $\Rightarrow$ modelo fixo ou tipo I

$\left.\begin{matrix}\tau_i \\ \beta_j\end{matrix}\right\}$ aleatórios $\Rightarrow$ modelo aleatório ou tipo II

$$\tau_i \overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2_\tau) \quad e \quad \beta_j \overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2_\beta)$$

τ_i , β_j e ε_{ij} independentes

$$\left.\begin{array}{lll} \tau_i \text{ fixo} & \text{ou} & \tau_i \text{ aleatório} \\ \beta_j \text{ aleatório} & & \beta_j \text{ fixo} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{modelo misto}$$

C. Variação	GL	E(QM)			
		modelo fixo	modelo aleatório	β_j aleatório τ fixo	β_j fixo τ_i aleatório
Blocos	r-1	$\sigma^2 + \frac{1}{(n-1)} t \sum_j \beta_j^2$	$\sigma^2 + t\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + t\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + \frac{1}{r-1} t \sum_j \beta_j^2$
Tratamentos	t-1	$\sigma^2 + \frac{1}{(t-1)} r \sum_i \tau_i^2$	$\sigma^2 + r\sigma_\tau^2$	$\sigma^2 + \frac{1}{(t-1)} r \sum_i \tau_i^2$	$\sigma^2 + r\sigma_\tau^2$
Erro	(t-1)(r-1)	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2

Em qualquer tipo de modelo

teste F para tratamentos $\quad F = \frac{QMT}{QME}$

teste F para blocos $\quad F = \frac{QMB}{QME}$

Estimação dos componentes de variância :

$$\hat{\sigma}^2 = QME$$

$$\underbrace{\hat{\sigma}^2}_{QME} + r\hat{\sigma}_\tau^2 = QMT \Rightarrow \hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{QMT - QME}{r}$$

$$\underbrace{\hat{\sigma}^2}_{QME} + t\hat{\sigma}_\beta^2 = QMB \Rightarrow \hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{QMB - QME}{t}$$

1.7 - MODELO LINEAR PARA EXPERIMENTOS EM BLOCOS

(a) Modelo Linear

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

ε_{ij}: Erro não observável associado à observação j

β_j: Efeito do bloco j

τ_i: Efeito do tratamento i

μ: Efeito da Média Geral

y_{ij}: Observação do tratamento i no bloco j

$$\left.\begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, t \\ j = 1, 2, \ldots, r \end{array}\right\} \Rightarrow rt \text{ UE ou observações}$$

(b) Suposições

$$\varepsilon_{ij} \cap N(0, \sigma^2) \text{ e independentes}$$

(c) Estimação dos parâmetros do modelo

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j = \bar{y}_{..} + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$$

$$= \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

Resíduos:

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}$$

$$SQE = \sum_{ij} e_{ij}^2 = \sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$

SQE tem (t-1)(r-1) GL

A redução na SQ Total devido ao ajuste do modelo linear considerado é:

$$R(\mu,\tau,\beta) = \hat{\mu} y_{..} + \sum_{i=1}^{t} \hat{\tau}_i \, y_{i.} + \sum_{j=1}^{r} \hat{\beta}_j \, y_{.j}$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^2}{r} + \sum_{j=1}^{r} \frac{y_{.j}^2}{t} - \frac{y_{..}^2}{rt} = \text{SQ Parâmetros}$$

$$\left[\frac{y_{..}^2}{rt} + \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^2}{r} - \frac{y_{..}^2}{rt} \right) + \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{y_{.j}^2}{t} - \frac{y_{..}^2}{rt} \right) \right]$$

com r+t-1 GL.

Para testar a hipótese Ho: $\tau_i = 0$ considera-se o modelo reduzido $y_{ij} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ (modelo de classificação simples) e se obtém a redução da SQ dada por

$$R(\mu,\beta) = \sum_{j=1}^{r} \frac{y_{.j}^2}{t} \quad \text{com r GL}$$

Então a SQ devido a $\underset{\sim}{\tau}$ após ajustar para μ e $\underset{\sim}{\beta}$ é

$$R(\tau/\mu,\beta) = R(\mu,\tau,\beta) - R(\mu,\beta)$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^2}{r} + \sum_{j=1}^{r} \frac{y_{.j}^2}{t} - \frac{y_{..}^2}{rt} - \sum_{j=1}^{r} \frac{y_{.j}^2}{t}$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^2}{r} - \frac{y_{..}^2}{rt} \quad \text{com t-1 GL}$$

Para se testar Ho: $\beta_j = 0$ considera-se o modelo reduzido $y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$ (classificação simples), obtendo-se

$$R(\mu,\tau) = \sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^2}{r} \quad \text{com t GL}$$

e a SQ devido a $\underset{\sim}{\beta}$ após ajustar para μ e $\underset{\sim}{\tau}$ é

$$R(\beta/\mu,\tau) = R(\mu,\tau,\beta) - R(\mu,\tau)$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^{2}}{r} + \sum_{j=1}^{r} \frac{y_{.j}^{2}}{t} - \frac{y_{..}^{2}}{rt} - \sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^{2}}{r}$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \frac{y_{.j}^{2}}{t} - \frac{y_{..}^{2}}{rt} \quad \text{com } r-1 \text{ GL}$$

(d) <u>Exemplo:</u> Exemplo das cultivares de trigo.

y_{ij} ⇒

Cultivares	Blocos 1	2	3	4	Médias
A	1,9	1,7	1,7	1,3	1,650
B	2,4	2,8	2,7	2,2	2,525
C	2,4	1,9	2,3	1,7	2,075
D	3,6	2,8	2,5	2,7	2,900
E	2,7	2,3	2,2	1,9	2,275
Médias	2,600	2,300	2,280	1,960	2,285

$\hat{y}_{ij}$ ⇒

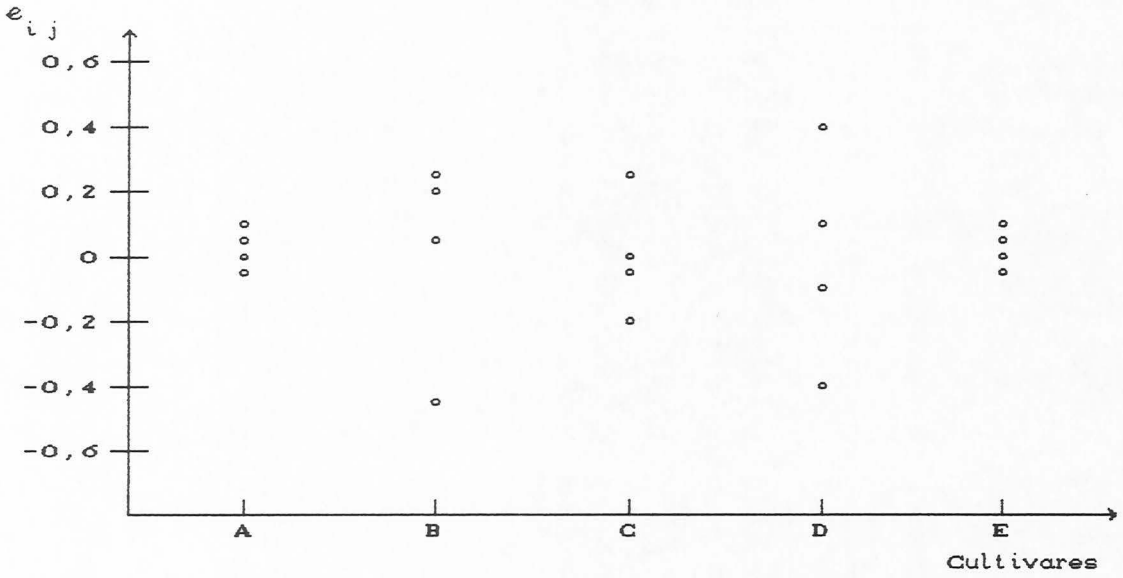
Cultivares	Blocos 1	2	3	4
A	1,965	1,665	1,645	1,325
B	2,840	2,540	2,520	2,200
C	2,340	2,090	2,070	1,750
D	3,215	2,915	2,895	2,575
E	2,590	2,290	2,270	1,950

e_{ij} ⇒

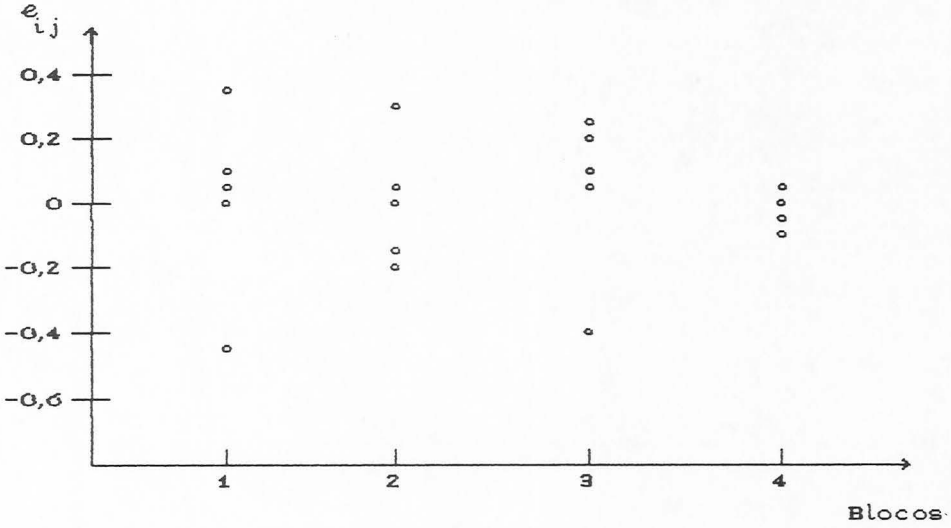
Cultivares	Blocos 1	2	3	4
A	-0,065	0,035	0,055	-0,025
B	-0,440	0,260	0,180	0,000
C	0,010	-0,190	0,230	-0,050
D	0,385	-0,115	-0,395	0,125
E	0,110	0,010	-0,070	-0,050

(e) Análise de Resíduos

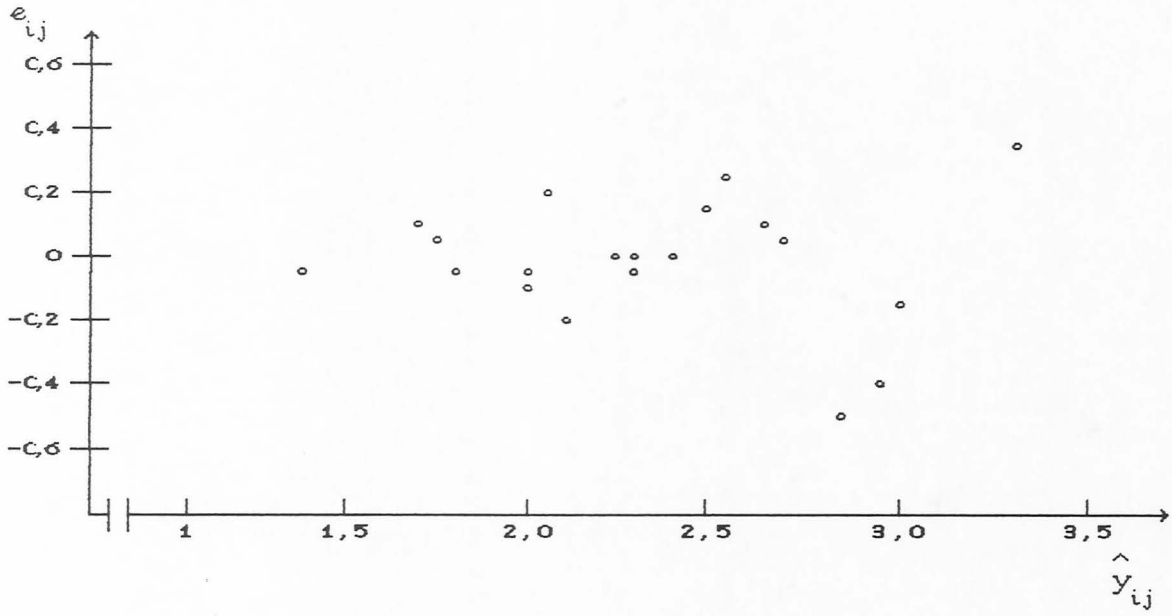
(i) e_{ij} versus cultivares



(ii) e_{ij} versus blocos



(iii) e_{ij} versus $\hat{y}_{ij}$



Se o gráfico dos Resíduos e_{ij} com valores $\hat{y}_{ij}$ apresentar uma tendência curvilinear é um indicador de presença de interação tratamento x bloco o que implica em não aditividade. Uma transformação pode resolver o problema.

(Teste de não-aditividade de Tukey)

<u>Aditivo</u>

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j$$

<u>Multiplicativo</u>

$$y_{ij} = \mu\tau_i\beta_j$$

$\downarrow$ log

$$\log(y_{ij}) = \log \mu + \log \tau_i + \log \beta_j$$

$$\uparrow$$

$$y_{ij}* = \mu* + \tau_i* + \beta_j*$$

(aditivo)

(f) Modelos para a análise de variância em blocos casualizados

$$y_{ij} = \underbrace{\mu}_{\text{Constante}} + \underbrace{\tau_i + \beta_j}_{\text{Fixos ou Aleatórios}} + \underbrace{\varepsilon_{ij}}_{\overset{IID}{\sim} N(0,\sigma^2)} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, t \\ j = 1, 2, \ldots, r \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l}\tau_i \\ \beta_j\end{array}\right\}$ Fixos $\Rightarrow$ Modelo Fixo ou Modelo I

$\left.\begin{array}{l}\tau_i \\ \beta_j\end{array}\right\}$ Aleatórios $\Rightarrow$ Modelo Aleatório ou Modelo II

$$\tau_i \overset{IID}{\sim} N\left(0,\sigma_\tau^2\right) \quad e \quad \beta_j \overset{IID}{\sim} N\left(0,\sigma_\beta^2\right)$$

τ_i, β_j e ε_{ij} são independentes

$\left.\begin{array}{l}\tau_i \text{ fixo} \\ \beta_j \text{ aleatório}\end{array} \text{ ou } \begin{array}{l}\tau_i \text{ aleatório} \\ \beta_j \text{ fixo}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Modelo Misto

Causas de Variação	GL	QM	E (QM) ⇔ QM Esperado			
			Modelo Fixo	Modelo Aleatório	β_j aleatório τ_i fixo	β_j fixo τ_i aleatório
Blocos	r-1	QMB	$\sigma^2 + \frac{1}{r-1} t \sum_j \beta_j^2$	$\sigma^2 + t\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + t\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + \frac{1}{r-1} t \sum_j \beta_j^2$
Tratamento	t-1	QMT	$\sigma^2 + \frac{1}{t-1} r \sum_i \tau_i^2$	$\sigma^2 + r\sigma_\tau^2$	$\sigma^2 + \frac{1}{t-1} r \sum_i \tau_i^2$	$\sigma^2 + r\sigma_\tau^2$
Erro	(r-1)(t-1)	QME	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2

Em qualquer modelo:

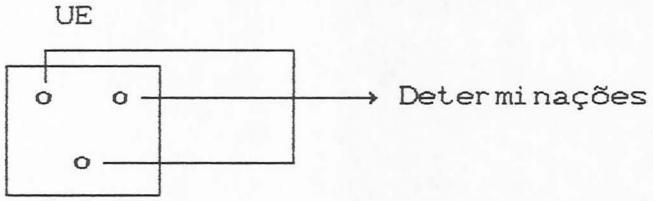
1) Teste F para Tratamentos (Ho: $\tau_i = 0$) ou (Ho: $\sigma_\tau^2 = 0$)

$$F = \frac{QMT}{QME}$$

(ii) Teste F para Blocos (Ho: $\beta_j = 0$ ou Ho: $\sigma^2_\beta = 0$)

$$F = \frac{QMB}{QME}$$

(g) <u>Amostragem no Delineamento Blocos Casualizados</u>



t tratamentos
r repetições (blocos) / tratamento
n determinações / repetição

Erro Experimental
Erro de Amostragem

Modelo: $y_{ijk} = \underbrace{\mu}_{\text{Fixo}} + \underbrace{\tau_i + \beta_j}_{\text{Fixos ou Aleatórios}} + \underbrace{\varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}}_{\text{Aleatórios}}$

$\varepsilon_{ij} \cap N\left(0, \sigma^2_\varepsilon\right)$ e independentes

$\delta_{ijk} \cap N\left(0, \sigma^2\right)$ e independentes

ε_{ij} e δ_{ijk} independentes entre si

$i = 1, 2, \ldots, t$
$j = 1, 2, \ldots, r$
$k = 1, 2, \ldots, n$

Causas de Variação	GL	QM	QM Esperados	
			Modelo I	Modelo II
Blocos	r-1	QMB	$\sigma^2+n\sigma_\varepsilon^2+nt\sum_j \beta_j^2/(r-1)$	$\sigma^2+n\sigma_\varepsilon^2+nt\sigma_\beta^2$
Tratamentos	t-1	QMT	$\sigma^2+n\sigma_\varepsilon^2+nr\sum_i \tau_i^2/(t-1)$	$\sigma^2+n\sigma_\varepsilon^2+nr\sigma_\tau^2$
Erro Experimental	(r-1)(t-1)	QMEE	$\sigma^2+ n\sigma_\varepsilon^2$	$\sigma^2+ n\sigma_\varepsilon^2$
Erro Amostragem	rt(n-1)	QMEA	σ^2	σ^2

Teste F

(i) Ho: $\tau_i = 0$ ou Ho: $\sigma_\tau^2 = 0$

$$F = \frac{QMT}{QMEE}$$

(ii) Ho: $\beta_j = 0$ ou Ho: $\sigma_\beta^2 = 0$

$$F = \frac{QMB}{QMEE}$$

(iii) Ho: $\sigma_\varepsilon^2 = 0$

$$F = \frac{QMEE}{QMEA}$$

UFRGS
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

1.8. ANÁLISE DE VARIANCIA PARA EXPERIMENTOS EM BLOCOS CASUALIZADOS USANDO O MODELO DE REGRESSÃO COM VARIÁVEIS INDICADORAS.

Modelo de ANOVA

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \overset{\gamma_j}{\beta_j} + \varepsilon_{ij} \quad \Rightarrow \quad y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \varepsilon_{ij}$$

Modelo de Regressão $\qquad t = 5 \qquad r = 3$

$$y_{ij} = \beta_0 + \underbrace{\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3} + \beta_4 x_{ij4}}_{\text{Efeito de Tratamentos}} + \underbrace{\beta_5 x_{ij5} + \beta_6 x_{ij6}}_{\text{Efeito de Blocos}} + \varepsilon_{ij}.$$

x_{ij1} $\begin{cases} 1 & \text{se observação do tratamento 1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

x_{ij2}, x_{ij3} e x_{ij4} similarmente

x_{ij5} $\begin{cases} 1 & \text{se observação do bloco 1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

x_{ij6} similarmente

CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS PARAMETROS DE REGRESSÃO E OS DO MODELO DE ANOVA.

$$\beta_1 = \tau_1 - \tau_5 \qquad \beta_5 = \gamma_1 - \gamma_3$$

$$\beta_2 = \tau_2 - \tau_5 \qquad \beta_6 = \gamma_2 - \gamma_3$$

$$\beta_3 = \tau_3 - \tau_5 \qquad \beta_0 = \mu + \tau_5 + \gamma_3$$

$$\beta_4 = \tau_4 - \tau_5$$

Exemplo:

CV	SQ
B	10
T	30
E	16

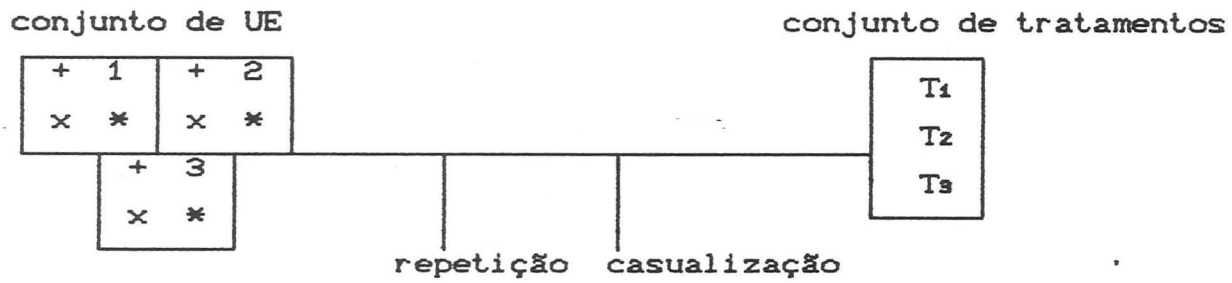
Tratamentos	Blocos 1	2	3	$\bar{y}_{i.}$	$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$
1	5	4	3	4	-1
2	4	5	6	5	0
3	6	3	3	6	1
4	7	6	8	7	2
5	3	2	4	3	-2
$\bar{y}_{.j}$	5	4	6	5	
$\hat{\gamma}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$	0	-1	1		

→ 2 causas a serem controladas q. interfere na var. resp. q. está medindo o trat.

2 - DELINEAMENTO QUADRADO LATINO (DQL)

Insere no modelo uma nova causa de variabilidade a ser controlada

2.1. CARACTERIZAÇÃO



- Dois bloqueamentos : controle de duas causas (linhas e colunas) de variabilidade "a priori".

DCC e DBC => ñ há limitador de repetição

- Restrições à casualização

DQL → t = r

linhas	colunas +	*	×
1	T_1	T_2	T_3
2	T_2	T_3	T_1
3	T_3	T_1	T_2

Q.L. 3 X 3

A	B	C
B	C	A
C	A	B

CARACTERÍSTICAS

- Cada tratamento ocorre uma e somente uma vez em cada linha e em cada coluna.

- Número de tratamentos = número de linhas = número de colunas = número de repetições = r

(t = r) → pouca flexibilidade

Muitos tratamentos → exagerado número de repetições → inexequível. Os mais usados são os Q.L. 5 x 5 a Q.L. 8 x 8

Vantagem , sempre que houver duas causas de variabilidade intrínseca das UE identificáveis , organizando-se linhas e colunas de forma que as ≠ s entre elas sejam as maiores.

N análise de variância remove-se do erro experimental a variabilidade devida a ≠ entre linhas e ≠ entre colunas → maior precisão pois redução no QME pode ser substancial.

- Poucos tratamentos → GLE pequeno → baixa sensibilidade

QL 2 x 2 ; Ql 3 x 3 ; QL 4 x 4 repete-se os quadrados.

2.2. MONTAGEM DOS QUADRADOS LATINOS

Organização sistemática dos tratamentos de forma que cada tratamento ocorra uma e só uma vez em cada linha e coluna e depois sorteia-se a posição das linhas e colunas.

Exemplo: QL 5 x 5

linha	coluna				
	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	B	C	D	E	A
3	C	D	E	A	B
4	D	E	A	B	C
5	E	A	B	C	D

sorteio →

linha	coluna				
	2	3	1	5	4
3	D	E	C	B	A
2	C	D	B	A	E
4	E	A	D	C	B
5	A	B	E	D	C
1	B	C	A	E	D

2.3. ANALISE DE VARIANCIA

$i = 1,2,\ldots,r$ → indice de linha

$j = 1,2,\ldots,r$ → indice de coluna

$k = 1,2,\ldots,r$ → tratamentos

linhas	colunas 1	2	... r	totais de linhas	médias
1	$y_{11(k)}$	$y_{12(k)}$	$y_{1r(k)}$	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	⋮	⋮	⋮	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ $\}$ $y_{i.}$	⋮ $\}$ $\bar{y}_{i.}$
r		$y_{ij(k)}$		$y_{r.}$	$\bar{y}_{r.}$
totais de colunas	$y_{.1}$	$y_{.2}$ ...	$y_{.r}$	$y_{..}$ → total geral	$\bar{y}_{..}$ média geral
	$y_{.j}$				
médias	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$ ...	$\bar{y}_{.r}$		
	$\bar{y}_{.j}$				

totais de tratamentos : $y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_t$

média dos tratamentos : $\bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \ldots \quad \bar{y}_t$

DECOMPOSIÇÃO ALGÉBRICA DA SOMA DE QUADRADOS

MODELO:

$$y_{ij(k)} = \mu + \underbrace{\alpha_i}_{\text{linha}} + \underbrace{K_j}_{\text{coluna}} + \underbrace{\tau_k}_{\text{tratamento}} + \varepsilon_{ij(k)}$$

$\bar{y}_{..(.)}$ = média geral

$\bar{y}_{i.(.)}$ = média da linha i

$\bar{y}_{.j(.)}$ = média da coluna j

$\bar{y}_{..(k)}$ = média do tratamento k

$$y_{ij(k)} - \bar{y}_{..(.)} = y_{ij(k)} - \bar{y}_{..(.)} + \bar{y}_{i.(.)} - \bar{y}_{i.(.)} + \bar{y}_{.j(.)} - \bar{y}_{.j(.)}$$

$$+ \bar{y}_{..(k)} - \bar{y}_{..(k)} + 2\bar{y}_{..(.)} - 2\bar{y}_{..(.)}$$

$$= \left[y_{ij(k)} - \bar{y}_{i.(.)} - \bar{y}_{.j(.)} - \bar{y}_{..(k)} + 2\bar{y}_{..(.)}\right]$$

$$+ \left[\bar{y}_{i.(.)} - \bar{y}_{..(.)}\right] + \left[\bar{y}_{.j(.)} - \bar{y}_{..(.)}\right] + \left[\bar{y}_{..(k)} - \bar{y}_{..(.)}\right]$$

$$\underbrace{\sum_{ij} [y_{ij(k)} - \bar{y}_{..(.)}]^2}_{\text{SQtotal}} = \underbrace{\sum_{ij} [y_{ij(k)} - \bar{y}_{i.(.)} - \bar{y}_{.j(.)} - \bar{y}_{..(k)} + 2\bar{y}_{..(.)}]^2}_{\text{SQE}}$$

$$+ \underbrace{r\sum_i [\bar{y}_{i.(.)} - \bar{y}_{..(.)}]^2}_{\text{SQL}} + \underbrace{r\sum_j [\bar{y}_{.j(.)} - \bar{y}_{..(.)}]^2}_{\text{SQC}}$$

$$+ \underbrace{r\sum_k [\bar{y}_{..(k)} - \bar{y}_{..(.)}]^2}_{\text{SQT}}$$

$$SQ\ total = \sum_{ij} y^2_{ij(k)} - \underbrace{\frac{y^2_{..(.)}}{r^2}}_{Fc}$$

$$SQL = \sum_{i} \frac{y^2_{i.(.)}}{r} - Fc$$

$$SQC = \sum_{j} \frac{y^2_{.j(.)}}{r} - Fc$$

$$SQT = \sum_{k} \frac{y^2_{..(k)}}{r} - Fc$$

$$SQE = SQ\ total - SQL - SQC - SQT$$

$\boxed{GL}$

GL total : $\bar{y}_{..(.)} \Rightarrow r^2 - 1$

GL linhas : $\bar{y}_{..(.)} \Rightarrow r - 1$

GL colunas : $\bar{y}_{..(.)} \Rightarrow r - 1$

GL tratamentos : $\bar{y}_{..(.)} \Rightarrow r - 1$

$$GLE = r^2 - 1 - (r - 1) - (r - 1) - (r - 1)$$
$$= r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$$

ANÁLISE DE VARIÂNCIA

Variação Total
(SQ Total)

- Variação entre Tratamentos (SQTratamentos ou SQT)
- Variação entre Linhas (SQLinhas ou SQL)
- Variação entre colunas (SQColunas ou SQC)
- Variação devida ao Erro Experimental (SQErro experimental ou SQE)

Causas de Variação	GL	SQ	QM	F
Linhas	r-1	SQL	QML	QML/QME
Colunas	r-1	SQC	QMC	QMC/QME
Tratamentos	$\cancel{t}$-1	SQT	QMT	QMT/QME
Erro experimental	(r-1)(r-2)	SQE	QME	
Total	r^2-1	SQTotal		

Teste F de Tratamentos : $H_o : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_t \Leftrightarrow \tau_k = 0$

$$\text{Se} \quad F = \frac{QMT}{QME} > F\,\alpha \left\{ (r-1) \; ; \; \left[(r-1)(r-2) \right] \right\}$$

Rejeita-se H_o

EXEMPLO 1 :

Num experimento de competição de variedades de cana-de-açucar , foram usadas cinco variedades (A,B,C,D,E) dispostas em um quadrado latino 5 x 5. As produções de cana-planta , em Kg/parcela , são as seguintes :

	COLUNAS					
LINHAS	1	2	3	4	5	TOTAL
1	515(A)	660(C)	438(D)	394(E)	318(B)	2325
2	432(D)	518(A)	458(B)	583(C)	331(E)	2322
3	724(C)	478(E)	524(A)	550(B)	400(D)	2676
4	489(E)	384(B)	556(E)	297(D)	420(A)	2146
5	494(B)	500(D)	313(E)	486(A)	501(C)	2294
TOTAL	2654	2540	2289	2310	1970	11763

TRATAM.	A	B	C	D	E
TOTAIS	2463	2204	3024	2067	2005

r = 5

ANALISE DE VARIANCIA

CAUSAS DE VARIAÇÃO	GL	SQ	QM	F
LINHAS	4	30480	7620	2,68NS
COLUNAS	4	55640	13910	4,89*
VARIEDADES	4	137488	34372	12,09**
ERRO EXPERIMENTAL	12	34116	2843	
TOTAL	24	257724		

F.05(4,12)=3,26 F.01(4,12)=5,41

As variedades se diferenciam

TESTE DE TUKEY

$\Delta\ \% = q.05(5,12).\quad \sigma\bar{y} = (4,51)(23,85) = 107,6$

$q.05\ (5,12) = 4,51\ ;\ \sigma\bar{y} = \sqrt{\frac{QME}{r}} = \sqrt{\frac{2843}{5}} = 23,85$

variedades	médias	
C	604,8 a	] superior
A	492,6 b	┐
B	440,8 b	│ inferiores
D	413,4 b	│
E	401,0 b	┘

Médias seguidas de mesma letra não diferem significativamente pelo teste Tukey a 5% .

EXEMPLO 2 :

Um experimentador está estudando o efeito de 5 diferentes formulações de uma mistura explosiva usada na produção de dinamite , observando a força explosiva . Para tanto realizou um experimento utilizando o delineamento quadrado latino , constituindo lotes de materia prima as linhas e operadores as colunas . Os resultados obtidos foram os seguintes :

Lotes de materia prima	Operadores 1	2	3	4	5
1	24(A)	20(B)	19(C)	24(D)	24(E)
2	17(B)	24(C)	30(D)	27(E)	36(A)
3	18(C)	38(D)	26(E)	27(A)	21(B)
4	26(D)	31(E)	26(A)	23(B)	22(C)
5	22(E)	30(A)	20(B)	29(C)	31(D)

Valores codificados = $y_{ij(k)} - 25$

LINHAS	COLUNAS 1	2	3	4	5	TOTAL
1	-1(A)	-5(B)	-6(C)	-1(D)	-1(E)	-14
2	-8(B)	-1(C)	5(D)	2(E)	11(A)	9
3	-7(C)	13(D)	1(E)	2(A)	-4(B)	5
4	1(D)	6(E)	1(A)	-2(B)	-3(C)	3
5	-3(E)	5(A)	-5(B)	4(C)	6(D)	7
TOTAL	-18	18	-4	5	9	10

TRATAMENTO	A	B	C	D	E	
TOTAL	18	-24	-13	24	5	$10 = y_{..(.)}$
MÉDIAS	3,6	-4,8	-2,6	4,8	1	$0,4 = \bar{y}_{..(.)}$

ANOVA

CAUSAS DE VARIAÇÃO	GL	SQ	QM	F
Linhas	4	68	17,00	1,59
Colunas	4	150	37,50	3,52*
Formulações	4	330	82,50	7,73*
ERRO EXPERIMENTAL	12	128	10,67	
TOTAL	24	676		

F.05(4,12) = 3,26 F.01(4,12) = 5,41

As formulações se diferenciam

TESTE DE TUKEY

$\Delta_{5\%} = q.05(5,12).\ \sigma_{\bar{y}} = (4,51)(1,46) = 6,6$

$q.05(5,12) = 4,51$

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{QME}{r}} = \sqrt{\frac{10,67}{5}} = 1,46$$

FORMULAÇÕES	MÉDIAS	
D	4,8 a	→ superior
A	3,6 a b	→ intermediarias
E	1 a b c	
C	-2,6 b c	
B	-4,8 c	→ inferior

Médias seguidas de mesma letra não diferem significativamente pelo teste de Tukey a 5%.

2.4. ESTIMATIVA DE VALORES (PARCELAS) PERDIDOS

(1) Um valor perdido

LINHAS	COLUNAS 1	2 ... r	
1	$\boxed{x}$	$\boxed{\quad L \quad}$	
2	$\boxed{C}$		
⋮			
r			
			G

T=total do tratamento onde ocorre perda de valor

$$X = \frac{r(L + C + T) - G}{(r - 1)(r - 2)}$$

A análise é feita da maneira usual utilizando-se o valor estimado e perdendo-se 1 GL para o erro.

A SQE está corretamente estimada , ao passo que SQT , está superestimada necessitando de ajuste quando se fizer necessário (F tratamentos maior e próximo do valor tabelado) , que é dado por SQT ajustados = SQT - U.

$$\text{onde } U = \frac{[G - L - C - (r - 1)T]^2}{[(r - 1)(r - 2)]^2}$$

(2) Dois valores perdidos

Estimativa por ciclos como no caso do DBC , partindo-se da estimativa $y = \frac{\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j}}{2}$

Análise de forma usual com a perda de 2 GL por erro.

$$s_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{QME}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{ra} + \frac{1}{rb}\right)}_{\text{numero efetivo de repetição}}}$$

$$sd = \sqrt{QME\left(\frac{1}{ra} + \frac{1}{rb}\right)}$$

Número efetivo de repetições

A	B	ra	rb
ocorre	ocorre em L e C	1	de forma
ocorre	ocorre em L ou C	2/3	idêntica
ocorre	não ocorre em L nem em C	1/3	
não ocorre	-	0	

2.5. ANÁLISE DE VARIÂNCIA QUANDO SE UTILIZA MAIS DE UM QUADRADO LATINO

objetivo: Aumentar GLE (QL 3 x 3 ; QL 4 x 4)

r tratamentos ; r linhas ; r colunas ; s quadrados

Causas da variação	GL
quadrados (Q)	s-1
linhas/quadrados	s(r-1)
colunas/quadrados	s(r-1)
tratamentos(T)	r-1
T x Q	(r-1)(s-1)
erro experimental	s(r-1)(r-2)
total	$sr^2 - 1$

2.6. EFICIÊNCIA RELATIVA

DQL em relação ao DCC

$$E.R. = \frac{QML + QMC + (r-1)QME}{(r+1)QME} \times 100$$

DQL em relação ao DBC

- Linhas como blocos

$$ER = \frac{QMC + (r-1)QME}{r\ QME} \times 100$$

- Colunas como blocos

$$ER = \frac{QML + (r-1)\ QME}{r\ QME} \times 100$$

Se GLE do DQL < 20 , usa-se o fator de precisão dado por :

$$\frac{(n_1+1)(n_2+3)}{(n_2+1)(n_1+3)} \; ; \qquad \begin{array}{l} n_1 = \text{GLE no DQL} \\ n_2 = \text{GLE no outro delineamento} \end{array}$$

2.7. MODELO LINEAR PARA EXPERIMENTOS EM QUADRADO LATINO

$$y_{ij}(k) = \mu + \Delta_i + K_j + \tau_k + \varepsilon_{ij(k)}$$

$$i,j,k = 1,2,\ldots,r$$

$$\varepsilon_{ij(k)} \cap^{IID} N(0,\sigma^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_i \\ K_j \\ \tau_k \end{array}\right\} \text{fixos} \rightarrow \text{modelo fixo ou modelo I}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_i \\ K_j \\ \tau_k \end{array}\right\} \text{aleatórios} \rightarrow \text{modelo aleatório ou modelo II}$$

$$\Delta_i \cap^{IID} N(0,\sigma^2_\Delta)$$
$$K_j \cap^{IID} N(0,\sigma^2_k) \qquad \Delta_i, K_j, \tau_k, \varepsilon_{ij(k)} \text{ independentes}$$
$$\tau_K \cap^{IID} N(0,\sigma^2_\tau)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{combinando} \\ \text{efeitos fixos} \\ \text{e aleatórios} \end{array}\right\} \rightarrow \text{modelo misto}$$

causas de variação	GL	QM	E(QM) modelo fixo	E(QM) modelo aleatório	F
LINHAS	r-1	QML	$\sigma^2 + \frac{r}{r-1} \sum_i \delta_i^2$	$\sigma^2 + r\sigma_\delta^2$	QML/QME
COLUNAS	r-1	QMC	$\sigma^2 + \frac{r}{r-1} \sum_j K_j^2$	$\sigma^2 + r\sigma_k^2$	QMC/QME
TRAT.	r-1	QMT	$\sigma^2 + \frac{r}{r-1} \sum_k \tau_k^2$	$\sigma^2 + r\sigma_\tau^2$	QMT/QME
ERRO EXP.	(r-1)x (r-2)	QME	σ^2	σ^2	

$$Ho: \quad \tau_k = 0 \quad \forall k \qquad \sigma_\tau^2 = 0$$

Estimativa dos efeitos do modelo linear

$$\hat{\mu} = \bar{y}..(.)$$
$$\hat{\delta}i = \bar{y}i.(.) - \bar{y}..(.)$$
$$\hat{\tau}k = \bar{y}..(.) - \bar{y}..(.)$$
$$\hat{K}j = \bar{y}.j(.) - \bar{y}..(.)$$

$$yij(k) = \bar{y}..(.) + \bar{y}i.(.) - \bar{y}..(.) + \bar{y}.j(.) - \bar{y}..(.) + \bar{y}..(k) - \bar{y}..(.)$$
$$= \bar{y}i.(.) + \bar{y}.j(.) - \bar{y}..(k) - 2\bar{y}..(.)$$

$$\text{residuos: } \hat{\varepsilon}ij(k) = e_{ij(k)} = yij(k) - \hat{y}ij(k)$$
$$= yij(k) - \bar{y}i.(.) - \bar{y}.j(.) - \bar{y}..(k) + 2\bar{y}..(.)$$

$$SQE = \sum_{ij} e^2_{ij(k)} = \sum_{ij} [yij(k) - \bar{y}i.(.) - \bar{y}.j(.) - \bar{y}..(k) + 2\bar{y}..(.)]^2$$

UFRGS
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

3 - QUADRADO GRECO-LATINO

3.1 - Caracterização

Considera-se um quadrado latino $r \times r$ e sobrepõe-se um segundo quadrado latino $r \times r$ no qual os tratamentos são denotados por letras gregas.

Ex.: Quadrado Greco-Latino 4x4

QL 4x4 QL 4x4

A	B	C	D	A	B	C	D		α	β	γ	δ
B	A	D	C	D	C	B	A		δ	γ	β	α
C	D	A	B	B	A	D	C	→	β	α	δ	γ
D	C	B	A	C	D	A	B		γ	δ	α	β

Quadrado Greco-Latino

$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
$B\delta$	$A\gamma$	$D\beta$	$C\alpha$
$C\beta$	$D\alpha$	$A\delta$	$B\gamma$
$D\gamma$	$C\delta$	$B\alpha$	$A\beta$

- Bloqueamento em 3 direções, controle de 3 causas de variação maior entre as UE.
- Como são 2 Q.L. sobrepostos, cada letra grega aparece 1 e somente 1 vez em cada linha, coluna e letra latina.

3.2 - Modelo Linear

$$y_{ij}(kl) = \mu + \alpha_i + k_j + \tau_k + w_l + \varepsilon_{ij}(kl)$$

$i, j, k, l = 1, 2, \ldots, r$

3.3 - Análise de Variância

Causas de variação	GL
Linhas	$r-1$
Colunas	$r-1$
Tratamentos letras latinas	$r-1$
Tratamentos letras gregas	$r-1$
Erro experimental	$(r-1)(r-3)$
Total	r^2-1

3.4 - Exemplo: Exemplo Quadrado Latino.

Letras gregas: Formas de montagem.

Lotes de matéria-prima (linhas)	Operadores (colunas) 1	2	3	4	5
1	$A\alpha = -1$	$B\gamma = -5$	$C\varepsilon = -6$	$D\beta = -1$	$E\delta = -1$
2	$B\beta = -8$	$C\gamma = -1$	$D\alpha = 5$	$E\gamma = 2$	$A\varepsilon = 11$
3	$C\gamma = -7$	$D\varepsilon = 13$	$E\beta = 1$	$A\delta = 2$	$B\alpha = -4$
4	$D\delta = 1$	$E\alpha = 6$	$A\gamma = 1$	$B\varepsilon = -2$	$C\beta = -3$
5	$E\varepsilon = -3$	$A\beta = 5$	$B\delta = -5$	$C\alpha = 4$	$D\gamma = 6$

Formas de montagem (letras gregas)	Total
α	10
β	-6
γ	-3
δ	-4
ε	13
Total	10

$$SQ \text{ Formas de montagem} = \frac{10^2 + (-6)^2 + \ldots + 13^2}{5} - \frac{(10)^2}{25} = 62$$

Causas de variação	GL	SQ	QM	F
Lotes de matéria-prima	4	68	17,00	
Operadores	4	150	37,50	
Formas de montagem	4	62	15,50	
Formulações	4	330	82,50	10**
Erro experimental	8	66	8,25	
Total	24	676		

$F.05(4,8) = 3,84$ $\qquad$ $F.01(4,8) = 7,04$

Teste de Tukey

$D = q.05(5,8).s\bar{y} = (4,89)(1,28) = 6,28$

$q.05(5,8) = 4,89$

$$s\bar{y} = \sqrt{\frac{QME}{r}} = \sqrt{\frac{8,25}{5}} = 1,28$$

Formulações	Médias
D	4,8 a
A	3,6 a b
E	1 a b c
C	-2,6 b c
B	-4,8 c

Médias seguidas de mesma letra não diferem significativamente pelo Teste de Tukey a 5% .

4- BLOCOS INCOMPLETOS

4.1. Caracterização:

Quando o material a investigar é muito grande ou o material em estudo é muito heterogêneo, ou ainda, quando certas limitações restringem excessivamente o tamanho do bloco, há, muitas vezes, interesse em organizar blocos incompletos, isto é, blocos que não incluem todos os tratamentos.

Exemplo: 9 tratamentos

Blocos de tamanho 3

Repetição I		Repetição II		Repetição III		Repetição IV	
Bloco 1	1 2 3	Bloco 4	1 4 7	Bloco 7	1 5 9	Bloco 10	1 6 8
Bloco 2	4 5 6	Bloco 5	2 5 8	Bloco 8	2 6 7	Bloco 11	2 4 9
Bloco 3	7 8 9	Bloco 6	3 6 9	Bloco 9	3 4 8	Bloco 12	3 5 7

Características (dimensões) do delineamento:

- t = nº de tratamentos = 9
- r = nº de repetições = 4
- b = nº de blocos = 12 ($r < b$)
- k = nº de UE/bloco = tamanho do bloco = 3 ($k < t$)

$$rt = bk$$

Se $r=b$ e $k=t$ ⇒ DBC

- λ = nº de vezes que cada par de tratamentos ocorre junto no mesmo bloco = 1

k pode ser variável de bloco a bloco, r pode ser variável de tratamento a tratamento e n_{ij} (nº de vezes que o tratamento i ocorre no bloco j) pode ser qualquer.

Se k c^{te} ⇒ delineamento próprio.

Se r c^{te} ⇒ delineamento é equi-replicado.

Se n_{ij}=1 ou 0 ⇒ delineamento é binário.

O mais comum é delineamentos próprios, binários e equi-replicados e nesse caso os delineamentos em blocos incompletos são classificados em:

* Balanceados ou Equilibrados: quando λ é constante e então todos os pares de tratamentos são comparados com a mesma precisão. No exemplo λ=1 [reticulado quadrado balanceado].

Ex.: Blocos Incompletos Balanceados (BIB)

Reticulados (Láttices) Balanceados.

* Parcialmente Balanceados: quando λ é variável e então nem todos os pares de tratamentos são comparados com a mesma

precisão. O mais simples é quando λ assume dois valores.

Ex.: Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados (PBIB) Reticulados (Láttices).

No exemplo desconsiderando-se a última repetição tem-se um esquema parcialmente balanceado [Reticulado Quadrado], onde por exemplo

$$\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{17} = \lambda_{19} = 1$$

$$\lambda_{16} = \lambda_{18} = 0$$

4.2. Análise Estatística:

(a) Análise Intrablocos (dentro do bloco): só comparações entre UE do mesmo bloco são utilizados para estimar efeito de tratamentos. É a mais empregada e usa métodos exatos de análise.

(b) Análise com recuperação da informação Interblocos: usa também comparações entre blocos para estimar efeito de tratamentos. Aproveita melhor os dados. É aproximada e deve ser utilizada quando tivermos nº grande de GL para erro e para blocos.

4.3. Casualização: a casualização para experimentos em blocos incompletos segue as etapas:

(i) Enumeração casual dos tratamentos (atribuir por sorteio os nºs 1, 2, 3, ... aos tratamentos A, B, C, ...).

(ii) Fazer o arranjo dos blocos incompletos de forma casual (dentro de cada repetição, dentro de cada grupo ou para o conjunto completo de blocos).

(iii) Casualizar as posições dos tratamentos dentro de cada bloco.

4.4. Blocos Incompletos Balanceados (BIB)

$$\boxed{\lambda \text{ c}^{te}}$$

(a) Propriedades dos BIB:

- $k < t$; se $k=t \Rightarrow$ blocos completos
- $\lambda < r$; se $\lambda=r \Rightarrow$ blocos completos
- $bk=rt$ (nº total de UE)

$- \lambda C_t^2 = bC_k^2$ (nº total de pares de tratamentos)

$Ct_t^2 = \frac{t(t-1)}{2}$ (nº de pares possíveis)

$$\frac{\lambda t(t-1)}{2} = \frac{bk(k-1)}{2} \Rightarrow \lambda t(t-1) = bk(k-1)$$

$$bk = rt \Rightarrow \lambda t(t-1) = rt(k-1) \Rightarrow \lambda(t-1) = r(k-1)$$

[condição de balanceamento]

(b) Tipos de BIB:

(i) Tipo I: os blocos podem ser agrupados em repetições de tratamentos.

Ex.: $t=6$, $k=2$ e $\lambda=1$

$$r = \frac{\lambda(t-1)}{k-1} = \frac{1(6-1)}{2-1} = 5 \quad ; \quad rt = (5)(6) = 30 \quad ; \quad b = \frac{rt}{k} = \frac{30}{2} = 15$$

$$b' = \text{nº de blocos por repetição} = \frac{b}{r} = \frac{15}{5} = 3$$

REP I			REP II			REP III			REP IV			REP V		
B_1	1	2	B_4	1	3	B_7	1	4	B_{10}	1	5	B_{13}	1	6
B_2	3	4	B_5	2	5	B_8	2	6	B_{11}	2	4	B_{14}	2	3
B_3	5	6	B_6	4	6	B_9	3	5	B_{12}	3	6	B_{15}	4	5

(ii) Tipo II: os blocos não podem ser agrupados em repetições, mas podem ser agrupados em grupos de repetições.

Ex.: $t=5$, $k=2$, $b=10$

$$bk=rt \Rightarrow r = \frac{bk}{t} = \frac{(10)(2)}{5} = 4$$

$$\lambda(t-1) = r(k-1) \Rightarrow \lambda = \frac{r(k-1)}{t-1} = \frac{4(2-1)}{5-1} = 1$$

$$b' = \frac{b}{r} = \frac{10}{4} = 2.5 \ (?)$$

Não é possível arranjar os blocos em repetições de tratamentos sem que um deles fique "partido" , e, então, tomam-se grupo de repetições.

GRUPO I			GRUPO II		
Rep. I e II			Rep. III e IV		
B_1	1	2	B_6	1	4
B_2	3	4	B_7	2	3
B_3	2	5	B_8	3	5
B_4	1	3	B_9	1	5
B_5	4	5	B_{10}	2	4

(iii) <u>Tipo III:</u> Os blocos não podem ser agrupados em repetições nem em grupos de repetições.

Ex.: $t=6$, $r=5$, $k=3$ $\qquad b = \frac{rt}{k} = \frac{(6)(5)}{3} = 10$

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{t-1} = \frac{5(3-1)}{6-1} = 2$$

B_1	1	2	5	B_5	1	4	5	B_8	2	4	6
B_2	1	2	6	B_6	2	3	4	B_9	3	5	6
B_3	1	3	4	B_7	2	3	5	B_{10}	4	5	6
B_4	1	3	6								

(c) <u>Análise de Variância Intrablocos:</u> $t=4$, $r=3$, $b=6$, $k=2$

Rep. I			Rep. II			Rep. III		
B_1	1	2	B_3	1	3	B_5	1	4
B_2	3	4	B_4	2	4	B_6	2	3

$\lambda=1$

Modelo: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \Leftrightarrow y_{ij} = \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

$$\underset{\sim}{y} = x\,\underset{\sim}{\theta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{32} \\ y_{42} \\ y_{13} \\ y_{33} \\ y_{24} \\ y_{44} \\ y_{15} \\ y_{45} \\ y_{26} \\ y_{36} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{y}}
=
\underbrace{\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}}_{x}
\underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\theta}}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{42} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{24} \\ \varepsilon_{44} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{45} \\ \varepsilon_{26} \\ \varepsilon_{36} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\varepsilon}}
$$

SEN $\quad x'x\,\underset{\sim}{\hat{\theta}} = x'\underset{\sim}{y}$

$$
\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccccc}
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right]}_{x'x}
\underbrace{\left[\begin{array}{c}
\hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \\ \hat{\tau}_4 \\ \hline \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_4 \\ \hat{\beta}_5 \\ \hat{\beta}_6
\end{array}\right]}_{\underset{\sim}{\hat{\theta}}}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{c}
y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \\ y_{4.} \\ \hline y_{.1} \\ y_{.2} \\ y_{.3} \\ y_{.4} \\ y_{.5} \\ y_{.6}
\end{array}\right]}_{x'\underset{\sim}{y}}
=
\left[\begin{array}{c}
T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ \hline B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6
\end{array}\right]
$$

Genericamente:

$$\left[\begin{array}{c|c} R & N \\ \hline N' & K \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{\underset{\sim}{\tau}} \\ \hline \hat{\underset{\sim}{\beta}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \underset{\sim}{T} \\ \hline \underset{\sim}{B} \end{array}\right]$$

R = diagonal $(r, r, \ldots, r)$ é a matriz diagonal do nº de repetições por tratamento;

K = diagonal $(k, k, \ldots, k)$ é a matriz diagonal do tamanho do bloco;

$N = {}_t\left[n_{ij}\right]_b$ $\quad n_{ij} \rightarrow 1$ se o tratamento i ocorre no bloco j
$\rightarrow 0$ se o tratamento i não ocorre no bloco j

é a matriz de incidência dos tratamentos nos blocos.

(1) $R\,\hat{\underset{\sim}{\tau}} + N\,\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{T}$

(2) $N'\hat{\underset{\sim}{\tau}} + K\,\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{B} \Rightarrow K^{-1}N'\hat{\underset{\sim}{\tau}} + K^{-1}K\,\hat{\underset{\sim}{\beta}} = K^{-1}\underset{\sim}{B} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\beta}} = K^{-1}\underset{\sim}{B} - K^{-1}N'\hat{\underset{\sim}{\tau}}$

Substituindo-se em (1) tem-se:

$$R\,\hat{\underset{\sim}{\tau}} + N\,K^{-1}\underset{\sim}{B} - N\,K^{-1}N'\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{T} \Rightarrow \underbrace{(R - N\,K^{-1}N')}_{C}\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underbrace{\underset{\sim}{T} - N\,K^{-1}\underset{\sim}{B}}_{Q}$$

$\therefore C\,\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q}$ que é o sistema de equações normais para efeitos ajustados de tratamentos, isto é, para efeitos de tratamentos ajustados para blocos (Sistema de Equações Normais Reduzidas).

K^{-1} = diagonal $(1/k, 1/k, \ldots, 1/k)$

$$C = R - N\,K^{-1}N' = R - \frac{1}{k}\,N\,N' = \begin{bmatrix} r & o & \ldots & o \\ o & r & \ldots & o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ o & o & \ldots & r \end{bmatrix} - \frac{1}{k}\begin{bmatrix} r & \lambda & \ldots & \lambda \\ \lambda & r & \ldots & \lambda \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda & \lambda & \ldots & r \end{bmatrix}$$

$$C_{ii} = r - \frac{1}{k}\,r = r\left[1 - \frac{1}{k}\right] = \frac{r(k-1)}{k}$$

$$C_{ii'} = -\frac{\lambda}{k} \quad ; \quad i \neq i'$$

C é uma matriz singular com posto (característica) $(t-1)$

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{T} - N K^{-1} \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{T} - \frac{1}{k} N \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{T} - \frac{1}{k} \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_t \end{bmatrix} - \frac{1}{k} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_t \end{bmatrix}$$

vetor de totais ajustados de tratamentos

onde A_i soma dos dos totais dos blocos ocorre o tratamento i

Assim $Q_i = T_i - \frac{1}{K} A_i$

Uma vez que C é singular para resolver o sistema, tomamos uma matriz A (matriz de Restrição) tal que $A \underset{\sim}{\hat{\tau}} = \emptyset$ e

$$\begin{array}{r} C \underset{\sim}{\hat{\tau}} = \underset{\sim}{Q} \\ - A \underset{\sim}{\hat{\tau}} = \emptyset \\ \hline \underbrace{(C-A)}_{M} \underset{\sim}{\hat{\tau}} = \underset{\sim}{Q} \end{array} \quad \therefore \quad M \underset{\sim}{\hat{\tau}} = \underset{\sim}{Q} \text{ onde M é não-singular,}$$

então $\underset{\sim}{\hat{\tau}} = M^{-1} \underset{\sim}{Q}$

No caso $A = -\frac{\lambda}{k} \hat{E}$

matriz de 1's

Assim $M = C - A \Rightarrow m_{ii} = \frac{r(k-1)}{k} + \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda(t-1)}{k} + \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda t - \lambda + \lambda}{k} = \frac{\lambda t}{k}$

$$m_{ii'} = -\frac{\lambda}{k} + \frac{\lambda}{k} = 0$$

$\therefore M = \text{diagonal} \left[\frac{\lambda t}{k}, \ldots, \frac{\lambda t}{k} \right] = \frac{\lambda t}{k} I$

e $M^{-1} = \frac{k}{\lambda t} I$, então $\underset{\sim}{\hat{\tau}} = \frac{k}{\lambda t} \underset{\sim}{Q}$ ou seja $\hat{\tau}_i = \frac{k}{\lambda t} Q_i$

Análise de Variância Intrablocos:

Causas de Variação	GL	SQ	QM	F
Blocos	b-1	SQB		
Tratamentos ($\alpha j.$)	t-1	$SQT_{\alpha j}$	$QMT_{\alpha j}$	$\frac{QMT_{\alpha j}}{QME}$
Erro Experimental	rt-b-t+1	SQE	QME	
Total	rt-1	SQTotal		

GL Erro: rt-1-(b-1)-(t-1) = rt-b-t+1

SQTotal e SQB de forma usual; SQE = SQTotal-SQB-$SQT_{\alpha j}$

$$SQT_{\alpha j} = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{Q} = \sum_{i=1}^{t} \hat{\tau}_i Q_i = \frac{k}{\lambda t} \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{Q} = \frac{k}{\lambda t} \sum_{i=1}^{t} Q_i^2 .$$

(d) Comparações Múltiplas:

Médias ajustadas de tratamentos:

$$\boxed{\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i} \quad \text{onde } \hat{\mu} = \frac{G}{rt} = \frac{G}{bk}$$

Sistema de equações reduzidas:

$$C\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \underset{\sim}{Q} \Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\tau}} = M^{-1}\underset{\sim}{Q}$$

$$V(\hat{\underset{\sim}{\tau}}) = M^{-1}\underbrace{V(\underset{\sim}{Q})}_{C\sigma^2}M^{-1} = M^{-1}C\,M^{-1}\sigma^2 = M^{-1}\sigma^2$$

Seja o contraste de efeitos de tratamentos $\underset{\sim}{l}'\underset{\sim}{\tau}$, então

$$V(\underset{\sim}{l}'\hat{\underset{\sim}{\tau}}) = \underset{\sim}{l}'V(\hat{\underset{\sim}{\tau}})\underset{\sim}{l} = \underset{\sim}{l}'\underbrace{M^{-1}}_{\frac{k}{\lambda t} I}\underset{\sim}{l}\,\sigma^2 = \frac{k}{\lambda t}\underset{\sim}{l}'\underset{\sim}{l}\,\sigma^2 = \frac{k}{\lambda t}\sum_{i=1}^{t} l_{ji}^2\,\sigma^2 .$$

como $\hat{\sigma}^2 = QME$, então $\hat{V}(\underset{\sim}{l}'\hat{\underset{\sim}{\tau}}) = \frac{k}{\lambda t}\sum_{i=1}^{t} l_{ji}^2\, QME$

Seja o contraste

$$\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_{i'} = (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i) - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_{i'}) = \hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}$$

Assim para o contraste entre 2 médias

$$\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_{i'} \Leftrightarrow \hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}$$

Tem-se que a variância é dada por $\frac{2K}{\lambda t}$ QME e

o erro padrão da diferença entre 2 médias:

$$s_d = \sqrt{\frac{2k}{\lambda t} \text{ QME}}$$

o erro padrão da média:

$$s_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{2} \hat{V}(\underset{\sim}{l}'\hat{\underset{\sim}{\tau}})} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{2k}{\lambda t} \text{ QME}} = \sqrt{\frac{k}{\lambda t} \text{ QME}}$$

Os testes de comparações múltiplas procedem-se da forma usual usando s_d ou $s_{\bar{y}}$ conforme o teste.

(e) Eficiência em relação a blocos completos:

BIB: $s_d^2 = \frac{2k}{\lambda t} \text{ QME}$

DBC: $s_d^2 = \frac{2\text{QME}}{r}$

$$E = \frac{1}{\dfrac{\frac{2k}{\lambda t} \text{ QME}}{\frac{2 \text{ QME}}{r}}} = \frac{\lambda t}{rk}$$

$$\boxed{E < 1}$$

$$\lambda(t-1) = r(k-1)$$

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{k-1}{t-1}$$

$$E = \frac{\lambda}{r} \frac{t}{k} = \frac{k-1}{t-1} \frac{t}{k} = \frac{\frac{k-1}{k}}{\frac{t-1}{t}} = \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{t}}$$

Como $k < t \Rightarrow 1/k > 1/t \Rightarrow E < 1$

(f) Decomposição da $SQT_{(Aj)}$ na análise intrablocos:

(1) Recompõem-se os totais de tratamentos através das médias

ajustadas de tratamentos, ou seja, obtém-se $\hat{T}_i = r\hat{\mu}_i$

(2) Procede-se, com estes totais recompostos, a decomposição da maneira usual, isto é, estruturando-se os contrastes de interesse e obtendo-se as somas de quadrados SQC_j .

(3) Obtém-se $SQC_{j(aj)} = \frac{\lambda t}{rk} SQC_j = E\ SQC_j$

e $\sum_{j=1}^{t-1} SQC_{j(aj)} = SQT_{(aj)}$

se os contrastes forem ortogonais.

Exemplo: Realizou-se um experimento para verificar se o tempo de reação de um processo químico depende do catalizador empregado. Foram utilizados 4 catalizadores e 4 lotes de matéria-prima (blocos), num esquema experimental em BIB. Os resultados obtidos foram:

Tratamentos (catalizadores)	Blocos (lotes de matéria-prima) 1	2	3	4	Total ($y_{i.}$)	
1	73	74	-	71	218	B_1: 134
2	-	75	67	72	214	B_2: 123
3	73	75	68	-	216	B_3: 234
4	75	-	72	75	222	B_4: 124
Total ($y_{.j}$)	221	224	207	218	870($y_{..}$)	

t=4 b=4 r=3 k=3 λ=2

ANÁLISE INTRABLOCOS

Tratamento	T_i	A_i	$\frac{1}{3}A_i$	$Q_i = T_i - \frac{1}{3}A_i$	$\hat{\tau}_i = \frac{3}{8}Q_i$	$\hat{\tau}_i Q_i$	$\hat{\mu}_i = 72,5 + \hat{\tau}_i$	
1	218	663	221	-3=-9/3	-9/8	81/24	71,375	b
2	214	649	649/3	-7/3	-7/8	49/24	71,625	b
3	216	652	652/3	-4/3	-4/8	16/24	72,000	b
4	222	646	646/3	20/3	20/8	400/24	75,000	a
Total	870			0	0	546/24=22,75		

$A_1 = 221 + 224 + 218 = 663$ ... $\hat{\mu} = \frac{y_{..}}{rt} = \frac{G}{rt} = \frac{870}{12} = 72,5$

$\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i$

ANOVA

C. Variação	GL	SQ	QM	F	P > F
Blocos	3	55			
Tratamentos αj	3	22,75	7,58	11,67*	0,012
Erro Exp.	5	3,25	0,65		
Total	11	81			

Teste de Tukey: $\Delta = q.05(4,5)$, $s\bar{y} = (5,22)(0,4937) = 2,577$

$$q.05(4,5) = 5,22 \; ; \; s\bar{y} = \sqrt{\frac{k}{\lambda t} QME} = \sqrt{\frac{3}{(2)(4)}(0,65)} = 0,4937$$

Eficiência: $E = \frac{\lambda t}{rk} = \frac{(2)(4)}{(3)(3)} = \frac{8}{9} = 0,89$

Decomposição de $SQT_{\alpha j}$ na análise intrablocos

Tratamentos	$\hat{\mu}_i$	$\hat{T}_i = r\hat{\mu}_i = 3\hat{\mu}_i$	Coeficientes dos contrastes C_{1i}	C_{2i}	C_{3i}	$C_{1i}\hat{T}_i$	$C_{2i}\hat{T}_i$	$C_{3i}\hat{T}_i$
1	71,375	214,125	1	1	1	214,125	214,125	214,125
2	71,625	214,875	1	1	-1	214,875	214,875	-214,875
3	72,000	216	1	-2	0	216	-432	0
4	75,000	225	-3	0	0	-675	0	0
						-30	-3	-0,75

C_1: (1+2+3) vs 4

C_2: (1+2) vs 3

C_3: 1 vs 2

$SQC_1 = \frac{(-30)^2}{(3)(12)} = 25$ $\qquad SQC_{1\alpha j} = E\, SQC_1 = \frac{8}{9}(25) = 22,22$

$SQC_2 = \frac{(-3)^2}{(3)(6)} = 0,5$ $\qquad SQC_{2\alpha j} = E\, SQC_2 = \frac{8}{9}(0,5) = 0,44$

$SQC_3 = \frac{(-0,75)^2}{(3)(2)} = 0,0938$ $\qquad SQC_{3\alpha j} = E\, SQC_3 = \frac{8}{9}(0,0938) = 0,08$

$SQT_{\alpha j} = 22,74$

(g) Análise com recuperação da informação interblocos

(i) Análise intrablocos:

Tipo I

C. Variação	GL
Blocos	b-1
Trat.$_{\alpha j}$	t-1
Erro	rt-b-t+1

— repetições - r-1

└— blocos dentro de repetições - b-r

Tipo II

C. Variação	GL	
Blocos	b-1	— grupos - g-1
		└— blocos dentro de grupos - b-g
Trat. αj	t-1	
Erro	rt-b-t+1	

Tipo III

C. Variação	GL
Blocos	b-1
Trat. αj	t-1
Erro	rt-b-t+1

(ii) Análise com recuperação da informação interblocos:

Na análise intrabocos, quando se estima os efeitos de tratamentos não se leva em consideração os efeitos de blocos. Porém contrastes entre blocos também dão informação sobre os efeitos de tratamentos.

Exemplo:

B_1: 1 2 3
(y_{11}) (y_{21}) (y_{31})

B_2: 1 2 4
(y_{12}) (y_{22}) (y_{42})

Modelo:
$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

$$\hat{B}_1 = \hat{y}_{11} + \hat{y}_{21} + \hat{y}_{31} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\beta}_1 + \hat{\mu} + \hat{\tau}_2 + \hat{\beta}_1 + \hat{\mu} + \hat{\tau}_3 + \hat{\beta}_1$$
$$= 3\hat{\mu} + 3\hat{\beta}_1 + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3$$

$$\hat{B}_2 = \hat{y}_{12} + \hat{y}_{22} + \hat{y}_{42} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\mu} + \hat{\tau}_2 + \hat{\beta}_2 + \hat{\mu} + \hat{\tau}_4 + \hat{\beta}_2$$
$$= 3\hat{\mu} + 3\hat{\beta}_2 + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_4$$

$\hat{B}_1 - \hat{B}_2 = 3(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) + (\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_4)$ $\therefore$ Um contraste entre blocos inclui um contraste entre tratamentos.

* Análise intrablocos ajustando tratamentos.

C. Variação	GL
Blocos	b-1
Trat. αj	t-1
Erro	rt-t-b-1

Modelo:

$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

$\varepsilon_{ij} \cap N(0, \sigma^2)$

* Análise intrablocos ajustando blocos.

C. Variação	GL	QM
$Blocos_{aj}$	$b-1$	$QMB_{aj} = V_b$
Trat.	$t-1$	
Erro	$rt-t-b-1$	$QME = V_r$

Modelo: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

$$\varepsilon_{ij} \cap N(0,\sigma^2) \quad \beta_j \cap N(0,\sigma^2_\beta)$$

$QMB_{aj} = V_b$ estima σ^2_β

13.03

Vale a identidade

$$SQB + SQTrat_{aj} = SQB_{aj} + SQTrat$$

A SQErro é a mesma nas duas análises.

Para procedermos à análise com recuperação da informação interblocos, definimos:

$$a = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + k\,\sigma^2_\beta} \qquad 0 \leq a \leq 1$$

O estimador de <u>a</u> varia de conformidade com o tipo de BIB considerado. Assim temos:

Tipo I: $\hat{a} = \dfrac{(r-1)\,V_r}{rV_b - V_r}$

Tipo II: $\hat{a} = \dfrac{[t(r-1)-k(g-1)]\,V_r}{k(b-g)\,V_b - (t-k)\,V_r}$

Tipo III: $\hat{a} = \dfrac{(bk-t)\,V_r}{k(b-1)\,V_b - (t-k)\,V_r}$

UFRGS
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

Uma vez estimado $\underline{a}$, estruturamos para cada tratamento $\underline{i}$:

$$M_i = Q'_i + \hat{a}\, A_i - \hat{a}\, \frac{k}{t}\, G = Q'_i + \hat{a}\left(A_i - \frac{k}{t}\, G\right)$$

onde $\quad Q_i = k\, Q'_i = k\left(T_i - \frac{A_i}{k}\right) = k\, T_i - A_i$

Assim virá:

$$M_i = k\, T_i - A_i + \hat{a}\, A_i - \hat{a}\, \frac{k}{t}\, G$$

$$= k\, T_i - (1-\hat{a})A_i - \hat{a}\, \frac{k}{t}\, G$$

e ainda $\quad \hat{\tau}_i^{\,*} = \dfrac{M_i}{\lambda t + (r-\lambda)\hat{a}}$

e $\quad SQTrat^{*}_{aj} = \dfrac{1}{k} \sum_i \hat{\tau}_i^{\,*}\, M_i = \dfrac{1}{k\,[\lambda t + (r-\lambda)\hat{a}]} \sum_i M_i^{\,2}$

$$QMTrat^{*}_{aj} = \frac{SQTrat^{*}_{aj}}{t-1}$$

$$FTrat^{*}_{aj} = \frac{QMTrat^{*}_{aj}}{QMErro} \qquad \text{[Teste aproximado]}$$

Algumas considerações sobre a variação de $\hat{a}$:

(i) $\underline{\text{Se } \hat{a} = 1}$

$SQTrat^{*}_{aj} = SQTrat$ usual $\Leftrightarrow$ Análise em blocos completos

(ii) $\underline{\text{Se } \hat{a} = 0}$

$SQTrat^{*}_{aj} = SQTrat_{aj} \quad \Leftrightarrow \quad$ Análise intrablocos

Models MIXED

trat. fixe
bloco aleat. ☒ Random effects

Options -> type 1

trat -> LS mean

tukey

Comparações múltiplas:

Médias ajustadas: $\hat{\mu}_i^* = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i^*$

- Erro Padrão da ≠ entre 2 médias

$$sd = \sqrt{\frac{2k}{\lambda t+(r-\lambda)\hat{a}} QME}$$

- Erro Padrão da média

$$s\bar{y} = \sqrt{\frac{k}{\lambda t+(r-\lambda)\hat{a}} QME}$$

Decomposição da SQ Tratamentos* αj

1) Recompor os totais T_i através das médias ajustadas:

$$\hat{T}_i^* = r\,\hat{\mu}_i^* \qquad (\hat{\mu}_i^* = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i^*)$$

2) Calcular as SQC_j da maneira usual, a partir dos totais $\hat{T}_i^*$.

3) Ajustar a SQC_j através do fator

$$f = \frac{\lambda t + (r-\lambda)\hat{a}}{rk}$$

isto é $SQC_{j\,\alpha j} = f\,SQC_j$

Se contrastes ortogonais $\sum_{j=1}^{t-1} SQC_{j\,\alpha j} = SQT^*_{\alpha j}$

Exemplo: Análise com recuperação da informação interblocos.

C. Variação	GL	SQ	QM
Blocos αj	3	66,08	22,03 = V_b
Tratamentos	3	11,67	
Erro	5	3,25	0,65 = V_r

$$\hat{a} = \frac{(bk-t)\,V_r}{k(b-1)V_b-(t-k)V_r}$$

$$= \frac{[4(3)-4]\;0,65}{3(4-1)22,03-(4-3)0,65}$$

$$= 0,0263 \cong 0$$

As estimativas com recuperação da informação interblocos estarão muito próximas das estimativas intrablocos.

$$M_i = Q'_i + \hat{a}\, A_i - \hat{a}\,\frac{k}{t}\, G = k\, T_i - A_i + \hat{a}\, A_i - \hat{a}\,\frac{k}{t}\, G$$

$$= k\, T_i - (1-\hat{a})\, A_i - \hat{a}\,\frac{k}{t}\, G = 3\, T_i - 0{,}9737\, A_i - 0{,}0197\, G$$

$$= 3\, T_i - 0{,}9737\, A_i - 17{,}1608$$

Tratamentos	T_i	$3T_i$	A_i	M_i	$\hat{\tau}_i*$	$\hat{\tau}_i* M_i$	$\hat{\mu}_i* = 72{,}5+\hat{\tau}_i*$	
1	218	654	663	-8,7239	-1,08	9,4828	71,4131	a
2	214	642	649	-7,0921	-0,8836	6,2666	71,6164	a
3	216	648	652	-4,0132	-0,5000	2,0066	72,0000	a
4	222	666	646	19,8290	2,4705	48,9876	74,9705	b
Total	870			-0,0002	0	66,7429		

$$\hat{\tau}_i* = \frac{M_i}{\lambda t + (r-\lambda)\hat{a}} = \frac{M_i}{8 + (3-2)0{,}0263} = \frac{M_i}{8{,}0263}$$

$$SQ\ \overset{*}{Trat.}_{\alpha j} = \frac{1}{k}\sum_i \hat{\tau}_i*\, M_i = \frac{1}{3}(66{,}7429) = 22{,}2476$$

$$QM\ \overset{*}{Trat.}_{\alpha j} = \frac{SQ\ \overset{*}{Trat.}_{\alpha j}}{3} = \frac{22{,}2476}{3} = 7{,}4159$$

$$F\ \overset{*}{Trat.}_{\alpha j} = \frac{QM\ \overset{*}{Trat.}_{\alpha j}}{QME} = \frac{7{,}4159}{0{,}65} = 11{,}41\ *$$

Teste de Tukey:

$$\Delta = q.05(4,5)s\bar{y} = (5{,}22)(0{,}4929) = 2{,}5729$$

$$q.05(4,5) = 5{,}22\ ;\ s\bar{y} = \sqrt{\frac{k}{\lambda t+(r-\lambda)\hat{a}}\,QME} = \sqrt{\frac{3}{8+0{,}0263}(0{,}65)} = 0{,}4929$$

Médias ajustadas:

$$\hat{\mu}_i* = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i* = 72{,}5 + \hat{\tau}_i*$$

Decomposição da $SQT^*_{\alpha j}$: C_1: (1+2+3) vs 4

C_2: (1+2) vs 3

C_3: 1 vs 2

Tratamentos	$\hat{\mu}_i^*$	$\hat{T}_i^*=r\hat{\mu}_i^*=3\hat{\mu}_i^*$	C_{1i}	C_{2i}	C_{3i}	$C_{1i}\hat{T}_i^*$	$C_{2i}\hat{T}_i^*$
1	71,4131	214,2343	1	1	1	214,2393	214,2393
2	71,6164	214,8492	1	1	-2	214,8492	214,8492
3	72	216	1	-2	0	216	-432
4	74,9705	224,9115	-3	0	0	-674,7375	0
Total						-29,6490	-2,9115

$C_{3i}\hat{T}_i^*$
214,2393
-214,8492
0
0
0,6099

$$f=\frac{\lambda t+(r-\lambda)\hat{a}}{rk}=\frac{(2)(4)+(3-2)0,0263}{(3)(3)}=0,8919$$

$$SQC_1=\frac{(-29,6490)^2}{(3)(12)}=24,4184 \qquad SQC^*_{1aj}=21,7763$$

$$SQC_2=\frac{(-2,9115)^2}{(3)(6)}=0,4709 \qquad SQC^*_{2aj}=0,4270$$

$$SQC_3=\frac{(-0,6099)^2}{(3)(2)}=0,0620 \qquad SQC^*_{3aj}=0,0553$$

$$SQT^*_{aj}=22,2516$$

Então, para k = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11 etc... unidades por bloco existem planos de reticulados equilibarados, ou seja:

Nº de tratamentos	k^2	16	25	49	64	81
Unidades por bloco	k	4	5	7	8	9
Repetições	r	5	6	8	9	10

Não existem reticulados equilibrados para 36, 100 ou 144 tratamentos.

A vantagem que apresentam os reticulados equilibrados, bem como apresentam os blocos incompletos equilibrados (o reticulado equilibrado nada mais é do que um bloco incompleto equilibrado do tipo I e é analisado da mesma maneira), é que todas as comparações de tratamentos são feitas com igual precisão e a análise estatística é menos complexa.

A desvantagem consiste que quando o nº de tratamentos é relativamente alto, não existem planos equilibrados que tenham ao mesmo tempo blocos pequenos e moderado nº de repetições.

Então, para 64 tratamentos, necessitamos de 9 repetições para se obter um reticulado equilibrado, exigindo portanto, 576 unidades experimentais que é um exagero. Experimentos com elevado nº de tratamentos nada mais são do que provas preliminares tendo por objetivo selecionar alguns poucos tratamentos que deverão sofrer uma pesquisa posterior mais detalhada e, portanto, nesse estágio inicial, não é necessário uma alta precisão, sendo portanto indicado o uso de delineamentos menos exigentes quanto ao nº de repetições como os reticulados parcialmente equilibrados ou simplesmente reticulados (lattices).

5.2 - Reticulados (lattices)

a) **Utilização:** Os reticulados são delineamentos em blocos incompletos que mais se apropriam a trabalhos de melhoramento vegetal, nos quais geralmente se tem um grande nº de tratamentos e blocos com tamanho que não exceda o nº de parcelas que geralmente é recomendado para a experimentação a campo em torno de 12 a 16 parcelas.

5. RETICULADOS (Lattices)

Reticulados são delineamentos em blocos incompletos aos quais os tratamentos de um bloco numa repetição se distribuem por todos os blocos de qualquer das outras repetições.

5.1 - Reticulados Equilibrados (Lattices equilibrados)

O reticulado mais simples é o chamado reticulado quadrado (= square lattice), onde o nº de tratamentos é um quadrado perfeito e o nº de tratamentos do bloco é a raíz quadrada desse nº, ou seja $t = k^2$

Exemplo: Reticulado 3 x 3 = 9 Tratamentos $k = \sqrt{t} = \sqrt{9} = 3$

Blocos	Rep. 1	Blocos	Rep. 2	Blocos	Rep. 3	Blocos	Rep. 4
1	1 2 3	4	1 4 7	7	1 5 9	10	1 6 8
2	4 5 6	5	2 5 8	8	2 6 7	11	2 4 9
3	7 8 9	6	3 6 9	9	3 4 8	12	3 5 7

Verifica-se que os tratamentos do 1º bloco na 1ª repetição (1, 2, 3) estão repartidos um para cada bloco na 2ª, 3ª e 4ª repetições, o mesmo acontecendo com os tratamentos de qualquer bloco e de qualquer repetição. Repetições desse tipo são chamadas de repetições ortogonais (os tratamentos de um bloco de uma repetição estão repartidos para cada bloco em outra repetição). Portanto, no nosso exemplo, temos 4 repetições ortogonais.

Verifica-se, também que um tratamento qualquer aparece com cada um dos outros tratamentos um mesmo nº de vezes no mesmo bloco incompleto, isto é, $\lambda = 1$. Logo, todos os pares de tratamentos são comparados com a mesma precisão, e portanto, um reticulado com essa característica é um reticulado equilibrado.

Sempre que k é um nº primo ou potência de um nº primo, temos k + 1 repetições ortogonais para o reticulado equilibrado.

b) **Caracterização:** Nos reticulados nem todos os pares de tratamentos ocorrem juntos num mesmo bloco.

Aqueles que ocorrem juntos num mesmo bloco, são chamados de 1ºs associados ($\lambda = 1$) e os que não ocorrem juntos, de 2ºs associados ($\lambda = 0$). As comparações entre tratamentos 1ºs associados são mais precisas do que as comparações entre os 2ºs associados. Variância (1ºs associados) < Variância (2ºs associados)

Essa diferença em precisão entre as comparações, geralmente não são grandes, mesmo quando se tem poucas repetições e pode-se na maioria das vezes utilizar uma variância média para comparação de pares de tratamentos.

c) **Classificação dos reticulados:**

1. Reticulados quadrados (square lattices): O nº de tratamentos é um quadrado perfeito ($t = k^2$) e o tamanho do bloco é k.

Especialmente utilizado quando se tem:

k^2	25	36	49	64	81	100	121
k	5	6	7	8	9	10	11

(i) Reticulado simples: Usa-se as duas primeiras repetições do reticulado equilibrado. Pode-se repetir o reticulado, obtendo- se 4 repetições.

(ii) Reticulado tríplice: Usa-se as 3 primeiras repetições do reticulado equilibrado. Pode-se repetir o reticulado, obtendo- se 6 repetições.

2. Reticulados Cúbicos (Cubic lattices): Nos reticulados cúbicos, o nº de tratamentos é um cubo perfeito, isto é, $t = k^3$ e k é o tamanho do bloco. São úteis esses reticulados no caso de um grande nº de tratamentos, principalmente em trabalhos de melhoramento vegetal como:

k^3	125	216	343	512	729	1000
k	5	6	7	8	9	10

3. Reticulados Retangulares: Esses reticulados foram desenvolvidos para comparar k (k - 1) tratamentos em blocos de k unidades.

Esses reticulados complementam os reticulados quadrados pois estabelecem delineamentos para nº de tratamentos que se situam de forma intermediária a aqueles supridos pelos reticulados quadrados, tais como: 12, 20, 30, 42, 56, 72, ...

Para esses delineamentos requer-se um mínimo de 2 repetições.

d) **Arranjo do Material Experimental:**

As unidades dentro do mesmo bloco incompleto, devem ser o mais homogêneas possíveis, e esses blocos incompletos, devem ser tão quadrados quanto possível, e as técnicas experimentais devem ser mantidas uniforme entre as unidades do mesmo bloco.

Se os blocos dentro da mesma repetição forem tão similares ocorre um aumento de precisão das comparações interblocos. No entanto, se se fizer uma análise com recuperação das informações interblocos, é mais importante ter blocos incompletos homogêneos do que repetições homogêneas.

e) **Casualização:**

Casualização Experimental

(i) Sorteio de posições de tratamentos dentro de cada bloco incompleto.

(ii) Sorteio de posições dos blocos incompletos dentro de cada repetição.

(iii) Atribuir por sorteio os tratamentos (A, B, C...) os nºs que são utilizados para representá-los (1, 2, 3,..)

(iv) É utilizada quando todas as comparações entre tratamentos tiver a mesma importância e dado que V (1ºs associados) < V (2ºs associados) e utilizando-se esse procedimento pode-se, portanto, nessas situações utilizar uma variância média para efetuar comparações entre qualquer par de tratamentos.

BIBLIOGRAFIA

CAMPOS, H., 1984. **Estatística Aplicada à Experimentação com Cana-de-açúcar.** FEALQ.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. **Experimental Designs.** John Wiley.

GOMEZ, K.A. e A.A. GOMEZ, 1984. **Statistical Procedures for Agricultural Research.** John Wiley.

MARKUS, R. 1973. **Elementos de Estatística Aplicada.** Diretório Acadêmico Leopoldo Cortez. Faculdade de Agronomia/UFRGS.

MARKUS, R. 1977. **Elementos de Estatística Aplicada, Partes I e II.** Faculdade de Agronomia/UFRGS.

MONTGOMERY, D.C., 1991. **Design and Analysis of Experiments.** John Wiley.

OSTLE, B. e R.W. MENSING, 1975. **Statistics in Research.** Iowa State University.

PIMENTEL GOMES, F., 1985. **Curso de Estatística Experimental.** Liv. Nobel.

SNEDECOR, G.M. e W.G. COCHRAN, 1980. **Statistical Methods.** Iowa State University.

STEEL, R.G. e J.H. TORRIE, 1980. **Principles and Procedures of Statistics.** McGraw-Hill.

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS

Cadernos de Matemática e Estatística

Série B: Trabalho de Apoio Didático

1. Elsa Mundstock - Curso Básico Sobre Wordstar 3.45 - MAR/89

2. Jaime B. Ripoll - Introdução ao Cálculo Diferencial Via Funções de Uma Variável Real - OUT/89

3. Edmund R. Puczylowski - Dimension of Modular Lattices - JUN/90

4. Marcos Sebastiani - Geometrias Não Euclidianas - JUL/90

5. Sandra R. C. Pizzatto - Cálculo Numérico - AGO/91

6. Vera Clotilde G. Carneiro - Elementos de Cálculo para Biologia - AGO/91

7. Elsa Mundstock - Iniciação ao SPSS/PC - SET/91

8. Elisa Hagg, Loiva C. de Zeni, Maria Alice Gravina e Vera Carneiro - Notas da 1ª Oficina de Matemática da UFRGS - JAN/92

9. Paulo Werlang de Oliveira, Elisabete Rambo, Suzana Lima dos Santos, Coordenação: Profª Maria Alice Gravina - A Tartaruga no Espaço Tridimensional - FEV/92

10. Silvio Possoli - Análise Multivariada - JUL/92

11. Dinara Westphalen Fernandez - Números índices - OUT/92

12. Maria Teresinha Albanese - Coeficiente de Fidedignidade de um Instrumento de Medida - OUT/92

13. Vera Clotilde Carneiro e Sérgio Cláudio Ramos - Gráficos na Escola - DEZ/92

14. João Riboldi - Elementos Básicos de Estatística - JAN/93

15. Paulo W. de Oliveira e M. Alice Gravina - Logo: Manual do Usuário - MAR/93

16. Ruben Markus, Elsa C. de Mundstock, Dinara W. X. Fernandez e João Riboldi - Exercícios de Métodos Estatísticos - AGO/93

17. Loiva C. de Zeni e M. Alice Gravina - Sugestões de Atividades no Ambiente Logo para a Exploração de Conteúdos Matemáticos dos Currículos Escolares de 1º e 2º Grau - SET/93

18. João Riboldi - Delineamentos Experimentais de Campo, Parte 1 - SET/93

19. Marlusa Benedetti, Patrícia P. Gil, Shirley I. Techera, Angela Andreotti, Milene Milan, Marlise Moraes, Luciana Santos, Augustinho Zimmermann, Coordenação: Profª Maria Alice Gravina - Atividades em Geometria Usando Recortes - OUT/93

20. João Riboldi - Delineamentos Experimentais de Campo, Parte 2 - OUT/93

21. Anne C. Rutsatz, Édina R. de C. Alexandre, Gorete Losada, M. Alice Gravina, Rosamary P. Disconzi, Shirley Techera e Vera C. G. Carneiro - O Pensamento e a Linguagem da Álgebra: Tabelas, Gráficos e Equações - DEZ/93

22. Dinara W. X. Fernandez - Estatística Descritica I - JAN/94

23. João Riboldi - Planejamento e Análise de Experimentos, Parte 1 - FEV/94

24. Dinara W. X. Fernandez - Estatística Descritiva II - AGO/94

25. João Riboldi e Lídia do C. S. C. do Nascimento - Metodologia de Superfície de Resposta: Uma Abordagem Introdutória - NOV/94

26. Júlio Cesar Ruiz Claeyssen - Métodos Operacionais e Computacionais em Álgebra Matricial - MAR/95

27. João Riboldi - Análise de Variância - MAR/95

28. João Riboldi - Experimentos Fatoriais - MAI/95

29. João Riboldi - Planejamento e Análise de Experimentos, Parte 2 - JUN/95

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRACURRICULARES

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:

Série A: Trabalho de Pesquisa

Série B: Trabalho de Apoio Didático

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

Série D: Trabalho de Graduação

Série F: Trabalho de Divulgação

Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:

NAEC - NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRACURRICULARES
INSTITUTO DE MATEMATICA - UFRGS
AV. BENTO GONÇALVES, 9500 - PRÉDIO 43111
CEP 91509 - 900 AGRONOMIA - POA/RS
FONE: 336 92 22 OU 339 13 55 OU 228 16 33
RAMAL 6197
FAX: 336 15 12