

O CAOS

Vera Clotilde G. Carneiro
Série C, nº 6, SET/88

O CAOS

Vera Clotilde Garcia Carneiro

Setembro, 1988

Para o homem, entender e controlar os fenômenos naturais e sociais é questão de sobrevivência e fator de progresso. O homem deseja compreender os padrões de comportamento das águas do rio e do jorro da fonte; deseja evitar a turbulência nas asas dos aviões; deseja prever o futuro na Terra das diferentes espécies de seres vivos e pergunta-se há milênios sobre o futuro do Universo.

Cientificamente, cada fenômeno é observado, seus detalhes são minuciosamente descritos e com o auxílio da Matemática e da Estatística, procura-se equações que o representem.

Passamos do real para um modelo matemático.

Este modelo, no qual se expressa a evolução do fenômeno no tempo, é um sistema Dinâmico.

Pode-se pensar num sistema Dinâmico como uma forma de descrever a evolução temporal de todos os pontos de um espaço E . E pode ser, por exemplo, o espaço de estados de um sistema físico ou biológico.

No caso mais simples o tempo será discreto (um n° natural) e a evolução é dada por $x_{n+1} = f(x_n)$, onde x_n é um vetor m -dimensional, m é o n° de variáveis envolvidas no problema e f uma função diferenciável em R^m .

Estes sistemas se prestam para descrever fenômenos da Biologia ou Economia, onde o tempo é medido em anos, meses ou gerações.

Um sistema dinâmico contínuo é descrito pela equação diferencial.

$$\frac{d}{dt}x = f(x)$$

São os mais usados na Física e Química.

No caso do sistema discreto $x_{n+1} = f(x_n)$, conhecer a evolução de um estado x é explicitar a sequência x_0, x_1, x_2, \dots , chamada de órbita positiva de x , onde $x_0 = x$. No caso do sistema contínuo $\dot{x} = f(x)$, conhecer a evolução de um estado x_0 é resolver a equação com condição inicial x_0 . Para realizar previsões sobre o comportamento futuro (assintótico) do sistema é desejável que as soluções dependam continuamente das condições iniciais. Isto, é

condições iniciais próximas permaneçam próximas, à medida que o tempo passa, de modo que, pequenos erros cometidos nas observações iniciais não cresçam muito com o tempo.

Além disso é necessário identificar os atratores do sistema. Um atrator A é um conjunto invariante pela evolução temporal e tal que as soluções vizinhas tendem para A quando $t \rightarrow \infty$.

Sistemas Lineares

Os sistemas dinâmicos mais simples são os lineares. Suas equações são $\dot{x} = Ax$ ou $x_{n+1} = Ax_n$, onde A é uma matriz real $m \times m$ e $x \in R^m$.

Estas equações tem solução analítica para qualquer condição x_0 e as soluções dependem continuamente das condições iniciais. Cada sistema possui no máximo um atrator e este é pontual, o ponto de equilíbrio do sistema.

Difícilmente um sistema linear é um bom modelo para o mundo real. Suponha que $x_{t+1} = A \cdot x_t$, com $A \neq 1$, $x_t \in R$, $t \in N$ é um modelo para a evolução de uma população de seres vivos, onde A é a taxa de crescimento populacional anual observada. Se $A > 1$, a população cresce sem limites, tende a infinito; se $A < 1$ a população está condenada à extinção. Este quadro não corresponde à realidade. Uma população de indivíduos, em condições normais, tende a permanecer limitada. A própria natureza tem meios para impedir a explosão populacional. Pode-se afirmar que a natureza não é linear.

Em [1] vemos que é possível, através das leis da Física, construir um modelo matemático não linear para um circuito do tipo RLC . Este circuito é composto de um resistor R , um capacitor C e um indutor L .

O modelo encontrado para retratar a evolução no tempo dos valores de voltagem e corrente em R , L e C é o sistema de equações diferenciais a um parâmetro real μ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_\mu(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

onde $x = i_R = i_L$ corrente em R e L

$y = v_C =$ voltagem em C

$f_\mu =$ função característica do resistor.

" μ " pode ser determinado, por exemplo, pela temperatura do resistor. À medida que a temperatura aumenta, a característica do resistor, e consequentemente, todo o sistema, se altera.

Consideremos $f_\mu(x) = x^3 - \mu x$.

Se $0 < \mu < 1$, o circuito está fadado à morte. Isto é, sejam quais forem

os valores da corrente e voltagem de R , L e C inicialmente considerados, todos tendem a zero com o tempo. Zero é o atrator do sistema.

Se $\mu = 1$, temos a conhecida Equação de Van der Pol que é um exemplo fundamental dos sistemas não lineares. Esta equação possui uma solução periódica que é o atrator do sistema. Toda solução não trivial tende a esta solução; nenhum fluxo linear pode ter esta propriedade. Fisicamente, o circuito permanece vivo e oscilante.

Este comportamento persiste para qualquer valor de $\mu \geq 1$, de modo que o sistema é regular e previsível para qualquer valor de μ .

O valor de $\mu = 1$ é chamado um valor de bifurcação pois representa uma fronteira entre dois tipos de estrutura diferente relativas do mesmo sistema.

Sistemas Dinâmicos Caóticos

Constatou-se que em muitos sistemas não lineares a um parâmetro μ existe um valor de bifurcação μ_0 onde o sistema passa da ordem para o caos.

Os Sistemas Dinâmicos Caóticos são formados por equações que não possuem soluções analíticas; têm como característica básica a "sensível dependência das condições iniciais", isto é, órbitas com condições iniciais próximas afastam-se exponencialmente; os atratores são estranhos, nem pontos nem órbitas periódicas; a evolução temporal se dá de forma quase aleatória.

Uma equação com um atrator estranho tem órbitas que pulam, imprevisivelmente entre as vizinhanças de muitos pontos diferentes, permanecendo por um momento perto de um deles e logo se movendo em direção a outro.

A consequência deste comportamento caótico é a total impossibilidade de prever o futuro do fenômeno.

A dimensão mínima em que pode ocorrer o caos, nas equações diferenciais, é 3. Nas equações a diferenças, o caos pode aparecer em dimensão 1.

- Equação de Lorenz - um modelo meteorológico [13]

Edward Lorenz em 1963, publicou um exemplo de sistema caótico tridimensional, visando uma descrição dos fenômenos meteorológicos.

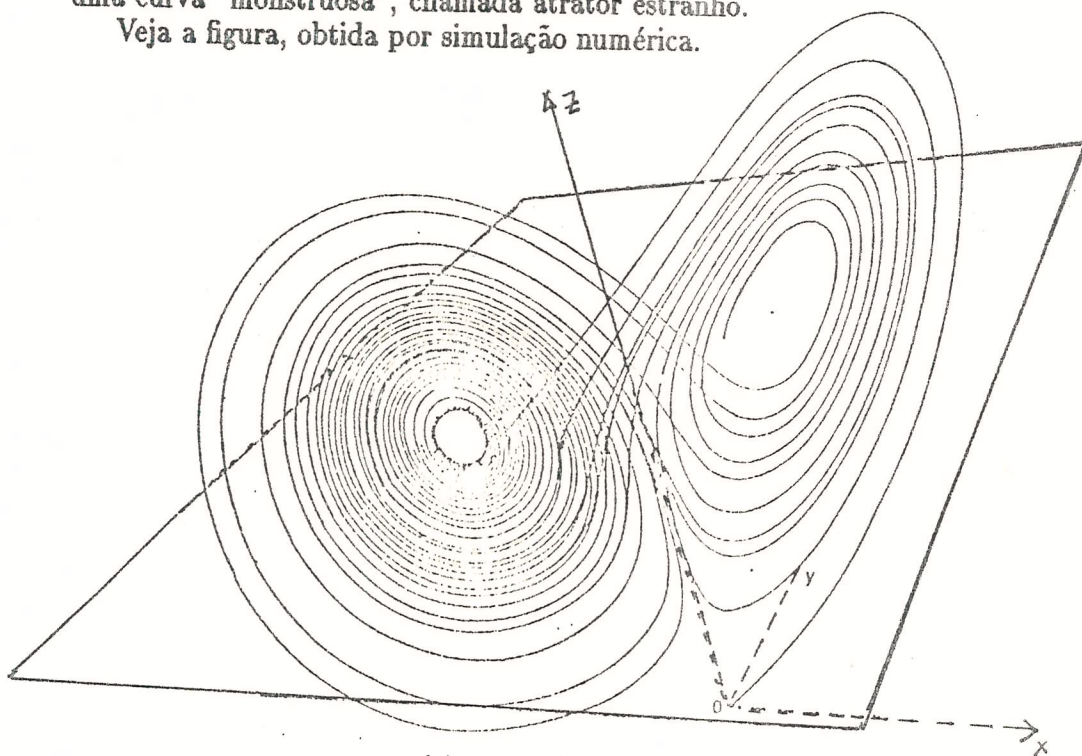
Lorenz imaginou a atmosfera como um recipiente com fluidos, aquecido pelo sol. Simplificando ao máximo, ele descreveu o movimento de convecção dos fluidos por meio de três variáveis X, Y, Z , que representam, a grosso modo, a intensidade do movimento, a diferença de temperatura entre correntes ascendentes e descendentes e a forma dos gradientes de temperatura; ele obteve as equações seguintes:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = yz + ax - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

t é o tempo e as constantes a, b, c dependem da energia recebida, da viscosidade, etc.

São equações simples com soluções extremamente complicadas. Para alguns valores de a, b, c a órbita do ponto de coordenadas X, Y, Z tende à uma curva "monstruosa", chamada atrator estranho.

Veja a figura, obtida por simulação numérica.



Lorenz verificou uma sensível dependência das condições iniciais, a que ele chamou "Efeito Borboleta": o leve rufar das asas de uma borboleta, no momento em que são medidas as condições meteorológicas, ocasionou um erro, que cresce rápida e exponencialmente, impedindo previsões corretas mesmo a curto prazo.

- Turbulência nos Fluidos

O principal exemplo de sistema caótico é o problema da turbulência do

fluxo em fluidos. A equação de Lorenz é uma versão simplificada da equação de Navier-Stokes [5], equação determinística, sem soluções analíticas que ainda são um problema aberto na Física e Matemática. De uma maneira geral um modelo para a evolução temporal de um fluido viscoso incompressível, contido num recipiente com bordo é um sistema a um parâmetro real, do tipo $\frac{dx}{dt} = f(x)$ onde x varia num espaço de dimensão infinita.

Para manter o fluido em estado de turbulência deve-se agir sobre ele, caso contrário o fluido tenderá ao repouso. O parâmetro ν mede a intensidade desta força exterior.

Se ν é pequeno, as soluções tendem a um estado estacionário (um ponto fixo da evolução temporal). Quando ν cresce encontra-se soluções periódicas e, posteriormente, o comportamento complicado correspondente à entrada na turbulência.

Uma idéia fundamental da teoria moderna da turbulência é a da casca de energia. A imagem utilizada é aquela de grandes turbilhões que se partem em gerações sucessivas de turbilhões mais e mais pequenos. Um dos problemas ainda em aberto com respeito à fluidos é dar uma existência matemática dos turbilhões e do processo de fissão em turbilhões menores.

- A Rota do Caos -

Vamos tentar visualizar a entrada na turbulência, no escoamento de um fluido. [3]

Se alguém coloca um corpo numa corrente de um fluido - por exemplo uma coluna de uma ponte num rio - então para pequenas velocidades (fig. a) o fluido tem fluxo regular e independente do tempo. Diz-se que o fluxo é laminar.

À medida que a velocidade cresce, o movimento ganha redemoinhos, mas permanece independente do tempo. (fig. b)

Para valores ainda maiores da velocidade, os redemoinhos podem se desdobrar em outros e começar a se mover corrente abaixo. Isto induz um padrão de fluxo dependente do tempo (visto da ponte). A velocidade medida num ponto mais abaixo da corrente ganha uma dependência periódica. (fig. c)

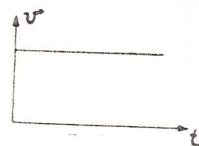
O parâmetro que caracteriza estas mudanças no fluxo é o número de Reynolds, que é produto da velocidade e densidade por uma característica de medida (tamanho da coluna da ponte) dividido por viscosidade.

À medida que R cresce, os redemoinhos começam a induzir redemoinhos internos. Neste caso aparece uma velocidade que varia, parcialmente periódica e parcialmente irregular. (fig. d)

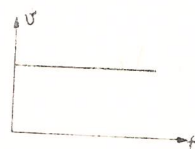
Crescendo R ainda mais, um campo de velocidades muito complexo é

induzido e $v(t)$ parece completamente caótico. (fig. e).

a) $R = 10^{-2}$



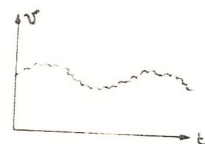
b) $R = 20$



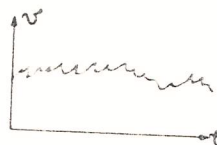
c) $R = 100$



d) $R = 10^4$



e) $R = 10^6$



Há, é claro, o desejo de entender esta transição para a turbulência em sistemas hidrodinâmicos. Deve-se, porém, salientar que este comportamento não é exclusivo deste sistema.

Em [12] observa-se uma transição para o caos, semelhante à dos fluidos, em descargas elétricas em gases contidos em tubos.

O interesse em plasmas gasosos vem de sua aplicação prática (meio para a propagação dos raios laser) seu potencial de aplicação (fusão controlada) ou do estudo de suas propriedades intrínsecas, indo da complexa estrutura do plasma até aos fenômenos de propagação da onda.

Nas experiências relatadas pelo Professor Ricardo Franke e seus colegas, observa-se o comportamento caótico em plasma gasosos sujeitos a descarga elétrica e é mostrado que, dependendo dos parâmetros, a corrente através da descarga, assim como a luz proveniente da descarga, pode ficar estacionária, oscilante ou, finalmente, caótica. Observa-se a rota para o caos do tipo duplicação de períodos em cascata, que é interrompida com a aparição de uma oscilação de período múltiplo de outros números não pares (essencialmente 3 e 5). Estas oscilações podem ser obtidas monitorando a voltagem ou a corrente. As principais características das oscilações dependem do gás usado, pressão total, diâmetro do tubo, etc.

A passagem para o caos nos fluidos e nas descargas não está totalmente explicado.

No entanto, existem sistemas matemáticos discretos muito simples, em uma dimensão, que apresentam a mesma estrutura qualitativa, e que se encontram totalmente analisados, com o auxílio dos computadores e da análise matemática qualitativa.

Equação Logística - um modelo biológico [3] [9]

Talvez o exemplo mais simples de sistema não linear seja a equação logística:

$$x_{n+1} = a \cdot x_n (1 - x_n) \quad (1)$$

Esta equação aparece naturalmente no estudo da evolução de população biológica. De fato quem mostrou sua importância foi o biólogo Robert May. Podemos encarar a equação logística como um modelo para a evolução anual de uma população biológica x_n , tal como as "mariposas ciganas" do nordeste dos EUA, que exibem flutuações imprevisíveis ano a ano.

Especificamente x_n é a razão da população real no n-ésimo ano com relação a uma população de referência.

x_{n+1} é a razão de população do próximo ano.

x_n determina x_{n+1} pela equação:

$$x_{n+1} = r x_n - s x_n^2 \quad (2)$$

O primeiro termo $r \cdot x_n$ representa o crescimento natural da razão da população; o termo $(s \cdot x_n^2)$ representa a redução deste crescimento natural causado pelo crescimento demasiado da população.

Quando $r > 1$, o primeiro termo expressa um aumento na população por um fator r em cada ano. Se este fosse o único termo, a população cresceria exponencialmente. O segundo termo representa a redução no crescimento populacional causado, por exemplo, pela competição pelos suprimentos quando a população é grande. Mudando a variável de x_n para $\frac{r}{9} x_n$ pode-se converter a equação (2) na equação (1)

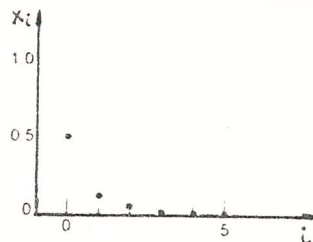
$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$$

Queremos examinar um comportamento a longo prazo da população x_n . Em particular queremos saber como este comportamento varia com a taxa de crescimento "a". Podemos pensar em "a" como sendo os números de Reynolds R no exemplo hidrodinâmico. Para manter a população no intervalo $[0,1]$, limitamos "a" entre 0 e 4.

É fácil ver que se $a > 4$ e $x_n = \frac{1}{2}$ temos $x_{n+1} > 1$.

1º) Consideremos $a < 1$.

Os insetos estão vivendo num ambiente hostil. A população diminui a cada ano.



Na figura colocamos $a = \frac{1}{2}$ e $x_0 = \frac{1}{2}$.

Vemos que $x_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

A população está em extinção.

Podemos relacionar este comportamento com o fluxo laminar obtido na figura a) da turbulência.

2º) Consideremos $1 < a < 3$.

Para estes valores o comportamento vai se relacionar com o da figura b).

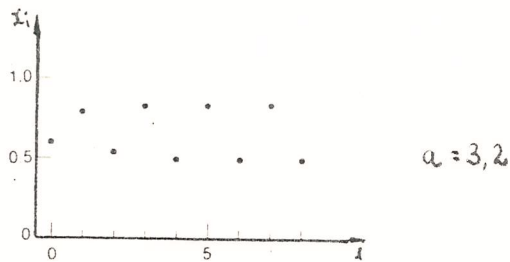
Começando em qualquer x_0 entre zero e um, a população se aproxima de um valor constante não nulo.

Esta população constante x^* pode ser encontrada substituindo x_n e x_{n+1} por x^* na equação (1)

$$x^* = a x^* (1 - x^*) \Rightarrow x^* = 0 \text{ ou } x^* = 1 - \frac{1}{a}$$

Este ponto é chamado ponto fixo. A população zero é instável. Se começamos com uma população muito pequena, ela crescerá ano a ano, até confundir-se com $x^* = 1 - \frac{1}{a}$.

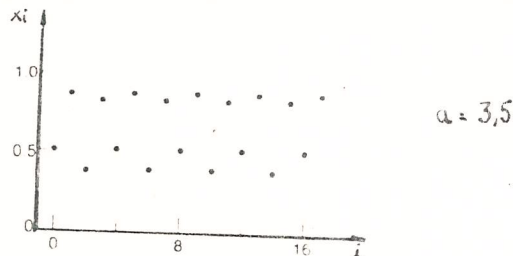
3º) À medida que "a" cresce de 3 a 4 há grandes mudanças na estrutura do sistema.



Atrator periódico. Período 2.

Primeiro o ponto fixo se torna instável e a população converge a um estado de equilíbrio onde se alterna entre dois valores - órbita de período 2.

Para $a = 3,2$ a população oscila entre $x_n = 0,5$ e $x_n = 0,8$.



Atrator periódico . Período 4.

Para valores maiores o período 2 torna-se instável e é substituído por um ciclo de período 4. Ex: $a = 3,5$.

À medida que " a " cresce a população converge a ciclos de período 8-16-32-64

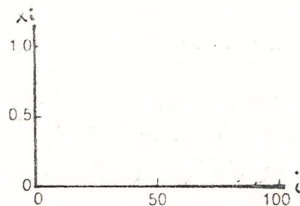
É o fenômeno da Duplicação dos Períodos.

Finalmente a solução se acumula num ciclo de período infinito, para $a=3,57$.

Para muitos valores de $a > 3,57$, o diagrama de bifurcação mostra que o comportamento futuro da população é não periódico e ocupa intervalos contínuos de x . A evolução nestes intervalos é totalmente aleatória, apesar da equação logística ser determinista (x_n determina x_{n+1}).

Entretanto, achamos janelas de comportamento periódico entre os comportamentos caóticos. A mais importante corresponde ao ciclo de período 3 para $a = 3,83$, onde a população cresce em 3 anos sucessivos e depois decresce. À medida que " a " cresce na janela, o 3-ciclo também exibe a duplicação de período em 6,12,24,... -ciclos. Na verdade entre $a = 3,57$ e $a = 3,83$ existem janelas de estabilidade para todos os períodos inteiros, que terminam numa cascata de duplicação de períodos, de volta ao caos.

4º) Caso $a = 4$



Aparentemente a população x_n assume todos os valores de x entre 0 e um, começando de $x_0 = 0,707$.

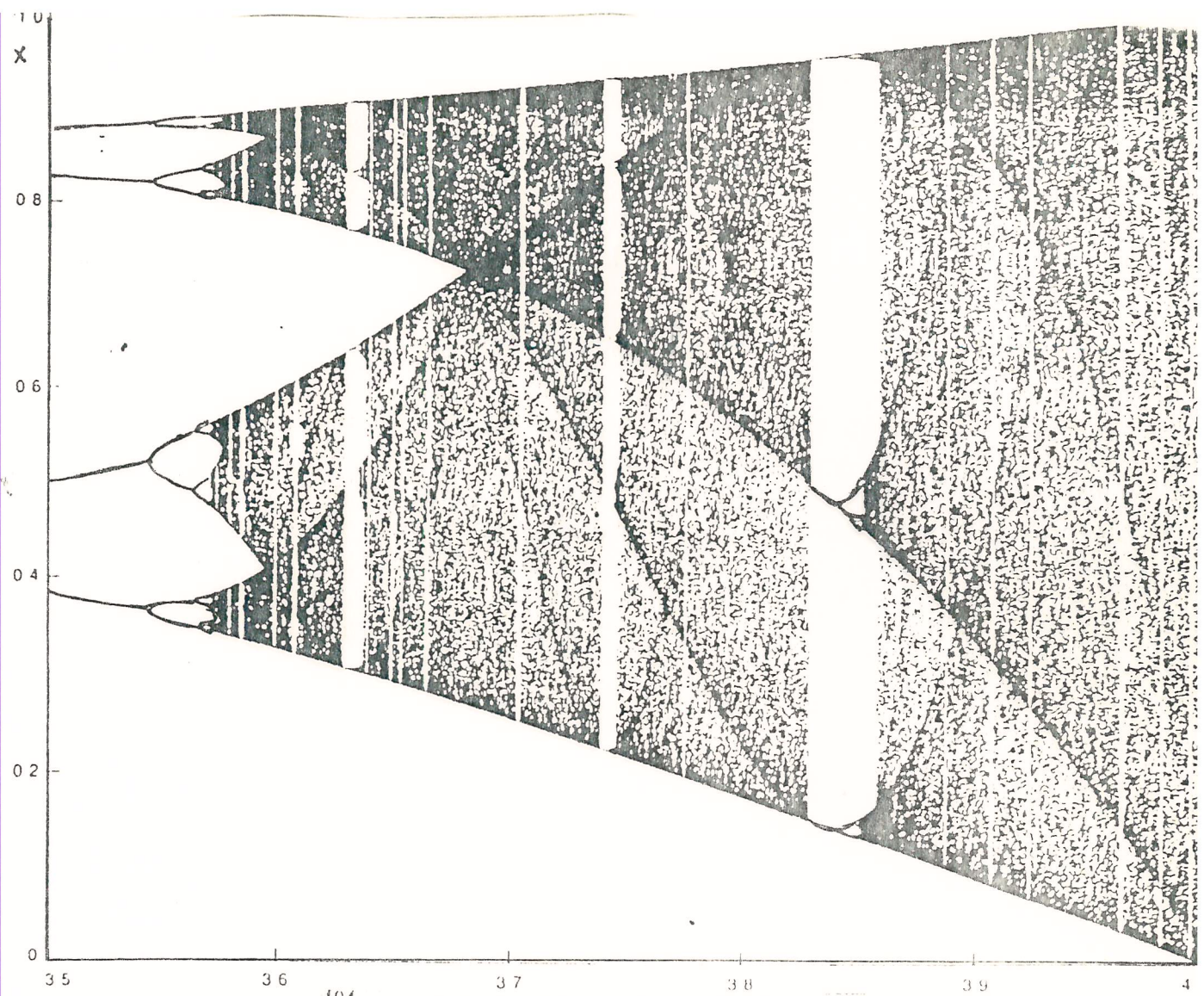
O padrão é caótico.

O gráfico A anexo mostra a estrutura padrão do caos - uma progressão ordeira do regular para o caótico em qualquer sistema regulado pela equação 1.

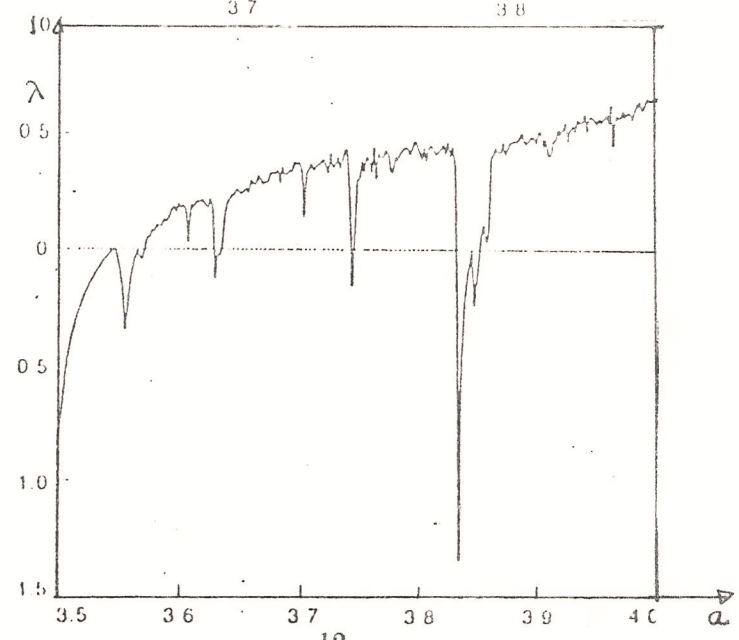
As faixas escuras no gráfico representam valores de x que têm mais probabilidade de serem visitados durante a evolução caótica.

Estas estruturas foram descobertas "experimentalmente" em gráficos de alta-resolução, apresentando centenas de milhares de iterações da aplicação logística.

A)



B)



3. O conjunto dos pontos periódicos é denso.

Permito-me ser superficial nessas formalidades de definições e conceitos, pois o objetivo aqui é informar de forma acessível e indicar caminhos para quem desejar se aprofundar no tema. As técnicas estão nas referências.

Relevância

O estudo do CAOS interessa na área de Medicina (estudo das fibrilações cardíacas; respostas do coração a impulsos elétricos); na Química (fusão nuclear como forma de energia); na Indústria de Armamentos (desenvolvimento de armas laser); na Indústria Aeronáutica, e até nas Ciências Sociais e em Psicologia.

A Teoria das Catástrofes que procura determinar para quais valores há uma mudança brusca no comportamento de um sistema está baseada no conhecimento do CAOS e tem sido aplicada de diferentes formas, como por exemplo no estudo da violência visando prevenir rebeliões em penitenciárias.

Conclusão

Os sistemas dinâmicos caóticos resistem a qualquer tipo de previsão. As teorias de probabilidades e estatística são as armas adequadas para estudar as propriedades médias destes sistemas.

No entanto o caos aparece em modelos determinísticos muito simples. O conhecimento de que o comportamento complexo não necessita de matemática complexa é uma das principais contribuições da dinâmica não linear.

Com o recente progresso no estudo do caos determinístico, soluções parciais sobre a origem da turbulência em fluidos e outros problemas, foram encontradas, mas muitas questões antigas permanecem e outras perguntas surgiram.

O caos é um tema atual, relevante, em aberto e em constante extensão.

Referências

- [01] HIRSCH, Morris & SMALE, Stephen. Differential equations, dynamical systems and linear algebra. New York: Academic Press, 1974.
- [02] DE VANEY, Robert. An introduction to chaotic dynamical systems. New York: Addison-Wesley, 1987.
- [03] KADANOFF, Leo. Roads do chaos. Physics Today, 1983. [Dados incompletos, cópia xerox]
- [04] DEVLIN, K. Beauty from chaos. Guardian, 1985. [Dados incompletos, cópia xerox]
- [05] RUELLE, David. Du problème de la turbulence développée et de quelques obstacles a sa solution. [Dados incompletos, cópia xerox]
- [06] THOMPSON, Michael. From Newton to chaos. [Dados incompletos, cópia xerox]
- [07] KAPLAN, Harvey. A cartoon assisted proof of Sarkowskii's theorem. American Journal of Physics, New York, v.55, n.11, p.1023-1032, 1987.
- [08] SAARI, Donald & URENKO, John B. Newton's method, circle maps, and chaotic motion. American Mathematical Monthly, Washington, v.91, n.1, p.3-17, 1984.
- [09] JENSEN, Roderick. Classical chaos. [Dados incompletos, cópia xerox]
- [10] RUELLE, David. Turbulence behavior in differential dynamics systems. Atas do Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, v.11, n.2, p.579-592, 1977.
- [11] RUELLE, David. Recente results on differential dynamics systems. [Dados incompletos, cópia xerox]
- [12] FRANKE, Ricardo et alii. Observation of deterministic chaos in electrical discharges in gases. Physical Review Letters, 1987. [Dados incompletos, cópia xerox]

[13] LAMBERT, Jacques et alii. *Ordre et désordre en Physique*. [Dados incompletos, cópia xerox]

[14] MAÑÉ RAMIREZ, Ricardo. Introdução à teoria ergódica. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983. (Projeto Euclides).

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

1. Marcos Sebastiani - Palestra Inaugural - MAR/88.
2. José Francisco Porto da Silveira - A Fatorial no Infinito - MAR/88.
3. Miguel A. Ferrero - Um problema em Aberto em Álgebra - MAI/88.
4. Willy G. Engel - Problemas da História da Matemática Antiga - JUN/88.
5. Cydara C. Ripoll - A Série $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ converge!!! - JUL/88.
6. Vera Clotilde Garcia Carneiro - O Caos - SET/88.
7. Ada Maria de S. Doering - A Conjectura de Fermat - SET/88.
8. Elsa Mundstock - Microinformática Aplicada as Áreas de Matemática e Estatística - SET/88.
9. Léa Fagundes - Psicologia Cognitiva e Educação Matemática - OUT/88.
10. Maria Luisa Souza - Breve Relato Sobre o Ensino de Matemática - OUT/88.
11. João Luis Becker - Teoria Axiomática da Utilidade Esperada - NOV/88.
12. Ary Tietböhl - Criação do Instituto de Matemática da UFRGS - MAR/89.
13. Alvino A. Sant'Ana - Construção por Meio de Régua e Compasso - ABR/89.
14. Oclide José Dotto - A Regra dos Sinais de Descartes - ABR/89.
15. Antônio Rodrigues - Reminiscências de um Diretor do Instituto de Matemática - MAI/89.
16. Antonio Vladimir Martins - Problemas dos 3 Corpos e a Solução Colinear de Euler - JUN/89.
17. Richard Aron - Approximation of Continuons Functions - AGO/89.
18. Jorge Mujica - Álgebras de Funções Holomorfas em Espaços de Banach - SET/89.

Universidade Federal do Rio Grande Sul
Reitor: Professor Tuiskon Dick

Instituto de Matemática
Diretor: Professor Aron Taitelbaum
Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Coordenador: Professor Jaime Bruck Ripoll
Secretária: Rosaura Monteiro Pinheiro

Os cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:

Série A: Trabalho de Pesquisa
Série B: Trabalho de Apoio Didático
Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS
Série D: Trabalho de Graduação
Série E: Dissertações de Mestrado
Série F: Trabalho de Divulgação
Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:

NAEC - Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Instituto de Matemática - UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
91.500 - Agronomia - POA/RS
Telefone: 36.11.59 ou 36.17.85 Ramal: 252