Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Cadernos de Matemática e Estatística
Série A: Trabalho de Pesquisa

Intersections Transverses dans l'Espace Projectif

Marcos Sebastiani
Iván Pan Pérez

Série A, nº 31,
Porto Alegre, outubro de 1992

Intersections Transverses dans l'Espace Projectif

Dans cet article nous donnons une démostration élémentaire du théorème suivant (dans ce qui suit "variété"signifié "variété algébrique projective irréducible", le corps de base est $\mathbf{C}$ et $\mathbf{P}^m$ dénote l'espace projectif complexe à m dimensions; les notions topologiques sont relatives à la topologie usuelle de $\mathbf{P}^m$)

Théorème 1 *Soit $Y \subset \mathbf{P}^m$ une variété de dimension k qui n'est contenue dans aucun hyperplane. Soit $L \subset \mathbf{P}^m$ une variété linéaire de dimension m-k qui intersecte transversalement Y (voir définition 1.4). Alors $L \bigcap Y$ n'est contenue dans aucune variété linéaire de dimension m-k-1.*

Avec l'hypothèse plus restrictive de L générique, au lieu d'intersection transverse avec Y, ce résultat est classique. Pourtant, même avec cette hypothèse plus restrictive, nous n'avons pu trouver de référence accesible que pour le cas où Y est une courbe ([3] Chap.III §1).

Dans le dernier paragraphe nous considérons la possibilité de généraliser le théorème 1.

Du théorème (1) on déduit le suivant corollaire (voir aussi [1, (5.13)] et [2, (12.35)])

Corollaire 1 *Soit $Y \subset \mathbf{P}^m$ une variété de dimension k et degré d (théorème-définition 1). Soit r la dimension de la plus petite variété linéaire qui contient Y. Alors $r \leq k + d - 1$.*

Preuve. Considerons l'intersection M de toutes les variétés linéaires qui contiennent Y. On peux supposer $M = \mathbf{P}^m$ et $r = m$. Soit L une variété linéaire qui intersecte transversalement Y, $dimL = m - k$. Alors par le théorème, $L \bigcap Y$ n'est contenu dans aucune variété linéaire de dimension $m - k - 1$. Donc, $d = card(L \bigcap Y) \geq m - k + 1$. Alors

$$r = m \leq k + d - 1.$$

1 Préliminaires

Soit $p \in \mathbf{P}^m$ et soit $H \not\ni p$ un hyperplan dans $\mathbf{P}^m$. Pour chaque $q \in \mathbf{P}^m$, $q \neq p$ soit q' l'intersection de la droite pq avec H. Alors $\pi(q) = q'$ définit une aplication continue

$$\pi : \mathbf{P}^m - \{p\} \longrightarrow H$$

appelée la *projection de centre p dans H.*

Lemme 1.1 *Si* $V \subset \mathbf{P}^m$ *est une variété de dimension* k *et* $p \notin V$ *alors* $V' = \pi(V)$ *est une variété et* $dimV' = k$.

Preuve. ([1, (2.28)]).

Définition 1.1 *Soit* $\{L_r\}_{r=1,2,...}$ *une suite de lignes droites passant toutes par le même point* p *dans* $\mathbf{P}^m$. *Soit* $H \not\ni p$ *un hyperplan et soit* q_r *l'intersection de* L_r *avec* H. *Si* $\lim q_r = q$ *on dit que* $\lim L_r = L$ *où* L *est la droite* pq.

Obsérvation. Le fait que $\lim L_r = L$ ne dépend pas du chiox de H puisque la projection de centre p donne un homéomorphisme entre deux hyperplans qui ne contiennent pas p.

Lemme 1.2 *Toute suite* $\{L_r\}_{r=1,2,...}$ *de droites de* $\mathbf{P}^m$ *passant par un même point* p *contient une suite partielle convergeante dans le sens de la définition (1.1).*

Preuve. Tout hyperplan est un ensemble compact.

Q.E.D.

Définition 1.2 *Soit* $V \subset \mathbf{P}^m$ *une variété et soit* $p \in V$. *On dit qu'une droite* $L \ni p$ *est une tangente en* p *à* V *s'il existe une suite*

$$\{q_r\}_{r=1,2,...} \subset V, \; q_r \neq p \; \forall r,$$

telle que $\lim q_r = p$ *et* $\lim L_r = L$ *où* L_r *est la droite* pq_r.

On appelle cône tangent en p *à* V *l'ensemble:*

$$C_p(V) = \bigcup \{L; \; L \text{ est tangente en } p \text{ à } V\} \subset \mathbf{P}^m.$$

(Si $V = \{p\}$ *on définit* $C_p(V) = \{p\}$*).*

Définition 1.3 *Soit $V \subset \mathbf{P}^m$ une variété et soit $p \in V$. On définit l'espace tangent en p à V comme l'ensemble des points $(x_0 : x_1 : \ldots : x_m) \in \mathbf{P}^m$ tels que*

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) x_i = 0$$

pour tout polynôme homogène f tel que $f \mid V = 0$. On le note $T_p(V)$

Lemme 1.3 *$T_p(V)$ est une variété linéaire qui contient p. Si p est régulier dans V alors $\dim T_p(V) = \dim V$.*

Preuve. ([1, chap.1]).

Lemme 1.4 *$C_p(V) \subset T_p(V)$ pour tout $p \in V$.*

Preuve. C'est trivial si $\dim V = 0$. On suppose $\dim V \geq 1$. Par un changement de coordonnées on peut supposer $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$.

Soient H l'hyperplan $x_0 = 0$ et $q_n \in V$, $q_n \neq p$, $q_n \longrightarrow p$. On peut supposer $q_n \notin H \forall n$. Soit $q_n' \in H$ la projection de centre p de q_n dans H. Supposons que $q_n' \longrightarrow p' \in H$.

Soit f un polynôme homogène de degré d tel que $f \mid V = 0$.

Il suffira de prouver que:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) a_i = 0, \text{ où } p' = (0 : a_1 : \ldots : a_m).$$

Soit $q_n' = (0 : x_{1n} : \ldots : x_{mn})$. Comme $q_n' \longrightarrow p'$ il est facile de voir qu'on peut choisir les coordonnées de q_n' de tel façon que $x_{jn} \longrightarrow a_j$ $(1 \leq j \leq m)$. De plus,

$$q_n = (x_{0n} : \ldots : x_{mn}) \text{ avec } x_{0n} \neq 0 \text{ et } \mid x_{0n} \mid \longrightarrow +\infty.$$

Soit

$$f = g_d(x_1, \ldots, x_m) + g_{d-1}(x_1, \ldots, x_m)x_0 + \ldots + g_1(x_1, \ldots, x_m)x_0^{d-1}$$

où g_i est homogène de degré i. Donc, puisque $q_n \in V$

$$0 = \frac{f(x_{0n}, \ldots, x_{mn})}{x_{0n}^{d-1}} = \frac{g_d(x_{1n}, \ldots, x_{mn})}{x_{0n}^{d-1}} + \ldots + g_1(x_{1n}, \ldots, x_{mn}).$$

Em passant à la limite pour $n \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$g_1(a_1, \ldots, a_m) = 0.$$

D'autre part,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) a_i = \sum_{k=1}^{d} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(0, \ldots, 0) a_i.$$

Si $k > 1$, $\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(0, \ldots, 0) = 0$. Si $k = 1$, g_1 est linéaire, et

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(0, \ldots, 0) a_i = g_1(a_1, \ldots, a_m) = 0.$$

Définition 1.4 *Soient V, $W \subset \mathbf{P}^m$ des variétés avec $\dim V + \dim W = m$. Soit $p \in V \bigcap W$. On dit que V et W s'intersectent transversalement en p si p est régulier dans V et dans W et*

$$T_p(V) \bigcap T_p(W) = \{p\}.$$

Si cela est vrai pour tout $p \in V \bigcap W$ on dit que V et W s'intersectent transversalement ou que chacune est transverse à l'autre.

Théorème-définition 1 *Soit $V \subset \mathbf{P}^m$ une variété de dimension k.*

1. *Ils existent des variétés linéaires $L \subset \mathbf{P}^m$ qui sont transverses à V.*

2. *Pour ces variétés L le cardinal d de $L \bigcap V$ est fini et ne dépend pas de L. Il est appélé le degré de V. On le dénote* $\deg V$.

3. *Si L est une variété linéaire de dimension m-k et si le cardinal de $L \bigcap V$ est plus grand que d, alors $L \bigcap V$ est un ensemble infini.*

4. *Si L est une variété linéaire de dimension m-k et le cardinal de $L \bigcap V$ est d alors L est transverse à V.*

Preuve. ([1, chap.5])

Lemme 1.5 *Soient V, $H \subset \mathbf{P}^m$ des variétés,* $\dim V = 1$, $\dim H = m - 1$. *Supposons que V et H s'intersectent transversalement en $p = (1 : 0 : \ldots : 0) \in V \bigcap H$. Soit $f = 0$ une équation irréductible de H. Alors*

$$f(1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}) \mid V \tag{1}$$

est un générateur de l'idéal maximal de l'anneau local de V en p.

Preuve. Comme f est un générateur de l'idéal de H, il suit de la définition (1.3) que $T_p(H)$ est définit par la seule équation

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) x_j = 0.$$

Comme l'anneau local de V en p est régulier de dimension 1, il suit du lemme de Nakayama, que si (1) n'est pas un générateur de son idéal maximal $\mathcal{M}$, alors

$$f(1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}) \mid V \in \mathcal{M}^2. \tag{2}$$

Ceci implique qu'il existe un polynôme homogène u tel que $u(p) \neq 0$ et que

$$uf = \sum_i h_i g_i + \varphi$$

où h_i, g_i, φ sont des polynômes homogènes avec

$$h_i(p) = g_i(p) = 0 \text{ et } \varphi \mid V = 0.$$

Soit $q = (a_0 : a_1 : \ldots : a_m) \in T_p(V)$. Alors $\sum_{j=0}^{m} \partial\varphi/\partial x_j(p) a_j = 0$. Il s'en suit que

$$u(p) \sum_{j=0}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) a_j = 0.$$

Cela entraîne que $q \in T_p(H)$. Donc, $T_p(V) \subset T_p(H)$, ce qui contredit la transversalité.

Q.E.D.

2 Preuve du Théorème

1. Si $m - k = 0$ c'est trivial.

2. Soit $m - k = 1$. Dans ce cas Y est définie par une équation

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

où f est un polynôme homogène irréductible de degré $d > 1$. Soit R une droite transverse a Y. Soient $a, b \in R$, $a, b \notin Y$. Supposons que l'équation

$$f(a_0 + \lambda b_0, \ldots, a_m + \lambda b_m) = 0 \tag{3}$$

ait une racine multiple $\lambda = \mu$. Alors,

$$f(a_0 + \mu b_0, \ldots, a_m + \mu b_m) = 0$$

et

$$b_0 f_{x_0}(a_0 + \mu b_0, \ldots, a_m + \mu b_m) + \ldots + b_m f_{x_m}(a_0 + \mu b_0, \ldots, a_m + \mu b_m) = 0.$$

Avec la formule d'Euler, $fd = x_0 f_{x_0} + \ldots + x_m f_{x_m}$, on déduit

$$\sum_{i=0}^{m}(a_i + \mu b_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \mu b) = 0$$

On en déduit que R est tangente à Y au point $c = a + \mu b$; contradiction. Donc, (3) n'a pas de racine multiple. Alors, le cardinal de $R \bigcap Y$ est $d > 1$, ce qui dit que $R \bigcap Y$ n'est pas contenu dans une variété linéaire de dimension 0.

3. Soit $m - k = 2$. Supposons, par absurde, qu'il existe un plan P transverse à Y tel que $P \bigcap Y \subset R$, R droite. Soit $p \in R$, $p \notin P \bigcap Y$ et soit H hyperplan de $\mathbf{P}^m$, $p \notin H$. On considère la projection φ de centre p sur H. Comme $p \notin Y$, $Y' = \varphi(Y) \subset H$ est une variété de dimension k (lemme 1.1).

Soit $\{v\} = R \bigcap H$. Soit $\Pi \supset R$ un plan. Si Π contient un point $q \in Y$, $q \notin R$, alors $\Pi \bigcap Y$ contient plus de d points ($d = \deg Y$). Alors $\Pi \bigcap Y$ est un ensemble algébrique de dimension ≥ 1. Donc, puisque $p \in \Pi$, $\varphi(\Pi \bigcap Y)$ est une droite par v. On en déduit que Y' est un cône de sommet v.

Soit $L \subset Y'$ une droite par v. Soit $\{v_n\} \subset L$, $v_n \longrightarrow v$, $v_n \neq v$. Soit $u_n \in Y$, $\varphi(u_n) = v_n$. Comme φ est propre on peut supposer que $u_n \longrightarrow u \in Y$. Donc, $v_n = \varphi(u_n) \longrightarrow \varphi(u)$. Alors $\varphi(u) = v$. C'est à dire $u \in Y \bigcap P$. On peut aussi supposer que la droite $S_n = u_n u$ tend vers une droite limite $S \subset T_u(V)$ (voir les définitions 1.1 et 1.3 et les lemmes 1.2 et 1.4). Par hipothèse $S \not\subset P$. En particulier, $S \neq R$. Cela entraîne que $\varphi(S_n) \longrightarrow \varphi(S)$. Comme $\varphi(S_n) = L$ on a que $\varphi(S) = L$. Il en résulte que

$$Y' \subset \bigcup_{u \in P \bigcap Y} \varphi(T_u(Y)).$$

Comme Y' est variété, $Y' \subset \varphi(T_u(Y))$ pour quelque u. Mais

$$\dim Y' = \dim Y = \dim T_u(Y) \geq \dim \varphi(T_u(Y))$$

Donc, $Y' = \varphi(T_u(Y))$. Mais, dans ce cas, Y' serait une variété linéaire de dimension $m-2$, ce qui implique que Y serait contenu dans un hyperplan; contradiction.

4. Soit $m-k \geq 3$. Supposons, par absurde, que $L \bigcap Y \subset E$, $E \subset L$ variété linéaire, $\dim E = \dim L - 1 = m-k-1 \geq 2$. Il existe $p \in E$, $p \notin Y$ et il existe hyperplan H de $\mathbf{P}^m$, tels que $p \notin H$ et la projection φ de centre p sur H soit telle que $\varphi \mid L \bigcap Y$ soit injective. Soient

$$Y' = \varphi(Y),\ L' = L \bigcap H,\ E' = E \bigcap H.$$

Alors $L' \bigcap Y' \subset E'$, $\dim E' = \dim L' - 1$ et L' est transverse à Y', parce que $\deg Y' \leq \deg Y$ ([1, chap.5]) et le cardinal de $L' \bigcap Y'$ est exactement d (voir théorème-définition 1). Mais

$$\dim H - \dim Y' < m - k.$$

Alors, par récourrence, on se réduit au cas $m-k=2$.

3 Généralisations

Dire qu'un sousensemble S d'une variété linéaire L de dimension k n'est pas contenu dans une variété linéaire de dimension $k-1$ équivaut à dire que tout hyperplan qui contient S, contient aussi L. Cela motive,à partir du théorème, la suivante

Conjecture 1 *Soit $Y \subset \mathbf{P}^m$ une variété de dimension k qui n'est contenu dans aucune hypersurface de degré $\leq r$. Soit L une variété de degré r et de dimension m-k qui intersecte transversalement Y. Alors toute hypersurface (irréductible) de degré r qui contient $L \bigcap Y$, contient aussi L.*

Preuve de la conjecture dans le cas $k = 1$. Dans ce cas L est définit par une équation de degré r, $f = 0$. Soit Z une hypersurface qui contient $L \bigcap Y$, définie par $g = 0$, g polynôme homogène irréductible de degré r. Considérons la fonction rationnelle $h = g/f$ sur Y. Elle est régulière dans $Y - Y \bigcap L$. Soit $u \in Y \bigcap L$. Par un changement des coordonnées, on peut supposer $u = (1 : 0 : \ldots : 0)$. Consedérons l'ouvert affine $x_0 \neq 0$ avec les coordonnées

$$X_1 = \frac{x_1}{x_0}, \ldots X_m = \frac{x_m}{x_0}.$$

Alors u est l'origine et u est regulier dans Y. L'hipothèse d'intersection transverse entraîne que $f(1, X_1, \ldots, X_m)$ est un générateur de l'!déal maximal de l'anneau local de Y en u (lemme 1.5). Alors, comme $g(u) = 0$, on a que g/f est régulière en u. Donc h est régulière sur Y. Cece implique $h = c$, constante. Alors $Y \subset \{g - cf = 0\}$. Comme Y n'est contenu dans aucune hypersurface de degré $\leq r$, $g - cf$ doit être identiquement nulle. Donc, $Z \supset L$.

Q.E.D.

References

[1] D.Mumford (1976): Algebraic Geometry I.*Berlin Heidelberd New York.*

[2] S.S.Abhyankar (1966): Resolution of singularities of embeded algebraic surfaces.Academic Press.

[3] E.Arbarello - M.Cornalla - P.A.Griffiths - J.Harris (1985): Geometry of algebraic curves, vol.I. *Springer Verlag.*

Marcos Sebastiani
DMPA–IMUFRGS
Avda.Bento Gonçalves 9500
91540-000–Porto Alegre/RS
Brasil.

Iván Pan Pérez
CPGM–IMUFRGS
Avda.Bento Gonçalves 9500
91540-000–Porto Alegre/RS
Brasil.

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série A: Trabalho de Pesquisa

1. Marcos Sebastiani - Transformation des Singularités - MAR/89.
2. Jaime Bruck Ripoll - On a Theoremof R. Langevin About Curvature and Complex Singularities - MAR/89.
3. Eduardo Cisneros, Miguel Ferrero e Maria Inés Gonzales - Prime Ideals of Skew Polynomial Rings and Skew Laurent Polynomial Rings - ABR/89.
4. Oclide José Dotto - ϵ - Dilations - JUN/89.
5. Jaime Bruck Ripoll - A Characterization of Helicoids - JUN/89.
6. Mark Thompson, V. B. Moscatelli - Asymptotic Distribution of Liusternik-Schnirelman Eigenvalues for Elliptic Nonlinear Operators -JUL/89.
7. Mark Thompson - The Formula of Weyl for Regions with a Self- Similar Fractal Boundary - JUL/89.
8. Jaime Bruck Ripoll - A Note on Compact Surfaces with Non Zero Constant Mean Curvature - OUT/89.
9. Jaime Bruck Ripoll - Compact ϵ - Convex Hypersurfaces - NOV/89.
10. Jandyra Maria G. Fachel - Coeficientes de Correlação Tipo -Contingência - JAN/90.
11. Jandyra Maria G. Fachel - The Probability of Ocurrence of Heywood Cases - JAN/90.
12. Jandyra Maria G. Fachel - Heywood Cases in Unrestricted Factor Analysis - JAN/90.
13. Julio Cesar R. Claeyssen, Tereza Tsukazan - Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations - JAN/90.
14. Maria T. Albanese - Behaviour of de Likelihood in latent Analysis of Binary Data - ABR/91
15. Maria T. Albanese - Measuremente of de Latent Variable in Latent Trait Analysis of Binary Data - ABR/91
16. M. T. Albanese - Adequacy of the Asymptotic Variance-Covariance Matrix using Bootstrap Jackknife Techniques in Latent Trait Analysis of Binary Data - ABR/91

17. Maria T. Albanese - Latent Variable Models for Binary Response - ABR/91

18. Mark Thompson - Kinematic Dynamo in Random Flows - DEZ/90.

19. Jaime Bruck Ripoll, Marcos Sebastiani - The Generalized Map and Applications - AGO/91

20. Jaime Bruck Ripoll, Suzana Fornari, Katia Frensel - Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in the Complex Hyperbolic Space - AGO/91

21. Suzana Fornari, Jaime Bruck Ripoll - Stability of Compact Hypersurfaces with Constant Mean Curvature - JAN/92

22. Marcos Sebastiani - Une Généralisation de L'Invariant de Malgrange - FEV/92

23. Cornelis Kraaikamp, Artur Lopes - The Theta Group and the Continued Fraction with even partial quotients - MAR/92

24. Silvia Lopes - Amplitude Estimation in Multiple Frequency Spectrum - MAR/92

25. Silvia Lopes, Benjamin Kedem - Sinusoidal Frequency Modulated Spectrum Analysis - MAR/92

26. Silvia Lopes, Benjamin Kedem - Iteration of Mappings and Fixed Points in Mixed Spectrum Analysis - MAR/92

27. Miguel Ferrero, Eduardo Cisneros, María Inés Gonzáles - Ore Extensions and Jacobson Rings - MAI/92

28. Sara C. Carmona - An Asymptotic Problem for a Reaction-Diffusion Equation with fast Diffusion Component - JUN/92

29. Luiz Fernando Carvalho da Rocha - Unique Ergodicity of Interval Exchange Maps - JUL/92

30. Sara C. Carmona - Wave Front Propagation for a Cauchy Problem With a Fast Component - OUT/92

31. Marcos Sebastiani e Iván Pan Pérez - Intersections Transverses dans l'Espace Projectif - OUT/92

Universidade Federal do Rio Grande Sul
Reitor: Professor Hélgio Trindade

Instituto de Matemática
Diretor: Professor Aron Taitelbaum
Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Coordenador: Professor Aron Taitelbaum
Secretária: Faraildes Beatriz da Silva

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:
Série A: Trabalho de Pesquisa
Série B: Trabalho de Apoio Didático
Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS
Série D: Trabalho de Graduação
Série E: Dissertações de Mestrado
Série F: Trabalho de Divulgação
Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:
NAEC - Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Instituto de Matemática - UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
91.540-000 - Agronomia - POA/RS
Telefone: 336.98.22 ou 339.13.55 Ramal: 6176