

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução da Equação de Transferência  
Radiativa Sem Simetria Azimutal, em uma  
placa, utilizando discretização angular dupla**

por

Taline Foletto

Tese para a obtenção do Título de  
Doutora em Matemática Aplicada

Profa. Cynthia Feijó Segatto  
Orientadora

Porto Alegre, 21 de Agosto de 2019.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Foletto, Taline

Solução da Equação de Transferência Radiativa Sem Simetria Azimutal, em uma placa, utilizando discretização angular dupla / Taline Foletto.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2019.

72 p.: il.

—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2019.

Orientadora: Segatto, Cynthia Feijó

Tese: Matemática Aplicada

Solução da Equação de Transferência  
Radiativa Sem Simetria Azimutal, em uma  
placa, utilizando discretização angular  
dupla

por

Taline Foletto

Linha de Pesquisa: Teoria de Transporte de Partículas

Orientadora: Profa. Cynthia Feijó Segatto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Bardo Ernst Bodmann  
PROMEC/UFRGS

Profa. Dra. Liliane Basso Barichello  
PPGMAP/UFRGS

Prof. Dr. Ricardo Carvalho de Barros  
IPRJ/UERJ

Prof. Dr. Esequia Sauter  
Coordenador

# Sumário

LISTA DE FIGURAS . . . . .	vi
LISTA DE TABELAS . . . . .	vii
RESUMO . . . . .	ix
ABSTRACT . . . . .	x
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA NA ATMOSFERA . . . . .	4
2.1 Conceitos físicos . . . . .	4
2.2 Formulação Matemática da ETR . . . . .	8
3 EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA SEM SIMETRIA AZIMUTAL: SOLUÇÃO $LTS_N$ . . . . .	12
4 UMA PROPOSIÇÃO PARA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA SEM SIMETRIA AZIMUTAL	16
4.1 Solução em Ordenadas Discretas Dupla . . . . .	16
4.2 Método $LTS_{N,M}$ . . . . .	22
4.3 Método $LTS_{N,M}$ Não Espectral . . . . .	23
5 RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .	28
5.1 Problema HAZE . . . . .	33
5.2 Problema CLOUD1 . . . . .	44
5.3 Estudo da implementação numérica do esquema $LTS_{N,M}$ Não Espectral e da convergência da solução calculada . . . . .	51
6 CONCLUSÕES . . . . .	65

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	67
--------------------------------------	----

## Lista de Figuras

Figura 2.1	<i>Ângulos polar <math>\theta</math> e azimutal <math>\varphi</math> que definem a direção de propagação de uma partícula, no sistema de coordenadas cartesianas. Fonte: adaptado de Yamasoe e Corrêa (2016).</i> . . . . .	5
Figura 2.2	<i>Esquema do incremento e atenuação de um feixe de radiação ao longo de um caminho <math>ds</math>. <math>dI_\lambda^{(1)}</math>: absorção, <math>dI_\lambda^{(2)}</math>: emissão, <math>dI_\lambda^{(3)}</math>: espalhamento por remoção e <math>dI_\lambda^{(4)}</math>: espalhamento por adição. Fonte: adaptado de Yamasoe e Corrêa (2016).</i> . . . . .	7
Figura 2.3	<i>Elemento de volume <math>dV = dAds</math>. Fonte: adaptado de Ozisik (1973).</i> . . . . .	9
Figura 5.1	Termo Residual Problema HAZE . . . . .	62
Figura 5.2	Termo Residual Problema CLOUD1 . . . . .	63

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Problemas testes: interpolação polinomial . . . . .	29
Tabela 5.2	Interpolação polinomial, problema $L = 8$ . . . . .	30
Tabela 5.3	Interpolação polinomial, problema $L = 82$ . . . . .	31
Tabela 5.4	Parâmetros dos problemas em transferência radiativa . . . . .	32
Tabela 5.5	Solução $LTS_{210,50}$ para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	34
Tabela 5.6	Solução $LTS_{210,50}$ para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de $\varphi = \pi$ . . . . .	35
Tabela 5.7	Diferenças percentuais para a solução $LTS_{210,50}$ do problema HAZE nas direções $\varphi = 0$ , $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \pi$ . . . . .	36
Tabela 5.8	Solução $LTS_{210,50}$ para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de $\varphi = 0.0344329802\pi$ . . . . .	38
Tabela 5.9	Solução $LTS_{210,50}$ para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de $\varphi = 0.0280597103\pi$ . . . . .	39
Tabela 5.10	Solução $LTS_{210,50}$ para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de $\varphi = 0.0190794984\pi$ . . . . .	40
Tabela 5.11	Solução $LTS_{210,50}$ para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de $\varphi = 0.0126311542\pi$ . . . . .	41
Tabela 5.12	Solução $LTS_{210,50}$ para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de $\varphi = 0.0105869178\pi$ . . . . .	42
Tabela 5.13	Solução $LTS_{210,50}$ para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de $\varphi = 0.0019902343\pi$ . . . . .	43
Tabela 5.14	Solução $LTS_{150,120}$ para a Intensidade de Radiação do problema CLOUD1 na direção de $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	45
Tabela 5.15	Solução $LTS_{150,120}$ para a Intensidade de Radiação do problema CLOUD1 na direção de $\varphi = \pi$ . . . . .	46
Tabela 5.16	Diferenças relativas para a solução $LTS_{150,120}$ do problema CLOUD1, $\varphi = 0$ , $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \pi$ . . . . .	47

Tabela 5.17	Solução $LTS_{400,180}$ para a Intensidade de Radiação do problema CLOUD1 na direção de $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	48
Tabela 5.18	Solução $LTS_{400,180}$ para a Intensidade de Radiação do problema CLOUD1 na direção de $\varphi = \pi$ . . . . .	49
Tabela 5.19	Diferenças relativas para a solução $LTS_{400,180}$ do problema CLOUD1, $\varphi = 0$ , $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \pi$ . . . . .	50
Tabela 5.20	Tempos computacionais (em minutos) para execução de problemas $LTS_{N,M}$ espectral e não espectral, $L = 8$ . . . . .	51
Tabela 5.21	Tempos computacionais (em horas) para execução de problemas $LTS_{N,M}$ espectral e não espectral, $L = 82$ . . . . .	52
Tabela 5.22	Classificação dos elementos da matriz $LTS_{N,M}$ dos problemas $LTS_{210,50}$ e $LTS_{150,120}$ . . . . .	53
Tabela 5.23	Classificação dos elementos do termo fonte do problema $LTS_{210,50}$	54
Tabela 5.24	Classificação dos elementos do termo fonte do problema $LTS_{150,120}$	54
Tabela 5.25	Intensidade de radiação para o problema $LTS_{210,50}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , $\mu = 1$ , $\tau = 0.5$ . . . . .	56
Tabela 5.26	Intensidade de radiação para o problema $LTS_{210,50}$ e $\varphi = 0$ e $\mu = -1$ , $\tau = 0.5$ . . . . .	57
Tabela 5.27	Intensidade de radiação para o problema $LTS_{150,120}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , $\mu = 1$ , $\tau = 0.5$ . . . . .	58
Tabela 5.28	Intensidade de radiação para o problema $LTS_{150,120}$ e $\varphi = 0$ , $\mu = -0.8$ , $\tau = 0.5$ . . . . .	59
Tabela 5.29	Resíduos problema HAZE com $\tau \approx 0$ . . . . .	61
Tabela 5.30	Resíduos problema HAZE com $\tau \approx 1$ . . . . .	61
Tabela 5.31	Resíduos problema HAZE com $\tau \in [0.2, 0.9]$ . . . . .	61
Tabela 5.32	Resíduos problema CLOUD1 com $\tau \approx 0$ . . . . .	62
Tabela 5.33	Resíduos problema CLOUD1 com $\tau \approx 1$ . . . . .	62
Tabela 5.34	Resíduos problema CLOUD1 com $\tau \in [0.2, 0.9]$ . . . . .	63

# RESUMO

Encontram-se, na literatura, diversos estudos que apresentam solução para o problema de transferência radiativa sem simetria azimutal em uma placa. Na grande maioria desses estudos, utiliza-se uma decomposição proposta por Chandrasekhar [12] para resolução do problema proposto. Nessa decomposição, para cada ângulo azimutal de interesse, o problema original é desacoplado em um conjunto de problemas com simetria azimutal, os quais são resolvidos, então, por métodos clássicos. Neste trabalho, percorremos um caminho diferente, no qual consideramos a discretização das duas variáveis angulares do problema e, com isto, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que é resolvido pelo método  $LTS_N$ . Aplicamos esta formulação na resolução de problemas inseridos no contexto de Transferência Radiativa na Atmosfera, mais especificamente em névoas e nuvens, os quais são caracterizados pelo alto grau de anisotropia. Resolvemos esses problemas mediante a utilização de ideias semelhantes as utilizadas no esquema  $LTS_N$  não espectral [29]. Para validar a formulação proposta, apresentamos resultados de simulações numéricas, bem como resultados de um estudo acerca da qualidade da solução calculada. Apresentamos, ainda, comparações da solução encontrada com resultados da literatura.

# ABSTRACT

There are several studies in the literature that present a solution to the problem of radiative transfer without azimuth symmetry in a plate. In the vast majority of these studies, a decomposition proposed by Chandrasekhar [12] is used to solve the proposed problem. In this decomposition, for each azimuthal angle of interest, the original problem is decoupled into a set of problems with azimuth symmetry, which are then solved by classical methods. In this work, we follow a different path in which we consider the discretization of the two angular variables of the problem and, thus, we obtain a system of first order ordinary differential equations that is solved by the  $LTS_N$  method. We applied this formulation to solve problems in the context of Radiative Transfer in the Atmosphere, specifically in mists and clouds, which are characterized by a high degree of anisotropy. We solved these problems by using ideas which are similar to those used in the non-spectral  $LTS_N$  scheme [29]. In order to validate the proposed formulation, we presented numerical simulation results as well as results from a study about the quality of the calculated solution. We also presented comparisons of the solution found with results in the literature.

# 1 INTRODUÇÃO

Em várias áreas das ciências e engenharias, a equação de transporte de partículas é utilizada como um modelo matemático para descrever diversos fenômenos físicos. De maneira geral, a equação de transporte modela esses fenômenos mediante a descrição da distribuição espacial, direcional e energética das partículas que se propagam em um determinado meio, levando em consideração seus movimentos e suas interações com os meios materiais [13]. Dentre os exemplos de aplicações desta equação, podemos citar sua utilização na modelagem de propriedades óticas da atmosfera terrestre [39], [24]; na descrição da distribuição da população de nêutrons no interior do núcleo de um reator nuclear [13]; em medicina nuclear, no cálculo e na análise de blindagens e na dosimetria das radiações [2]; na modelagem de sondas nucleares utilizadas para caracterizar a geologia do subsolo na descoberta de poços subterrâneos [11], dentre outros.

Uma classe importante de problemas modelados pela equação de transporte de partículas neutras diz respeito àqueles que descrevem o fenômeno físico da transferência de energia por radiação, contexto no qual se define a Equação de Transferência Radiativa (ETR). Aplicações em óptica [22], astrofísica [28],[17], ciência atmosférica [40],[23], sensoriamento remoto [34], tomografia [18] e radioterapia [2] são alguns exemplos de aplicações modeladas pela equação de transferência radiativa.

Neste trabalho, será dada ênfase a problemas de transferência radiativa sem simetria azimutal na camada homogênea da atmosfera, na faixa de energia do espectro da luz visível em nuvens e nevoeiros, o qual estará sujeito a intensidades de radiação incidentes na fronteira. Problemas sem simetria azimutal caracterizam-se por apresentar dependência na variável azimutal.

Diversas soluções da equação de transporte de partículas são encontradas na literatura. Em 1960, Case [5] propôs uma solução analítica para esta equação, porém, restrita a problemas envolvendo geometria cartesiana unidimensional, espalhamento isotrópico e independência de tempo. Por possuir tratamento analítico complexo, vários estudos foram realizados por diferentes pesquisadores no âmbito do desenvolvimento de formulações para resolução de aproximações da equação de transporte de partículas. Dentre essas aproximações, encontram-se a  $F_N$ , proposta por Sierwert [35]; a aproximação  $P_N$  de Jeans [28] e a proposição de Chandrasekhar [10] para aproximação  $S_N$ . A aproximação  $S_N$  - também conhecida como Método das Ordenadas Discretas - tem como ideia central a aproximação do termo integral da equação por Quadratura Gaussiana e posterior aplicação do método da colocação no conjunto de direções discretas, as mesmas usadas na aproximação do termo integral por quadratura.

No que se refere a resolução de problemas de transferência radiativa sem simetria azimutal, a decomposição de Chandrasekhar [12] é um método bastante utilizado e consiste na expansão da solução do problema sem simetria em uma série de Fourier na variável azimutal, transformando a resolução de um problema sem simetria azimutal na resolução de um conjunto de problemas com simetria azimutal. Dentre as formulações propostas para a resolução dos problemas resultantes da decomposição de Chandrasekhar, encontra-se a formulação  $LTS_N$ , que resolve de forma analítica a aproximação  $S_N$  desses problemas. De modo geral, a ideia principal do método  $LTS_N$  consiste na aplicação da Transformada de Laplace na variável  $\tau$  no conjunto de equações  $S_N$ , inversão analítica da matriz simbólica e resolução do sistema linear resultante [1], [16], [32]. Importante destacar aqui, que a convergência do método  $LTS_N$  está demonstrada nos trabalhos desenvolvidos por Pazos e Vilhena [26], [27], os quais provaram que, à medida que  $N$  cresce, a solução  $LTS_N$  se aproxima da solução exata de Case [5].

No contexto desse estudo, o método  $LTS_N$  já foi aplicado na resolução de problemas com altas anisotropias, formulados mediante a utilização da decomposição da intensidade de radiação proposta por Chandrasekhar [31],[33], [3], [4], [30]; na resolução de problemas de transferência radiativa com polarização [36], bem como na resolução de problemas de transferência radiativa condutiva em geometria cilíndrica [21]. Entretanto, estudos desenvolvidos visando a resolução da equação de transferência radiativa e considerando a discretização de ambas as variáveis angulares é escasso e, para nosso conhecimento, restringe-se ao trabalho desenvolvido por Ladeia [19], [20], [21] para problemas de transferência radiativa condutiva em geometria cilíndrica e considerando baixo grau de anisotropia. Nesse sentido, com o objetivo de aprimorar a formulação  $LTS_N$  para o tratamento de problemas de transferência radiativa unidimensionais e com altos graus de anisotropia, propomos, nesta tese, um esquema que discretiza o termo integral da equação em ambas as variáveis angulares, utilizando a quadratura de Gauss-Legendre. Deste procedimento, resulta uma equação matricial que será resolvida analiticamente utilizando a formulação  $LTS_N$ .

Este trabalho está organizado em 5 capítulos. No capítulo 2, apresentamos alguns dos principais conceitos físicos relativos a Transferência Radiativa na Atmosfera, bem como uma formulação matemática para a ETR. No capítulo 3, descrevemos o método  $LTS_N$  clássico utilizado na resolução de problemas de transferência radiativa sem simetria azimutal. Em seguida, no capítulo 4, apresentamos a nossa formulação proposta para a resolução analítica da aproximação em ordenadas discretas dupla da ETR sem simetria azimutal em uma placa. No capítulo 5 apresentamos resultados obtidos via simulações numéricas, bem como resultados de um estudo acerca da qualidade da solução calculada. Apresentamos também, neste capítulo, comparações das soluções obtidas com os resultados disponíveis na literatura. Por fim, no capítulo 6, apresentamos as conclusões deste estudo.

## 2 A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA NA ATMOSFERA

Neste capítulo, descrevemos alguns conceitos relacionados à Transferência Radiativa na atmosfera e apresentamos uma formulação matemática da ETR supondo geometria unidimensional e meio participante, a qual é derivada a partir dos processos de atenuação e incremento da radiação [10],[40].

### 2.1 Conceitos físicos

Segundo Yamasoe e Corrêa [40], Radiação é a emissão ou propagação de energia na forma de onda eletromagnética ou, equivalente, como fluxo de fótons. No sistema terrestre, a principal fonte de radiação é proveniente do Sol. Esta radiação visível chamamos de luz e é de suma importância nos processos químicos, físicos e biológicos que ocorrem na natureza e estão relacionadas a diversos fenômenos, dentre os quais, a mudança climática do planeta e o lançamento de satélites meteorológicos. As nuvens cobrem cerca de 40% do planeta Terra e cumprem um importante papel na regulação da radiação armazenada na atmosfera, visto que refletem, absorvem e transmitem radiação solar e terrestre.

No contexto da transferência radiativa na atmosfera, a ETR descreve as alterações do fluxo da radiação solar causados pelos processos de interação da radiação com os gases e partículas presentes no meio. Neste trabalho, apresentamos uma derivação da ETR mediante a realização de um balanço de energia para um volume elementar no caminho de propagação de um feixe de luz, o qual incide e é espalhado no meio [10], [25]. Para tanto, apresentamos a seguir, definições de grandezas físicas presentes na ETR, bem como a descrição dos conceitos físicos relativos a transferência radiativa na atmosfera.

Consideremos, inicialmente, um ângulo sólido  $\Omega$  definido como a razão entre a área  $A$  de uma superfície esférica e o quadrado do raio  $r$  da esfera, ou seja,

$$\Omega = \frac{A}{r^2}. \quad (2.1)$$

Para a esfera de raio  $r$  ilustrada na figura (2.1), centrada em  $O$  e com um ponto arbitrário em sua superfície com coordenadas esféricas  $\theta$  e  $\varphi$ , definimos sua área infinitesimal como:

$$dA = r d\theta r \sin\theta d\varphi, \quad (2.2)$$

Assim, o ângulo sólido infinitesimal definido por essa área é:

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (2.3)$$

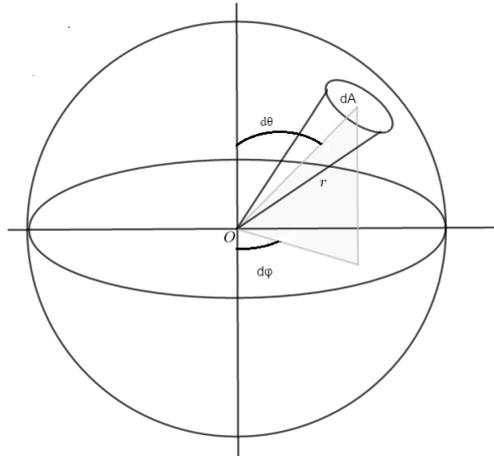


Figura 2.1: Ângulos polar  $\theta$  e azimutal  $\varphi$  que definem a direção de propagação de uma partícula, no sistema de coordenadas cartesianas. Fonte: adaptado de Yamasoe e Corrêa (2016).

Definimos o Fluxo de Radiação [40] como o quociente entre a quantidade de energia emitida, transferida ou recebida em um intervalo de tempo dado, isto é,

$$\phi = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.4)$$

As medidas de intensidade de radiação podem ser obtidas pela Irradiância e a Radiância. A Irradiância é definida como o quociente entre o fluxo de radiação incidente  $d\phi$ , em um determinado ponto de uma superfície, e a área da superfície atravessada, ou

$$E = \frac{d\phi}{dA}; \quad (2.5)$$

já a Radiância mede a quantidade de radiação recebida por um ponto, em uma determinada direção,

$$I = \frac{dE}{\cos\theta d\Omega}. \quad (2.6)$$

Conhecendo a radiância incidente em todas as direções de propagação dentro de um ângulo sólido  $d\Omega$ , definimos a irradiância total incidente por:

$$E = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I(\theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (2.7)$$

Uma importante característica física da atmosfera é que ela pode ser considerada um meio participante. Meios participantes são aqueles em que podem ocorrer os fenômenos físicos de absorção, emissão e/ou espalhamento durante a propagação da radiação. O fenômeno físico da absorção ( $k_\lambda$ ) produz um decréscimo da intensidade de radiação, no qual pode ocorrer transformação da radiação em outras formas de energia ou então surgir radiação em outra frequência [37]. Este processo causa alteração física do meio atravessado. No caso da atmosfera, aumento da temperatura [40]. O fenômeno físico da emissão ( $j_\lambda$ ) incrementa a intensidade de radiação numa determinada orientação. Por fim, o fenômeno físico dito espalhamento ( $\sigma_{s\lambda}$ ) causa mudança da direção de propagação da radiação, a qual pode ser refletida ou transmitida [23]. Cabe destacar aqui, que o subscrito  $\lambda$ , utilizado nos parâmetros que descrevem os fenômenos físicos acima, indica que os mesmos podem ocorrer de maneiras distintas para cada comprimento de onda. Os processos de espalhamento da radiação em nuvens são promovidos por elementos que constituem a atmosfera, tais como gases e outras partículas sólidas em suspensão,

chamadas de aerossóis. São exemplos de aerossóis a poeira, os grãos de pólen, as partículas resultantes da queima de combustíveis fósseis e de processos industriais, a poeira de erupção vulcânica, dentre outros. A atenuação ( $\beta_\lambda$ ) da intensidade de radiação é causada pelos processos de absorção e espalhamento, ou seja,

$$\beta_\lambda = k_\lambda + \sigma_{s\lambda}, \quad (2.8)$$

enquanto que o incremento da radiação pode ser ocasionado tanto pelo processo de emissão de radiação quanto de espalhamento de radiação oriundas de outras direções. A figura abaixo apresenta um esquema de um feixe incidente de radiação sobre um meio e os possíveis fenômenos físicos que podem ocorrer durante a propagação.

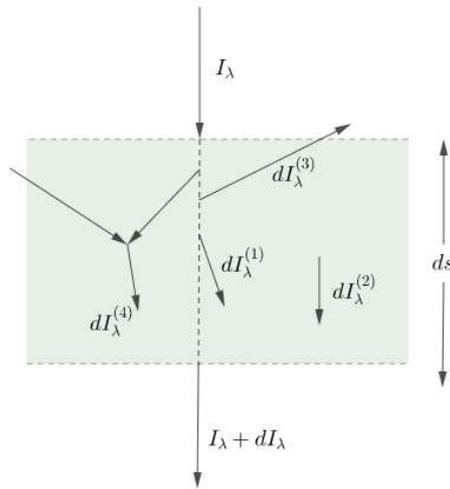


Figura 2.2: *Esquema do incremento e atenuação de um feixe de radiação ao longo de um caminho  $ds$ .  $dI_\lambda^{(1)}$ : absorção,  $dI_\lambda^{(2)}$ : emissão,  $dI_\lambda^{(3)}$ : espalhamento por remoção e  $dI_\lambda^{(4)}$ : espalhamento por adição. Fonte: adaptado de Yamasoe e Corrêa (2016).*

De acordo com Chandrasekhar [10], as propriedades de um meio participante variam, predominantemente, na direção vertical ( $z$ ). No que se refere à atmosfera, as variações relacionadas ao raio terrestre (aproximadamente 6300 km)

são mais significativas do que as variações na espessura da atmosfera (cerca de 100 km). Logo, podemos considerar a atmosfera por meio estratificado em planos paralelos, onde todas as propriedades são invariantes sob translação em cada um dos planos [40].

Considerando esta geometria, introduzimos, convenientemente, uma variável que relaciona o coeficiente de atenuação do meio com a profundidade  $z$ , denominada de variável óptica e representada por  $(\tau)$ . Nesse sentido, a relação entre a variação do coeficiente de atenuação e a profundidade é descrita por:

$$d\tau = \beta(z)dz. \quad (2.9)$$

A função  $p(\cos\Theta)$ , conhecida como função de fase, descreve o padrão angular de espalhamento da radiação e depende dos ângulos de incidência  $(\mu', \varphi')$  e espalhamento  $(\mu, \varphi)$  - onde  $\mu = \cos\theta$  - e do comprimento de onda  $\lambda$  da radiação incidente [40]. Aqui,  $\Theta$  é o ângulo formado pela direção de movimento do fóton antes da interação e o ângulo resultante após a interação.

Normalizada, a função de fase pode ser escrita como:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p(\cos\Theta) \sin\theta d\theta d\varphi = 1. \quad (2.10)$$

## 2.2 Formulação Matemática da ETR

A fim de apresentarmos uma derivação da ETR, consideremos uma determinada quantidade de energia  $dQ$ , definida para um fluxo passando em um intervalo de tempo  $dt$ , por um elemento de área  $dA$ , nas direções compreendidas por um ângulo sólido  $d\Omega$ , em um intervalo de comprimento de onda  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ . Esta quantidade de energia pode ser expressa em termos da radiância  $I_\lambda$  [10] como:

$$dQ = I_\lambda \cos\theta dt dA d\Omega d\lambda, \quad (2.11)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a direção do fluxo radiante e a direção normal  $\hat{n}$  ao plano de  $dA$ . Expressando (2.11) em termos de  $I_\lambda$ :

$$I_\lambda = \frac{dQ}{\cos\theta dt dAd\Omega d\lambda}. \quad (2.12)$$

Consideremos, ainda, um cilindro de comprimento  $ds$  e base com área  $dA$  por onde um feixe de radiação atravessa,

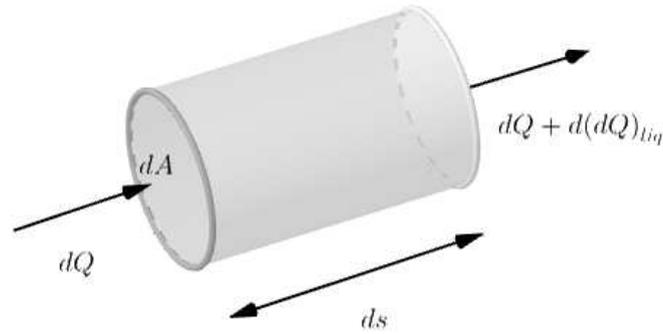


Figura 2.3: *Elemento de volume*  $dV = dA ds$ . Fonte: adaptado de Ozisik (1973).

Como descrito na seção anterior, em meios participantes a radiação pode sofrer processos de absorção, emissão e espalhamento durante sua propagação. Portanto, da energia  $dQ$  que atravessa o cilindro, há uma variação líquida ao final, parte dela devido à atenuação da radiação pelo meio, que pode ser expressa como:

$$d(dQ)_{atenuada} = -\beta_\lambda I_\lambda \cos\theta dt dAd\Omega d\lambda ds, \quad (2.13)$$

onde  $\beta_\lambda$  é o coeficiente de atenuação.

No mesmo cilindro, de volume  $dV$ , além da energia atenuada há também a energia emitida pelo meio, que pode ser escrita como:

$$d(dQ)_{emitida} = j_\lambda \cos\theta dt dV d\Omega d\lambda,$$

ou

$$d(dQ)_{emitida} = j_\lambda \cos\theta dt ds dAd\Omega d\lambda, \quad (2.14)$$

para direções confinadas a um elemento de ângulo sólido  $d\Omega$  e onde  $j_\lambda$  é o coeficiente de emissão do meio. A variação líquida de energia resulta do balanço entre a energia atenuada e emitida no meio,

$$d(dQ)_{liq} = d(dQ)_{atenuada} + d(dQ)_{emitida}. \quad (2.15)$$

Substituindo a expressão (2.11) em (2.15) e considerando as equações (2.13) e (2.14), temos:

$$dI_\lambda = -\beta_\lambda I_\lambda ds + j_\lambda ds, \quad (2.16)$$

ou

$$\frac{dI_\lambda}{\beta_\lambda ds} = -I_\lambda + \frac{j_\lambda}{\beta_\lambda}. \quad (2.17)$$

Na expressão (2.17), a razão  $\frac{j_\lambda}{\beta_\lambda}$  define a função fonte e depende da radiação em cada ponto e em todas as direções dentro de um elemento de volume, podendo ser interpretada como:

$$F_\lambda = \frac{\sigma_{s\lambda}}{\beta_\lambda} \int_{4\pi} I_\lambda(\vec{\xi}') \frac{p(\hat{\xi}', \hat{\xi})}{4\pi} d\Omega', \quad (2.18)$$

onde  $\frac{\sigma_{s\lambda}}{\beta_\lambda}$  representa a fração da perda de energia atribuída ao espalhamento [10], conhecida como albedo de espalhamento simples ( $\omega$ );  $\vec{\xi}' = \hat{\xi}'(\theta', \varphi')$  representa a direção de propagação da energia em um ângulo sólido  $d\Omega'$  e  $p(\hat{\xi}', \hat{\xi})$  a função de fase de espalhamento.

Considerando  $\omega$  e os ângulos polar  $\theta'$  e azimutal  $\varphi'$ , reescrevemos (2.18) como:

$$F(\theta', \varphi') = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p(\theta, \varphi, \theta', \varphi') I(\theta', \varphi') \text{sen}\theta' d\theta' d\varphi', \quad (2.19)$$

onde  $d\Omega' = \text{sen}\theta' d\theta' d\varphi'$ .

Classicamente, expande-se a função  $p(\cos \Theta)$  em polinômios de Legendre e utiliza-se o teorema da adição para harmônicos esféricos para reescrever

a função de fase como:

$$p(\cos \Theta) = \mathcal{P}(\mu, \mu', \varphi, \varphi') = \sum_{q=0}^L (2 - \delta_{0,q}) \sum_{\ell=q}^L \beta_{\ell}^q P_{\ell}^q(\mu) P_{\ell}^q(\mu') \cos[q(\varphi - \varphi')], \quad (2.20)$$

onde

$$\beta_{\ell}^q = \beta_{\ell} \frac{(\ell - q)!}{(\ell + q)!} \quad (2.21)$$

são os coeficientes da expansão, com  $\beta_0 = 1$  e  $|\beta_{\ell}| < 2l + 1$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, L$ ,  $L > 0$  e

$$P_{\ell}^q(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{q}{2}} \frac{d^q}{d\mu^q} P_{\ell}(\mu) \quad (2.22)$$

são as funções associadas de Legendre.

Por fim, podemos escrever a equação (2.17) levando em consideração geometria plano-paralelo e a expressão para a função fonte, de forma que

$$\cos\theta \frac{dI(z, \theta, \varphi)}{\beta_{\lambda}(z) dz} = -I(z, \theta, \varphi) + F(z, \theta, \varphi), \quad (2.23)$$

onde  $dz = \cos\theta ds$ .

Usando a definição de caminho ótico  $\tau$  e a expressão para a função fonte (2.19), reescrevemos (2.23) e obtemos a expressão:

$$\mu \frac{d}{d\tau} I(\tau, \mu, \varphi) + I(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\omega}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\tau, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi'. \quad (2.24)$$

A expressão (2.24) define, portanto, a Equação da Transferência Radiativa em geometria cartesiana unidimensional e meio participante.

### 3 EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA SEM SIMETRIA AZIMUTAL: SOLUÇÃO $LTS_N$

Neste capítulo, descrevemos o método  $LTS_N$  utilizado para a resolução de problemas de transferência radiativa sem simetria azimutal. Classicamente, estes problemas são formulados mediante a utilização da decomposição da intensidade de radiação proposta por Chandrasekhar [10]. Na decomposição de Chandrasekhar, o vetor intensidade de radiação é expandido em uma série de Fourier na variável azimutal, a qual é truncada em  $L$  termos - onde  $L$  representa o grau de anisotropia - e, posteriormente, essa expansão é substituída na equação de transferência radiativa sem simetria azimutal. Deste procedimento, obtém-se que os coeficientes da série de Fourier são soluções de um conjunto de  $2L + 1$  problemas semelhantes ao problema com simetria azimutal. Dentre os diversos métodos propostos para a resolução dos  $2L + 1$  problemas resultantes da decomposição de Chandrasekhar, encontra-se o método  $LTS_N$  [31], [4], [30], [33], [3].

A fim de descrevermos a solução  $LTS_N$  clássica utilizada para a resolução de problemas de transferência radiativa sem simetria azimutal, consideramos o seguinte problema de albedo, clássico da literatura:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu, \varphi) + I(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\omega}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\cos \Theta) I(\tau, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (3.1)$$

com condições de contorno:

$$I(0, \mu, \varphi) = \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \text{ se } \mu > 0 \quad (3.2)$$

e

$$I(\tau_0, \mu, \varphi) = 0 \text{ se } \mu < 0, \quad (3.3)$$

onde  $I(\tau, \mu, \varphi)$  é a intensidade de radiação em termos de espessura ótica e

- $\tau \in [0, \tau_0]$ ;
- $\mu = \cos \theta$  onde  $\theta$  é o ângulo polar, portanto  $\mu \in [-1, 1]$ ;
- $\varphi \in [0, 2\pi]$  é o ângulo azimutal;
- $\omega \in [0, 1]$  representa o albedo de espalhamento;
- $p(\cos \Theta)$  é a função de espalhamento, onde  $\Theta$  é o ângulo formado pela direção de movimento do fóton antes da interação e o ângulo resultante após a interação.

Consideramos, ainda, a seguinte expansão para a intensidade de radiação, proposta por Chandrasekhar [10]:

$$I(\tau, \mu, \varphi) = I^*(\tau, \mu, \varphi) + \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu}}. \quad (3.4)$$

Substituindo a igualdade (3.4) em (3.1)-(3.3) e, após algumas manipulações algébricas, obtemos o problema a ser satisfeito por  $I^*(\tau, \mu, \varphi)$ :

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I^*(\tau, \mu, \varphi) + I^*(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\omega}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\cos \Theta) I^*(\tau, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + S(\tau, \mu, \varphi) \quad (3.5)$$

com condições de contorno com incidência nulas e vetor fonte  $S(\tau, \mu, \varphi)$  dado por

$$S(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\omega}{4} \sum_{q=0}^L (2 - \delta_{0,q}) \sum_{\ell=q}^L \beta_{\ell}^q P_{\ell}^q(\mu) P_{\ell}^q(\mu_0) \cos[q(\varphi - \varphi_0)] e^{\frac{-\tau}{\mu_0}}. \quad (3.6)$$

Para resolvermos o problema descrito pelas equações (3.5)-(3.6) via método  $LTS_N$  Clássico, primeiramente utilizamos a expansão proposta por Chandrasekhar, expandindo o vetor intensidade de radiação em uma série de Fourier na variável azimutal,

$$I^*(\tau, \mu, \varphi) = I_c^{*0}(\tau, \mu) + \sum_{i=1}^{\infty} [I_c^{*i}(\tau, \mu) \cos[i(\varphi - \varphi_0)] + I_s^{*i}(\tau, \mu) \sin[i(\varphi - \varphi_0)]] . \quad (3.7)$$

Em seguida, substituímos a decomposição (3.7) no problema (3.5) e, usando a ortogonalidade das funções seno e cosseno, obtém-se que os coeficientes  $I_s^{*i}(\tau, \mu)$  da série truncada de Fourier (3.7) são as soluções dos  $L$  problemas semelhantes a problemas com simetria azimutal, descritos como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_s^{*m}(\tau, \mu) + I_s^{*m}(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{l=q}^L \beta_l^q P_l^q(\mu) \int_{-1}^1 P_l^q(\mu') I_s^{*m}(\tau, \mu') d\mu', \quad (3.8)$$

para  $m = 1, 2, \dots, L$  e com condições de contorno nulas.

Já os coeficientes  $I_c^{*i}(\tau, \mu)$  da série de Fourier (3.7) são as soluções dos seguintes  $L + 1$  problemas semelhantes a problemas com simetria azimutal, descritos como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_c^{*m}(\tau, \mu) + I_c^{*m}(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{l=q}^L \beta_l^q P_l^q(\mu) \int_{-1}^1 P_l^q(\mu') I_c^{*m}(\tau, \mu') d\mu' + S^{*m}(\tau, \mu), \quad (3.9)$$

com condições de contorno nulas,  $m = 0, 1, 2, \dots, L$  e vetor fonte dado por:

$$S^{*m}(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{l=q}^L \beta_l^q P_l^q(\mu) P_l^q(\mu_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}}. \quad (3.10)$$

Desta forma, a solução para o problema de transferência radiativa sem simetria azimutal (3.5) e com condições de contorno homogêneas é reescrita como:

$$I(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{i=0}^L I_c^{*i}(\tau, \mu) \cos[i(\varphi - \varphi_0)] + \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu}}, \quad (3.11)$$

onde as funções  $I_c^{*i}(\tau, \mu)$  tem a mesma forma que as soluções com simetria azimutal (3.9)-(3.10).

A aproximação  $S_N$  [9] destes problemas com simetria azimutal é realizada mediante a aproximação do termo integral das equações (3.9) por Quadratura Gaussiana de ordem  $N$  e a posterior aplicação do método da colocação no conjunto de direções discretas, as mesmas usadas na quadratura. Deste procedimento, resulta o seguinte conjunto de equações diferenciais

$$\frac{d}{d\tau} I_n^m(\tau) + \frac{1}{\mu_n} I_n^m(\tau) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=q}^L \beta_\ell^q P_\ell^q(\mu_n) \left[ \sum_{k=1}^N P_\ell^q(\mu_k) I_k^m(\tau) w_k + S_n^m(\tau) \right], \quad (3.12)$$

com condições de contorno homogêneas.

Este conjunto de equações é resolvido, então, de maneira clássica, utilizando o método  $LTS_N$ , mediante: *i*) a aplicação da Transformada de Laplace na variável espacial das equações  $S_N$ ; *ii*) a inversão analítica da matriz associada e *iii*) a resolução do sistema linear resultante. Deste procedimento, obtém-se uma solução analítica para os problemas sem simetria azimutal descritos em (3.5)- (3.6). Desta forma, a resolução de problemas sem simetria azimutal pelo método  $LTS_N$  e utilizando a abordagem de Chandrasekhar exige a resolução de um conjunto de  $2L + 1$  problemas com estrutura semelhantes aos problemas com simetria azimutal.

Buscando aprimorar o método  $LTS_N$  no sentido da resolução de problemas sem simetria azimutal e com elevadas anisotropias, propomos, a seguir, uma abordagem de solução na qual consideramos a discretização de ambas as variáveis angulares do termo integral da equação e cujo processo implicará na resolução, por um processo semelhante ao utilizado no método  $LTS_N$ , de apenas um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

## 4 UMA PROPOSIÇÃO PARA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA SEM SIMETRIA AZIMUTAL

Neste capítulo, apresentamos um esquema para resolução analítica da aproximação em ordenadas discretas dupla da equação de transferência radiativa sem simetria azimutal em uma placa e com alto grau de anisotropia. A aproximação da equação de transferência radiativa será obtida mediante a discretização do termo integral em ambas as variáveis angulares, utilizando a quadratura gaussiana dupla. A equação matricial resultante deste processo será, então, resolvida analiticamente utilizando a formulação  $LTS_N$ .

### 4.1 Solução em Ordenadas Discretas Dupla

Visando a construção de uma aproximação em ordenadas discretas dupla para o problema de transferência radiativa descrito por (3.5)- (3.6), partimos da aproximação do termo integral  $\int_{-1}^1 p(\cos \Theta) I^*(\tau, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi'$ , presente em (3.5), mediante Quadratura de Gauss-Legendre de ordem  $N$ . Nesse sentido, escrevemos

$$\int_{-1}^1 p(\cos \Theta) I^*(\tau, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \approx \sum_{t=1}^N \mathcal{P}(\mu, \mu_t, \varphi, \varphi') I_t^*(\tau, \varphi') \omega_t d\varphi', \quad (4.1)$$

onde  $\mu_t$  são as raízes da quadratura de Gauss-Legendre de ordem  $N$ , ordenadas de forma decrescente:

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < \mu_1 < 1,$$

com  $N$  par, e os  $\omega_t$  são os respectivos pesos da quadratura de Gauss-Legendre de ordem  $N$ , dados por:

$$\omega_t = \int_{-1}^1 \prod_{j=1, t \neq j}^N \frac{(\mu - \mu_j)}{(\mu_t - \mu_j)} d\mu$$

e  $\mathcal{P}(\mu, \mu_t, \varphi, \varphi)$  a função de espalhamento, descrita por (2.20).

Em seguida, aplicamos o método da colocação na variável angular  $\mu$ , considerando a função Delta de Dirac  $\delta(\mu - \mu_n)$  como a função teste e as raízes da quadratura de Gauss-Legendre de ordem  $N$  como os pontos de colocação. Desta forma, obtemos o sistema de equações discretizadas na variável angular  $\mu$ , descrito a seguir:

$$\mu_n \frac{d}{d\tau} I_n^*(\tau, \varphi) + I_n^*(\tau, \varphi) = \frac{\omega}{4\pi} \sum_{t=1}^N \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(\mu_n, \mu_t, \varphi, \varphi') I_t^*(\tau, \varphi') \omega_t d\varphi' + S_n(\tau, \mu_n, \varphi) \quad (4.2)$$

com as condições de contorno dadas por:

$$I_n^*(0, \varphi) = 0, \text{ se } \mu_n > 0, \quad (4.3)$$

$$I_n^*(\tau_0, \varphi) = 0, \text{ se } \mu_n < 0. \quad (4.4)$$

Procedendo a discretização dos termos angulares da equação de transferência radiativa sem simetria azimutal, aproximamos, agora, o termo integral  $\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(\mu_n, \mu_t, \varphi, \varphi') I_t^*(\tau, \varphi') \omega_t d\varphi'$  da equação (4.2) por Quadratura Gaussiana de ordem  $M$ , ou seja:

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(\mu_n, \mu_t, \varphi, \varphi') I_t^*(\tau, \varphi') \omega_t d\varphi' \approx \sum_{k=1}^M \mathcal{P}(\mu_n, \mu_t, \varphi, \varphi_k) I_{tk}^*(\tau) \omega_t \omega_k, \quad (4.5)$$

onde  $\varphi_k$  são as raízes da quadratura de Gauss-Legendre de ordem  $M$ , ordenadas de forma decrescente no intervalo  $0 < \varphi_k < 2\pi$ , com  $M$  natural e  $M \neq 0$ . Os  $\omega_k$  são os respectivos pesos da quadratura de Gauss-Legendre de ordem  $M$ .

Dando continuidade à descrição do esquema proposto, aplicamos o método da colocação na variável angular  $\varphi$  considerando a função Delta de Dirac  $\delta(\varphi - \varphi_m)$  como a função teste e as raízes da quadratura de Gauss-Legendre de ordem  $M$  como os pontos de colocação. Ao término deste procedimento obtemos o seguinte sistema de equações  $S_{N,M}$  que representa uma aproximação da equação de transferência radiativa (3.5) mediante a discretização de suas variáveis angulares:

$$\frac{d}{d\tau} I_{nm}^*(\tau) + \frac{1}{\mu_n} I_{nm}^*(\tau) = \frac{\omega}{4\pi\mu_n} \sum_{t=1}^N \sum_{k=1}^M \mathcal{P}(\mu_n, \mu_t, \varphi_m, \varphi_k) I_{tk}^*(\tau) \omega_t \omega_k + S_{nm}(\tau, \mu_n, \varphi_m) \quad (4.6)$$

com condições de contorno

$$\mathbf{I}_{nm}^*(0) = 0 \text{ se } \mu_n > 0 \quad (4.7)$$

e

$$\mathbf{I}_{nm}^*(\tau_0) = 0 \text{ se } \mu_n < 0, \quad (4.8)$$

e vetor fonte dado por:

$$\mathbf{S}_{nm}(\tau) = \frac{\omega}{4\mu_n} \sum_{q=0}^L (2 - \delta_{0,q}) \sum_{\ell=q}^L \beta_\ell^q P_\ell^q(\mu_n) P_\ell^q(\mu_0) \cos q(\varphi_m - \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}}. \quad (4.9)$$

Substituindo  $\mathcal{P}(\mu_n, \mu_t, \varphi_m, \varphi_k)$  pela expressão dada na equação (2.20), reescrevemos (4.6) como segue,

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}_{nm}^*(\tau) + \frac{1}{\mu_n} \mathbf{I}_{nm}^*(\tau) = \frac{\omega}{4\pi\mu_n} \sum_{t=1}^N \sum_{k=1}^M c(n, t, m, k) \mathbf{I}_{tk}^*(\tau) w_t w_k + \frac{\omega}{4\mu_n} c(n, \mu_0, m, \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}}, \quad (4.10)$$

com

$$c(n, t, m, k) = \sum_{q=0}^L (2 - \delta_{0,q}) \sum_{\ell=q}^L \beta_\ell^q P_\ell^q(\mu_n) P_\ell^q(\mu_t) \cos q(\varphi_m - \varphi_k) \quad (4.11)$$

e

$$c(n, \mu_0, m, \varphi_0) = \sum_{q=0}^L (2 - \delta_{0,q}) \sum_{\ell=q}^L \beta_\ell^q P_\ell^q(\mu_n) P_\ell^q(\mu_0) \cos q(\varphi_m - \varphi_0), \quad (4.12)$$

onde  $n, t : 1, \dots, N$  e  $m, k : 1, \dots, M$ .  $(\mu_0, \varphi_0)$  é a direção de incidência da radiação no contorno, fixada previamente e não pertencente ao conjunto de direções discretizadas.

Na forma matricial, este sistema de equações  $\mathbf{S}_{N,M}$  é escrito como:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}^*(\tau) - \mathbf{A} \mathbf{I}^*(\tau) = \mathbf{F}(\tau). \quad (4.13)$$

O vetor  $\mathbf{F}(\tau)$  representa o vetor fonte de ordem  $NM$  e é dado por:

$$\mathbf{F}(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{4\mu_1} c(1, \mu_0, 1, \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}} \\ \frac{\omega}{4\mu_1} c(1, \mu_0, 2, \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}} \\ \vdots \\ \frac{\omega}{4\mu_1} c(1, \mu_0, M, \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}} \\ \frac{\omega}{4\mu_2} c(2, \mu_0, 1, \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}} \\ \frac{\omega}{4\mu_2} c(2, \mu_0, 2, \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}} \\ \vdots \\ \frac{\omega}{4\mu_2} c(2, \mu_0, M, \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}} \\ \frac{\omega}{4\mu_n} c(N, \mu_0, 1, \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}} \\ \frac{\omega}{4\mu_n} c(N, \mu_0, 2, \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}} \\ \vdots \\ \frac{\omega}{4\mu_n} c(N, \mu_0, M, \varphi_0) e^{\frac{-\tau}{\mu_0}} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada de ordem  $NM$  formada por  $N^2$  sub-matrizes quadradas  $\mathbf{A}_{\mathbf{IJ}}$  de ordem  $M$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1J} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2J} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{I1} & \mathbf{A}_{I2} & \dots & \mathbf{A}_{IJ} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

com  $I, J : 1, \dots, N$  e as sub-matrizes  $\mathbf{A}_{\mathbf{IJ}}$  assim definidas:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{IJ}} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{1}{\mu_I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mu_I} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & -\frac{1}{\mu_I} \end{array} \right] + \frac{\omega w_I}{4\pi\mu_I} \left[ \begin{array}{ccc} c(I, J, 1, 1) & \dots & c(I, J, 1, j) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c(I, J, i, 1) & \dots & c(I, J, i, j) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & w_j \end{array} \right] & \text{se } I = J \\ \\ \frac{\omega w_I}{4\pi\mu_I} \left[ \begin{array}{ccc} c(I, J, 1, 1) & \dots & c(I, J, 1, j) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c(I, J, i, 1) & \dots & c(I, J, i, j) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & w_j \end{array} \right] & \text{se } I \neq J \end{array} \right. \quad (4.16)$$

onde  $I, J : 1, \dots, N$  e  $i, j : 1, \dots, M$ .

Neste estudo, o vetor intensidade de radiação é definido por:

$$\mathbf{I}^*(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1}^*(\tau) \\ \mathbf{I}_{2}^*(\tau) \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

onde  $\mathbf{I}_{1}^*(\tau)$  e  $\mathbf{I}_{2}^*(\tau)$  são sub-vetores do vetor intensidade de radiação  $\mathbf{I}^*(\tau)$ , cada um de ordem  $\frac{NM}{2}$ . O vetor  $\mathbf{I}_{1}^*(\tau)$  contém a intensidade de radiação nas direções positivas de  $\mu$ :

$$\mathbf{I}_{1}^*(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1,1}^*(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{1,M}^*(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{\frac{NM}{2},1}^*(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{\frac{NM}{2},M}^*(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

e o vetor  $\mathbf{I}_{2}^*(\tau)$  a intensidade de radiação nas direções negativas de  $\mu$ :

$$\mathbf{I}_{2}^*(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{NM}{2}+1,1}^*(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{\frac{NM}{2}+1,M}^*(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{NM,1}^*(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{NM,M}^*(\tau) \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Na seção seguinte, será demonstrado a utilização da formulação LTS<sub>N</sub> para a resolução analítica do conjunto de equações S<sub>N,M</sub> obtidas nesse processo.

## 4.2 Método $LTS_{N,M}$

A resolução do problema descrito por (4.10) e com condições de contorno nulas será desenvolvida, aqui, de maneira análoga àquela proposta no método  $LTS_N$  para a resolução da aproximação  $S_N$  da equação de transporte de partículas. Esta proposta de resolução analítica da aproximação  $S_{N,M}$  da equação de transferência radiativa sem simetria azimutal será denominada  $LTS_{N,M}$ . Nesse sentido, primeiramente aplicamos a Transformada de Laplace na variável espacial das equações  $S_{N,M}$ , representadas matricialmente por (4.13). Obtemos, desta forma, um sistema linear de  $NM$  equações e  $NM$  incógnitas, dependentes do parâmetro  $s$  e dadas por:

$$(sJ - \mathbf{A})\bar{\mathbf{I}}^*(s) = \mathbf{I}^*(0) + \bar{\mathbf{F}}(s), \quad (4.20)$$

em que  $\bar{\mathbf{I}}^*(s) = \mathcal{L}[\mathbf{I}^*(\tau)]$  e  $\bar{\mathbf{F}}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{F}(\tau)]$  são as transformadas de Laplace,  $s$  é um parâmetro complexo e  $J$  uma matriz identidade de ordem  $NM$ . Em seguida, resolvemos a equação (4.20) para a intensidade de radiação transformada, obtendo

$$\mathbf{I}^*(\tau) = \mathbf{B}(\tau)\mathbf{I}^*(0) + \mathbf{H}(\tau) \quad (4.21)$$

com

$$\mathbf{B}(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[(sJ - \mathbf{A})^{-1}] \quad (4.22)$$

e o vetor  $\mathbf{H}(\tau)$  definido como:

$$\mathbf{H}(\tau) = \mathbf{B}(\tau) * \mathbf{F}(\tau) = \int_0^\tau \mathbf{B}(\tau - \xi)\mathbf{F}(\xi)d\xi, \quad (4.23)$$

onde o sinal  $*$  representa a convolução matricial.

A expressão (4.21), nos fornece, então, uma solução analítica da aproximação  $S_{N,M}$  da equação de transferência radiativa sem simetria azimutal.

### 4.3 Método $\text{LTS}_{N,M}$ Não Espectral

No método  $\text{LTS}_N$  Não Espectral [29], a matriz associada  $A$  é decomposta como  $A = D + A_C$ , onde  $D$  é a matriz que contém os termos da diagonal de  $A$  e  $A_C$  é a matriz com os demais termos de  $A$ . Esta mudança na forma de escrever  $A$  implica o desacoplamento das equações, visto que a matriz  $D$  é diagonal, e por este motivo, o cálculo de autovalores da matriz associada não é necessário. Neste método Não Espectral, a solução das equações resultantes é obtida de maneira recursiva: primeiramente resolve-se um sistema com a fonte e as condições de contorno do problema original e, em seguida, resolve-se os demais problemas com fonte determinada pelo produto entre a solução do problema anterior e a matriz  $A_C$ , com condições de contorno homogêneas. O número de equações a serem resolvidas nesse processo é escolhido de forma a obter uma precisão prescrita.

Com o objetivo de construirmos o método não espectral para a resolução do problema  $S_{N,M}$ , associado à (4.10), primeiramente decompomos a matriz  $\text{LTS}_{N,M}$  e reescrevemos o problema da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}I^*(\tau) - \mathbf{A}I^*(\tau) &= \mathbf{F}(\tau) & (4.24) \\ \frac{d}{d\tau}I^*(\tau) - [(\mathbf{A} - \mathbf{D}) + \mathbf{D}]I^*(\tau) &= \mathbf{F}(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}I^*(\tau) - \mathbf{D}I^*(\tau) &= (\mathbf{A} - \mathbf{D})I^*(\tau) + \mathbf{F}(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}I^*(\tau) - \mathbf{D}I^*(\tau) &= \mathbf{A}_c I^*(\tau) + \mathbf{F}(\tau), \end{aligned}$$

com  $\mathbf{A}_c = (\mathbf{A} - \mathbf{D})$  e condições de contorno:

$$I^*(0) = 0 \quad \text{se } \mu > 0 \quad (4.25)$$

e

$$I^*(\tau_0) = 0 \quad \text{se } \mu < 0. \quad (4.26)$$

Nesta decomposição,  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal, dada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{IJ} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

para  $I, J : 1, \dots, N$  e onde  $D_{IJ}$  são sub-matrizes quadradas de ordem  $M$ , assim definidas:

$$d_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{\mu_I} + \frac{\omega w_I c(I, J, i, j) w_j}{4\pi \mu_I} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (4.28)$$

com  $i, j : 1, \dots, M$ .

Já a matriz  $\mathbf{A}_c$  é definida como:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12} & \dots & A_{1J} \\ A_{21} & A_{22}^* & \dots & A_{2J} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{I1} & A_{I2} & \dots & A_{IJ}^* \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

para  $I, J : 1, \dots, N$ , cujos elementos são:

$$a_{ij}^* = \begin{cases} \frac{\omega w_I c(I, J, i, j) w_j}{4\pi \mu_I} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}, \quad (4.30)$$

e

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{\omega w_I c(I, J, i, j) w_j}{4\pi \mu_I} & \forall i, j, \end{cases} \quad (4.31)$$

onde  $i, j : 1, \dots, M$  e  $\mathbf{F}(\tau)$  o vetor fonte (4.19).

Resolvemos (4.24) de forma recursiva. Para isso, supomos a decomposição da intensidade de radiação como:

$$\mathbf{I}^*(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}^{*k}(\tau). \quad (4.32)$$

Substituindo a decomposição (4.32) na equação matricial (4.24) temos:

$$\frac{d}{d\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}^{*k}(\tau) - \mathbf{D} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}^{*k}(\tau) = \mathbf{A}_C \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}^{*k}(\tau) + \mathbf{F}(\tau). \quad (4.33)$$

Essas equações são, aqui, resolvidas como o seguinte processo recursivo:

Para  $k = 0$ , resolvemos o problema:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}^{*0}(\tau) - \mathbf{D} \mathbf{I}^{*0}(\tau) = \mathbf{F}(\tau), \quad (4.34)$$

com as condições de contorno dadas pelas equações (4.25) e (4.26). Nas demais recursões, ou seja, para  $k = 1, 2, \dots$ , resolvemos os problemas:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}^{*k}(\tau) - \mathbf{D} \mathbf{I}^{*k}(\tau) = \mathbf{A}_C \mathbf{I}^{*(k-1)}(\tau), \quad (4.35)$$

com condições de contorno nulas.

Pelo fato de que  $\mathbf{D}$  foi construída diagonal, os sistemas (4.34) e (4.35) podem ser escritos como  $NM$  equações desacopladas. Desta maneira, a resolução do sistema (4.34) se dá mediante a resolução das seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{d\tau} \mathbf{I}_i^{*0}(\tau) - d_{ii} \mathbf{I}_i^{*0}(\tau) = \mathbf{F}_i(\tau) & i = 1, 2, \dots, NM \\ \mathbf{I}_i^{*0}(0) = 0 & i = 1, 2, \dots, \frac{NM}{2} \\ \mathbf{I}_i^{*0}(\tau_0) = 0 & i = \frac{NM}{2} + 1, \dots, NM, \end{array} \right. \quad (4.36)$$

cujas soluções são conhecidas e expressas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^{*0}(\tau) &= e^{d_{ii}\tau} \mathbf{I}_i^{*0}(0) + e^{d_{ii}\tau} * \mathbf{F}_i(\tau) \\ \mathbf{I}_i^{*0}(\tau) &= e^{d_{ii}\tau} \mathbf{I}_i^{*0}(0) + \int_0^{\tau} e^{d_{ii}(\tau-\eta)} \mathbf{F}_i(\eta) d\eta \quad i = 1, 2, \dots, NM. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Entretanto, como desconhecemos os valores de  $\mathbf{I}_i^{*0}(0)$  para  $i = \frac{NM}{2} + 1, \dots, NM$ , aplicamos as condições de contorno (4.25 - 4.26) nas equações (4.36), com  $i = \frac{NM}{2} + 1, \dots, NM$  e  $\tau = \tau_0$ , obtendo, daí,

$$\mathbf{I}_i^{*0}(\tau_0) = e^{d_{ii}\tau_0} \mathbf{I}_i^{*0}(0) + \int_0^{\tau_0} e^{d_{ii}(\tau_0-\eta)} \mathbf{F}_i(\eta) d\eta. \quad (4.38)$$

Isolando  $\mathbf{I}_i^{*0}(0)$  em (4.38), temos que:

$$\mathbf{I}_i^{*0}(0) = \mathbf{I}_i^{*0}(\tau_0)e^{-d_{ii}\tau_0} - \int_0^{\tau_0} e^{-d_{ii}\eta}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta \quad i = \frac{NM}{2}, \dots, NM. \quad (4.39)$$

Substituindo (4.39) na equação (4.37), obtemos a expressão que fornece a solução para as direções  $\mu < 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^{*0}(\tau) &= e^{d_{ii}\tau}(\mathbf{I}_i^{*0}(\tau_0)e^{-d_{ii}\tau_0} - \int_0^{\tau_0} e^{-d_{ii}\eta}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta) + \int_0^{\tau} e^{d_{ii}(\tau-\eta)}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta \\ &= e^{d_{ii}(\tau-\tau_0)}\mathbf{I}_i^{*0}(\tau_0) - \int_0^{\tau_0} e^{d_{ii}(\tau-\eta)}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta + \int_0^{\tau} e^{d_{ii}(\tau-\eta)}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta \\ &= e^{d_{ii}(\tau-\tau_0)}\mathbf{I}_i^{*0}(\tau_0) - \int_{\tau}^{\tau_0} e^{d_{ii}(\tau-\eta)}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta \\ &= e^{d_{ii}(\tau-\tau_0)}\mathbf{I}_i^{*0}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{d_{ii}(\tau-\eta)}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta, \\ & \quad i = \frac{NM}{2} + 1, \dots, NM. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Desta maneira, a solução do problema recursivo (4.34) fica completamente determinada:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_i^{*0}(\tau) = e^{d_{ii}\tau}\mathbf{I}_i^{*0}(0) + \int_0^{\tau} e^{d_{ii}(\tau-\eta)}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta, & i = 1, \dots, \frac{NM}{2} \\ \mathbf{I}_i^{*0}(\tau) = e^{d_{ii}(\tau-\tau_0)}\mathbf{I}_i^{*0}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{d_{ii}(\tau-\eta)}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta, & i = \frac{NM}{2} + 1, \dots, NM. \end{cases} \quad (4.41)$$

Devido às condições de contorno do problema, reescrevemos (4.41) como:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_i^{*0}(\tau) = \int_0^{\tau} e^{d_{ii}(\tau-\eta)}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta, & i = 1, \dots, \frac{NM}{2} \\ \mathbf{I}_i^{*0}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} e^{d_{ii}(\tau-\eta)}\mathbf{F}_i(\eta)d\eta, & i = \frac{NM}{2} + 1, \dots, NM. \end{cases}$$

Os demais termos da recursão para determinação do vetor intensidade de radiação  $\mathbf{I}^*(\tau)$  são as soluções das equações

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{I}_i^{*k}(\tau) - d_{ii}\mathbf{I}_i^{*k}(\tau) = \mathbf{A}_C\mathbf{I}_i^{*(k-1)}(\tau) \quad i = 1, \dots, NM, \quad (4.42)$$

com condições de contorno nulas e  $k = 1, 2, \dots$ , as quais são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^{*k}(\tau) &= e^{d_{ii}\tau}\mathbf{I}_i^{*k}(0) + e^{d_{ii}\tau} * \mathbf{A}_C\mathbf{I}_i^{*(k-1)}(\tau) \\ \mathbf{I}_i^{*k}(\tau) &= e^{d_{ii}\tau}\mathbf{I}_i^{*k}(0) + \int_0^{\tau} e^{d_{ii}(\tau-\eta)}\mathbf{A}_C\mathbf{I}_i^{*(k-1)}(\eta)d\eta \quad i = 1, 2, \dots, NM. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Nestes problemas, conhecemos somente os  $\frac{NM}{2}$  primeiros valores do vetor  $\mathbf{I}_i^{*k}(0)$ . Desta forma, aplicando ideias análogas àquelas apresentadas na recursão zero e considerando agora as condições de contorno nulas, expressamos as soluções de cada problema recursivo (4.42) como:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_i^{*k}(\tau) = \int_0^\tau e^{d_{ii}(\tau-\eta)} \mathbf{A}_C \mathbf{I}_i^{*(k-1)}(\eta) d\eta & i = 1, 2, \dots, \frac{NM}{2} \\ \mathbf{I}_i^{*k}(\tau) = \int_{\tau_0}^\tau e^{d_{ii}(\tau-\eta)} \mathbf{A}_C \mathbf{I}_i^{*(k-1)}(\eta) d\eta & i = \frac{NM}{2} + 1, \dots, NM. \end{cases} \quad (4.44)$$

Desta maneira, ao término deste procedimento, obtemos a solução  $\text{LTS}_{N,M}$  do problema (4.10) de forma Não Espectral, o que representa a novidade neste trabalho.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Conforme descrito na seção 4.2, a formulação  $LTS_{N,M}$  nos fornece a solução intensidade de radiação calculada no conjunto de direções discretas  $(\mu_i, \varphi_j)$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$  e  $j = 1, 2, \dots, M$ . Desta maneira, para calcularmos a intensidade de radiação em uma direção distinta das direções discretas, utilizamos a técnica de inclusão de nós fictícios, conhecida como *DNI* [8]. *DNI* é uma técnica de interpolação angular que consiste na inclusão de nós fictícios nos esquemas de quadratura utilizados, os quais são associados a pesos de valor zero. Uma característica relevante desta técnica é o aumento da ordem da matriz associada. Por exemplo, se incluirmos  $R$  e  $S$  novas direções discretas nas quadraturas  $N$  e  $M$ , respectivamente, utilizadas na resolução dos problemas sem simetria azimutal via  $LTS_{N,M}$ , a nova matriz  $LTS_{N,M}$  associada passará a ter ordem  $(N + R)(M + S)$ .

Outro aspecto relevante acerca da implementação numérica do método  $LTS_{N,M}$  diz respeito a função de fase  $p(\cos \Theta)$ , descrita por (2.20). Devido ao *overflow* causado pelos fatores  $P_\ell^m(\mu)$  de (2.20) para problemas com elevadas anisotropias, optamos por utilizar as funções  $D_\ell^m$ , que são os polinômios modificados de Legendre propostos por [6] e descritas como:

$$D_{\ell+1}^m(\mu) = \frac{(2\ell + 1)\mu D_\ell^m(\mu) - (\ell^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} D_{\ell-1}^m(\mu)}{[(\ell + 1)^2 - m^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.1)$$

para  $l = m, m + 1, \dots$ , tendo como valores iniciais  $D_0^0(\mu) = 1$ .

Para calcularmos as integrais de convolução, utilizamos Quadratura Gaussiana com 100 pontos. No que se refere a interpolação da função  $\mathbf{A}_C \mathbf{I}^{*(k-1)}(\tau)$ , utilizamos a fórmula de Newton. Diversos testes foram realizados a fim de verificar a quantidade de pontos necessários na interpolação da função de modo a se obter um resultado satisfatório para a intensidade de radiação calculada. Apresentamos, a seguir, alguns resultados dessas simulações, considerando dois problemas cujos parâmetros estão descritos a seguir:

PROBLEMA 1	PROBLEMA 2
$L = 8$	$L = 82$
$N = 8$	$N = 210$
$M = 17$	$M = 50$
$\omega = 0.9$	$\omega = 0.9$
$\mu_0 = 0.5$	$\mu_0 = 0.5$
$\tau_0 = 1$	$\tau_0 = 1$
$\tau = 0.5$	$\tau = 0.5$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = 0$
20 recursões	30 recursões

Tabela 5.1: Problemas testes: interpolação polinomial

Testamos a interpolação utilizando 10, 30, 50, 100 e 600 pontos, para ambos os problemas.

I*(0.5)						
<i>LTS8,17</i>						
$\mu$	Interpolação por Newton					LTS8
	10	30	50	100	600	
1	1.22156003E-01	1.22613256E-01	1.22649926E-01	1.22665365E-01	1.22670384E-01	1.226705524E-01
0.8	1.23664913E-01	1.24261350E-01	1.24309191E-01	1.24329339E-01	1.24335886E-01	1.243361278E-01
0.6	1.31432726E-01	1.32197080E-01	1.32258381E-01	1.32284202E-01	1.32292592E-01	1.322929254E-01
0.4	1.47326317E-01	1.48289612E-01	1.48366816E-01	1.48399349E-01	1.48409916E-01	1.484103698E-01
0.2	1.70503420E-01	1.71637390E-01	1.71728111E-01	1.71766380E-01	1.71778804E-01	1.717793942E-01
-0.2	1.11733221E-01	1.12335625E-01	1.12383995E-01	1.12404451E-01	1.12411074E-01	1.124114970E-01
-0.4	6.69320940E-02	6.73014702E-02	6.73311051E-02	6.73436335E-02	6.73476900E-02	6.734795450E-02
-0.6	3.98688284E-02	4.00868647E-02	4.01043634E-02	4.01117621E-02	4.01141577E-02	4.011431804E-02
-0.8	2.32220485E-02	2.33406038E-02	2.33501266E-02	2.33541553E-02	2.33554595E-02	2.335555170E-02
-1	1.26138677E-02	1.26649580E-02	1.26690708E-02	1.26708142E-02	1.26713782E-02	1.267142413E-02

Tabela 5.2: Interpolação polinomial, problema  $L = 8$

I*(0.5)						
<i>LTS210,50</i>						
$\mu$	Interpolação por Newton					LTS400
	10	30	50	100	600	
1	4.73201131E-02	4.75733446E-02	4.75955938E-02	4.76052773E-02	4.76084768E-02	4.760835899E-02
0.8	5.67563900E-01	5.69345527E-01	5.69496129E-01	5.69560768E-01	5.69581998E-01	5.695828516E-01
0.6	2.17888070E+00	2.18335507E+00	2.18373319E+00	2.18389545E+00	2.18394874E+00	2.183951369E+00
0.4	2.86412348E+00	2.87194767E+00	2.87261623E+00	2.87290435E+00	2.87299914E+00	2.873004830E+00
0.2	1.81538307E+00	1.82499404E+00	1.82581900E+00	1.82617568E+00	1.82629311E+00	1.826300503E+00
-0.2	4.47947563E-01	4.51017676E-01	4.51297147E-01	4.51420608E-01	4.51461567E-01	4.514646742E-01
-0.4	1.73479426E-01	1.74977432E-01	1.75121003E-01	1.75185418E-01	1.75206963E-01	1.752090138E-01
-0.6	6.74105157E-02	6.80194404E-02	6.80795223E-02	6.81067072E-02	6.81158385E-02	6.811651951E-02
-0.8	2.63416210E-02	2.65705406E-02	2.65935326E-02	2.66039896E-02	2.66075104E-02	2.660757264E-02
-1	9.26878330E-03	9.33663429E-03	9.34334527E-03	9.34638400E-03	9.34740451E-03	9.347181806E-03

Tabela 5.3: Interpolação polinomial, problema  $L = 82$

Após estudo dos dados obtidos mediante simulações, constatamos que o aumento do número de pontos utilizados na interpolação polinomial ocasiona uma melhor aproximação dos resultados referentes a  $I^*(\tau)$ . Porém, cabe ressaltar aqui, que o aumento do número de pontos utilizados na interpolação acarreta num maior tempo computacional.

As simulações numéricas deste estudo foram realizadas mediante a implementação de um programa em linguagem Fortran em dupla precisão. O problema com grau de anisotropia 82 foi executado em um computador Intel (R), Core (TM), I5-2537M, CPU 1,4GHz, 64bits, 8GB de memória RAM e Windows 8 (R). Já o problema com grau de anisotropia 299 foi executado utilizando os recursos computacionais do Centro Nacional de Supercomputação da UFRGS, CESUP/UFRGS.

Os resultados dessas simulações foram comparados com aqueles obtidos via método  $LTS_N$  Clássico [31], [30], bem como os obtidos via utilização da formulação em ordenadas discretas analítica [6].

Neste trabalho, seguimos a identificação dos problemas de transferência radiativa conforme [6] e cujos parâmetros são descritos na tabela a seguir:

Parâmetro	HAZE	CLOUD1
$\omega$	0.9	0.9
$\tau_0$	1	1
$\mu_0$	0.5	0.2
$L$	82	299

Tabela 5.4: Parâmetros dos problemas em transferência radiativa

Na implementação do esquema  $LTS_{N,M}$  não espectral, interpolamos a função  $\mathbf{A}_C I^{*(k-1)}(\tau)$  utilizando 600 pontos, tanto para o problema HAZE quanto para o

problema CLOUD1. O número de recursões foi definido a priori, qual seja, 30 recursões, para ambos os problemas.

Para o problema HAZE, comparamos os resultados obtidos com aqueles encontrados na literatura calculando a diferença na aproximação de  $I^*(\tau)$  mediante a utilização da fórmula da diferença percentual, dada por:

$$\varepsilon_{1,2} = \left( \frac{I_2^*(\tau) - I_1^*(\tau)}{I_1^*(\tau)} \right) * 100, \quad (5.2)$$

onde  $\varepsilon_{1,2}$  é a diferença percentual quando comparamos resultados obtidos via utilização do método  $LTS_{N,M}$  (1) e aqueles obtidos por (Rost, 2008) (2). Já para comparação entre os resultados obtidos via  $LTS_{N,M}$  (1) e aqueles obtidos por (Chalhoub, 1997) (3), utilizamos a fórmula para a diferença percentual dada por:

$$\varepsilon_{1,3} = \left( \frac{I_3^*(\tau) - I_1^*(\tau)}{I_1^*(\tau)} \right) * 100. \quad (5.3)$$

Para o problema CLOUD1, utilizamos a fórmula da diferença relativa, dada por:

$$\varepsilon_{1,2} = \left( \frac{I_2^*(\tau) - I_1^*(\tau)}{I_1^*(\tau)} \right) \quad (5.4)$$

e

$$\varepsilon_{1,3} = \left( \frac{I_3^*(\tau) - I_1^*(\tau)}{I_1^*(\tau)} \right). \quad (5.5)$$

## 5.1 Problema HAZE

Nas tabelas (5.5) - (5.6), a seguir, apresentamos resultados obtidos para a intensidade de radiação para o problema HAZE onde consideramos  $N = 210$  e  $M = 50$  e ângulos azimutal  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = \pi$ .

$\varphi$	$\mu$	LTS <sub>N,M</sub> (1)			Rost (2)			Chalhoub (3)		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
0	-1	2.281943E-02	9.347405E-03		2.281898E-02	9.347182E-03		2.2819E-02	9.3472E-03	
	-0.8	6.499759E-02	2.660751E-02		6.499780E-02	2.660757E-02		6.4998E-02	2.6608E-02	
	-0.6	1.509907E-01	6.811584E-02		1.509926E-01	6.811652E-02		1.5099E-01	6.8117E-02	
	-0.4	3.293247E-01	1.752070E-01		3.293322E-01	1.752090E-01		3.2934E-01	1.7521E-01	
	-0.2	6.567923E-01	4.514616E-01		6.568238E-01	4.514647E-01		6.5683E-01	4.5147E-01	
	0.2		1.826293E+00	1.291414E+00		1.826301E+00	1.291431E+00		1.8263E+00	1.2914E+00
	0.4		2.872999E+00	2.401034E+00		2.873005E+00	2.401039E+00		2.8730E+00	2.4010E+00
	0.6		2.183949E+00	2.153683E+00		2.183951E+00	2.153685E+00		2.1840E+00	2.1537E+00
	0.8		5.695820E-01	7.199328E-01		5.695829E-01	7.199334E-01		5.6958E-01	7.1993E-01
	1		4.760848E-02	8.375848E-02		4.760836E-02	8.375789E-02		4.7608E-02	8.3758E-02
$\frac{\pi}{2}$	-1	2.281943E-02	9.347405E-03		2.281898E-02	9.347182E-03		2.2819E-02	9.3472E-03	
	-0.8	3.232648E-02	1.385815E-02		3.232497E-02	1.385752E-02		3.2325E-02	1.3858E-02	
	-0.6	4.752295E-02	2.249447E-02		4.751874E-02	2.249261E-02		4.7519E-02	2.2493E-02	
	-0.4	6.930245E-02	3.955399E-02		6.929157E-02	3.954821E-02		6.9292E-02	3.9549E-02	
	-0.2	8.942745E-02	7.183960E-02		8.940750E-02	7.182218E-02		8.9409E-02	7.1823E-02	
	0.2		9.290591E-02	1.012005E-01		9.288647E-02	1.011768E-01		9.2887E-02	1.0118E-01
	0.4		6.680972E-02	9.953144E-02		6.680306E-02	9.951740E-02		6.6803E-02	9.9518E-02
	0.6		5.238462E-02	8.933471E-02		5.238266E-02	8.932927E-02		5.2383E-02	8.9330E-02
	0.8		4.684010E-02	8.312169E-02		4.683959E-02	8.311992E-02		4.6840E-02	8.3120E-02
	1		4.760848E-02	8.375848E-02		4.760836E-02	8.375789E-02		4.7608E-02	8.3758E-02

Tabela 5.5: Solução  $LTS_{210,50}$  para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\varphi$	$\mu$	$LTS_{N,M}$ (1)			Rost (2)			Chalhoub (3)		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
$\pi$	-1	2.281943E-02	9.347405E-03		2.281898E-02	9.347182E-03		2.2819E-02	9.3472E-03	
	-0.8	3.203641E-02	1.389315E-02		3.203699E-02	1.389279E-02		3.2037E-02	1.3893E-02	
	-0.6	4.120426E-02	1.952700E-02		4.121415E-02	1.952806E-02		4.1214E-02	1.9528E-02	
	-0.4	5.499672E-02	2.988019E-02		5.501371E-02	2.988162E-02		5.5013E-02	2.9882E-02	
	-0.2	7.086558E-02	4.911261E-02		7.088504E-02	4.911406E-02		7.0887E-02	4.9115E-02	
	0.2		5.272180E-02	5.069234E-02		5.272335E-02	5.069521E-02		5.2723E-02	5.0696E-02
	0.4		3.247184E-02	4.480492E-02		3.246928E-02	4.480086E-02		3.2470E-02	4.4801E-02
	0.6		2.149533E-02	3.593746E-02		2.149339E-02	3.593276E-02		2.1493E-02	3.5933E-02
	0.8		1.796209E-02	3.297445E-02		1.796118E-02	3.297175E-02		1.7961E-02	3.2972E-02
	1		4.760848E-02	8.375848E-02		4.760836E-02	8.375789E-02		4.7608E-02	8.3758E-02

Tabela 5.6: Solução  $LTS_{210,50}$  para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de  $\varphi = \pi$

$\varphi$	$\mu$	$\varepsilon_{1,2}$			$\varepsilon_{1,3}$		
		0	0.5	1	0	0.5	1
0	-1	2.00E-03	2.38E-03		1.89E-03	2.19E-03	
	-0.8	3.32E-04	2.34E-04		6.34E-04	1.84E-03	
	-0.6	1.27E-03	1.00E-03		4.33E-04	1.71E-03	
	-0.4	2.30E-03	1.17E-03		4.66E-03	1.71E-03	
	-0.2	4.80E-03	6.88E-04		5.74E-03	1.87E-03	
	0.2		4.05E-04	1.31E-03		3.77E-04	1.08E-03
	0.4		1.98E-04	2.30E-04		2.99E-05	1.40E-03
	0.6		1.20E-04	1.02E-04		2.35E-03	7.82E-04
	0.8		1.50E-04	8.04E-05		3.51E-04	3.95E-04
	1		2.47E-04	7.09E-04		1.00E-03	5.75E-04
$\frac{\pi}{2}$	-1	2.00E-03	2.38E-03		1.89E-03	2.19E-03	
	-0.8	4.66E-03	4.55E-03		4.57E-03	1.09E-03	
	-0.6	8.85E-03	8.26E-03		8.31E-03	6.53E-03	
	-0.4	1.57E-02	1.46E-02		1.51E-02	1.26E-02	
	-0.2	2.23E-02	2.43E-02		2.06E-02	2.31E-02	
	0.2		2.09E-02	2.35E-02		2.04E-02	2.03E-02
	0.4		9.97E-03	1.41E-02		1.01E-02	1.35E-02
	0.6		3.75E-03	6.09E-03		3.10E-03	5.27E-03
	0.8		1.09E-03	2.14E-03		2.13E-04	2.04E-03
	1		2.47E-04	7.09E-04		1.00E-03	5.75E-04
$\pi$	-1	2.00E-03	2.38E-03		1.89E-03	2.19E-03	
	-0.8	1.83E-03	2.58E-03		1.85E-03	1.07E-03	
	-0.6	2.40E-02	5.43E-03		2.36E-02	5.13E-03	
	-0.4	3.09E-02	4.78E-03		2.96E-02	4.87E-03	
	-0.2	2.75E-02	2.95E-03		3.02E-02	4.87E-03	
	0.2		2.94E-03	5.65E-03		2.27E-03	7.21E-03
	0.4		7.89E-03	9.07E-03		5.67E-03	8.76E-03
	0.6		9.03E-03	1.31E-02		1.09E-02	1.24E-02
	0.8		5.11E-03	8.18E-03		6.09E-03	7.42E-03
	1		2.47E-04	7.09E-04		1.00E-03	5.75E-04

Tabela 5.7: Diferenças percentuais para a solução  $LTS_{210,50}$  do problema HAZE nas direções  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = \pi$

A seguir, apresentamos resultados para a intensidade de radiação considerando diferentes valores para o ângulo azimutal. Para os demais parâmetros, utilizamos os mesmos valores daqueles descritos no problema anterior. Nesses testes, comparamos a solução  $LTS_{210,50}$  com a obtida utilizando a formulação  $LTS_{400}$ .

$\varphi$	$\mu$	$LTS_{N,M}$ (1)			Rost (2)			$\varepsilon_{1,2}$		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
0.0344329802 $\pi$	-1	2.281943E-02	9.347405E-03		2.281898E-02	9.347182E-03		2.00E-03	2.38E-03	
	-0.9	4.102837E-02	1.642292E-02		4.102823E-02	1.642284E-02		3.54E-04	4.94E-04	
	-0.8	6.477342E-02	2.652052E-02		6.477362E-02	2.652057E-02		3.09E-04	1.91E-04	
	-0.7	9.947105E-02	4.242081E-02		9.947182E-02	4.242105E-02		7.76E-04	5.68E-04	
	-0.6	1.500868E-01	6.772876E-02		1.500886E-01	6.772927E-02		1.17E-03	7.53E-04	
	-0.5	2.231149E-01	1.083152E-01		2.231184E-01	1.083161E-01		1.59E-03	8.00E-04	
	-0.4	3.264048E-01	1.737769E-01		3.264118E-01	1.737781E-01		2.13E-03	7.35E-04	
	-0.3	4.674269E-01	2.793658E-01		4.674408E-01	2.793674E-01		2.99E-03	5.59E-04	
	-0.2	6.480117E-01	4.463221E-01		6.480418E-01	4.463232E-01		4.64E-03	2.57E-04	
	-0.1	8.550932E-01	6.878963E-01		8.551715E-01	6.878958E-01		9.16E-03	7.85E-05	
	0.1		1.378332E+00	8.597332E-01		1.378334E+00	8.597738E-01		1.12E-04	4.72E-03
	0.2		1.765675E+00	1.257663E+00		1.765680E+00	1.257679E+00		2.98E-04	1.26E-03
	0.3		2.198347E+00	1.736468E+00		2.198352E+00	1.736476E+00		2.65E-04	4.75E-04
	0.4		2.677317E+00	2.264351E+00		2.677321E+00	2.264356E+00		1.81E-04	2.20E-04
	0.5		2.784933E+00	2.519843E+00		2.784936E+00	2.519847E+00		1.28E-04	1.27E-04
	0.6		2.051026E+00	2.040962E+00		2.051029E+00	2.040964E+00		1.19E-04	1.01E-04
	0.7		1.151069E+00	1.286823E+00		1.151070E+00	1.286825E+00		1.32E-04	9.37E-05
	0.8		5.585284E-01	7.081034E-01		5.585293E-01	7.081040E-01		1.50E-04	7.93E-05
	0.9		2.351564E-01	3.407832E-01		2.351567E-01	3.407832E-01		1.46E-04	1.66E-05
1		4.760848E-02	8.375848E-02		4.760836E-02	8.375789E-02		2.47E-04	7.09E-04	

Tabela 5.8: Solução  $LTS_{210,50}$  para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de  $\varphi = 0.0344329802\pi$

$\varphi$	$\mu$	LTS <sub>N,M</sub> (1)			Rost (2)			$\varepsilon_{1,2}$		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
0.0280597103 $\pi$	-1	2.281943E-02	9.347405E-03		2.281898E-02	9.347182E-03		2.00E-03	2.38E-03	
	-0.9	2.998706E-02	1.233567E-02		2.998636E-02	1.233537E-02		2.32E-03	2.44E-03	
	-0.8	3.844316E-02	1.623897E-02		3.844208E-02	1.623851E-02		2.83E-03	2.83E-03	
	-0.7	4.931218E-02	2.173774E-02		4.931044E-02	2.173699E-02		3.53E-03	3.46E-03	
	-0.6	6.313018E-02	2.956737E-02		6.312731E-02	2.956607E-02		4.54E-03	4.42E-03	
	-0.5	8.022680E-02	4.079085E-02		8.022204E-02	4.078849E-02		5.93E-03	5.79E-03	
	-0.4	1.003129E-01	5.690489E-02		1.003053E-01	5.690055E-02		7.62E-03	7.62E-03	
	-0.3	1.215156E-01	7.977502E-02		1.215043E-01	7.976707E-02		9.27E-03	9.96E-03	
	-0.2	1.386652E-01	1.106514E-01		1.386515E-01	1.106372E-01		9.83E-03	1.29E-02	
	-0.1	1.417818E-01	1.451793E-01		1.417746E-01	1.451565E-01		5.13E-03	1.57E-02	
	0.1		1.762859E-01	1.470510E-01		1.762609E-01	1.470389E-01		1.42E-02	8.26E-03
	0.2		1.611407E-01	1.696218E-01		1.611242E-01	1.696032E-01		1.02E-02	1.10E-02
	0.3		1.399773E-01	1.760690E-01		1.399679E-01	1.760530E-01		6.78E-03	9.09E-03
	0.4		1.217686E-01	1.727397E-01		1.217634E-01	1.727284E-01		4.23E-03	6.53E-03
	0.5		1.076749E-01	1.650073E-01		1.076723E-01	1.650002E-01		2.46E-03	4.28E-03
	0.6		9.686395E-02	1.556459E-01		9.686269E-02	1.556419E-01		1.31E-03	2.60E-03
	0.7		8.807158E-02	1.455098E-01		8.807102E-02	1.455076E-01		6.34E-04	1.52E-03
	0.8		7.983091E-02	1.340751E-01		7.983067E-02	1.340739E-01		3.00E-04	9.20E-04
	0.9		7.006189E-02	1.191655E-01		7.006178E-02	1.191647E-01		1.67E-04	6.32E-04
	1		4.760848E-02	8.375848E-02		4.760836E-02	8.375789E-02		2.47E-04	7.09E-04

Tabela 5.9: Solução  $LTS_{210,50}$  para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de  $\varphi = 0.0280597103\pi$

$\varphi$	$\mu$	LTS <sub>N,M</sub> (1)			Rost (2)			$\varepsilon_{1,2}$		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
0.0190794984 $\pi$	-1	2.281943E-02	9.347405E-03		2.281898E-02	9.347182E-03		2.00E-03	2.38E-03	
	-0.9	2.594452E-02	1.105872E-02		2.594396E-02	1.105832E-02		2.15E-03	3.67E-03	
	-0.8	3.147237E-02	1.367084E-02		3.147190E-02	1.367025E-02		1.50E-03	4.32E-03	
	-0.7	3.740573E-02	1.668058E-02		3.740476E-02	1.667953E-02		2.59E-03	6.27E-03	
	-0.6	4.337523E-02	2.016430E-02		4.337172E-02	2.016203E-02		8.10E-03	1.12E-02	
	-0.5	5.000574E-02	2.463453E-02		4.999674E-02	2.462977E-02		1.80E-02	1.93E-02	
	-0.4	5.767735E-02	3.072118E-02		5.766011E-02	3.071201E-02		2.99E-02	2.99E-02	
	-0.3	6.481423E-02	3.864658E-02		6.478648E-02	3.862999E-02		4.28E-02	4.29E-02	
	-0.2	6.905838E-02	4.837436E-02		6.902050E-02	4.834587E-02		5.49E-02	5.89E-02	
	-0.1	6.726435E-02	5.806410E-02		6.722546E-02	5.802056E-02		5.78E-02	7.50E-02	
	0.1		6.149948E-02	4.652003E-02		6.145230E-02	4.648248E-02		7.68E-02	8.08E-02
	0.2		5.198663E-02	5.062110E-02		5.195472E-02	5.058171E-02		6.14E-02	7.79E-02
	0.3		4.110586E-02	4.920385E-02		4.108696E-02	4.917230E-02		4.60E-02	6.42E-02
	0.4		3.235125E-02	4.506614E-02		3.234051E-02	4.504416E-02		3.32E-02	4.88E-02
	0.5		2.601290E-02	4.043595E-02		2.600691E-02	4.042186E-02		2.30E-02	3.48E-02
	0.6		2.172848E-02	3.653653E-02		2.172518E-02	3.652798E-02		1.52E-02	2.34E-02
	0.7		1.918651E-02	3.407571E-02		1.918471E-02	3.407070E-02		9.36E-03	1.47E-02
	0.8		1.840534E-02	3.384433E-02		1.840436E-02	3.384143E-02		5.31E-03	8.55E-03
	0.9		2.041132E-02	3.806784E-02		2.041080E-02	3.806619E-02		2.55E-03	4.33E-03
1		4.760848E-02	8.375848E-02		4.760836E-02	8.375789E-02		2.47E-04	7.09E-04	

Tabela 5.10: Solução  $LTS_{210,50}$  para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de  $\varphi = 0.0190794984\pi$

$\varphi$	$\mu$	LTS <sub>N,M</sub> (1)			Rost (2)			$\varepsilon_{1,2}$		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
0.0126311542 $\pi$	-1	2.281943E-02	9.347405E-03		2.281898E-02	9.347182E-03		2.00E-03	2.38E-03	
	-0.9	2.498254E-02	1.062355E-02		2.498158E-02	1.062309E-02		3.84E-03	4.34E-03	
	-0.8	2.892651E-02	1.262943E-02		2.892469E-02	1.262861E-02		6.29E-03	6.50E-03	
	-0.7	3.353950E-02	1.515179E-02		3.353609E-02	1.515032E-02		1.02E-02	9.69E-03	
	-0.6	3.886110E-02	1.840651E-02		3.885495E-02	1.840389E-02		1.58E-02	1.42E-02	
	-0.5	4.488668E-02	2.272058E-02		4.487620E-02	2.271597E-02		2.33E-02	2.03E-02	
	-0.4	5.136913E-02	2.854071E-02		5.135242E-02	2.853265E-02		3.25E-02	2.83E-02	
	-0.3	5.748570E-02	3.638064E-02		5.746121E-02	3.636673E-02		4.26E-02	3.82E-02	
	-0.2	6.130217E-02	4.642280E-02		6.127075E-02	4.639950E-02		5.13E-02	5.02E-02	
	-0.1	5.945754E-02	5.672083E-02		5.942704E-02	5.668564E-02		5.13E-02	6.21E-02	
	0.1		6.108596E-02	4.979354E-02		6.104850E-02	4.976332E-02		6.14E-02	6.07E-02
	0.2		5.250464E-02	5.488578E-02		5.247912E-02	5.485343E-02		4.86E-02	5.90E-02
	0.3		4.268431E-02	5.436588E-02		4.266891E-02	5.433961E-02		3.61E-02	4.83E-02
	0.4		3.479204E-02	5.105589E-02		3.478308E-02	5.103729E-02		2.58E-02	3.64E-02
	0.5		2.911252E-02	4.715617E-02		2.910741E-02	4.714404E-02		1.76E-02	2.57E-02
	0.6		2.535287E-02	4.390443E-02		2.535001E-02	4.389697E-02		1.13E-02	1.70E-02
	0.7		2.327799E-02	4.205169E-02		2.327641E-02	4.204727E-02		6.77E-03	1.05E-02
	0.8		2.296392E-02	4.241736E-02		2.296306E-02	4.241479E-02		3.73E-03	6.05E-03
	0.9		2.541294E-02	4.707949E-02		2.541248E-02	4.707802E-02		1.78E-03	3.13E-03
1		4.760848E-02	8.375848E-02		4.760836E-02	8.375789E-02		2.47E-04	7.09E-04	

Tabela 5.11: Solução  $LTS_{210,50}$  para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de  $\varphi = 0.0126311542\pi$

$\varphi$	$\mu$	LTS <sub>N,M</sub> (1)			Rost (2)			$\varepsilon_{1,2}$			
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1	
0.0105869178 $\pi$	-1	2.281943E-02	9.347405E-03		2.281898E-02	9.347182E-03		2.00E-03	2.38E-03		
	-0.9	2.533728E-02	1.068822E-02		2.533629E-02	1.068779E-02		3.89E-03	4.09E-03		
	-0.8	2.924543E-02	1.269396E-02		2.924364E-02	1.269320E-02		6.13E-03	5.98E-03		
	-0.7	3.410224E-02	1.538541E-02		3.409910E-02	1.538409E-02		9.22E-03	8.59E-03		
	-0.6	4.002352E-02	1.905099E-02		4.001811E-02	1.904866E-02		1.35E-02	1.22E-02		
	-0.5	4.703305E-02	2.410993E-02		4.702406E-02	2.410582E-02		1.91E-02	1.71E-02		
	-0.4	5.485050E-02	3.113526E-02		5.483630E-02	3.112803E-02		2.59E-02	2.32E-02		
	-0.3	6.248519E-02	4.079638E-02		6.246449E-02	4.078387E-02		3.31E-02	3.07E-02		
	-0.2	6.756332E-02	5.337304E-02		6.753697E-02	5.335198E-02		3.90E-02	3.95E-02		
	-0.1	6.595862E-02	6.653026E-02		6.593399E-02	6.649843E-02		3.74E-02	4.79E-02		
	0.1		7.335380E-02	6.228916E-02		7.332022E-02	6.226310E-02		4.58E-02	4.19E-02	
	0.2		6.397190E-02	6.941243E-02		6.394906E-02	6.938376E-02		3.57E-02	4.13E-02	
	0.3		5.305796E-02	6.970031E-02		5.304419E-02	6.967691E-02		2.59E-02	3.36E-02	
	0.4		4.426999E-02	6.650933E-02		4.426202E-02	6.649276E-02		1.80E-02	2.49E-02	
	0.5		3.796647E-02	6.244290E-02		3.796196E-02	6.243214E-02		1.19E-02	1.72E-02	
	0.6		3.382833E-02	5.895783E-02		3.382585E-02	5.895125E-02		7.34E-03	1.12E-02	
	0.7		3.156350E-02	5.687930E-02		3.156216E-02	5.687545E-02		4.24E-03	6.76E-03	
	0.8		3.115679E-02	5.694978E-02		3.115609E-02	5.694756E-02		2.28E-03	3.89E-03	
	0.9		3.328047E-02	6.068873E-02		3.328010E-02	6.068745E-02		1.11E-03	2.10E-03	
	1		4.760848E-02	8.375848E-02		4.760836E-02	8.375789E-02		2.47E-04	7.09E-04	

Tabela 5.12: Solução  $LTS_{210,50}$  para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de  $\varphi = 0.0105869178\pi$

$\varphi$	$\mu$	LTS <sub>N,M</sub> (1)			Rost (2)			$\varepsilon_{1,2}$		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
	-1	2.281943E-02	9.347405E-03		2.281898E-02	9.347182E-03		2.00E-03	2.38E-03	
	-0.9	3.968553E-02	1.592414E-02		3.968533E-02	1.592404E-02		5.15E-04	6.55E-04	
	-0.8	6.124702E-02	2.515048E-02		6.124708E-02	2.515048E-02		1.04E-04	4.16E-06	
	-0.7	9.214777E-02	3.943845E-02		9.214830E-02	3.943862E-02		5.69E-04	4.29E-04	
	-0.6	1.362745E-01	6.179009E-02		1.362759E-01	6.179052E-02		9.87E-04	7.01E-04	
	-0.5	1.983687E-01	9.697308E-02		1.983716E-01	9.697390E-02		1.43E-03	8.44E-04	
	-0.4	2.834544E-01	1.525385E-01		2.834600E-01	1.525398E-01		2.00E-03	8.50E-04	
	-0.3	3.945333E-01	2.399296E-01		3.945447E-01	2.399313E-01		2.88E-03	7.04E-04	
	-0.2	5.266566E-01	3.735630E-01		5.266809E-01	3.735645E-01		4.63E-03	3.89E-04	
	-0.1	6.566697E-01	5.566729E-01		6.567327E-01	5.566729E-01		9.59E-03	5.63E-08	
0.0019902343 $\pi$	0.1		9.801933E-01	6.526073E-01		9.801948E-01	6.526417E-01		1.56E-04	5.27E-03
	0.2		1.125024E+00	8.813995E-01		1.125029E+00	8.814125E-01		4.02E-04	1.48E-03
	0.3		1.217427E+00	1.083959E+00		1.217432E+00	1.083965E+00		4.06E-04	6.02E-04
	0.4		1.268234E+00	1.230273E+00		1.268238E+00	1.230277E+00		3.24E-04	3.14E-04
	0.5		1.219223E+00	1.264959E+00		1.219226E+00	1.264962E+00		2.47E-04	1.93E-04
	0.6		1.016351E+00	1.130248E+00		1.016353E+00	1.130250E+00		2.00E-04	1.36E-04
	0.7		7.099536E-01	8.565357E-01		7.099548E-01	8.565366E-01		1.78E-04	1.02E-04
	0.8		4.170605E-01	5.533479E-01		4.170612E-01	5.533483E-01		1.67E-04	6.61E-05
	0.9		2.032738E-01	3.008699E-01		2.032741E-01	3.008699E-01		1.41E-04	1.03E-05
	1		4.760848E-02	8.375848E-02		4.760836E-02	8.375789E-02		2.47E-04	7.09E-04

Tabela 5.13: Solução  $LTS_{210,50}$  para a Intensidade de Radiação do problema HAZE na direção de  $\varphi = 0.0019902343\pi$

Do estudo dos dados apresentados nas tabelas (5.5)-(5.13), podemos afirmar que foi possível obter boas aproximações para as soluções  $LTS_{210,50}$ , as quais variam de 4 a 6 dígitos significativos quando comparados com resultados da literatura [6], [30]. O tempo necessário para execução do programa que resolveu este problema foi de  $3h13min$ , aproximadamente.

## 5.2 Problema CLOUD1

A seguir, apresentamos resultados obtidos para a intensidade de radiação para o problema CLOUD1. Nas tabelas (5.14)-(5.15), apresentamos resultados das simulações em que consideramos  $N = 150$  e  $M = 120$  e ângulos azimutal  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = \pi$ . Em seguida, nas tabelas (5.17)-(5.18) apresentamos resultados das simulações em que consideramos  $N = 400$  e  $M = 180$  e ângulos azimutal  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = \pi$ .

$\varphi$	$\mu$	LTS <sub>N,M</sub> (1)			Rost (2)			Chalhoub (3)		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
0	-1	1.812684E-03	1.291557E-03		6.900536E-03	2.111936E-03		6.9006E-03	2.1119E-03	
	-0.8	2.990122E-02	8.670375E-03		4.090269E-02	1.041263E-02		4.0903E-02	1.0413E-02	
	-0.6	1.204364E-01	3.289898E-02		1.309725E-01	3.432451E-02		1.3097E-01	3.4325E-02	
	-0.4	3.851774E-01	1.052358E-01		3.650732E-01	1.006966E-01		3.6508E-01	1.0070E-01	
	-0.2	1.030100E+00	3.090302E-01		1.007486E+00	3.030561E-01		1.0075E+00	3.0306E-01	
	0.2		1.010177E+02	2.255859E+01		1.009008E+02	2.251210E+01		1.0090E+02	2.2512E+01
	0.4		8.457815E-01	7.206708E-01		8.745705E-01	7.373791E-01		8.7457E-01	7.3738E-01
	0.6		3.009153E-01	3.236046E-01		3.073358E-01	3.275806E-01		3.0734E-01	3.2758E-01
	0.8		9.523705E-02	1.208125E-01		9.442311E-02	1.196253E-01		9.4423E-02	1.1963E-01
	1		4.460397E-03	1.082457E-02		8.680241E-03	1.443379E-02		8.6803E-03	1.4434E-02
$\frac{\pi}{2}$	-1	1.812684E-03	1.291557E-03		6.900536E-03	2.111936E-03		6.9006E-03	2.1190E-03	
	-0.8	-5.314895E-04	1.711601E-03		1.045882E-02	3.401532E-03		1.0459E-02	3.4016E-03	
	-0.6	6.480601E-03	4.552314E-03		1.630262E-02	5.818311E-03		1.6303E-02	5.8184E-03	
	-0.4	2.750419E-02	1.193237E-02		2.581179E-02	1.062971E-02		2.5812E-02	1.0630E-02	
	-0.2	6.465884E-02	2.829306E-02		4.004532E-02	2.142121E-02		4.0046E-02	2.1421E-02	
	0.2		4.921327E-02	4.274714E-02		3.457212E-02	3.387442E-02		3.4572E-02	3.3875E-02
	0.4		2.194063E-02	3.098305E-02		2.166359E-02	2.921930E-02		2.1664E-02	2.9220E-02
	0.6		6.619077E-03	1.760925E-02		1.477227E-02	2.277711E-02		1.4772E-02	2.2777E-02
	0.8		1.867460E-03	1.076607E-02		1.086773E-02	1.781043E-02		1.0868E-02	1.7811E-02
	1		4.460397E-03	1.082457E-02		8.680241E-03	1.443379E-02		8.6803E-03	1.4434E-02

Tabela 5.14: Solução  $LTS_{150,120}$  para a Intensidade de Radiação do problema CLOUD1 na direção de  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\varphi$	$\mu$	$LTS_{N,M}$ (1)			Rost (2)			Chalhoub (3)		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
	-1	1.812684E-03	1.291557E-03		6.900536E-03	2.111936E-03		6.9006E-03	2.1190E-03	
	-0.8	2.743438E-02	8.389798E-03		2.568554E-02	7.835134E-03		2.5686E-02	7.8352E-03	
	-0.6	2.752197E-02	1.091854E-02		3.452658E-02	1.147888E-02		3.4527E-02	1.1479E-02	
	-0.4	1.685937E-02	1.381859E-02		5.264344E-02	1.874317E-02		5.2644E-02	1.8743E-02	
	-0.2	3.113978E-01	7.922348E-02		1.534328E-01	4.600702E-02		1.5343E-01	4.6007E-02	
$\pi$	0.2		7.213990E-02	5.518862E-02		5.753149E-02	4.436316E-02		5.7532E-02	4.4364E-02
	0.4		5.830631E-02	5.440730E-02		4.486164E-02	4.385977E-02		4.4862E-02	4.3860E-02
	0.6		9.310974E-03	1.740891E-02		1.715892E-02	2.162635E-02		1.7159E-02	2.1627E-02
	0.8		-1.373091E-03	4.319741E-03		7.264594E-03	1.078223E-02		7.2646E-03	1.0782E-02
	1		4.460397E-03	1.082457E-02		8.680241E-03	1.443379E-02		8.6803E-03	1.4434E-02

Tabela 5.15: Solução  $LTS_{150,120}$  para a Intensidade de Radiação do problema CLOUD1 na direção de  $\varphi = \pi$

$\varphi$	$\mu$	$\varepsilon_{1,2}$			$\varepsilon_{1,3}$		
		0	0.5	1	0	0.5	1
0	-1	2.8068E+00	6.3519E-01		2.8068E+00	6.3516E-01	
	-0.8	3.6793E-01	2.0094E-01		3.6794E-01	2.0099E-01	
	-0.6	8.7483E-02	4.3331E-02		8.7462E-02	4.3345E-02	
	-0.4	5.2195E-02	4.3133E-02		5.2177E-02	4.3101E-02	
	-0.2	2.1953E-02	1.9332E-02		2.1940E-02	1.9319E-02	
	0.2		1.1574E-03	2.0655E-03		1.1651E-03	2.0655E-03
	0.4		3.4038E-02	2.3186E-02		3.4038E-02	2.3186E-02
	0.6		2.1337E-02	1.2285E-02		2.1351E-02	1.2285E-02
	0.8		8.5464E-03	9.7879E-03		8.5476E-03	9.7879E-03
	1		9.4607E-01	3.3345E-01		9.4608E-01	3.3345E-01
$\frac{\pi}{2}$	-1	2.8068E+00	6.3519E-01		2.8068E+00	6.4066E-01	
	-0.8	2.0678E+01	9.8734E-01		2.0679E+01	9.8738E-01	
	-0.6	1.5156E+00	2.7810E-01		1.5157E+00	2.7812E-01	
	-0.4	6.1533E-02	1.0917E-01		6.1525E-02	1.0915E-01	
	-0.2	3.8067E-01	2.4288E-01		3.8066E-01	2.4289E-01	
	0.2		2.9750E-01	2.0755E-01		2.9751E-01	2.0755E-01
	0.4		1.2627E-02	5.6904E-02		1.2608E-02	5.6904E-02
	0.6		1.2318E+00	2.9347E-01		1.2317E+00	2.9347E-01
	0.8		4.8195E+00	6.5436E-01		4.8197E+00	6.5436E-01
	1		9.4607E-01	3.3345E-01		9.4608E-01	3.3345E-01
$\pi$	-1	2.8068E+00	6.3519E-01		2.8068E+00	6.4066E-01	
	-0.8	6.3747E-02	6.6112E-02		6.3730E-02	6.6104E-02	
	-0.6	2.5451E-01	5.1319E-02		2.5453E-01	5.1331E-02	
	-0.4	2.1225E+00	3.5637E-01		2.1225E+00	3.5636E-01	
	-0.2	5.0728E-01	4.1928E-01		5.0729E-01	4.1928E-01	
	0.2		2.0250E-01	1.9614E-01		2.0249E-01	1.9614E-01
	0.4		2.3059E-01	1.9386E-01		2.3058E-01	1.9386E-01
	0.6		8.4287E-01	2.4229E-01		8.4288E-01	2.4229E-01
	0.8		6.2907E+00	1.4960E+00		6.2907E+00	1.4960E+00
	1		9.4607E-01	3.3345E-01		9.4608E-01	3.3345E-01

Tabela 5.16: Diferenças relativas para a solução  $LTS_{150,120}$  do problema CLOUD1,

$$\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ e } \varphi = \pi$$

$\varphi$	$\mu$	LTS <sub>N,M</sub> (1)			Rost (2)			Chalhoub (3)		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
0	-1	1.812155E-03	1.290960E-03		6.900536E-03	2.111936E-03		6.9006E-03	2.1119E-03	
	-0.8	2.990515E-02	8.671452E-03		4.090269E-02	1.041263E-02		4.0903E-02	1.0413E-02	
	-0.6	1.204415E-01	3.289960E-02		1.309725E-01	3.432451E-02		1.3097E-01	3.4325E-02	
	-0.4	3.851885E-01	1.052358E-01		3.650732E-01	1.006966E-01		3.6508E-01	1.0070E-01	
	-0.2	1.030154E+00	3.090342E-01		1.007486E+00	3.030561E-01		1.0075E+00	3.0306E-01	
	0.2		1.010117E+02	2.255693E+01		1.009008E+02	2.251210E+01		1.0090E+02	2.2512E+01
	0.4		8.457865E-01	7.206764E-01		8.745705E-01	7.373791E-01		8.7457E-01	7.3738E-01
	0.6		3.009192E-01	3.236095E-01		3.073358E-01	3.275806E-01		3.0734E-01	3.2758E-01
	0.8		9.524413E-02	1.208211E-01		9.442311E-02	1.196253E-01		9.4423E-02	1.1963E-01
	1		4.459841E-03	1.082428E-02		8.680241E-03	1.443379E-02		8.6803E-03	1.4434E-02
$\frac{\pi}{2}$	-1	1.812155E-03	1.290960E-03		6.900536E-03	2.111936E-03		6.9006E-03	2.1190E-03	
	-0.8	-5.308415E-04	1.711815E-03		1.045882E-02	3.401532E-03		1.0459E-02	3.4016E-03	
	-0.6	6.481772E-03	4.552678E-03		1.630262E-02	5.818311E-03		1.6303E-02	5.8184E-03	
	-0.4	2.750650E-02	1.193306E-02		2.581179E-02	1.062971E-02		2.5812E-02	1.0630E-02	
	-0.2	6.466418E-02	2.829428E-02		4.004532E-02	2.142121E-02		4.0046E-02	2.1421E-02	
	0.2		4.921566E-02	4.275005E-02		3.457212E-02	3.387442E-02		3.4572E-02	3.3875E-02
	0.4		2.194220E-02	3.098494E-02		2.166359E-02	2.921930E-02		2.1664E-02	2.9220E-02
	0.6		6.619994E-03	1.761048E-02		1.477227E-02	2.277711E-02		1.4772E-02	2.2777E-02
	0.8		1.868005E-03	1.076686E-02		1.086773E-02	1.781043E-02		1.0868E-02	1.7811E-02
	1		4.459841E-03	1.082428E-02		8.680241E-03	1.443379E-02		8.6803E-03	1.4434E-02

Tabela 5.17: Solução  $LTS_{400,180}$  para a Intensidade de Radiação do problema CLOUD1 na direção de  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\varphi$	$\mu$	$LTS_{N,M}$ (1)			Rost (2)			Chalhoub (3)		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
	-1	1.812155E-03	1.290960E-03		6.900536E-03	2.111936E-03		6.9006E-03	2.1190E-03	
	-0.8	2.743385E-02	8.389583E-03		2.568554E-02	7.835134E-03		2.5686E-02	7.8352E-03	
	-0.6	2.752571E-02	1.091962E-02		3.452658E-02	1.147888E-02		3.4527E-02	1.1479E-02	
	-0.4	1.686046E-02	1.381872E-02		5.264344E-02	1.874317E-02		5.2644E-02	1.8743E-02	
	-0.2	3.113938E-01	7.922105E-02		1.534328E-01	4.600702E-02		1.5343E-01	4.6007E-02	
$\pi$	0.2		7.214519E-02	5.519400E-02		5.753149E-02	4.436316E-02		5.7532E-02	4.4364E-02
	0.4		5.830892E-02	5.441052E-02		4.486164E-02	4.385977E-02		4.4862E-02	4.3860E-02
	0.6		9.314616E-03	1.741275E-02		1.715892E-02	2.162635E-02		1.7159E-02	2.1627E-02
	0.8		-1.373093E-03	4.319792E-03		7.264594E-03	1.078223E-02		7.2646E-03	1.0782E-02
	1		4.459841E-03	1.082428E-02		8.680241E-03	1.443379E-02		8.6803E-03	1.4434E-02

Tabela 5.18: Solução  $LTS_{400,180}$  para a Intensidade de Radiação do problema CLOUD1 na direção de  $\varphi = \pi$

$\varphi$	$\mu$	$\varepsilon_{1,2}$			$\varepsilon_{1,3}$		
		0	0.5	1	0	0.5	1
0	-1	2.8079E+00	6.3594E-01		2.8080E+00	6.3591E-01	
	-0.8	3.6775E-01	2.0079E-01		3.6776E-01	2.0084E-01	
	-0.6	8.7437E-02	4.3311E-02		8.7416E-02	4.3326E-02	
	-0.4	5.2222E-02	4.3134E-02		5.2204E-02	4.3102E-02	
	-0.2	2.2004E-02	1.9344E-02		2.1990E-02	1.9332E-02	
	0.2		1.0977E-03	1.9874E-03		1.1055E-03	1.9914E-03
	0.4		3.4032E-02	2.3176E-02		3.4032E-02	2.2651E-02
	0.6		2.1323E-02	1.2271E-02		2.1337E-02	1.2122E-02
	0.8		8.6201E-03	9.8976E-03		8.6213E-03	9.9965E-03
	1		9.4631E-01	3.3346E-01		9.4632E-01	2.5007E-01
$\frac{\pi}{2}$	-1	2.8079E+00	6.3594E-01		2.8080E+00	6.4141E-01	
	-0.8	2.0702E+01	9.8709E-01		2.0703E+01	9.8713E-01	
	-0.6	1.5151E+00	2.7800E-01		1.5152E+00	2.7802E-01	
	-0.4	6.1611E-02	1.0922E-01		6.1604E-02	1.0920E-01	
	-0.2	3.8072E-01	2.4291E-01		3.8071E-01	2.4292E-01	
	0.2		2.9754E-01	2.0762E-01		2.9754E-01	2.6202E-01
	0.4		1.2697E-02	5.6984E-02		1.2679E-02	6.0427E-02
	0.6		1.2315E+00	2.9338E-01		1.2314E+00	2.2683E-01
	0.8		4.8178E+00	6.5419E-01		4.8180E+00	3.9547E-01
	1		9.4631E-01	3.3346E-01		9.4632E-01	2.5007E-01
$\pi$	-1	2.8079E+00	6.3594E-01		2.8080E+00	6.4141E-01	
	-0.8	6.3729E-02	6.6088E-02		6.3712E-02	6.6080E-02	
	-0.6	2.5434E-01	5.1215E-02		2.5435E-01	5.1227E-02	
	-0.4	2.1223E+00	3.5636E-01		2.1223E+00	3.5635E-01	
	-0.2	5.0727E-01	4.1926E-01		5.0728E-01	4.1926E-01	
	0.2		2.0256E-01	1.9623E-01		2.0255E-01	2.4414E-01
	0.4		2.3062E-01	1.9391E-01		2.3062E-01	2.4056E-01
	0.6		8.4215E-01	2.4198E-01		8.4216E-01	1.9484E-01
	0.8		6.2907E+00	1.4960E+00		6.2907E+00	5.9936E-01
	1		9.4631E-01	3.3346E-01		9.4632E-01	2.5007E-01

Tabela 5.19: Diferenças relativas para a solução  $LTS_{400,180}$  do problema CLOUD1,

$$\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ e } \varphi = \pi$$

Os resultados apresentados nas tabelas (5.14) - (5.19) nos mostram que, mesmo aumentando as ordens das quadraturas utilizadas na discretização angular, obtivemos aproximações para as soluções com concordância de, no máximo, 3 dígitos significativos quando comparados com resultados da literatura [6], [30]. O tempo necessário para calcularmos as aproximações apresentadas nas tabelas (5.14) - (5.15) foi de, aproximadamente, 84 horas, enquanto que o tempo necessário para gerarmos os dados apresentados nas tabelas (5.17) - (5.18) foi de, aproximadamente, 1 mês.

### 5.3 Estudo da implementação numérica do esquema $LTS_{N,M}$ Não Espectral e da convergência da solução calculada

Iniciamos esta seção apresentando resultados do estudo acerca dos tempos computacionais requeridos na resolução de dois problemas - descritos a seguir - mediante a utilização das formulações  $LTS_{N,M}$  Espectral e Não espectral. Na tabela (5.20), abaixo, apresentamos os tempos computacionais, em minutos, exigidos na resolução do problema com grau de anisotropia  $L = 8$ ,  $N = 50$ ,  $M = 10, 50, 70, 90$ ,  $\omega = 0.9$ ,  $\tau = 1$  e  $\mu_0 = 0.5$ :

N,M	$LTS_{N,M}$	
	<i>Espectral</i>	<i>Não Espectral</i>
<b>50,10</b>	0.27	2.7
<b>50,50</b>	7.3	12.06
<b>50,70</b>	18.26	17.55
<b>50,90</b>	34.81	23.84

Tabela 5.20: Tempos computacionais (em minutos) para execução de problemas  $LTS_{N,M}$  espectral e não espectral,  $L = 8$

Já na tabela (5.21), a seguir, apresentamos os tempos computacionais, em horas, exigidos na execução dos programas espectral e não espectral para a resolução do

problema com anisotropia  $L = 82$ ,  $N = 210$ ,  $M = 50, 70, 90$ ,  $\omega = 0.9$ ,  $\tau = 1$  e  $\mu_0 = 0.5$ .

N,M	<b>LTS<sub>N,M</sub></b>	
	<i><b>Espectral</b></i>	<i><b>Não Espectral</b></i>
<b>210,50</b>	10.9	3.13
<b>210,70</b>	31.3	4.6
<b>210,90</b>	58.5	6.4

Tabela 5.21: Tempos computacionais (em horas) para execução de problemas **LTS<sub>N,M</sub>** espectral e não espectral,  $L = 82$

Analisando os resultados das tabelas (5.20)-(5.21) verifica-se que, na medida em que aumentamos o grau de anisotropia dos problemas e, conseqüentemente, a quadratura angular utilizada, o esquema **LTS<sub>N,M</sub>** espectral torna-se cada vez mais lento. Este fato está relacionado à exigência computacional na resolução do sistema linear resultante, bem como ao cálculo de autovalor/autovetor da matriz associada. Nesse sentido, destacamos, aqui, que o fator tempo computacional é uma importante característica do esquema **LTS<sub>N,M</sub>** Não espectral proposto.

A seguir, dando continuidade aos nossos estudos sobre a implementação do esquema não espectral, apresentamos resultados acerca da qualidade da solução numérica encontrada para os problemas descritos nas seções (5.1) e (5.2), bem como os resultados de um estudo acerca da estabilidade e consistência do algoritmo proposto. O que nos motivou essas análises foram os resultados encontrados para o problema CLOUD1, visto que, para todos os testes realizados, conseguimos calcular a solução com concordância de, no máximo, 3 casas decimais quando comparados com os resultados da literatura. Esperávamos aproximar a solução deste problema com as mesmas ordens de concordância que obtivemos quando aproximamos as soluções do problema HAZE.

Iniciamos esse nosso estudo pela análise dos elementos que formam a matriz  $LTS_{N,M}$  buscando, desta maneira, verificar se a mesma tem elementos próximos ou idênticos a zero. Em caso afirmativo, esse fato poderia estar causando instabilidade no sistema e a estabilização dos resultados obtidos quando aumentamos as quadraturas e a anisotropia do problema. Os elementos da matriz  $LTS_{N,M}$  foram classificados por ordem de grandeza e organizados em intervalos de frequência:

Ordem de grandeza dos elementos	HAZE	CLOUD1
	$LTS_{210,50}$	$LTS_{150,120}$
$[-10^{-2}, -10^{-15}[$	67.497.932	193.800.248
$[-10^{-15}, 10^{-15}]$	32.373.572	79.575.912
$]10^{-15}, 10^{-2}]$	67.497.932	193.800.248
$[-10^4, -10^2[$	112	280
$[-10^2, 10^2]$	1.422.404	2.498.616
$]10^2, 10^4]$	112	280
<b>Total de elementos</b>	168.792.064	469.675.584

Tabela 5.22: Classificação dos elementos da matriz  $LTS_{N,M}$  dos problemas  $LTS_{210,50}$  e  $LTS_{150,120}$

Pelos resultados apresentados na tabela acima, percebemos que os elementos da matriz  $LTS_{210,50}$  que são próximos de zero correspondem a 19,17% do total e os elementos da matriz  $LTS_{150,120}$  que são próximos de zero correspondem a 16,94% do total. Ou seja, essas matrizes não têm um número elevado de elementos próximos de zero. Cabe ressaltar também que o número de elementos considerados grandes, isto é, de ordem de grandeza entre  $10^2$  e  $10^4$ , não é expressivo.

Ainda, sabemos que, em um sistema recursivo, a qualidade da solução é controlada através do tamanho dos elementos que formam o termo fonte. Devido a este fato, analisamos as ordens de grandeza dos elementos que compõem o termo fonte, com o objetivo de investigar a existência de elementos de grandes

ordens que poderiam estar causando instabilidade no nosso sistema e influenciando na qualidade da solução. A seguir, apresentamos os resultados obtidos para os problemas  $LTS_{210,50}$  e  $LTS_{150,120}$ , calculados considerando  $\tau = 0$  e um sistema recursivo composto por 30 recursões.

<b>HAZE</b>					
<b>Ordem dos elementos</b>	$LTS_{210,50}$				
	Recursão 2	Recursão 4	Recursão 10	Recursão 15	Recursão 20
$[-10^{-2}, -10^{-15}[$	2050	3374	6318	6440	6496
$[10^{-15}, 10^{-2}[$	4718	5308	6338	6440	6496
$[-10^2, 10^2]$	6224	4310	336	112	0
<b>Total de elementos</b>	12.992				

Tabela 5.23: Classificação dos elementos do termo fonte do problema  $LTS_{210,50}$

<b>CLOUD1</b>					
<b>Ordem dos elementos</b>	$LTS_{150,120}$				
	Recursão 2	Recursão 4	Recursão 10	Recursão 15	Recursão 25
$[-10^{-2}, -10^{-15}[$	5252	6594	10106	10710	10836
$[10^{-15}, 10^{-2}[$	8092	9084	10514	10710	10836
$[-10^2, 10^2]$	8328	5994	1052	252	0
<b>Total de elementos</b>	21.672				

Tabela 5.24: Classificação dos elementos do termo fonte do problema  $LTS_{150,120}$

De acordo com os resultados apresentados nas tabelas (5.23) e (5.24) acima, percebemos que os termos de ordens de grandeza variando entre  $-10^2$  e  $10^2$ , considerados os de maiores ordens nesses problemas, desaparecem antes mesmo da última recursão. Essa constatação nos infere que não há pontos atratores pela imprecisão da aritmética, ou seja, a fonte é bem comportada.

Um importante resultado existente na literatura e utilizado no estudo acerca da convergência de soluções numéricas de problemas lineares é o Teorema de Equivalência de Lax [38], o qual é apresentado a seguir:

**Teorema 1** (Teorema de Equivalência de Lax). *Se um esquema de aproximação é consistente, a estabilidade é uma condição necessária e suficiente para que o esquema seja convergente.*

Nos valem desse resultado para investigarmos a convergência da solução calculada via esquema  $LTS_{N,M}$ . Nesse sentido, para estudarmos a estabilidade do algoritmo recursivo proposto, analisamos as contribuições advindas de cada recursão para o cálculo da solução ao final da  $n$ -ésima recursão. Para o estudo da consistência do algoritmo, estudamos o termo residual. A análise do termo residual garante condição necessária para consistência, a qual, juntamente com a estabilidade, garante a convergência da solução encontrada.

Para calcularmos as contribuições de cada recursão na composição das aproximações  $I^*(\tau)$  dos problemas propostos, efetuamos o cálculo do módulo da diferença entre as soluções obtidas na recursão  $k+1$  com aquelas obtidas na recursão  $k$ , ou seja, calculamos os valores  $|I_{k+1}^* - I_k^*|$ .

As tabelas abaixo apresentam resultados para a intensidade de radiação do problema  $LTS_{210,50}$  considerando  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = 0$ ,  $\mu = 1$  e  $\mu = -1$  e  $\tau = 0.5$ ; bem como do problema  $LTS_{150,120}$  nos casos em que  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = 0$ ,  $\mu = 1$  e  $\mu = -0.8$  e  $\tau = 0.5$ .

Recursão $k$	$\sum_{k=0}^{30} I_k^*$	$ I_{k+1}^* - I_k^* $
0	2.3079899241E-02	
1	3.8887575869E-02	1.5807676628E-02
2	4.4273016494E-02	5.3854406254E-03
3	4.5971489758E-02	1.6984732641E-03
4	4.6680319128E-02	7.0882936961E-04
5	4.7060610435E-02	3.8029130692E-04
6	4.7284300352E-02	2.2368991774E-04
7	4.7417922355E-02	1.3362200305E-04
8	4.7497266013E-02	7.9343657428E-05
9	4.7543933308E-02	4.6667294819E-05
10	4.7571157851E-02	2.7224543047E-05
11	4.7586947520E-02	1.5789668864E-05
12	4.7596071427E-02	9.1239074481E-06
13	4.7601332606E-02	5.2611790467E-06
14	4.7604363293E-02	3.0306871567E-06
15	4.7606108415E-02	1.7451220537E-06
16	4.7607113207E-02	1.0047915670E-06
17	4.7607691769E-02	5.7856175590E-07
18	4.7608024936E-02	3.3316698050E-07
19	4.7608216806E-02	1.9187055640E-07
20	4.7608327310E-02	1.1050414780E-07
21	4.7608390955E-02	6.3644769600E-08
22	4.7608427612E-02	3.6656696401E-08
23	4.7608448725E-02	2.1112793701E-08
24	4.7608460885E-02	1.2160105298E-08
25	4.7608467888E-02	7.0036935002E-09
26	4.7608471922E-02	4.0338042975E-09
27	4.7608474245E-02	2.3232747046E-09
28	4.7608475584E-02	1.3380878003E-09
29	4.7608476354E-02	7.7066789755E-10
30	4.7608476798E-02	4.4386300191E-10

Tabela 5.25: Intensidade de radiação para o problema  $LTS_{210,50}$  e  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\mu = 1$ ,  
 $\tau = 0.5$

Recursão $k$	$\sum_{k=0}^{30} I_k^*$	$ I_{k+1}^* - I_k^* $
0	1.5859755170E-03	
1	3.9689286993E-03	2.3829531823E-03
2	6.0024916903E-03	2.0335629910E-03
3	7.3847142432E-03	1.3822225529E-03
4	8.2289413047E-03	8.4422706154E-04
5	8.7174065896E-03	4.8846528491E-04
6	8.9928836146E-03	2.7547702494E-04
7	9.1470164117E-03	1.5413279719E-04
8	9.2334605036E-03	8.6444091810E-05
9	9.2822718555E-03	4.8811351956E-05
10	9.3100330398E-03	2.7761184248E-05
11	9.3259124429E-03	1.5879403121E-05
12	9.3350297561E-03	9.1173132485E-06
13	9.3402757596E-03	5.2460034931E-06
14	9.3432973578E-03	3.0215982234E-06
15	9.3450383971E-03	1.7410392241E-06
16	9.3460416299E-03	1.0032328461E-06
17	9.3466196709E-03	5.7804093921E-07
18	9.3469526874E-03	3.3301652620E-07
19	9.3471445230E-03	1.9183563705E-07
20	9.3472550226E-03	1.1049962571E-07
21	9.3473186687E-03	6.3646053669E-08
22	9.3473553268E-03	3.6658080550E-08
23	9.3473764403E-03	2.1113539750E-08
24	9.3473886007E-03	1.2160423621E-08
25	9.3473956046E-03	7.0038104396E-09
26	9.3473996384E-03	4.0338419098E-09
27	9.3474019617E-03	2.3232850001E-09
28	9.3474032998E-03	1.3380899999E-09
29	9.3474040704E-03	7.7066813001E-10
30	9.3474045143E-03	4.4386280935E-10

Tabela 5.26: Intensidade de radiação para o problema  $LTS_{210,50}$  e  $\varphi = 0$  e  $\mu = -1$ ,

$$\tau = 0.5$$

Recursão $k$	$\sum_{k=0}^{30} I_k^*$	$ I_{k+1}^* - I_k^* $
0	-4.9916251457E-04	
1	1.2526814344E-03	1.7518439490E-03
2	2.7292183518E-03	1.4765369174E-03
3	3.5071519054E-03	7.7793355366E-04
4	3.8976043293E-03	3.9045242387E-04
5	4.1114037141E-03	2.1379938474E-04
6	4.2385842883E-03	1.2718057429E-04
7	4.3177628636E-03	7.9178575255E-05
8	4.3681128814E-03	5.0350017845E-05
9	4.4004532981E-03	3.2340416619E-05
10	4.4213383117E-03	2.0885013645E-05
11	4.4348742307E-03	1.3535919019E-05
12	4.4436734986E-03	8.7992679239E-06
13	4.4494101000E-03	5.7366013948E-06
14	4.4531607685E-03	3.7506684807E-06
15	4.4556199684E-03	2.4591999202E-06
16	4.4572367961E-03	1.6168276130E-06
17	4.4583025114E-03	1.0657152988E-06
18	4.4590066010E-03	7.0408967753E-07
19	4.4594727401E-03	4.6613906010E-07
20	4.4597819078E-03	3.0916766887E-07
21	4.4599872883E-03	2.0538049254E-07
22	4.4601239085E-03	1.3662028513E-07
23	4.4602148950E-03	9.0986483690E-08
24	4.4602755505E-03	6.0655454880E-08
25	4.4603160202E-03	4.0469698230E-08
26	4.4603430412E-03	2.7021055680E-08
27	4.4603610939E-03	1.8052619260E-08
28	4.4603731610E-03	1.2067133100E-08
29	4.4603812307E-03	8.0697562903E-09
30	4.4603866293E-03	5.3985953702E-09

Tabela 5.27: Intensidade de radiação para o problema  $LTS_{150,120}$  e  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\mu = 1$ ,

$$\tau = 0.5$$

Recursão $k$	$\sum_{k=0}^{30} I_k^*$	$ I_{k+1}^* - I_k^* $
0	1.2802911430E-04	
1	1.1770534021E-03	1.0490242878E-03
2	2.9634242772E-03	1.7863708751E-03
3	4.7827189692E-03	1.8192946920E-03
4	6.2142537039E-03	1.4315347347E-03
5	7.1866535013E-03	9.7239979743E-04
6	7.7929517444E-03	6.0629824302E-04
7	8.1538151710E-03	3.6086342666E-04
8	8.3643591685E-03	2.1054399747E-04
9	8.4869118915E-03	1.2255272301E-04
10	8.5588353346E-03	7.1923443125E-05
11	8.6016173422E-03	4.2782007629E-05
12	8.6274522159E-03	2.5834873648E-05
13	8.6432834356E-03	1.5831219698E-05
14	8.6531139280E-03	9.8304924018E-06
15	8.6592891810E-03	6.1752529832E-06
16	8.6632069689E-03	3.9177879380E-06
17	8.6657136566E-03	2.5066877361E-06
18	8.6673290851E-03	1.6154284718E-06
19	8.6683765490E-03	1.0474639051E-06
20	8.6690592933E-03	6.8274424638E-07
21	8.6695062909E-03	4.4699764370E-07
22	8.6698000484E-03	2.9375745643E-07
23	8.6699937165E-03	1.9366814427E-07
24	8.6701217424E-03	1.2802588184E-07
25	8.6702065673E-03	8.4824914370E-08
26	8.6702628764E-03	5.6309050299E-08
27	8.6703003158E-03	3.7439406910E-08
28	8.6703252424E-03	2.4926610821E-08
29	8.6703418568E-03	1.6614464490E-08
30	8.6703529414E-03	1.1084569901E-08

Tabela 5.28: Intensidade de radiação para o problema  $LTS_{150,120}$  e  $\varphi = 0$ ,  $\mu = -0.8$ ,

$$\tau = 0.5$$

Analisando os resultados apresentados nas tabelas (5.25) - (5.28) acima, verifica-se que as contribuições para a solução, a cada recursão, é cada vez menor. Esse fato nos permite afirmar que a solução tende a se estabilizar a partir de um determinado número de recursões.

Na continuidade de nosso estudo, analisamos os valores do termo residual. Seja  $I(\tau)$  a aproximação da solução obtida ao final da  $n$ -ésima recursão. A solução exata deve satisfazer o sistema de equações descrito por (4.13), ou seja:

$$\frac{d}{d\tau}I(\tau) - \mathbf{A}I(\tau) - \mathbf{F}(\tau) = 0. \quad (5.6)$$

Sendo assim, o termo residual gerado ao truncarmos o esquema  $LTS_{N,M}$  recursivo em  $n$  recursões será dado pela expressão

$$T_r = \left\| \frac{d}{d\tau}I(\tau) - \mathbf{A}I(\tau) - \mathbf{F}(\tau) \right\|_{\infty}, \quad (5.7)$$

em que  $T_r$  representa o pior resultado para a aproximação  $I(\tau)$ , em cada ponto  $\tau$  do domínio considerado, ao final da  $n$ -ésima recursão.

Na implementação numérica da expressão (5.7), o termo que envolve a derivada de  $I$  nos pontos  $\tau$  da placa foi aproximado mediante utilização do método das diferenças finitas. Em cada ponto  $\tau$  onde calculamos resíduo, aproximamos a derivada por diferenças centrais,

$$I'(\tau_n) = \frac{I(\tau_{n+1}) - I(\tau_{n-1})}{2h}, \quad (5.8)$$

onde  $h$  representa o passo e é dado por  $h = (\tau_{n+1} - \tau_{n-1})$ .

Calculamos resíduos para os problemas HAZE e CLOUD1 considerando  $n = 600$  pontos na discretização do domínio e  $h = 1.666666666E - 003$ . Os resultados apresentados nas tabelas abaixo consideram o resíduo calculado em pontos  $\tau$  próximos às extremidades da placa e também em alguns pontos  $\tau$  no interior da placa. Nas simulações, calculamos o termo residual considerando, de um lado, todas as combinações entre as direções  $\varphi$  e  $\mu$  e, de outro, fixando  $\varphi = 0$  e variando apenas  $\mu$ .

As tabelas (5.29) - (5.30) abaixo, apresentam resultados para os valores residuais do problema HAZE, calculados nas proximidades dos extremos da placa:

<b>Resíduos problema HAZE</b>					
$\tau$	<b>0.001666667</b>	<b>0.005</b>	<b>0.008333333</b>	<b>0.011666667</b>	<b>0.02</b>
$T_r(\tau, \varphi, \mu)$	1.033164E+02	3.652345E+00	3.670697E-01	2.361404E-01	7.827316E-02
$T_r(\tau, 0, \mu)$	1.033164E+02	3.652345E+00	3.670295E-01	2.361142E-01	7.826559E-02

Tabela 5.29: Resíduos problema HAZE com  $\tau \approx 0$

<b>Resíduos problema HAZE</b>					
$\tau$	<b>0.95</b>	<b>0.983333333</b>	<b>0.991666667</b>	<b>0.996666667</b>	<b>0.998333333</b>
$T_r(\tau, \varphi, \mu)$	1.987727E-03	5.870043E-02	1.765248E-01	9.827944E+00	5.211148E+01
$T_r(\tau, 0, \mu)$	1.987418E-03	5.869252E-02	1.765021E-01	9.827944E+00	5.211148E+01

Tabela 5.30: Resíduos problema HAZE com  $\tau \approx 1$

A tabela abaixo apresenta resultados para os valores residuais do problema HAZE e calculados considerando  $\tau$  no interior da placa:

<b>Resíduos problema HAZE</b>					
$\tau$	<b>0.2</b>	<b>0.3</b>	<b>0.5</b>	<b>0.7</b>	<b>0.9</b>
$T_r(\tau, \varphi, \mu)$	1.454395E-03	9.703560E-04	3.880505E-04	2.389952E-04	5.819011E-04
$T_r(\tau, 0, \mu)$	1.454395E-03	9.703560E-04	3.880505E-04	2.389952E-04	5.819011E-04

Tabela 5.31: Resíduos problema HAZE com  $\tau \in [0.2, 0.9]$

A figura 5.1, abaixo, apresenta o comportamento dos valores residuais ao longo do domínio:

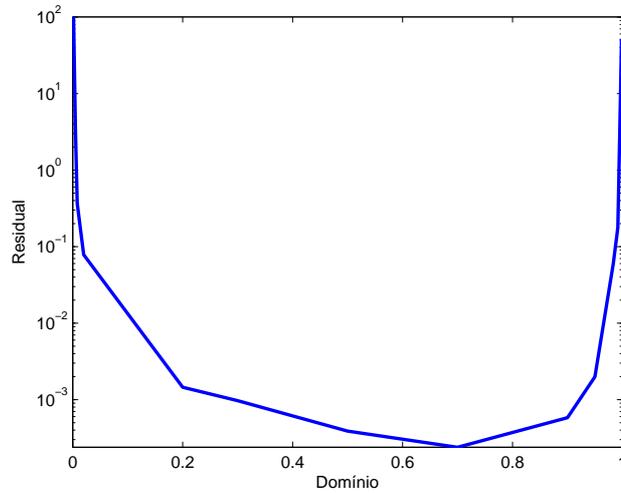


Figura 5.1: Termo Residual Problema HAZE

A seguir, apresentamos resultados de testes realizados para estudo dos valores residuais do problema CLOUD1. Nestes testes, consideramos  $N = 150$  e  $M = 120$  na discretização angular. As tabelas (5.32) - (5.33) apresentam resultados calculados considerando  $\tau$  nas proximidades dos extremos da placa e a tabela (5.34) para valores residuais calculados considerando  $\tau$  no interior da placa:

<b>Resíduos problema CLOUD1</b>					
$\tau$	<b>0.001666667</b>	<b>0.005</b>	<b>0.008333333</b>	<b>0.011666667</b>	<b>0.02</b>
$T_r(\tau, \varphi, \mu)$	2.229654E+02	7.649564E+00	3.024618E-01	2.362595E-01	1.307366E-01
$T_r(\tau, 0, \mu)$	2.229654E+02	7.649564E+00	3.024618E-01	2.362595E-01	1.307366E-01

Tabela 5.32: Resíduos problema CLOUD1 com  $\tau \approx 0$

<b>Resíduos problema CLOUD1</b>					
$\tau$	<b>0.95</b>	<b>0.983333333</b>	<b>0.991666667</b>	<b>0.996666667</b>	<b>0.998333333</b>
$T_r(\tau, \varphi, \mu)$	1.567206E-03	1.473357E-02	2.810558E-02	4.676000E+00	2.489637E+01
$T_r(\tau, 0, \mu)$	1.567206E-03	1.473357E-02	2.810558E-02	4.676000E+00	2.489637E+01

Tabela 5.33: Resíduos problema CLOUD1 com  $\tau \approx 1$

Resíduos problema CLOUD1					
$\tau$	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9
$T_r(\tau, \varphi, \mu)$	1.226196E-02	9.709021E-03	7.827808E-04	7.322237E-04	6.731275E-04
$T_r(\tau, 0, \mu)$	1.219647E-02	9.709021E-03	5.313563E-04	3.931341E-04	2.395082E-04

Tabela 5.34: Resíduos problema CLOUD1 com  $\tau \in [0.2, 0.9]$

A figura 5.2, a seguir, mostra o comportamento dos valores residuais para o problema CLOUD1, com  $\tau \in [0, 1]$ :

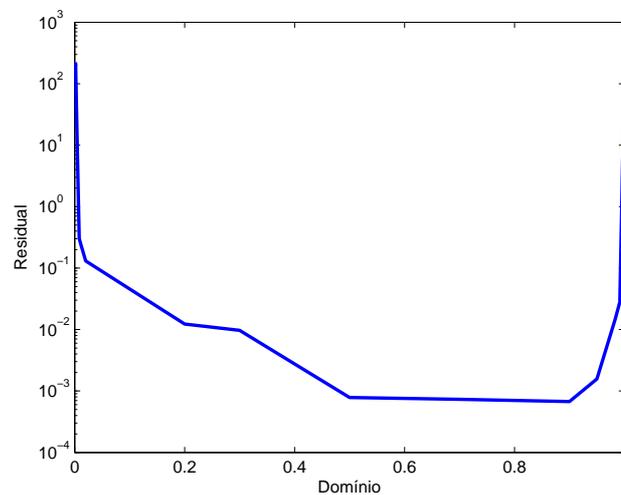


Figura 5.2: Termo Residual Problema CLOUD1

Os resultados apresentados acima nos permitem afirmar que o algoritmo proposto é consistente. Tais resultados, juntamente com aqueles que nos mostraram a estabilidade do algoritmo, nos permitem concluir que a solução calculada via esquema  $LTS_{N,M}$  é convergente. Logo, as soluções calculadas pelo esquema recursivo proposto são candidatas a soluções aproximadas para os problemas estudados. Nesse sentido, inferimos que, possivelmente, para problemas de elevada anisotropia (caso em que  $L = 299$ ), a qualidade da solução calculada via utilização do esquema  $LTS_{N,M}$  está relacionada a problemas de aritmética computacional, como por exemplo, de representação de números reais, bem como do número elevado de operações

aritméticas realizadas, as quais são exigidas na construção dos elementos da matriz associada.

## 6 CONCLUSÕES

Neste estudo, apresentamos uma formulação para o tratamento de problemas de transferência radiativa unidimensionais e sem simetria azimutal, a qual considera a discretização do termo integral da equação em ambas as variáveis angulares, utilizando, para isto, a quadratura gaussiana dupla. Deste procedimento, resulta um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que foi resolvido analiticamente mediante implementação do esquema  $LTS_{N,M}$  não espectral. Neste esquema, a solução das equações resultantes é obtida de maneira recursiva e o número de equações a serem resolvidas é escolhido de forma a obter uma precisão prescrita. Para validar o método proposto, aplicamos a formulação na resolução de problemas inseridos no contexto de Transferência Radiativa na Atmosfera, mais especificamente em névoas (HAZE) e nuvens (CLOUD1). Apresentamos resultados da implementação numérica e realizamos comparações dos resultados obtidos com aqueles existentes na literatura. Para o problema HAZE, obtivemos bons resultados quando comparados com os resultados existentes na literatura. No que se refere ao problema CLOUD1, obtivemos aproximações para as soluções com, no máximo, 3 dígitos significativos quando comparados com resultados da literatura. Deste fato, julgamos importante a realização de uma análise acerca da qualidade da solução encontrada. Tendo por base o Teorema de Lax para sistemas lineares, estudamos a estabilidade e a consistência do algoritmo recursivo proposto e mostramos que a solução calculada pelo esquema  $LTS_{N,M}$  não espectral é convergente. Cabe destacar, aqui, que não é de conhecimento nosso a existência de trabalhos que apresentam este tipo de análise, especialmente no contexto desse nosso trabalho. Concluimos, ao final desse estudo, que os problemas referentes a estabilização dos resultados do problema CLOUD1 estão associados a questões de aritmética computacional, mais especificamente no cálculo dos elementos que formam a matriz  $LTS_{N,M}$ . Como sugestão de continuidade desse estudo, julgamos pertinente a realização de uma

análise mais aprofundada no algoritmo proposto, buscando minimizar a quantidade de operações aritméticas realizadas na construção dos elementos que formar a matriz  $LTS_{N,M}$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] Barichello, L. B. Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.
- [2] Bitelli, T. Física e Dosimetria das Radiações. *Editores Atheneu*. São Paulo. 2006.
- [3] Brancher, J. D., Segatto, C. F., Vilhena, M. T. The  $LTS_N$  Solution for Radiative Transfer Problem Without Azimuthal Symmetry with Severe Anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **62**, pp. 743-753, 1999.
- [4] Brancher, J. D., Segatto, C. F., Vilhena, M. T. The  $LTS_N$  Solution for Radiative Transfer Problem Without Azimuthal Symmetry with Severe Anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **62**, pp. 743-753, 1999.
- [5] Case, K.M. Elementary Solution of Transport Equation and Their Applications. *Annals of Physics*. **9**, pp. :1-23, 1960.
- [6] Chalhoub, E. S. O Método das Ordenadas Discretas na Solução da Equação de Transporte em Geometria Plana com Dependência Azimutal. Tese de Doutorado pelo Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, Universidade de São Paulo, 1997.
- [7] Chalhoub, E.S. and Garcia, R.D.M, "On the Solution of Azimuthally Dependent Transport Problems with Anisn Code", *Annals of Nuclear Energy*, **Volume 24**, pp. 1069–1084, (1997).

- [8] Chalhoub, E.S., Garcia, R.D.M. The equivalence between two techniques of angular interpolation for the discrete-ordinates method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **64**, pp. 517-535, 2000.
- [9] Chandrasekhar, S. "On the Radiative Equilibrium os Stellar Atmosphere", *Astrophysic Journal* , **Volume 104**, pp. 191–202, (1946).
- [10] Chandrasekhar, S. *Radiative Transfer*, Dover Publications Inc., New York & Country (1960).
- [11] Chen, A.X., Antolak, A.J., Leung, K.N. "Electronic neutron sources for compensated porosity wile logging", *Nuclear Instruments and Methods in physics Research A*, **Volume 684**, pp. 52–56, (2012).
- [12] Devaux, C. and Siewert, C.E. "The  $F_N$  Method for Radiative Transfer Problems Without Azimutal Symetry", *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **Volume 31**, pp. 592-604, 1980.
- [13] Duderstadt, J. J., Martin, W. R. Transport Theory, *John Wiley and Sons*. 1975.
- [14] Foletto, T. Construção da solução  $LTS_N$  anisotrópica a partir de um sistema recursivo de soluções  $LTS_N$  isotrópicas. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.
- [15] Garcia, R. D. M.; Siewert, C. E. "Benchmark results in radiative transfer", *Transp. Theory Stat. Phys*, **Volume 14**, pp. 437–483, (1985).
- [16] Goncalves, G. A., Segatto, C. F., Vilhena, M. T. The  $LTS_N$  Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **66**, pp. 271-276, 2000.

- [17] Jeans, J.H. "The equations of radiative transfer of energy", *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **Volume 78**, pp. 28–36, (1917).
- [18] Klose, A.D. and Larsen, E.W., "Light transport in biological tissue based in the simplified spherical harmonics equations", *Journal of Computational Physics*, **Volume 220**, pp. 441–470, (2006).
- [19] Ladeia, C.A., Bodmann, B.E.J., Vilhena, M.T, "The Radiative-Conductive Transfer Equation in Cylindrical Geometry", *Journal of Computational and Theoretical Transport*, **Volume 45**, pp. 1–10, (2016).
- [20] Ladeia, C.A., Bodmann, B.E.J., Vilhena, M.T. The Radiative-Conductive Transfer Equation in Cylinder Geometry and Its Application to Rocket Launch Exhaust Phenomena. In: Constanda, C. and Bodmann, B. and Campos Velho, H.F. (Org.). *Integral Methods in Science and Engineering*. Publisher: Springer International Publishing, 2015. p. 341-351.
- [21] Ladeia, C.A. A equação de transferência radioativa-condutiva em geometria cilíndrica e a sua aplicação em fenômenos de escape do lançamento de foguetes. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.
- [22] Liu, X., Smith, W.L., Zhou, D.K, Larar, A., "Principal component-based radiative transfer model for hyperspectral sensors: theoretical concept", *Applied Optics*, **Volume 45**, pp. 201–209, (2006).
- [23] Liu, K.N. *An Introduction to Atmospheric Radiation*. Academic Press. Inc. New York. 1980.
- [24] Mishra, S.C., K.C.H and Kim, M.Y., "Analysis os Conduction and Radiation Heat Transfer in a 2-D Cylindrical Medium Using the Modified

- Discrete Ordinate Method and the Lattice Boltzmann Method", *Numerical Heat Transfer*, **Volume 60**, pp. 254–287, (2011).
- [25] Ozisik, M. *Radiative Transfer and Interaction with Conductions and Convection*. John Wiley & Sons Inc, New York (1973).
- [26] Pazos, R. P., Vilhena, M. T. M. B. Convergence in Transport Theory. *Applied Numerical Mathematics*. **30**, pp. 79-92, 1999a.
- [27] Pazos, R. P., Vilhena, M. T. M. B. Convergence of the  $LTS_N$  Method: Approach of  $c_0$  Semi-Groups. *Progress in Nuclear Energy*. **30**, pp. 77-86, 1999b.
- [28] Pinte, C., Harries, T.J., Min, M., Watson, A.M., Dullemond, C.P., Woitke, P., Ménard, F., Durán-Rojas, M.C., "Benchmark Problems for Continuum Radiative Transfer. High Optical Depths, Anisotropic Scattering, and Polarisation.", *Astronomy and Astrophysics*, **Volume 498**, **No 3**, pp. 967–980, (2009).
- [29] Rigolli, B. Método  $LTS_N$  Não Espectral. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.
- [30] Rost, B. Solução da equação de Transferência Radiativa Unidimensional em Geometria Cartesiana em Nuvens pela Transformada de Laplace. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.
- [31] Segatto, C. F. Formulação  $LTS_N$  para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995.

- [32] Segatto, C., Vilhena, M., Gomes, M.The. One-Dimensional  $LTS_N$  Solution in a Slab with High Degree of Quadrature. *Annals of Nuclear Energy*. **26**, pp. 925-934, 1999b.
- [33] Segatto, C. F., Vilhena, M. T., Brancher, J. D. The One-Dimensional  $LTS_N$  Formulation for High Degree of Anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **61**, pp. 39-43, 1999.
- [34] Shabanov, N.V., Huang, D., Knjazikhina, Y., Dickinson, R.E., Mynenia, R.B., "Stochastic Radiative Transfer Model for Mixture of Discontinuous Vegetation Canopies.", *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, **Volume 107, No 2**, pp. 236–262, (2007).
- [35] Siewert, C.E. "The  $F_N$  Method for Solving Radiative-Transfer Problems in Plane Geometry", *Astrophysics Space Science*, **Volume 58**, pp. 131-137, 1978.
- [36] Simch, M. R. R. Solução  $LTS_N$  para Problemas de Transferência Radiativa com Polarização em Geometria Plana. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.
- [37] Souto, R. P. Recuperação de perfis verticais de propriedade óticas inerentes a partir da radiação emergente da água. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2006.
- [38] Strikwerda, J.C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. *SIAM*. Philadelphia. 1989.
- [39] Xia, X., T.H.Y.Q.L.L and Bao, Y., "Three Dimensional Transient Coupled Radiative-Conductive Heat Transfer in Cylinders Filled with

Semi-Transparent Media with Complicated Surface Characteristics",  
*Journal of Thermal Science*, **Volume 4**, pp. 241–249, (1995).

- [40] Yamasoe, M. A., Corrêa, M. de P. Processos radiativos na atmosfera: fundamentos. *Oficina de textos*. ISBN 9788579752292. 2016.