

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

# Sistema Óptico de Dois Refletores Via Transporte Ótimo

por

Raul Oliveira Ribeiro

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Matheus Correia dos Santos  
Orientador

Porto Alegre, Fevereiro de 2019.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Ribeiro, Raul Oliveira

Sistema Óptico de Dois Refletores  
Via Transporte Ótimo / Raul Oliveira Ribeiro.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2019.

52 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2019.  
Orientador: Santos, Matheus Correia dos

Dissertação: Análise Aplicada,  
Teoria de Transporte Ótimo, Óptica Geométrica, Sistema Óptico

# Sistema Óptico de Dois Refletores

## Via Transporte Ótimo

por

Raul Oliveira Ribeiro

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

### **Mestre em Matemática Aplicada**

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Matheus Correia dos Santos

Banca examinadora:

Prof. Dr. Diego Marcon Farias  
UFRGS

Prof. Dr. Fábio Souto de Azevedo  
UFRGS

Prof. Dr. Esequia Sauter  
UFRGS

Prof. Dr. Julio Cesar Valencia Guevara  
UCSP

Dissertação apresentada e aprovada em  
Fevereiro de 2019.

Prof. Dr. Carlos Hoppen  
Coordenador

# Sumário

LISTA DE FIGURAS . . . . .	vi
LISTA DE SÍMBOLOS . . . . .	vii
RESUMO . . . . .	x
ABSTRACT . . . . .	xi
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 PRINCÍPIOS DA ÓPTICA GEOMÉTRICA . . . . .	3
2.1 Princípio de Fermat . . . . .	3
2.2 Reflexão e Refração de Ondas . . . . .	4
2.3 Conservação de Energia . . . . .	5
3 INTRODUÇÃO AO TRANSPORTE ÓTIMO DE MASSA . . . . .	7
3.1 Problema de Monge . . . . .	7
3.2 Problema de Kantorovich . . . . .	10
3.3 Tópicos de Análise Convexa . . . . .	11
3.4 Existência de um Plano de Transporte Ótimo . . . . .	15
3.5 Existência de uma Aplicação Ótima . . . . .	18
4 SISTEMA COM DOIS REFLETORES PARA TRANSPORTE DE SINAIS ÓPTICOS . . . . .	22
4.1 Apresentação do Problema . . . . .	23
4.2 Caracterização Geométrica dos Refletores . . . . .	28
4.3 Formulação Fraca do Problema . . . . .	32
4.4 Relação entre o Problema de Monge e o Problema dos Dois-Refletores . . . . .	39

4.5	Um Problema Variacional e uma Solução Fraca para o Problema dos Dois-Refltores . . . . .	41
4.6	Existência e Unicidade da Solução Fraca para o Problema dos Dois-Refltores . . . . .	48
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	50
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	51

## Lista de Figuras

2.1	Representação das frentes de ondas planas e cilíndricas em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	4
2.2	Representação das leis de Snell para reflexão e refração em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	5
2.3	Representação de um tubo de raios para ondas esféricas em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	6
3.1	Problema de transporte de massa. . . . .	8
4.1	Representação de um sistema de transporte óptico utilizando dois refletores em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	23
4.2	Representação em $\mathbb{R}^2$ do raio refletido no primeiro refletor. . . . .	24
4.3	Representação dos paraboloides $k_{p,\omega(p)}(x)$ (vermelho) e $h_{x,z(x)}(p)$ (azul) em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	32
4.4	Representação em $\mathbb{R}^3$ de um sistema de transporte óptico para um problema variacional. . . . .	42

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	espaço dos números naturais
$\mathbb{R}^n$	espaço Euclidiano n-dimensional
$C(A)$	espaço das funções contínuas em $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$C_b(A)$	espaço das funções contínuas e limitadas em $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$C^2(A)$	espaço das funções duas vezes diferenciáveis com segunda derivada contínua em $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$L^1(\mu)$	espaço das funções $f$ tais que $\int_A  f  d\mu < \infty$ em $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\mathcal{P}(A)$	conjunto das medidas de probabilidade em $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\mathcal{P}_{2,ac}(A)$	conjunto das medidas $\rho \in \mathcal{P}(A)$ tal que $\int_A  x ^2 d\rho < \infty$ e $\rho$ absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue em $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}(A)$	medida de Lebesgue de $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\mu$	medida de probabilidade em $X \subseteq \mathbb{R}^n$
$\nu$	medida de probabilidade em $Y \subseteq \mathbb{R}^n$
$T_{\#}\mu$	medida imagem de $\mu$ através do mapa $T : X \rightarrow Y$
$Id$	mapa identidade
$(Id \times T)_{\#}\mu$	medida imagem de $\mu$ através do mapa $(Id \times T) : X \rightarrow X \times Y$
$\mu \times \nu$	medida produto de $\mu$ e $\nu$
$\delta_a$	medida de Dirac concentrada no ponto $a$
$\Pi(\mu, \nu)$	conjunto das medidas $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ tal que $\pi(A \times Y) = \mu(A)$ e $\pi(X \times B) = \nu(B)$ para qualquer $A \subseteq X$ e para qualquer $B \subseteq Y$

$\mathcal{C}(T)$	custo total de transporte para o problema de Monge
$\mathcal{C}(\pi)$	custo total de transporte para o problema de Kantorovich
$Du$	$\left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]_{n \times n}$ , para $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
$\nabla u$	$\left[ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]_{n \times 1}$ , para $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
$\nabla^2 u$	$D(\nabla u)$ , para $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
$\text{supp}(f)$	$\overline{\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}}$ , para $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\mathfrak{L}(\varphi)$	transformada de Legendre de uma função $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ para $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\partial\varphi$	subdiferencial de uma função convexa $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ para $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\phi^c$	c-transformada de uma função $\phi : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ para $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\partial^c \phi$	c-superdiferencial de uma função $\phi : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ para $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$d$	distância entre os hiperplanos de entrada e saída do sistema óptico
$\Omega$	subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ , no hiperplano $\alpha : \kappa = 0$
$\Psi$	subconjunto limitado de $\mathbb{R}^{n+1}$ , no hiperplano $\kappa = d$
$\Psi_\alpha$	projeção de $\Psi$ no hiperplano $\alpha$
$I$	função integrável não-negativa em $\Omega$ , que representa a intensidade luminosa na entrada do sistema óptico
$L$	função integrável não-negativa em $\Psi_\alpha$ , que representa a intensidade luminosa na saída do sistema óptico
$z(x)$	distância do hiperplano $\alpha$ e o primeiro refletor, onde $x \in \bar{\Omega}$
$\omega(p)$	distância do hiperplano $\alpha$ e o segundo refletor, onde $p \in \bar{\Psi}_\alpha$
$r_1(x)$	posição do primeiro refletor tal que $r_1(x) = (x, z(x))$ , $x \in \bar{\Omega}$ , $z \in C^2(\bar{\Omega})$



$r_2(p)$	posição do segundo refletor tal que $r_2(p) = (p, \omega(p))$ , $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ , $\omega \in C^2(\bar{\Psi}_\alpha)$
$t(x)$	distância entre o primeiro e o segundo refletor, onde $x \in \bar{\Omega}$
$s(x)$	distância entre o segundo refletor e o plano $\kappa = d$ , onde $x \in \bar{\Omega}$
$l$	comprimento óptico do sistema
$\beta$	diferença do comprimento óptico e o comprimento do sistema, ou seja, $\beta = l - d$
$P$	mapa que transporta a intensidade luminosa de $\Omega$ no hiperplano $\alpha$ para $\Psi$ no hiperplano $\kappa = d$
$P_\alpha$	projeção de $P$ no hiperplano $\alpha$
$V$	função potencial em $\Omega$ tal que $P_\alpha = \nabla V$
$U$	função potencial em $\Psi_\alpha$ tal que $P_\alpha^{-1} = \nabla U$
$V^*$	extensão de $V$ para o domínio $\alpha$
$U^*$	extensão de $U$ para o domínio $\alpha$
$z^*$	extensão de $z$ para o domínio $\alpha$
$\omega^*$	extensão de $\omega$ para o domínio $\alpha$
$\tilde{P}_\alpha$	conjunto dos $p$ tal que $p \in \partial V^*(x)$
$\mathcal{C}(P_\alpha)$	funcional com custo de transporte quadrático para o Problema 2
$\zeta(x)$	variação da distância entre o hiperplano $\alpha$ e o primeiro refletor
$l(\zeta, \omega, x, p)$	comprimento óptico para a variação $\zeta$
$\Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$	conjunto dos pares $(\zeta, \omega) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_\alpha)$ tal que $l(\zeta, \omega, x, p) \geq l$
$\mathcal{F}$	funcional definido em $\Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$ para o Problema 3

# RESUMO

Nas últimas três décadas, problemas de transporte vêm despertando interesse em diversas áreas como equações diferenciais parciais, mecânica dos fluidos, geometria e teoria de probabilidade. Dentro deste contexto, o presente trabalho é o início do estudo em transporte ótimo de massa com uma aplicação em sistema óptico. No documento, são descritos princípios de óptica geométrica necessários para a modelagem do sistema, e introduzidos os problemas de transporte de Monge e de Kantorovich. Por fim, aplica-se a teoria de transporte para um problema de transferência de sinais luminosos em um sistema constituído de dois refletores. O objetivo é, dada duas funções integráveis não-negativas, que representam as intensidades luminosas da entrada e da saída do sistema, determinar as posições e os tipos de refletores que transformem a intensidade luminosa da entrada na intensidade luminosa da saída, obedecendo a lei de conservação de energia. Para isso, definiu-se uma solução fraca para esse problema, e a existência dessa solução foi obtida através de dois problemas de minimização distintos, um problema de Monge e um problema de cálculo variacional.

# ABSTRACT

In the last three decades, optimal transport problems have been attracting interest in different areas such as partial differential equations, fluid mechanics, geometry and probability theory. In this context, the present work is the beginning of the study in optimal mass transport with an application in the optical system. Principles of geometric optics that are required for the modeling of the system are described, and the transport problems of Monge and Kantorovich are introduced. Finally, the transportation theory is applied to a problem of transferring light signals within a system consisting of two reflectors. Considering two non-negative integrable functions, which represent the luminous intensities at the entrance and exit of the system, the research goal is to determine the positions and types of reflectors that transform the luminous intensity at the entrance in the luminous intensity at the exit, obeying the law of conservation of energy. For this purpose, a weak solution was defined for this problem, and the existence of this solution was obtained through two different minimization problems, a Monge problem and a calculus of variations problem.

# 1 INTRODUÇÃO

O problema de transporte ótimo de massa surgiu na França em 1781, com Gaspard Monge [10]. O problema consistia em encontrar uma aplicação de transporte que minimizasse o custo total para deslocar uma quantidade de massa. Passou-se um longo tempo até que o assunto voltasse a apresentar interesse pelos matemáticos. Apenas em 1942, Leonid Kantorovich apresentou uma nova formulação, agora o problema de encontrar uma função de transporte ótima é substituída pelo problema de encontrar um plano de transporte que minimize o custo total [8]. No entanto, só a partir de 1987 com Yann Brenier [4], o tema passou a despertar interesse em diversas áreas como equações diferenciais parciais, mecânica dos fluidos, geometria, teoria de probabilidade e análise funcional [14].

O presente trabalho, tem como objetivo iniciar o estudo em teoria de transporte. Para isso, aplicou-se a teoria de transporte para a transferência de sinais luminosos em um sistema óptico constituído de dois refletores. Dadas duas funções integráveis não-negativas, que representam as intensidades luminosas da entrada e da saída do sistema, queremos determinar as posições e os tipos de refletores que transformem a intensidade luminosa da entrada na intensidade luminosa da saída. Esse transporte deve obedecer a lei de conservação de energia. A aplicação realizada baseia-se no artigo de Glimm e Olikier [6].

No capítulo 2, introduzimos alguns conceitos de Óptica Geométrica, como Princípio de Fermat, conservação de energia, e reflexão e refração de ondas em problemas de propagação em altas frequências.

No capítulo 3, são apresentadas as formulações dos problemas de Monge e de Kantorovitch. Essa descrição é baseada no livros [14]-[12]. Na terceira seção, são enunciados e demonstrados alguns resultados de análise convexa, necessários para o restante desse capítulo e para o capítulo 4. Nas últimas duas seções, são

apresentadas as condições para existência de um plano de transporte ótimo para o problema de Kantorovich e de uma aplicação ótima para o problema de Monge com custo de transporte quadrático em  $\mathbb{R}^n$ . Esse último resultado é conhecido como Teorema de Brenier.

No capítulo 4, apresentamos a modelagem do sistema óptico e uma solução fraca para o problema de encontrar as posições dos dois refletores. Essa solução é obtida a partir de transporte ótimo. O capítulo consiste na modelagem do sistema, caracterização geométrica dos refletores e apresentação de três problemas. O Problema 1 consiste encontrar a posição do primeiro refletor e um mapa que transporte os sinais luminosos da entrada do sistema para a saída. O Problema 2 consiste em um problema de minimização de Monge, onde é demonstrada a existência e unicidade da solução fraca. No Problema 3, apresentamos uma forma alternativa de obter a existência da solução fraca, através da minimização de um funcional por meio de cálculo variacional.

Por fim, destacam-se as considerações finais do trabalho.

## 2 PRINCÍPIOS DA ÓPTICA GEOMÉTRICA

A óptica geométrica, ou óptica de raios, é originalmente desenvolvida para analisar a propagação da luz em altas frequências, onde a natureza ondulatória não necessita ser considerada. Pode ser desenvolvida considerando o transporte de energia de um ponto para outro, sem se preocupar se o mecanismo de transporte é onda ou partícula. A óptica geométrica clássica aplica-se a meios isotrópicos sem perdas que podem não ser homogêneos [13].

### 2.1 Princípio de Fermat

De acordo com a óptica geométrica, o raio de luz entre dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  segue um caminho que a distância óptica entre eles é um extremo (usualmente um mínimo). Matematicamente, dados dois pontos  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$  e  $n \in C(\mathbb{R}^3)$ , o caminho  $s_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  que o raio de luz percorre, satisfaz

$$\int_{P_1}^{P_2} n(s_0) ds_0 = \min \left\{ \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds \left| \begin{array}{l} s \in C([0, 1]; \mathbb{R}^3) \\ s(0) = P_1, s(1) = P_2 \end{array} \right. \right\}, \quad (2.1)$$

onde  $n(s)$  representa o coeficiente de refração do meio. Se o meio é homogêneo, o coeficiente é constante e o caminho são linhas retas.

Se a propagação da onda se dá em um meio homogêneo e isotrópico (meios isotrópicos são aqueles cuja a velocidade de propagação da luz é a mesma em qualquer direção), o caminho do raio de luz são linhas retas normais as superfícies das frentes de onda, sendo o comprimento do caminho óptico (OPL, do inglês *optical path length*) constante entre cada frente de onda [2]. Na Figura 2.1, estão ilustradas as superfícies das frentes de ondas planas e cilíndricas.

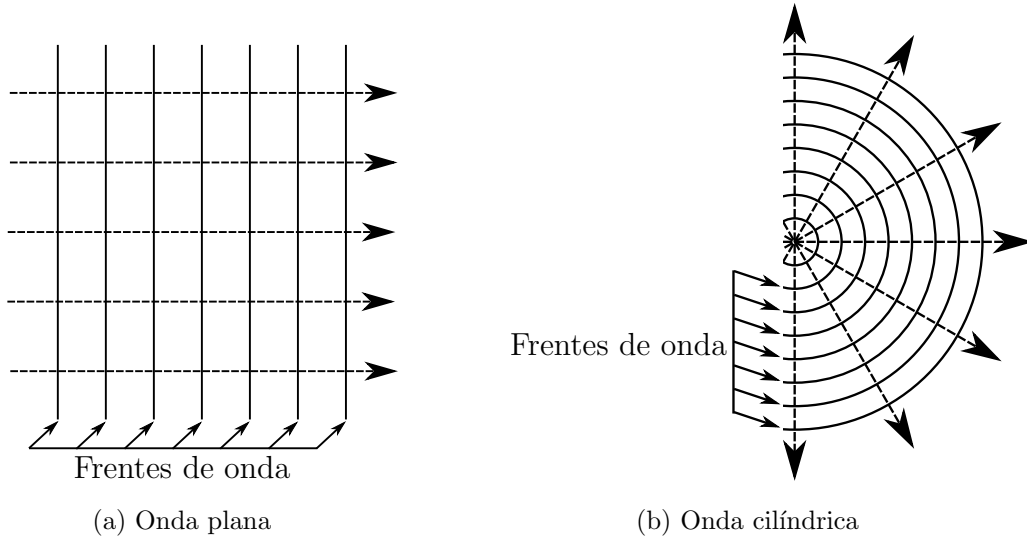


Figura 2.1: Representação das frentes de ondas planas e cilíndricas em  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.2 Reflexão e Refração de Ondas

Para problemas de propagação em meios sem perdas e em altas frequências, onde o comprimento da onda eletromagnética é bem menor que as dimensões dos equipamentos ópticos, como antenas e refletores, a reflexão e refração de ondas seguem as leis de Snell:

- Reflexão. Sejam  $E^i$  o raio incidente e  $E^r$  o raio refletido em uma superfície refletora. Tem-se,  $|E^i| = |E^r|$  e o ângulo do raio incidente  $\theta_i$  e refletido  $\theta_r$  são iguais em relação à normal dessa superfície.
- Refração. Dados dois meios distintos com coeficientes de refração constantes  $n_1$  e  $n_2$ . Sejam  $E^i$  e  $E^t$  raios nos meios  $n_1$  e  $n_2$ , respectivamente, onde  $E^i$  é o raio incidente na superfície que divide os dois meios e  $E^t$  o raio transmitido. Tem-se,  $|E^i| = |E^t|$  e a relação do ângulo do raio incidente  $\theta_i$  e do transmitido  $\theta_t$  segue a lei

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t. \quad (2.2)$$

Na Figura 2.2, está ilustrada a lei de Snell para reflexão e refração.

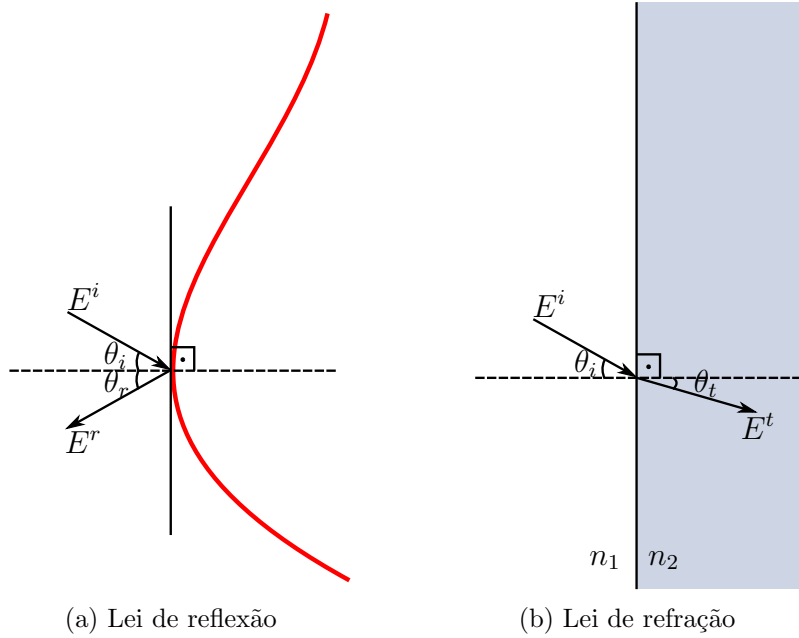


Figura 2.2: Representação das leis de Snell para reflexão e refração em  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.3 Conservação de Energia

Em óptica geométrica, a intensidade de luz (ou densidade de irradiação) entre dois pontos é governada pela conservação do fluxo de energia dentro de um tubo de raios. O fluxo de energia é constante dentro de um tubo de raios, logo, dadas duas frentes de onda em pontos distintos, vale

$$\int_{S_1} I_1 dS = \int_{S_2} I_2 dS, \quad (2.3)$$

onde  $I_1$  e  $I_2$  são as intensidades de luz, e  $S_1$  e  $S_2$  são as seções transversais [2]. Na Figura 2.3, está ilustrado um tubo de raios para uma fonte pontual de ondas esféricas, sendo  $l_1$  o comprimento óptico entre a fonte e a primeira frente de onda e  $l_2$  o comprimento óptico entre as duas frentes.



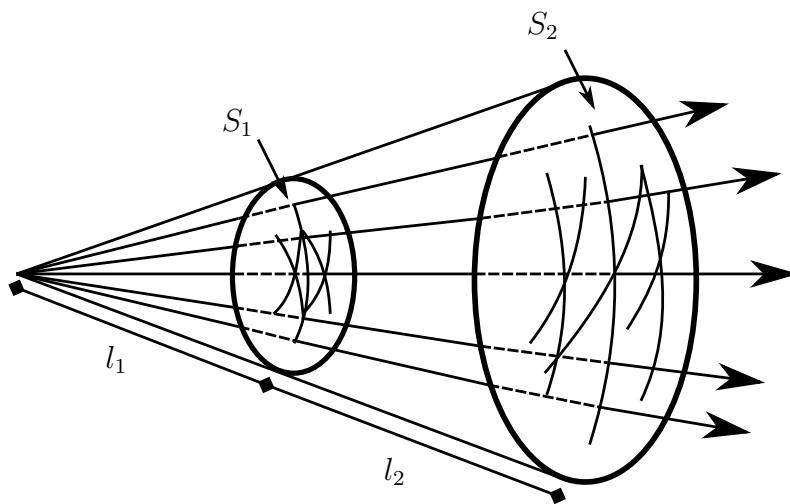


Figura 2.3: Representação de um tubo de raios para ondas esféricas em  $\mathbb{R}^3$ .  
Adaptado de [2].

### 3 INTRODUÇÃO AO TRANSPORTE ÓTIMO DE MASSA

Um problema de transporte consiste em deslocar uma quantidade de massa ou energia de uma região para outra, de forma que a massa inicial e a final sejam iguais, ou seja, em termos físicos, exista uma lei de conservação. Um transporte é dito ótimo, quando é a maneira mais eficiente de realizar esse deslocamento.

No presente capítulo, será abordados os problemas de transporte de Monge e de Kantorovich, e as condições necessárias para existência de uma aplicação de transporte em  $\mathbb{R}^n$ .

#### 3.1 Problema de Monge

Considere o problema de transportar uma quantidade de carvão de uma região para outra, por exemplo, de uma região  $X$  para uma região  $Y$ , como ilustrado na Figura 3.1. A condição para fazer esse transporte é que a quantidade de carvão em  $X$  e  $Y$  devem ser iguais. Para modelar esse problema, podemos considerar duas funções  $f, g \geq 0$  que representam a densidade de carvão em  $X$  e  $Y$ , respectivamente, isto é, a relação da massa e volume do material a ser transportado. Podemos escrever essa condição de forma normalizada

$$\int_X f(x)dx = \int_Y g(y)dy = 1. \quad (3.1)$$

O problema proposto por Monge em 1781 era encontrar uma mapa  $T : X \rightarrow Y$ , responsável pelo deslocamento do carvão de uma região para outra, que minimizasse o custo total do transporte

$$\int_X |T(x) - x|f(x)dx, \quad (3.2)$$

sob a condição (3.1).

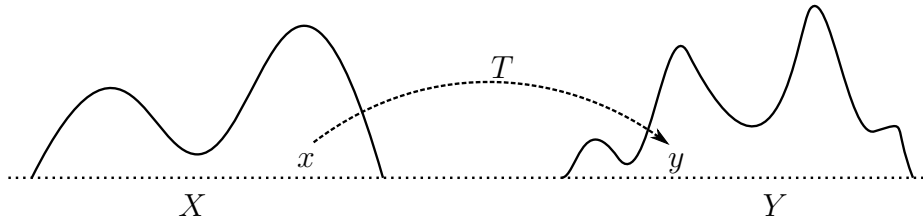


Figura 3.1: Problema de transporte de massa.

De forma mais geral, dados  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  e duas medidas de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  e  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ , é necessário encontrar um mapa  $T : X \rightarrow Y$  mensurável com respeito à  $\mu$ , tal que  $\nu$  é a medida imagem de  $\mu$  por  $T$ . Essa condição é denotada por  $\nu = T_{\#}\mu$  e significa que a medida de qualquer conjunto mensurável em  $Y$  é igual a medida da sua pré-imagem pelo mapa  $T$  em  $X$ , ou seja,

$$\nu(B) = T_{\#}\mu(B) := \mu(T^{-1}(B)), \quad \forall B \subseteq Y \text{ mensurável}, \quad (3.3)$$

onde  $T$  não é necessariamente inversível. A condição (3.3), também pode ser escrita, considerando que para toda função mensurável  $h : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\int_X (h \circ T) d\mu = \int_Y h d\nu. \quad (3.4)$$

Seja  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  a função custo de transporte, que intuitivamente indica o preço a ser pago para transportar a massa de  $x$  para  $y$ . O problema de Monge consiste em encontrar um mapa  $T : X \rightarrow Y$ , tal que  $\nu = T_{\#}\mu$ , que minimize o custo total

$$\mathcal{C}(T) := \int_X c(x, T(x)) d\mu(x). \quad (3.5)$$

Os mapas que satisfazem a condição (3.3) são chamados de aplicações de transporte, e a aplicação que minimiza (3.5) é a aplicação de transporte ótimo.

Independentemente da escolha da função custo  $c$ , o problema de Monge é não trivial. Pode não existir aplicações de transporte (Exemplo 3.1.1); ou as

aplicações devem satisfazer condições não-lineares, como no caso da equação de Monge-Ampère (Exemplo 3.1.2).

**Exemplo 3.1.1.** *Sejam  $X = Y = [0, 1]$ ,  $\mu(x) = \delta_{1/2}(x)$ ,  $\nu(y) = \frac{1}{2}\delta_{1/3}(y) + \frac{1}{2}\delta_{2/3}(y)$  e uma função custo contínua qualquer. Afirmamos que sob essas condições não existe solução para o problema de Monge.*

*Suponha por absurdo que exista um  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisfaça  $\nu = T_{\#}\mu$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $T(1/2) = 1/3$  e  $T(x_0) = 2/3$  para algum  $x_0 \in [0, 1] \setminus \{1/2\}$ . Logo,  $1/2 = \nu(2/3) = \mu(T^{-1}(2/3)) = \mu(x_0) = 0$ , uma contradição.*

**Exemplo 3.1.2.** *Dada a aplicação  $T = \nabla\varphi : X \rightarrow Y$  com a restrição  $\nabla\varphi_{\#}\mu = \nu$ , considere  $\mu$  e  $\nu$  medidas absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ . Logo, pelo Teorema de Radon-Nikodym, existem funções mensuráveis  $f, g \geq 0$  tais que*

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx \text{ e } \nu(B) = \int_B g(y)dy,$$

*onde  $dx$  e  $dy$  representam a medida de Lebesgue. Agora, a condição (3.4) pode ser reescrita por*

$$\int_X h(\nabla\varphi(x))f(x)dx = \int_Y h(y)g(y)dy, \quad \forall h : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ mensurável.}$$

*No caso de  $\nabla\varphi : X \rightarrow Y$  ser um difeomorfismo, podemos usar a fórmula de mudança de variáveis para integrais múltiplas, fazendo  $y = \nabla\varphi(x)$ , obtemos*

$$\int_X h(\nabla\varphi(x))f(x)dx = \int_X h(\nabla\varphi(x))g(\nabla\varphi(x))|\det \nabla^2\varphi(x)|dx, \quad \forall h : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ mensurável.}$$

*Logo, concluímos que  $\nabla\varphi$  deve satisfazer*

$$f(x) = g(\nabla\varphi(x))|\det \nabla^2\varphi(x)|, \text{ para quase todo ponto,}$$

*que é uma equação não-linear. Essa equação é conhecida como equação de Monge-Ampère.*

## 3.2 Problema de Kantorovich

O problema de Kantorovich é uma versão relaxada do problema de Monge, onde é permitido que a massa em cada ponto  $x \in X$  seja dividida para ser transportada para mais de um ponto em  $Y$ . Dadas duas medidas de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  e  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ , procuramos medidas de probabilidade  $\pi$  no espaço produto  $X \times Y$  que satisfaçam

$$\pi(A \times Y) = \mu(A) \text{ e } \pi(X \times B) = \nu(B), \quad (3.6)$$

para todo  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq Y$  mensuráveis. Essa condição é equivalente a afirmar que para qualquer par de funções  $(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)$

$$\int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi(x, y) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y). \quad (3.7)$$

Dizemos que probabilidades  $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$  que satisfazem (3.6) têm marginais  $\mu$  e  $\nu$ , e o conjunto de probabilidades que satisfazem essa condição é definido por

$$\Pi(\mu, \nu) = \{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y) \mid \pi(A \times Y) = \mu(A) \text{ e } \pi(X \times B) = \nu(B)\}, \quad (3.8)$$

onde cada  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  é um plano de transporte.

Vale ressaltar que, ao contrário do problema de Monge, onde aplicações de transporte podem não existir (vide Exemplo 3.1.1), sempre existe pelo menos um plano de transporte, pois a medida produto  $\mu \times \nu \in \Pi(\mu, \nu)$ .

Dadas duas medidas  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  e  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ , e um custo de transporte  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , o problema de Kantorovich consiste em minimizar

$$\mathcal{C}(\pi) := \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y), \text{ para } \pi \in \Pi(\mu, \nu), \quad (3.9)$$

sendo os planos que minimizam (3.9) chamados de planos de transporte ótimo.

Em termos de planos de transporte, podemos relacionar os problemas de Monge e de Kantorovich da forma

$$d\pi(x, y) = d\pi_T(x, y) \equiv d\mu(x)\delta[y = T(x)], \quad (3.10)$$

onde  $T : X \rightarrow Y$ . A medida de probabilidade que aparece no lado direito de (3.10) pode ser escrita por  $(Id \times T)_\# \mu$  e significa que para qualquer função não-negativa mensurável  $\zeta$  em  $X \times Y$ , vale

$$\int_{X \times Y} \zeta(x, y) d\pi_T(x, y) = \int_X \zeta(x, T(x)) d\mu(x). \quad (3.11)$$

Observe que, o mapa  $T$  satisfaz a condição  $T_\# \mu = \nu$  se, e somente se  $\pi_T \in \Pi(\mu, \nu)$ , pois dado  $(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)$  temos

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi_T(x, y) &= \int_X [\varphi(x) + \psi(T(x))] d\mu(x) \\ &= \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Logo, a relação entre o custo total de transporte para os dois problemas é dada por

$$\int_{X \times Y} c(x, y) d\pi_T(x, y) = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x), \quad \text{para } \pi_T = (Id \times T)_\# \mu. \quad (3.13)$$

### 3.3 Tópicos de Análise Convexa

A presente seção tem como finalidade definir e demonstrar alguns resultados clássicos de análise convexas que serão utilizados nas próximas seções do capítulo 3 e no capítulo 4. Esses resultados foram baseados em [14]-[11]-[9].

**Definição 3.3.1.** *Seja  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ :*

1.  $\varphi$  é própria se não é identicamente  $+\infty$ .
2. O domínio de  $\varphi$ ,  $\text{dom}(\varphi)$ , é dado por

$$\text{dom}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) < +\infty\}.$$

3.  $\varphi$  é convexa se  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, 1]$

$$\varphi(ty + (1 - t)x) \leq t\varphi(y) + (1 - t)\varphi(x).$$

4. A transformada de Legendre de  $\varphi$ , é uma função  $\mathfrak{L}(\varphi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , definida por

$$\mathfrak{L}(\varphi)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle x, y \rangle - \varphi(x)].$$

5.  $\varphi$  é semicontínua inferiormente se  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  o conjunto

$$[\varphi \leq \lambda] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq \lambda\}$$

é fechado, ou de forma equivalente, se para qualquer sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge para um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , tem-se  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x)$ .

**Proposição 3.3.2.** A transformada de Legendre de uma função própria é convexa e semicontínua inferiormente.

*Demonstração.* Seja  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  função própria. Para qualquer  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]$ , temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\varphi)(ty + (1 - t)x) &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n} [\langle z, ty + (1 - t)x \rangle - \varphi(z)] \\ &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n} [t\langle z, y \rangle + (1 - t)\langle z, x \rangle - t\varphi(z) - (1 - t)\varphi(z)] \\ &\leq t \sup_{z \in \mathbb{R}^n} [\langle z, y \rangle - \varphi(z)] + (1 - t) \sup_{z \in \mathbb{R}^n} [\langle z, x \rangle - \varphi(z)] \\ &= t\mathfrak{L}(\varphi)(y) + (1 - t)\mathfrak{L}(\varphi)(x). \end{aligned}$$

Logo,  $\mathfrak{L}(\varphi)$  é convexa.

Para a segunda afirmação, dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , precisamos mostrar que  $[\mathfrak{L}(\varphi) \leq \lambda]$  é fechado. Considere uma sequência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [\mathfrak{L}(\varphi) \leq \lambda]$  tal que  $y_n \rightarrow y$ . Por definição, temos que

$$\langle x, y_n \rangle - \varphi(x) \leq \lambda, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $y_n \rightarrow y$ , obtemos

$$\langle x, y \rangle - \varphi(x) \leq \lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

logo,  $y \in [\mathfrak{L}(\varphi) \leq \lambda]$ . Portanto,  $\mathfrak{L}(\varphi)$  é semicontínua inferiormente.  $\square$

**Proposição 3.3.3.** *Se  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é uma função convexa própria que é diferenciável em  $x \in \text{dom}(\varphi)$ , então*

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

*Demonstração.* Se  $\varphi$  é convexa própria, vale que

$$t\varphi(y) + (1-t)\varphi(x) \geq \varphi(ty + (1-t)x), \quad \forall x, y \in \text{dom}(\varphi), \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geq \frac{\varphi(ty + (1-t)x) - \varphi(x)}{t},$$

aplicando  $t \rightarrow 0$

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geq \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle.$$

$\square$

**Teorema 3.3.4.** *Suponhamos que  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é uma função convexa própria. Então,  $\varphi$  é localmente limitada e localmente Lipschitz em  $\text{int}(\text{dom}(\varphi))$ .*

*Demonstração.* Considere  $x_0 \in \text{int}(\text{dom}(\varphi))$  e  $r > 0$  tal que o cubo fechado com aresta  $2r$  paralelo aos eixos coordenados satisfaz  $Q_r(x_0) \subseteq \text{int}(\text{dom}(\varphi))$ . Observe que  $B_r(x_0) \subseteq Q_r(x_0) \subseteq \text{int}(\text{dom}(\varphi))$ . Sendo  $\varphi$  convexa, o máximo de  $\varphi$  em  $Q_r(x_0)$  é atingido em um vértice  $x_k$ . Logo,

$$\varphi(y) \leq \sup_k \varphi(x_k) =: M < +\infty, \quad \forall y \in B_r(x_0).$$

Em seguida, vamos mostrar que  $\varphi$  é limitada por baixo em  $B_r(x_0)$ . De fato, dado  $x \in B_r(x_0)$ , temos  $y := 2x_0 - x \in B_r(x_0)$ . Logo,

$$x_0 = \frac{x + y}{2} \implies \varphi(x_0) \leq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \leq \frac{\varphi(x) + M}{2}$$



$$\implies \varphi(x) \geq 2\varphi(x_0) - M.$$

Portanto, para algum  $C > 0$ ,  $|\varphi| \leq C$  em  $B_r(x_0)$ , o que mostra que  $\varphi$  é localmente limitada no  $\text{int}(\text{dom}(\varphi))$ .

Agora, fixamos  $\delta \in (0, r)$ . Dados  $x, y \in B_{r-\delta}(x_0)$ , temos que

$$y = \frac{\delta}{\delta + \|y - x\|}x + \frac{\|y - x\|}{\delta + \|y - x\|}z,$$

onde

$$z := y + \delta \frac{y - x}{\|y - x\|} \in B_r(x_0).$$

Pela convexidade

$$\begin{aligned} \varphi(y) &\leq \frac{\delta}{\delta + \|y - x\|}\varphi(x) + \frac{\|y - x\|}{\delta + \|y - x\|}\varphi(z) \\ \varphi(y) - \varphi(x) &= \frac{\delta}{\delta + \|y - x\|}\varphi(x) + \frac{\|y - x\|}{\delta + \|y - x\|}\varphi(z) - \varphi(x) \\ &\leq \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{\delta + \|y - x\|} \|y - x\| \\ &\leq \frac{2C}{\delta} \|y - x\|. \end{aligned}$$

Trocando os papéis de  $x, y \in B_{r-\delta}(x_0)$ , concluímos que  $\varphi$  é Lipschitz em  $B_{r-\delta}(x_0)$ .

□

**Teorema 3.3.5** (Teorema de Rademacher). *Se  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é uma função Lipschitz, então  $\varphi$  é diferenciável em quase todo ponto em relação à medida de Lebesgue.*

A prova desse teorema é omitida, mas pode ser encontrada em [5].

**Definição 3.3.6** (Subdiferenciabilidade). *O subdiferencial  $\partial\varphi$  de uma função convexa  $\varphi$  é um conjunto definido por*

$$\partial\varphi(x) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n, \varphi(y) \geq \varphi(x) + \langle p, y - x \rangle\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**Proposição 3.3.7.** *Seja  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  convexa e diferenciável em  $x_0 \in \text{dom}(\varphi)$ , então o subdiferencial consiste em um ponto só, tal que  $\partial\varphi(x_0) = \{\nabla\varphi(x_0)\}$ .*

*Demonstração.* Se  $\varphi$  é diferenciável em  $x_0$ , pela Proposição 3.3.3,

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq \langle \nabla\varphi(x_0), x - x_0 \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo,  $\partial\varphi(x_0) = \{\nabla\varphi(x_0)\}$ . Por outro lado, dado  $p \in \partial\varphi(x_0)$ , temos

$$\varphi(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle \leq \varphi(x) = \varphi(x_0) + \langle \nabla\varphi(x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|), \forall x \in \text{dom}(\varphi)$$

ou ainda,

$$\langle p - \nabla\varphi(x_0), x - x_0 \rangle \leq o(|x - x_0|), \forall x \in \text{dom}(\varphi).$$

Portanto,  $p = \nabla\varphi(x_0)$ . □

### 3.4 Existência de um Plano de Transporte Ótimo

Nessa seção, estamos interessados em provar a existência de um plano de transporte ótimo para o problema de Kantorovich, nas condições de  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$  e função custo de transporte  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e limitada inferiormente.

**Definição 3.4.1.** *Sejam  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ . Uma família de medidas  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$  é rígida se para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $K_\varepsilon$  compacto tal que  $\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ .*

**Definição 3.4.2.** *Sejam  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dizemos  $\mathcal{K}$  é sequencialmente relativamente compacta se para qualquer sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{K}$  pode-se extrair uma subsequência, denotada por  $(\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , e uma medida de probabilidade  $\mu_* \in \mathcal{P}(X)$  tal que para qualquer  $\varphi \in C_b(X)$ ,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi d\mu_{n_k} = \int_X \varphi d\mu_*. \quad (3.14)$$

**Teorema 3.4.3** (Teorema de Prokhorov). *Seja  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Então uma família  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$  é sequencialmente relativamente compacta se, e somente se, é rígida.*

A prova do presente teorema é omitida, mas pode ser encontrada em [3].

**Lema 3.4.4.** *Sejam  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se  $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{P}(X)$  e  $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{P}(Y)$  são famílias de medidas rígidas, e  $\Pi(\mu, \nu) \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$  definido em (3.8), então  $\mathcal{K} := \bigcup_{\mu \in \mathcal{K}_1, \nu \in \mathcal{K}_2} \Pi(\mu, \nu)$  é uma família rígida.*

*Demonstração.* Para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existem  $K_\varepsilon \subseteq X$  e  $L_\varepsilon \subseteq Y$  compactos tais que

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \nu(Y \setminus L_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para quaisquer  $\mu \in \mathcal{K}_1$  e  $\nu \in \mathcal{K}_2$ . Portanto, para todo  $\pi \in \mathcal{K}$ , temos

$$\pi((X \times Y) \setminus (K_\varepsilon \times L_\varepsilon)) \leq \pi((X \setminus K_\varepsilon) \times Y) + \pi(X \times (Y \setminus L_\varepsilon)) = \mu(X \setminus K_\varepsilon) + \nu(Y \setminus L_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

A desigualdade implica que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{K}} \pi((X \times Y) \setminus (K_\varepsilon \times L_\varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

Logo, a família de medidas  $\mathcal{K}$  é rígida.  $\square$

**Lema 3.4.5.** *Sejam  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$  e a função custo  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e limitada inferiormente. O custo total de transporte  $\mathcal{C}(\pi)$  é semicontínuo inferiormente em  $\mathcal{P}(X \times Y)$  com respeito à convergência da Definição 3.4.2.*

*Demonstração.* Seja  $(\pi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in \Pi(\mu, \nu)$  uma subsequência que converge para  $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$  no sentido da Definição 3.4.2. Como a função custo é contínua e limitada por baixo, isso garante que existe uma sequência de funções contínuas não-decrescentes  $c_n$  tal que  $c(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x, y)$ . Logo, segue pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\pi) &= \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c_n(x, y) d\pi(x, y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c_n(x, y) d\pi_{n_k}(x, y) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi_{n_k}(x, y) \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\pi_{n_k}). \end{aligned}$$

Isso prova que o custo total é semicontínuo inferior.  $\square$

**Teorema 3.4.6.** *Sejam  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$  e a função custo  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e limitada inferiormente. Existe um plano de transporte ótimo para o problema de Kantorovich.*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.4.4,  $\Pi(\mu, \nu) \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$  é uma família de medidas rígida e, pelo Teorema de Prokhorov, é sequencialmente relativamente compacto.

Dado uma sequência minimizante,  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Pi(\mu, \nu)$  tal que

$$\mathcal{C}(\pi_n) \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathcal{C}(\pi) + \frac{1}{n},$$

para o problema de Kantorovich, existe uma subsequência  $(\pi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  que converge para  $\pi_* \in \mathcal{P}(X \times Y)$  no sentido da Definição 3.4.2.

Para mostrar que  $\pi_* \in \Pi(\mu, \nu)$ , sabemos que  $(\pi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  é uma subsequência em  $\Pi(\mu, \nu)$  e para qualquer  $\zeta \in C_b(X \times Y)$  temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \zeta(x, y) d\pi_{n_k}(x, y) = \int_{X \times Y} \zeta(x, y) d\pi_*(x, y).$$

Assim, dado um par de funções  $(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)$

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi_*(x, y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi_{n_k}(x, y) \\ &= \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y). \end{aligned}$$

Portanto,  $\pi_* \in \Pi(\mu, \nu)$  é um plano de transporte ótimo para o problema de Kantorovich, e, pelo Lema 3.4.5, temos

$$\mathcal{C}(\pi_*) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi_*(x, y) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathcal{C}(\pi).$$

Como a função custo é contínua e limitada inferiormente, o ínfimo é finito.  $\square$

### 3.5 Existência de uma Aplicação Ótima

Agora, estamos interessados na existência de aplicação ótima para custos de transporte quadráticos em  $\mathbb{R}^n$ . Antes de ser demonstrada a existência dessa aplicação sob essas condições, é necessário caracterizar os planos de transporte ótimos. Isso é feito através do Teorema 3.5.2, a demonstração desse teorema é omitida. A existência da aplicação ótima para custo quadrático em  $\mathbb{R}^n$  se deve a Yann Brenier e encontra-se no Teorema 3.5.4, a demonstração realizada nesse trabalho baseia-se em [1]-[7].

**Definição 3.5.1.** *Sejam  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ :*

1. *Um conjunto  $\Gamma \subseteq X \times Y$  é dito  $c$ -ciclicamente monótono quando, para todo  $n \geq 1$  e para todo  $(x_i, y_i) \in \Gamma$ , valer*

$$\sum_{i=1}^n c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^n c(x_i, y_{\sigma(i)}), \quad \forall \sigma \text{ permutação do conjunto } \{1, \dots, n\}.$$

2. *A  $c$ -transformada de  $\phi$ , é uma função  $\phi^c : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , definida por*

$$\phi^c(y) = \inf_{x \in X} [c(x, y) - \phi(x)].$$

3.  *$\phi$  é dita  $c$ -côncava quando existe  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  tal que  $\phi = \psi^c$ , ou seja,*

$$\phi(x) = \inf_{y \in Y} [c(x, y) - \psi(y)].$$

*Em particular,  $\phi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$ .*

4. *O  $c$ -superdiferencial de  $\phi$ , é definido por*

$$\partial^c \phi = \{(x, y) \in X \times Y \mid \phi(x) + \phi^c(y) = c(x, y)\}.$$

**Teorema 3.5.2** (Teorema Fundamental do Transporte Ótimo). *Sejam  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ , e  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e limitada inferiormente. Sejam  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  e  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ ,*

tais que para alguma  $a \in L^1(\mu)$  e  $b \in L^1(\nu)$ , vale que

$$c(x, y) \leq a(x) + b(y).$$

Além disso, seja  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ . Então são equivalentes:

1. O plano transporte  $\pi$  é ótimo;
2. O suporte de  $\pi$ ,  $\text{supp}(\pi)$  é  $c$ -ciclicamente monótono;
3. Existe uma função  $c$ -côncava  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  tal que  $\max\{\phi, 0\} \in L^1(\mu)$  e  $\text{supp}(\pi) \subseteq \partial^c \phi$ .

A prova do presente teorema será omitida, mas pode ser encontrada em [1].

**Proposição 3.5.3.** *Sejam  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  com  $c(x, y) = \frac{|x - y|^2}{2}$  e  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . Então  $\phi$  é  $c$ -côncava se e somente se  $\varphi(x) := \frac{|x|^2}{2} - \phi(x)$  é convexa e semicontínua inferiormente. Nesse caso,  $y \in \partial^c \phi(x)$  se e somente se  $y \in \partial \varphi(x)$ .*

*Demonstração.* Observe que

$$\begin{aligned} \phi(x) = \inf_y \left[ \frac{|x - y|^2}{2} - \psi(y) \right] &\iff \phi(x) = \inf_y \left[ \frac{|x|^2}{2} - \langle x, y \rangle + \frac{|y|^2}{2} - \psi(y) \right] \\ &\iff \phi(x) - \frac{|x|^2}{2} = \inf_y \left[ -\langle x, y \rangle + \frac{|y|^2}{2} - \psi(y) \right] \\ &\iff \frac{|x|^2}{2} - \phi(x) = \sup_y \left[ \langle x, y \rangle - \left( \frac{|y|^2}{2} - \psi(y) \right) \right] \\ &\iff \varphi(x) = \sup_y \left[ \langle x, y \rangle - \left( \frac{|y|^2}{2} - \psi(y) \right) \right], \end{aligned}$$

como, pela Proposição 3.3.2, a transformada de Legendre de uma função própria é convexa e semicontínua inferiormente, isso prova o primeiro enunciado. Para o

segundo, observe que

$$\begin{aligned}
y \in \partial^c \phi(x) &\iff \begin{cases} \phi(x) = \frac{|x-y|^2}{2} - \phi^c(y), & \text{pois } y \in \partial^c \phi(x) \\ \phi(z) \leq \frac{|z-y|^2}{2} - \phi^c(y), & \text{pois } \phi \text{ é c-côncava} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \phi(x) - \frac{|x|^2}{2} + \langle x, y \rangle = \frac{|y|^2}{2} - \phi^c(y) \\ \phi(z) - \frac{|z|^2}{2} + \langle z, y \rangle \leq \frac{|y|^2}{2} - \phi^c(y) \end{cases} \\
&\iff \phi(z) - \frac{|z|^2}{2} + \langle z, y \rangle \leq \phi(x) - \frac{|x|^2}{2} + \langle x, y \rangle \\
&\iff \phi(z) - \frac{|z|^2}{2} \leq \phi(x) - \frac{|x|^2}{2} + \langle y, x-z \rangle \\
&\iff \left( \frac{|z|^2}{2} - \phi(z) \right) \geq \left( \frac{|x|^2}{2} - \phi(x) \right) + \langle y, z-x \rangle \\
&\iff \varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z-x \rangle \\
&\iff y \in \partial \varphi(x).
\end{aligned}$$

Isso concluí a demonstração.  $\square$

**Teorema 3.5.4** (Teorema de Brenier). *Sejam  $X = Y = \mathbb{R}^n$ ,  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_{2,ac}(\mathbb{R}^n)$  e  $c(x, y) = \frac{|x-y|^2}{2}$ . Então, existe uma única aplicação de transporte ótimo  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  para o problema de Monge. Além disso,  $T = \nabla \varphi$  para  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa e semicontínua inferiormente.*

*Demonstração.* Do Teorema 3.4.6, existe um plano de transporte ótimo  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  para o problema de Kantorovich e, pelo Teorema 3.5.2, temos que  $\text{supp}(\pi)$  é c-ciclicamente monótono, de modo que existe uma função c-côncava  $\phi$  tal que  $\text{supp}(\pi) \subseteq \partial^c \phi$ . De  $\mu$  ser uma medida absolutamente contínua à Lebesgue, pelas Proposições 3.3.7 e 3.5.3,  $\partial^c \phi(x) = \partial \varphi(x) = \{\nabla \varphi(x)\}$ , onde  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa e semicontínua inferiormente. Logo,  $\text{supp}(\pi) \subseteq \text{graph}(\nabla \varphi)$  para  $\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2} - \phi(x)$ .

Para mostrarmos que  $T = \nabla\varphi$  é uma aplicação ótima para o problema de Monge, segue que

$$\begin{aligned} \int_X \frac{|x - T(x)|^2}{2} d\mu(x) &= \int_{X \times Y} \frac{|x - y|^2}{2} d\pi(x, y) \\ &= \inf_{\tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} \frac{|x - y|^2}{2} d\tilde{\pi}(x, y) \leq \inf_{S \# \mu} \int_X \frac{|x - S(x)|^2}{2} d\mu(x). \end{aligned}$$

Para unicidade, suponha que existam duas aplicações ótimas  $T_1$  e  $T_2$  distintas, os planos ótimos correspondentes são  $\pi_1 = (Id \times T_1) \# \mu$  e  $\pi_2 = (Id \times T_2) \# \mu$ . Seja  $\pi_3$  definida por

$$\pi_3 = \frac{1}{2} ((Id \times T_1) \# \mu + (Id \times T_2) \# \mu),$$

como  $\pi_3$  também é ótima existe uma aplicação  $T_3$  associada. Portanto, para qualquer  $\zeta \in C_b(X \times Y)$ , temos

$$\frac{1}{2} \left( \int_X \zeta(x, T_1(x)) d\mu(x) + \int_X \zeta(x, T_2(x)) d\mu(x) \right) = \int_X \zeta(x, T_3(x)) d\mu(x).$$

Isso implica que  $\mu(\{x \in X \mid T_1(x) \neq T_2(x)\}) = 0$ . Logo, segue  $T_1 = T_2$  e  $\pi_1 = \pi_2$  em quase todo ponto com relação à medida de Lebesgue.  $\square$



## 4 SISTEMA COM DOIS REFLETORES PARA TRANSPORTE DE SINAIS ÓPTICOS

Um sistema de transporte óptico é um sistema que transfere sinais luminosos na forma de ondas eletromagnéticas através de um meio utilizando componentes ópticas. O sistema proposto é para transporte de sinais de uma antena fonte passando por dois refletores até uma antena receptora. Essa transferência é realizada em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , onde o domínio  $\Omega$  representa a antena fonte no hiperplano de entrada do sistema, denotado por  $\alpha$ , o domínio  $\Psi$  representa a antena receptora no hiperplano de saída do sistema, e  $R_1$  e  $R_2$  representam as hipersuperfícies refletoras. O sistema proposto está ilustrado na Figura 4.1.

Um ponto nesse sistema possui coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n, k)$ , onde  $k$  é a coordenada perpendicular ao hiperplano  $\alpha$ , definido pela equação  $k = 0$ . Como forma de facilitar a notação, seja  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  definiremos um ponto no espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$  por  $(x, k)$ . O feixe de raios  $B_1$  é paralelo ao eixo  $k$ , definido por uma seção transversal  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  no hiperplano  $\alpha$  e se propaga na direção positiva de  $k$ . A intensidade luminosa desse feixe é denotada por  $I(x)$ , para  $x \in \Omega$ , onde  $I$  é uma função integrável não-negativa. Os feixes refletidos por  $R_1$  e  $R_2$  são denotados por  $B_2$  e  $B_3$ , respectivamente. O feixe  $B_3$  é paralelo ao eixo de  $k$  e a seção transversal de saída de  $B_3$  é denotada por  $\Psi \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , definida no hiperplano  $k = d$ . A projeção de  $\Psi$  em  $\alpha$  é denotada por  $\Psi_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ . Além disso, é requerido que a intensidade luminosa de entrada  $I$  seja transformada em uma intensidade em  $B_3$  denotada  $L(p)$ , onde  $(p, d) \in \bar{\Psi}$ , sendo  $L$  uma função integrável não-negativa.

A descrição da propagação e da conservação de energia é feita utilizando óptica geométrica. Em particular, é assumido que o caminho óptico percorrido de  $\Omega$  a  $\Psi$  é constante para qualquer valor de  $x \in \bar{\Omega}$  e o sistema não tem perdas. Para isso os dois refletores são considerados ideais, o meio de transporte é homogêneo e

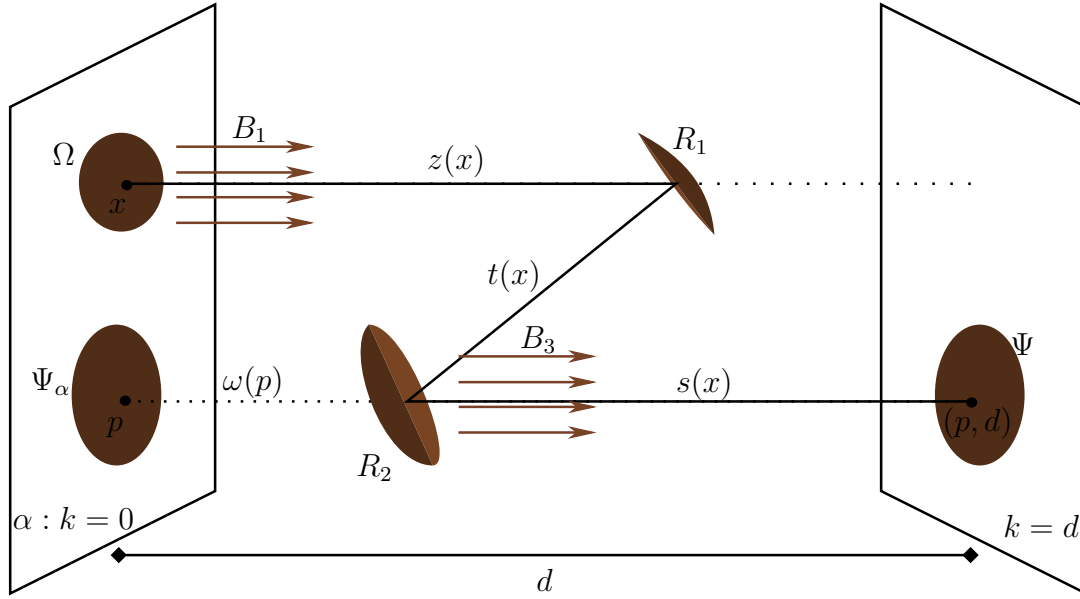


Figura 4.1: Representação de um sistema de transporte óptico utilizando dois refletores em  $\mathbb{R}^3$ .

Adaptado de [6].

isotrópico, e o comprimento de onda eletromagnética é muito menor que o diâmetro de  $\Omega$  e  $\Psi$ .

Dados os domínios  $\Omega$  e  $\Psi$ , e funções integráveis não-negativas  $I$  e  $L$ , que representam as intensidades luminosas da entrada e da saída do sistema, o objetivo é determinar as posições e os tipos de refletores que transformem a intensidade da entrada na intensidade da saída. Esse transporte deve obedecer a lei de conservação de energia.

## 4.1 Apresentação do Problema

A distância entre o hiperplano  $\alpha$  e o primeiro refletor é dada por  $z(x)$ , e o vetor posição de  $R_1$  é definido como sendo o gráfico de  $z$ , assim  $r_1(x) = (x, z(x))$ , para  $x \in \bar{\Omega}$  e considerando  $z \in C^2(\bar{\Omega})$ . Seja  $S(x, z) = x_{n+1} - z(x) = 0$  a superfície

de nível do primeiro refletor, onde  $x_{n+1}$  é a  $n + 1$ -coordenada na direção do eixo  $k$ . Como o gradiente de  $S$  no ponto  $(x, z)$  é perpendicular à superfície de nível  $S$  que passa por esse ponto, podemos definir um vetor unitário normal a  $R_1$  por

$$\hat{u} = \frac{\nabla_{n+1}S}{|\nabla_{n+1}S|} = \frac{(-\nabla z, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2}}, \quad (4.1)$$

sendo  $\nabla_{n+1}$  o gradiente em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

A partir da Lei de Snell para reflexão (ilustrado na Figura 4.2), a diferença do raio incidente e refletido em  $R_1$  é

$$\hat{y}(x) - \hat{k} = -2 \cos \theta \hat{u} = -2 \langle \hat{k}, \hat{u} \rangle_{n+1} \hat{u},$$

onde  $\hat{k} = (0, 1)$ , vetor normal na direção do eixo  $k$ ,  $\hat{y}$  é o vetor normal na direção do raio refletido e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n+1}$  é o produto interno em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Assim, utilizando (4.1), o vetor na direção do raio refletido é dado

$$\hat{y}(x) = \hat{k} - 2 \frac{(-\nabla z, 1)}{1 + |\nabla z|^2} = \left( \frac{2\nabla z}{1 + |\nabla z|^2}, 1 - \frac{2}{1 + |\nabla z|^2} \right). \quad (4.2)$$

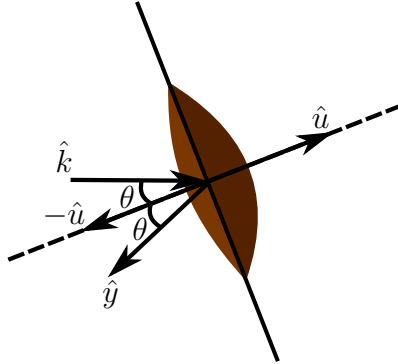


Figura 4.2: Representação em  $\mathbb{R}^2$  do raio refletido no primeiro refletor.

A distância do raio refletido entre  $R_1$  e  $R_2$  na direção de  $\hat{y}(x)$  é denotada por  $t(x)$ , e a distância do raio refletido por  $R_2$  no sentido de  $\hat{k}$  até  $\Psi$  é representada

por  $s(x)$ . Assume-se que  $t \in C^1(\bar{\Omega})$  e  $R_1$  é uma hipersuperfície  $C^1$ . O comprimento do caminho óptico, representado por  $l(x)$ , é dado por

$$l(x) = z(x) + t(x) + s(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.3)$$

Como  $l(x)$  é a distância óptica entre duas frentes de onda, temos que  $l(x) = \text{constante} \equiv l$ .

A posição do segundo refletor é dada por

$$r_2(x) = r_1(x) + t(x)\hat{y}(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad (4.4)$$

e o mapa  $P : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Psi}$  que transporta a onda plana do hiperplano  $\alpha$  para o hiperplano  $k = d$ , é definido por

$$P(x) = r_2(x) + s(x)\hat{k}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.5)$$

Então, um ponto  $(p, d) \in \bar{\Psi}$  é a imagem de algum  $x \in \bar{\Omega}$  pela aplicação  $P$ .

Seja  $P_\alpha(x)$  a projeção de  $P(x)$  no hiperplano  $\alpha$ . Então,  $P_\alpha : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Psi}_\alpha$  é dada por

$$P_\alpha(x) = P(x) - d\hat{k}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.6)$$

A partir da projeção de  $t(x)\hat{y}(x)$  no plano  $\alpha$ , usando (4.2), temos que

$$P_\alpha(x) = x + t(x)\frac{2\nabla z}{1 + |\nabla z|^2}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.7)$$

Para projeção de  $P(x)$  no eixo de  $k$ , usando (4.2) e (4.3), temos

$$z(x) + t(x)\left(1 - \frac{2}{1 + |\nabla z|^2}\right) + s(x) = d, \quad (4.8)$$

definindo  $\beta = l - d$ , segue

$$\begin{aligned} z(x) + t(x)\left(1 - \frac{2}{1 + |\nabla z|^2}\right) + s(x) &= l - \beta \\ z(x) + t(x)\left(1 - \frac{2}{1 + |\nabla z|^2}\right) + s(x) &= z(x) + t(x) + s(x) - \beta \\ \beta &= -\frac{2t(x)}{1 + |\nabla z|^2} \end{aligned}$$

assim, temos que

$$t(x) = \frac{\beta}{2} (1 + |\nabla z|^2). \quad (4.9)$$

Substituindo (4.9) em (4.7), obtemos

$$P_\alpha(x) = x + \beta \nabla z, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.10)$$

Como  $P_\alpha$  é a projeção do mapa  $P$  no hiperplano  $\alpha$ , podemos escrever a intensidade luminosa de saída para o mapa projetado; e como a relação da intensidade de entrada  $I(x)$  em  $\Omega$  e a intensidade de saída  $L(p)$  em  $\Psi_\alpha$  é dada pela lei de conservação de energia, segue

$$\int_{\Psi_\alpha} L(p) dp = \int_{\Omega} I(x) dx. \quad (4.11)$$

Utilizando mudança de variável (4.10) em (4.11), obtemos

$$\int_{\Omega} L(P_\alpha(x)) |\det DP_\alpha(x)| dx = \int_{\Omega} I(x) dx. \quad (4.12)$$

**Problema 1.** *Dados dois domínios  $\Omega$  e  $\Psi_\alpha$  no hiperplano  $\alpha$ , e duas funções integráveis não-negativas  $I$  em  $\Omega$  e  $L$  em  $\Psi_\alpha$  que satisfazem (4.12), queremos encontrar uma função  $z \in C^2(\bar{\Omega})$ , tal que*

$$\begin{aligned} P_\alpha : \bar{\Omega} &\rightarrow \bar{\Psi}_\alpha \\ x &\mapsto x + \beta \nabla z \end{aligned}$$

*seja um difeomorfismo.*

A partir da obtenção de  $z$  que satisfaça o Problema 1, podemos encontrar uma função  $\omega$  que descreva a posição do segundo refletor. Utilizando (4.3) e (4.9), temos

$$\begin{aligned} \omega(P_\alpha(x)) &= d - s(x) \\ &= (l - \beta) - (l - z(x) - t(x)) \\ &= z(x) - \beta + \frac{\beta}{2} (1 + |\nabla z|^2) \end{aligned}$$

assim

$$\omega(P_\alpha(x)) = z(x) + \frac{\beta}{2} (|\nabla z|^2 - 1), \quad (4.13)$$

segue que, o vetor posição de  $R_2$  é o gráfico de  $\omega$ , dado por  $r_2(x) = (P_\alpha(x), \omega(P_\alpha(x)))$  para  $x \in \bar{\Omega}$ .

Agora, podemos definir uma função potencial  $V : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$V(x) = \frac{|x|^2}{2} + \beta z(x) - \frac{\beta^2}{2}, \quad (4.14)$$

assim temos

$$P_\alpha = \nabla V. \quad (4.15)$$

A partir do potencial  $V$  também podemos reescrever  $\omega$ , usando (4.14) e (4.15), assim

$$\omega = \frac{1}{\beta} \left[ V - \langle x, \nabla V \rangle + \frac{|\nabla V|^2}{2} \right], \quad (4.16)$$

e a equação de conservação de energia (4.12), fica

$$\int_{\Omega} L(\nabla V(x)) |\det \nabla^2 V(x)| dx = \int_{\Omega} I(x) dx, \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.17)$$

Se o mapa  $P_\alpha : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Psi}_\alpha$  é um difeomorfismo, então podemos reparametrizar o vetor posição de  $R_2$  como  $r_2(p) = (p, \omega(p))$ ,  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ . Além disso, o mapa possui inversa tal que  $x(p) = P_\alpha^{-1}(p)$ . Dado  $p = \nabla V$  em (4.16), aplicando o gradiente com respeito a  $p$ , obtemos

$$\nabla_p \omega = \frac{1}{\beta} (-x + p),$$

logo

$$x(p) = P_\alpha^{-1}(p) = p - \beta \nabla_p \omega(p), \quad p \in \bar{\Psi}_\alpha. \quad (4.18)$$

Utilizando (4.16) e (4.18), temos que

$$\begin{aligned} V(p) &= \beta \omega(p) + \langle x(p), p \rangle - \frac{|p|^2}{2} \\ &= \beta \omega(p) + |p|^2 - \beta \langle p, \nabla_p \omega(p) \rangle - \frac{|p|^2}{2} \end{aligned}$$

assim

$$V(p) = \beta\omega(p) - \beta\langle p, \nabla_p\omega(p) \rangle + \frac{|p|^2}{2}. \quad (4.19)$$

A partir de (4.14), (4.18) e (4.19), temos

$$\begin{aligned} \beta\omega(p) - \beta\langle p, \nabla_p\omega(p) \rangle + \frac{|p|^2}{2} &= \frac{|x(p)|^2}{2} + \beta z(p) - \frac{\beta^2}{2} \\ &= \frac{|p|^2}{2} - \beta\langle p, \nabla_p\omega(p) \rangle + \frac{\beta^2}{2} |\nabla_p\omega(p)|^2 + \beta z(p) - \frac{\beta^2}{2} \end{aligned}$$

segue que

$$z(p) = \omega(p) - \frac{\beta^2}{2} |\nabla_p\omega(p)|^2 + \frac{\beta^2}{2}, \quad (4.20)$$

agora, utilizando (4.18) e (4.20), podemos reescrever o vetor posição de  $R_1$  tal que  $r_1(p) = (x(p), z(p))$ ,  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ .

## 4.2 Caracterização Geométrica dos Refletores

Nessa seção, vamos relacionar as posições dos refletores  $z$  e  $\omega$ , com funções potenciais  $V$  e  $U$ , respectivamente. Essas funções podem ser convexas ou côncavas. Para isso, supomos que  $\Omega$  e  $\Psi_\alpha$  são conjuntos limitados no hiperplano  $\alpha$  e  $P_\alpha : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Psi}_\alpha$  é um difeomorfismo.

Dado  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ , defina

$$Q(x, p) = \langle x, p \rangle + \beta\omega(p) - \frac{|p|^2}{2}, \quad (4.21)$$

como  $p = P_\alpha(x)$  para algum  $x \in \bar{\Omega}$ , de (4.15) e (4.16), obtemos que

$$Q(x, P_\alpha(x)) = V(x). \quad (4.22)$$

Denote  $S_V$  o gráfico da função  $V(x)$  e  $p_0 = P_\alpha(x_0)$ , para  $x_0 \in \bar{\Omega}$ . O hiperplano tangente a  $S_V$  no ponto  $(x_0, V(x_0))$  é dado por

$$\begin{aligned} Z &= V(x_0) + \langle \nabla V(x_0), x - x_0 \rangle = V(x_0) + \langle p_0, x - x_0 \rangle \\ Z &= \langle x, p_0 \rangle - \langle x_0, p_0 \rangle + V(x_0), \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde  $(x, Z)$  denota um ponto arbitrário no hiperplano tangente. Segue de (4.21) e (4.23), que

$$Z = \langle x, p_0 \rangle + \beta\omega(p_0) - \frac{|p_0|^2}{2} = Q(x, p_0), \quad (4.24)$$

isto é, dado  $x_0 \in \bar{\Omega}$  tal que  $p_0 = \nabla V(x_0)$ ,  $Z = Q(x, p_0)$  é o hiperplano tangente a  $S_V$  no ponto  $(x_0, V(x_0))$ . Consequentemente, se  $V$  é convexa  $Z$  é um hiperplano de suporte inferior para  $S_V$  e se  $V$  é côncava então  $Z$  é um hiperplano que suporta superiormente  $S_V$  (relativo a direção positiva do eixo  $k$ ).

Como  $\Psi_\alpha$  é um conjunto limitado em  $\alpha$  e  $P_\alpha = \nabla V : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Psi}_\alpha$ , logo  $\forall p \in \bar{\Psi}_\alpha$ ,  $|p| \leq M$  para algum  $M > 0$ , ou seja,  $|\nabla V(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in \bar{\Omega}$ . Então, para  $\bar{\Psi}_\alpha$  limitado, não existe hiperplano tangente vertical ao gráfico de  $V$ .

Já que para cada  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$  o hiperplano  $Q(x, p)$  é suporte para  $S_V$  para algum ponto  $(x', V(x'))$ , temos que

$$V(x) \geq Q(x, p) \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad p \in \bar{\Psi}_\alpha \quad \text{se } V \text{ é convexa,} \quad (4.25)$$

$$V(x) \leq Q(x, p) \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad p \in \bar{\Psi}_\alpha \quad \text{se } V \text{ é côncava} \quad (4.26)$$

e em ambos os casos  $p = P_\alpha(x')$ .

Defina

$$U(p) = \frac{|p|^2}{2} - \beta\omega(p) - \frac{\beta^2}{2}, \quad \forall p \in \bar{\Psi}_\alpha, \quad (4.27)$$

$$R(x, p) = \langle x, p \rangle - \beta z(x) - \frac{|x|^2}{2}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall p \in \bar{\Psi}_\alpha. \quad (4.28)$$

Observe que, assim como  $P_\alpha = \nabla V : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Psi}_\alpha$ , utilizando (4.18), também podemos escrever a inversa do mapa  $P_\alpha$  em função de um potencial, tal que  $P_\alpha^{-1} = \nabla_p U : \bar{\Psi}_\alpha \rightarrow \bar{\Omega}$ .

Se  $V$  é convexa, segue de (4.21) e (4.25)

$$V(x) \geq \langle x, p \rangle + \beta\omega(p) - \frac{|p|^2}{2},$$



assim, de (4.14), (4.27) e (4.28), segue que

$$\begin{aligned} U(p) &= \frac{|p|^2}{2} - \beta\omega(p) - \frac{\beta^2}{2} \geq \langle x, p \rangle - V(x) - \frac{\beta^2}{2} \\ &= \langle x, p \rangle - \frac{|x|^2}{2} - \beta z(x) \\ &= R(x, p). \end{aligned}$$

Logo,

$$U(p) \geq R(x, p) \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad p \in \bar{\Psi}_\alpha \text{ se } V \text{ é convexa,} \quad (4.29)$$

de maneira análoga,

$$U(p) \leq R(x, p) \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad p \in \bar{\Psi}_\alpha \text{ se } V \text{ é côncava.} \quad (4.30)$$

Também, dado  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , o hiperplano  $R(x_0, p)$  é suporte para o gráfico de  $S_U$  para o ponto  $(p_0 = P_\alpha(x_0), U(p_0))$ .

Usando a caracterização de funções convexas, obtemos de (4.25), (4.26) e (4.29), (4.30), que

$$V(x) = \sup_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} Q(x, p), \quad U(p) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} R(x, p), \quad \text{quando } V \text{ é convexa,} \quad (4.31)$$

$$V(x) = \inf_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} Q(x, p), \quad U(p) = \inf_{x \in \bar{\Omega}} R(x, p), \quad \text{quando } V \text{ é côncava.} \quad (4.32)$$

Segue que, para  $V$  convexa, substituindo (4.14) e (4.21) em

$$V(x) = \sup_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} Q(x, p),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{|x|^2}{2} + \beta z(x) - \frac{\beta^2}{2} &= \sup_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} \left[ \langle x, p \rangle + \beta\omega(p) - \frac{|p|^2}{2} \right] \\ \beta z(x) &= \sup_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} \left[ \langle x, p \rangle + \beta\omega(p) - \frac{|p|^2}{2} - \frac{|x|^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \right] \end{aligned}$$

assim, podemos escrever  $z$  tal que

$$z(x) = \sup_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} \left[ \frac{\beta^2 - |x - p|^2}{2\beta} + \omega(p) \right], \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (4.33)$$

De forma similar, para  $V$  convexa, usando (4.27) e (4.28) em

$$U(p) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} R(x, p),$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{|p|^2}{2} - \beta\omega(p) - \frac{\beta^2}{2} &= \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left[ \langle x, p \rangle - \beta z(p) - \frac{|x|^2}{2} \right] \\ \frac{|p|^2}{2} - \beta\omega(p) - \frac{\beta^2}{2} &= - \inf_{x \in \bar{\Omega}} \left[ - \langle x, p \rangle + \beta z(p) + \frac{|x|^2}{2} \right] \\ \beta\omega(p) &= \inf_{x \in \bar{\Omega}} \left[ - \langle x, p \rangle + \beta z(p) + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|p|^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} \right] \end{aligned}$$

assim, escrevemos  $\omega$  tal que

$$\omega(p) = \inf_{x \in \bar{\Omega}} \left[ \frac{|x - p|^2 - \beta^2}{2\beta} + z(x) \right], \quad p \in \bar{\Psi}_\alpha. \quad (4.34)$$

De maneira análoga, para  $V$  côncava, podemos escrever  $z$  e  $\omega$ , conforme

$$z(x) = \inf_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} \left[ \frac{\beta^2 - |x - p|^2}{2\beta} + \omega(p) \right], \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (4.35)$$

$$\omega(p) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left[ \frac{|x - p|^2 - \beta^2}{2\beta} + z(x) \right], \quad p \in \bar{\Psi}_\alpha. \quad (4.36)$$

A partir das caracterizações (4.33), (4.34) e (4.35), (4.36), podemos ter uma interpretação geométrica para as posições  $r_1(x)$  e  $r_2(p)$  dos refletores. Lembrando que o comprimento óptico é dado por  $l = z(x) + t(x) + d - \omega(P_\alpha(x))$  e  $t^2(x) = |x - P_\alpha(x)|^2 + |z(x) - \omega(P_\alpha(x))|^2$ , onde  $\beta = l - d$ . Segue de (4.33) e (4.35), que a posição do primeiro refletor  $(x, z(x))$  é um ponto no gráfico do parabolóide

$$k_{p, \omega(p)}(x) = \frac{\beta^2 - |x - p|^2}{2\beta} + \omega(p), \quad x \in \alpha, \quad (4.37)$$

representado pela cor vermelha na Figura 4.3, e o foco desse parabolóide é a posição do segundo refletor  $(p, \omega(p))$ , para  $p = P_\alpha(x)$ . De forma análoga, de (4.34) e (4.36), a posição do segundo refletor  $(p, \omega(p))$  é um ponto no gráfico do parabolóide

$$h_{x, z(x)}(p) = \frac{|x - p|^2 - \beta^2}{2\beta} + z(x), \quad p \in \alpha, \quad (4.38)$$

representado pela cor azul na Figura 4.3, e o foco é a posição do primeiro refletor  $(x, z(x))$ .

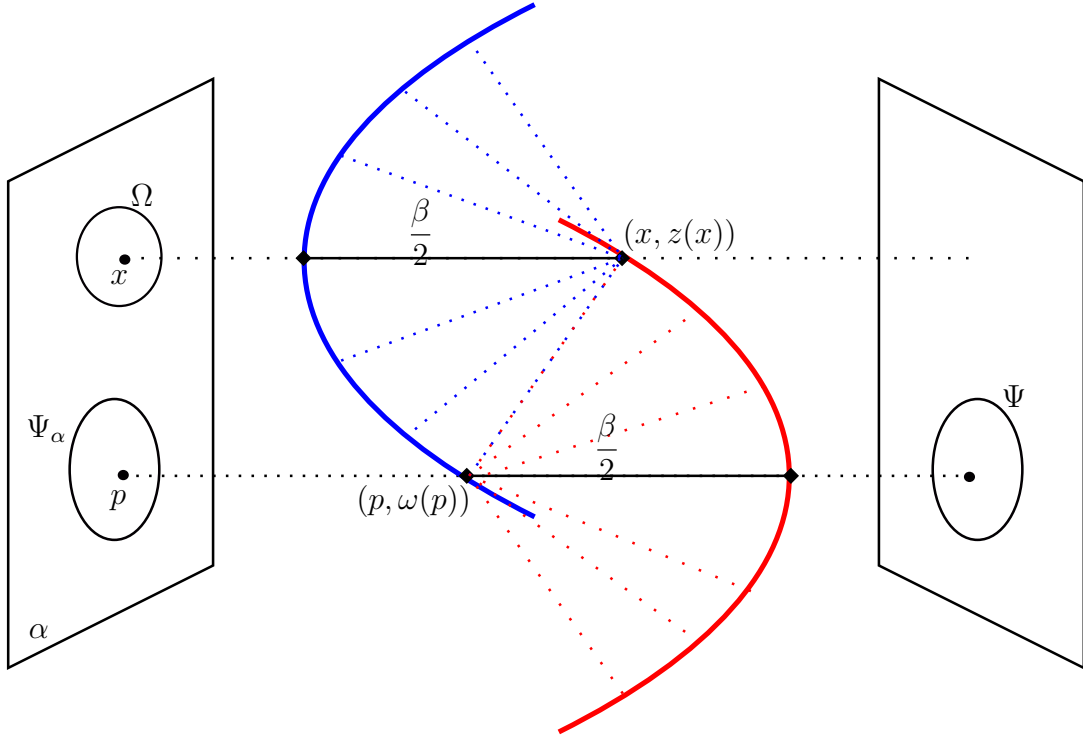


Figura 4.3: Representação dos paraboloides  $k_{p,\omega(p)}(x)$  (vermelho) e  $h_{x,z(x)}(p)$  (azul) em  $\mathbb{R}^2$ .

### 4.3 Formulação Fraca do Problema

Na presente seção, será apresentada uma formulação fraca para o problema de obter os tipos e as posições dos dois refletores que transformam a intensidade luminosa da entrada na intensidade luminosa da saída do sistema óptico.

**Definição 4.3.1.** Um par  $(z, \omega) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_\alpha)$  é denominado dois-refletores do tipo A se

$$z(x) = \sup_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} k_{p,\omega(p)}(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (4.39)$$

$$\omega(p) = \inf_{x \in \bar{\Omega}} h_{x,z(x)}(p), \quad p \in \bar{\Psi}_\alpha, \quad (4.40)$$

onde  $k_{p,\omega(p)}(x)$  e  $h_{x,z(x)}(p)$  são definidas por (4.33) e (4.34), para  $V$  convexa. De forma similar, o par  $(z, \omega) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_\alpha)$  é denominado dois-refletores do tipo B

se

$$z(x) = \inf_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} k_{p,\omega(p)}(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (4.41)$$

$$\omega(p) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} h_{x,z(x)}(p), \quad p \in \bar{\Psi}_\alpha, \quad (4.42)$$

onde  $k_{p,\omega(p)}(x)$  e  $h_{x,z(x)}(p)$  são definidas por (4.35) e (4.36), para  $V$  côncava.

Para evitar repetições, os enunciados dos lemas e teoremas, assim como as demonstrações, serão feitas para refletores do tipo A.

O primeiro objetivo, é construir extensões do par  $(z, \omega)$ , denotadas por  $z^*$  e  $\omega^*$ , onde o domínio seja todo o plano  $\alpha$ .

Para  $V$  convexa, de (4.31), temos que

$$V(x) = \sup_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} Q(x, p), \quad x \in \bar{\Omega} \quad (4.43)$$

onde  $V$  e  $Q$  são definidas em (4.14) e (4.21), respectivamente. Para algum  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$  fixo,  $Q(x, p)$  é um hiperplano e podemos definir o semiespaço

$$Q^+(p) = \{(x, t) \in \alpha \times \mathbb{R} \mid t \geq Q(x, p)\}. \quad (4.44)$$

**Observação 4.3.2.** *Afirmamos que  $\bigcap_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} Q^+(p)$  é um conjunto convexo.*

Suponha  $V$  convexa e seja  $(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n) \in Q^+(p)$ , para algum  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$  com  $\sum \lambda_i = 1$ . Para qualquer  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$  e o ponto  $(x, t) = \lambda_i \sum (x_i, t_i) = \left( \sum \lambda_i x_i, \sum \lambda_i t_i \right)$ , temos que

$$t = \sum t_i \geq \sum \lambda_i V(x_i) \geq V\left(\sum \lambda_i x_i\right) = V(x) \geq Q(x, p).$$

Consequentemente,  $(x, t) \in Q^+(p)$  e  $Q^+(p)$  é convexo. Como a intersecção de conjuntos convexos é convexa, isso prova a afirmação.

**Observação 4.3.3.** *Afirmamos para cada  $(x, t) \in \bigcap_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} Q^+(p)$ , temos que  $(x, s) \in$*

*$\bigcap_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} Q^+(p)$  para qualquer  $s \geq t$ .*

Suponha  $(x, t) \in Q^+(p)$  para todo  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ , logo  $t \geq Q(x, p)$  para todo  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ . Se  $s \geq t$  então  $s \geq Q(x, p)$  para todo  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ . Isso implica que  $(x, s) \in Q^+(p)$  e  $(x, s) \in \bigcap_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} Q^+(p)$ .

Pela Observação 4.3.3, temos que para cada  $x \in \bar{\Omega}$ , existe um único  $t_x \in \mathbb{R}$  tal que

$$(x, t_x) \in \partial \left( \bigcap_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} Q^+(p) \right)$$

e, pela Observação 4.3.2, podemos definir

$$S_{V^*} = \partial \left( \bigcap_{p \in \bar{\Psi}_\alpha} Q^+(p) \right), \quad (4.45)$$

como sendo o gráfico de uma função convexa  $V^*$  para  $x \in \alpha$ . Note que  $V(x) = V^*(x)$  quando  $x \in \bar{\Omega}$ . Agora, podemos definir a extensão de  $z$  para o domínio  $\alpha$ , por

$$z^*(x) = \frac{1}{\beta} \left[ -\frac{|x|^2}{2} + V^*(x) + \frac{\beta^2}{2} \right]. \quad (4.46)$$

De forma análoga, para  $U$  convexa, de (4.31), temos que

$$U(p) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} R(x, p), \quad p \in \bar{\Psi}_\alpha \quad (4.47)$$

onde  $U$  e  $R$  são definidas em (4.27) e (4.28), respectivamente. Para  $x \in \bar{\Omega}$  fixo,  $R(x, p)$  é um hiperplano e definimos o semiespaço

$$R^+(x) = \{(p, t) \in \alpha \times \mathbb{R} \mid t \geq R(x, p)\}. \quad (4.48)$$

Logo, pelas Observações 4.3.2 e 4.3.3,

$$S_{U^*} = \partial \left( \bigcap_{x \in \bar{\Omega}} R^+(x) \right) \quad (4.49)$$

é o gráfico da função convexa  $U^*$  para  $p \in \alpha$ . Note que  $U(p) = U^*(p)$  se  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ . Agora, definimos a extensão de  $\omega$  para o domínio  $\alpha$ , dada por

$$\omega^*(p) = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{|p|^2}{2} - U^*(p) - \frac{\beta^2}{2} \right]. \quad (4.50)$$

**Observação 4.3.4.** Dado  $p_0 \in \bar{\Psi}_\alpha$ ,  $Z = Q(x, p_0)$  é um hiperplano tangente ao gráfico  $S_{V^*}$  no ponto  $(x_0, V^*(x_0))$ , assim

$$Z = \langle p_0, x - x_0 \rangle + V^*(x_0)$$

$$Z - \langle p_0, x \rangle = -\langle p_0, x_0 \rangle + V^*(x_0) = C_0$$

$$\langle Z, 1 \rangle_1 - \langle x, p_0 \rangle = C_0$$

$$\langle (x, Z), (-p_0, 1) \rangle_{n+1} = C_0,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n+1}$  são, respectivamente, o produto interno em  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Logo, temos que,  $(x, Z)$  é um vetor no hiperplano tangente e  $(-p_0, 1)$  é um vetor ortogonal a esse hiperplano.

De forma similar, dado  $x_0 \in \bar{\Omega}$ ,  $W = R(x_0, p)$  é um hiperplano tangente ao gráfico  $S_{U^*}$  no ponto  $(p_0, U^*(p_0))$ , assim

$$W = \langle x_0, p - p_0 \rangle + U^*(p_0)$$

$$W - \langle x_0, p \rangle = -\langle x_0, p_0 \rangle + U^*(p_0) = D_0$$

$$\langle W, 1 \rangle_1 - \langle p, x_0 \rangle = D_0$$

$$\langle (p, W), (-x_0, 1) \rangle_{n+1} = D_0.$$

Logo,  $(p, W)$  é um vetor no hiperplano tangente a  $S_{U^*}$  e  $(-x_0, 1)$  é um vetor ortogonal a esse hiperplano.

Como  $(-p_0, 1)$  e  $(-x_0, 1)$  são vetores ortogonais aos hiperplanos tangentes aos gráficos  $S_{V^*}$  e  $S_{U^*}$ , respectivamente, então podemos dizer que esses gráficos não possuem hiperplanos tangentes verticais.

**Lema 4.3.5.** As funções  $V^*$  e  $U^*$  são Lipschitz contínuas em  $\alpha$  com constante de Lipschitz  $\max_{\bar{\Psi}_\alpha} |p|$  e  $\max_{\bar{\Omega}} |x|$ , respectivamente. Além disso,  $z$  e  $\omega$  são Lipschitz contínuas em  $\bar{\Omega}$  e  $\bar{\Psi}_\alpha$ , respectivamente, e possuem constante de Lipschitz menor ou igual a  $\frac{1}{\beta} \sup_{(x,p) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Psi}_\alpha} |x - p|$ .

*Demonstração.* Pela Observação 4.3.4, dado  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$  o vetor normal ao plano  $Q(x, p)$  é representado por  $(-p, 1)$ . Da definição de  $V^*$  temos que o gráfico  $S_{V^*}$  não possui hiperplanos tangentes verticais. De forma análoga, dado  $x \in \bar{\Omega}$  o vetor normal ao plano  $R(x, p)$  é representado por  $(-x, 1)$  e  $S_{U^*}$  não têm hiperplanos tangentes verticais.

Para a segunda parte do enunciado, como  $V^*$  é Lipschitz contínua em  $\alpha$  e  $V^*(x) = V(x)$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$ , de (4.46) temos que  $z^*$  é Lipschitz em  $\bar{\Omega}$ . A função  $\omega$  é Lipschitz em  $\bar{\Psi}_\alpha$  pelo mesmo argumento, pois  $U^*(p) = U(p)$  para todo  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ .

Agora, para estimar a constante de Lipschitz para  $z$  em  $\bar{\Omega}$ , considere  $(z, \omega)$  dois-refletores do tipo A. Sejam  $x, x' \in \bar{\Omega}$  tal que  $z(x') \geq z(x)$  e fixe  $\varepsilon > 0$  pequeno. De (4.39), existe um  $p' \in \bar{\Psi}_\alpha$ , tal que  $z(x') \leq k_{p', \omega(p')}(x') + \varepsilon$ . Então

$$\begin{aligned} |z(x') - z(x)| &\leq |k_{p', \omega(p')}(x') - z(x) + \varepsilon| \leq |k_{p', \omega(p')}(x') - k_{p', \omega(p')}(x)| + \varepsilon \\ &\leq \sup_{s \in (x', x)} |\nabla k_{p', \omega(p')}(s)| |x' - x| + \varepsilon = \frac{1}{\beta} \sup_{s \in (x', x)} |s - p'| |x' - x| + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{\beta} \sup_{s \in \bar{\Omega}, p \in \bar{\Psi}_\alpha} |s - p| |x - x'| + \varepsilon. \end{aligned}$$

A constante de Lipschitz de  $\omega$  é obtida de forma similar. Sejam  $p, p' \in \bar{\Psi}_\alpha$  tal que  $\omega(p') \leq \omega(p)$ . De (4.40), existe um  $x' \in \bar{\Omega}$ , tal que  $\omega(p') \geq h_{x', z(x')}(p') - \varepsilon$ . Logo

$$\begin{aligned} |\omega(p) - \omega(p')| &\leq |\omega(p) - h_{x', z(x')}(p') + \varepsilon| \leq |h_{x', z(x')}(p) - h_{x', z(x')}(p')| + \varepsilon \\ &\leq \sup_{r \in (p, p')} |\nabla_{p'} h_{x', z(x')}(r)| |p - p'| + \varepsilon = \frac{1}{\beta} \sup_{r \in (p, p')} |x' - r| |p - p'| + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{\beta} \sup_{x \in \bar{\Omega}, r \in \bar{\Psi}_\alpha} |x - r| |p - p'| + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Definição 4.3.6.** *Seja  $(z, \omega)$  dois-refletores do tipo A. Para  $x \in \alpha$  defina*

$$\tilde{P}_\alpha(x) = \partial V^*(x) = \bigcup_{p \in \partial V^*(x)} \{p\}, \quad (4.51)$$

onde  $\partial V^*$  é o subdiferencial da função convexa  $V^*$ , definido em 3.3.6.

Segue da Definição 4.3.6, se  $V^*$  não é diferenciável, o mapa  $\tilde{P}_\alpha$  não é unitário e  $S_{V^*}$  tem mais de um hiperplano suporte.

**Lema 4.3.7.** *Seja  $(z, \omega)$  dois-refletores do tipo A, e  $z^*$  e  $\omega^*$  suas respectivas extensões. Então*

1.  $\tilde{P}_\alpha(x) \subseteq \bar{\Psi}_\alpha, \forall x \in \alpha;$
2.  $\forall p \in \bar{\Psi}_\alpha, \text{ o conjunto } \{x \in \bar{\Omega} \mid \tilde{P}_\alpha(x) = p\} \neq \emptyset;$
3.  $\forall x \in \bar{\Omega}, \tilde{P}_\alpha(x) = \{p \in \bar{\Psi}_\alpha \mid \omega(p) = h_{x, z(x)}(p)\}.$

*Demonstração.* O mapa  $\tilde{P}_\alpha(x)$  é conjunto dos  $p$  tal que  $p \in \partial V^*(x)$  e, pela definição de  $V^*$ ,  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$  com  $(-p, 1)$  sendo o vetor normal ao hiperplano suporte ao gráfico de  $V^*$  no ponto  $(x, V^*(x))$ . Logo  $\tilde{P}_\alpha(x) \subseteq \bar{\Psi}_\alpha, \forall x \in \alpha$ .

Dado  $p_0 \in \bar{\Psi}_\alpha$ ,  $Q(x, p_0)$  é um hiperplano suporte a  $S_{V^*}$ . Precisamos mostrar que existe  $x_0 \in \bar{\Omega}$  tal que  $p_0 \in \tilde{P}_\alpha(x_0)$ . De (4.14), (4.21) e (4.40), temos para qualquer  $x_* \in \bar{\Omega}$ ,

$$\begin{aligned} V(x_*) - Q(x_*, p_0) &= \frac{|x_*|^2}{2} + \beta z(x_*) - \frac{\beta^2}{2} - \left( \langle x_*, p_0 \rangle + \beta \omega(p_0) - \frac{|p_0|^2}{2} \right) \\ &= \beta \left[ \left( \frac{|x_* - p_0|^2 - \beta^2}{2\beta} + z(x_*) \right) - \omega(p_0) \right] \\ &= \beta \left[ h_{x_*, z(x_*)}(p_0) - \omega(p_0) \right] = \beta \left[ h_{x_*, z(x_*)}(p_0) - \inf_{x \in \bar{\Omega}} h_{x, z(x)}(p_0) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Como  $h$  é contínua em  $\bar{\Omega}$ , pelo Teorema de Weierstrass, existe  $x_0 \in \bar{\Omega}$  tal que  $h_{x_0, z(x_0)}(p_0) = \inf_{x \in \bar{\Omega}} h_{x, z(x)}(p_0)$ , assim  $V(x_0) - Q(x_0, p_0) = 0$ . Isso prova os itens 2 e 3. Destaca-se de 2 que  $\tilde{P}_\alpha$  é sobrejetivo.  $\square$

**Observação 4.3.8.** *Como  $V^*$  é convexa, pelo Teorema 3.3.4, é localmente limitada e localmente Lipschitz e, pelo Teorema de Rademacher,  $V^*$  é diferenciável em quase todo ponto, e os pontos onde  $V^*$  não é diferenciável é um conjunto de medida zero em relação à medida de Lebesgue. Assim,  $\tilde{P}_\alpha(x)$  é único para quase todo ponto*



$x \in \alpha$ . Além disso, as funções  $z$  e  $z^*$  são diferenciáveis em quase todo ponto, respectivamente, em  $\Omega$  e  $\alpha$ . Como  $V^*(x) = V(x)$  para todo  $x \in \Omega$ , segue das definições de  $\tilde{P}_\alpha$  e  $V$  que

$$\tilde{P}_\alpha(x) = \partial V^*(x) = \{\nabla V(x)\} = \{x + \beta \nabla z(x)\}, \quad q.t.p. \ x \in \Omega. \quad (4.52)$$

De forma similar,  $\omega$  e  $\omega^*$  são diferenciáveis em quase todo ponto em  $\Psi_\alpha$  e  $\alpha$ , respectivamente, e temos que

$$\tilde{P}_\alpha^{-1} = \{\nabla_p U\} = \{p - \beta \nabla_p \omega(p)\}, \quad q.t.p. \ p \in \Psi_\alpha. \quad (4.53)$$

**Lema 4.3.9.** *Se  $(z, \omega)$  são dois-refletores do tipo A. Então,  $\forall x \in \bar{\Omega}$ ,  $\forall p \in \bar{\Psi}_\alpha$ , temos que*

$$z(x) - \omega(p) \geq \frac{1}{2\beta} (\beta^2 - |x - p|^2). \quad (4.54)$$

Em adição, para quase todo  $x \in \bar{\Omega}$  existe um único  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$  tal que  $p = \tilde{P}_\alpha(x)$  e, neste caso, (4.54) é uma igualdade.

*Demonstração.* De (4.33), vale que

$$z(x) \geq \frac{\beta^2 - |x - p|^2}{2\beta} + \omega(p), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (4.55)$$

assim, obtemos a desigualdade (4.54). Do Lema 4.3.7, se existe um  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ , então existe um  $x \in \bar{\Omega}$  tal que, pela Observação 4.3.8,  $\tilde{P}_\alpha(x) = p$  é único para quase todo ponto com respeito à medida de Lebesgue. Assim do Lema 4.3.7, temos

$$\omega(\tilde{P}_\alpha(x)) = h_{x, z(x)}(\tilde{P}_\alpha(x)),$$

e segue

$$z(x) - \omega(\tilde{P}_\alpha(x)) = \frac{1}{2\beta} (\beta^2 - |x - \tilde{P}_\alpha(x)|^2). \quad (4.56)$$

□

**Definição 4.3.10.** *Sejam  $I$  e  $L$  funções integráveis não-negativas. Um par de funções  $(z, \omega)$  é chamado de solução fraca do tipo A para o Problema 1, se o mapa  $\tilde{P}_\alpha : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Psi}_\alpha$  é sobrejetivo e para qualquer conjunto de Borel  $\tau \subseteq \bar{\Psi}_\alpha$*

$$\int_\tau L(p) dp = \int_{\tilde{P}_\alpha^{-1}(\tau)} I(x) dx, \quad (4.57)$$

onde  $dx$  e  $dp$  representam a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 4.3.11.** *Sejam  $\Omega$  e  $\Psi_\alpha$  conjuntos limitados em  $\alpha$ ,  $I$  e  $L$  funções integráveis não-negativas, e  $\tilde{P}_\alpha : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Psi}_\alpha$  mapa associado a solução fraca do tipo A. Então, para toda função contínua  $h : \bar{\Psi}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  vale*

$$\int_{\Psi_\alpha} h(p)L(p)dp = \int_{\Omega} h(\tilde{P}_\alpha(x))I(x)dx. \quad (4.58)$$

*Demonstração.* Fixe  $\varepsilon > 0$  e um inteiro positivo  $N$ . Particione  $[\min h(p), \max h(p)]$  em  $N$  subintervalos  $S_i$  com  $i = 1, 2, \dots, N$  tal que cada  $S_i < \varepsilon / \left(2 \int_{\Omega} I(x)dx\right)$ . Seja  $h_i \in S_i$  e defina  $\tau_i = \{p \in \bar{\Psi}_\alpha \mid h(p) \in S_i\}$ . Então para  $N$  suficientemente grande

$$\left| \int_{\Psi_\alpha} h(p)L(p)dp - \sum_{i=1}^N h_i \int_{\tau_i} L(p)dp \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.59)$$

Para todo  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $i \neq j$ , pela Observação 4.3.8,  $\mathcal{L}(\tilde{P}_\alpha^{-1}(\tau_i) \cap \tilde{P}_\alpha^{-1}(\tau_j)) = 0$ . Consequentemente,

$$\left| \int_{\Omega} h(\tilde{P}_\alpha(x))I(x)dx - \sum_{i=1}^N h_i \int_{\tilde{P}_\alpha^{-1}(\tau_i)} I(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.60)$$

Assim, utilizando a Definição 4.3.10 e a desigualdade triangular, obtemos

$$\left| \int_{\Omega} h(\tilde{P}_\alpha(x))I(x)dx - \int_{\Psi_\alpha} h(p)L(p)dp \right| < \varepsilon. \quad (4.61)$$

□

## 4.4 Relação entre o Problema de Monge e o Problema dos Dois-Refletores

Na presente seção, vamos relacionar a solução fraca do Problema 1 com os problemas de transporte ótimo. Para isso será necessário definir um problema de minimização de um funcional com custo quadrático em  $\mathbb{R}^n$  (Problema 2). Esse problema tem o formato de Monge e, pelo Teorema de Brenier, existe uma aplicação de transporte ótimo e essa aplicação é única.

Agora, considere a classe de mapas  $P_\alpha : \Omega \rightarrow \Psi_\alpha$  com a condição

$$\int_{\Omega} h(P_\alpha(x))I(x)dx = \int_{\Psi_\alpha} h(p)L(p)dp, \quad \forall h : \Psi_\alpha \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua.} \quad (4.62)$$

Cada mapa  $P_\alpha$  que satisfaz (4.62) é uma aplicação de transporte.

**Problema 2.** *Minimizar o funcional com custo quadrático*

$$\mathcal{C}(P_\alpha) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |x - P_\alpha(x)|^2 I(x)dx \quad (4.63)$$

para aplicações de transporte  $P_\alpha$ .

O mapa  $P_\alpha$  que minimiza (4.63) é a aplicação de transporte ótimo. Note que, o mapa  $\tilde{P}_\alpha$  correspondente a solução fraca  $(z, \omega)$  para o Problema 1 é uma aplicação de transporte pelo Lema 4.3.11. No Teorema 4.4.1, será demonstrada que o mapa correspondente a solução fraca do Problema 1 é a aplicação de transporte ótimo. Nesse teorema, tamem será demonstrada de uma forma alternativa a unicidade da aplicação ótima.

**Teorema 4.4.1.** *Seja  $(z, \omega)$  uma solução fraca do tipo A para o Problema 1 e seja  $\tilde{P}_\alpha$  o mapa correspondente. Então  $\tilde{P}_\alpha$  minimiza (4.63), por conseguinte,  $\tilde{P}_\alpha$  é a aplicação de transporte ótimo. Além disso, a aplicação de transporte minimizante é única em quase todo ponto  $x \in \text{supp}(I) \setminus \{x \in \bar{\Omega} \mid I(x) = 0\}$ .*

*Demonstração.* Usando o Lema 4.3.9, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\beta} \int_{\Omega} (\beta^2 - |x - \tilde{P}_\alpha(x)|^2) I(x)dx &= \int_{\Omega} (z(x) - \omega(\tilde{P}_\alpha(x))) I(x)dx \\ &= \int_{\Omega} z(x)I(x)dx - \int_{\Psi_\alpha} \omega(p)L(p)dp \\ &= \int_{\Omega} (z(x) - \omega(P_\alpha(x))) I(x)dx \\ &\geq \frac{1}{2\beta} \int_{\Omega} (\beta^2 - |x - P_\alpha(x)|^2) I(x)dx, \end{aligned} \quad (4.64)$$

segue que

$$\frac{1}{2\beta} \int_{\Omega} (\beta^2 - |x - \tilde{P}_\alpha(x)|^2) I(x)dx \geq \frac{1}{2\beta} \int_{\Omega} (\beta^2 - |x - P_\alpha(x)|^2) I(x)dx. \quad (4.65)$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |x - \tilde{P}_{\alpha}(x)|^2 I(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |x - P_{\alpha}(x)|^2 I(x) dx, \quad (4.66)$$

para todo  $P_{\alpha} : \Omega \rightarrow \Psi_{\alpha}$  que satisfaz (4.62). Portanto,  $\tilde{P}_{\alpha}$  é a aplicação de transporte ótimo.

Para provar a unicidade da aplicação ótima, considere que  $P_{\alpha}$  minimiza (4.63), logo vale a igualdade em (4.64), assim

$$\int_{\Omega} \left( z(x) - \omega(P_{\alpha}(x)) - \frac{1}{2\beta} (\beta^2 - |x - P_{\alpha}(x)|^2) \right) I(x) dx = 0. \quad (4.67)$$

Logo, para  $I(x) > 0$

$$z(x) - \omega(P_{\alpha}(x)) = \frac{1}{2\beta} (\beta^2 - |x - P_{\alpha}(x)|^2) \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \quad (4.68)$$

Portanto, pelo Lema 4.3.9,  $P_{\alpha} = \tilde{P}_{\alpha}$  em quase todo ponto  $x \in \text{supp}(I) \setminus \{x \in \bar{\Omega} \mid I(x) = 0\}$ .  $\square$

## 4.5 Um Problema Variacional e uma Solução Fraca para o Problema dos Dois-Refletores

Uma forma alternativa de encontrar a solução fraca do Problema 1 é utilizando cálculo variacional. Para isso será definido um novo problema de minimização (Problema 3). Através da Proposição 4.5.1 é demonstrada a existência do minimizante para esse problema e, pelo Teorema 4.5.2, a equivalência desse minimizante com a solução fraca do Problema 1.

Considere um novo par de refletores  $(\zeta, \omega) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_{\alpha})$  do tipo A. O novo comprimento óptico, ilustrado na Figura 4.4, é dado por

$$l(\zeta, \omega, x, p) = \zeta(x) + \sqrt{(\zeta(x) - \omega(p))^2 + |x - p|^2} + d - \omega(p). \quad (4.69)$$

Agora, defina o conjunto dos pares admissíveis, por

$$\Pi(\Omega, \Psi_{\alpha}) = \{(\zeta, \omega) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_{\alpha}) \mid l(\zeta, \omega, x, p) \geq l \forall (x, p) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Psi}_{\alpha}\}, \quad (4.70)$$

onde  $l$  é a distância óptica constante para o par  $(z, \omega)$ .

Por construção, o par  $(\zeta, \omega) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_\alpha)$  está na classe  $\Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$  se, e somente se,  $\forall x \in \bar{\Omega}, \forall p \in \bar{\Psi}_\alpha$

$$\zeta(x) \geq k_{p, \omega(p)}(x), \quad \omega(p) \leq h_{x, z(x)}(p), \quad (4.71)$$

ou de forma equivalente, se e somente se

$$\zeta(x) - \omega(p) \geq \frac{1}{2\beta} (\beta^2 - |x - p|^2) \quad (4.72)$$

para todo  $x \in \bar{\Omega}$  e para todo  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$ . Segue de (4.39) e (4.40) que o par de refletores  $(z, \omega)$  é um par admissível.

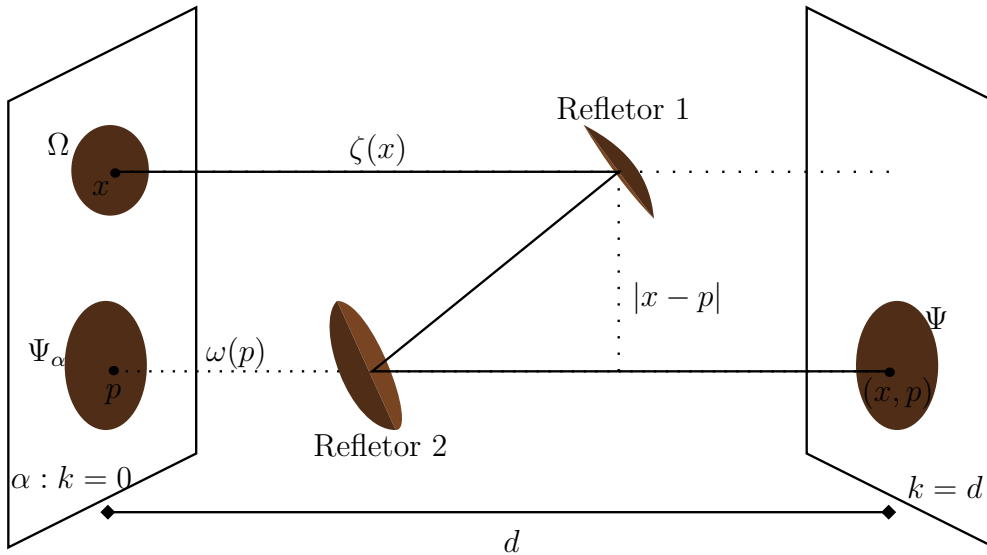


Figura 4.4: Representação em  $\mathbb{R}^3$  de um sistema de transporte óptico para um problema variacional.

Adaptado de [6].

Sejam  $I$  e  $L$  duas funções integráveis não-negativas em  $\Omega$  e  $\Psi_\alpha$ , respectivamente, e satisfazem a lei de conservação (4.11). Para  $(\zeta, \omega) \in \Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$ , definimos o funcional

$$\mathcal{F}(\zeta, \omega) := \int_{\Omega} \zeta(x) I(x) dx - \int_{\Psi} \omega(p) L(p) dp. \quad (4.73)$$

Observe que esse funcional é linear e limitado em  $C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_\alpha)$  com respeito a norma  $\max\{\|\zeta\|_\infty, \|\omega\|_\infty\}$ , pois

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(\zeta, \omega)| &= \left| \int_{\Omega} \zeta(x)I(x)dx - \int_{\Psi_\alpha} \omega(p)L(p)dp \right| \leq \left| \int_{\Omega} \zeta(x)I(x)dx \right| + \left| \int_{\Psi_\alpha} \omega(p)L(p)dp \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\zeta(x)|I(x)dx + \int_{\Psi_\alpha} |\omega(p)|L(p)dp \leq \|\zeta\|_\infty \int_{\Omega} I(x)dx + \|\omega\|_\infty \int_{\Psi_\alpha} L(p)dp \\ &\leq \max\{\|\zeta\|_\infty, \|\omega\|_\infty\} \left[ \int_{\Omega} I(x)dx + \int_{\Psi_\alpha} L(p)dp \right] = 2 \max\{\|\zeta\|_\infty, \|\omega\|_\infty\} \int_{\Omega} I(x)dx. \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{F}$  é contínua em  $C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_\alpha)$ .

Geometricamente,  $\mathcal{F}(\zeta, \omega)$  é proporcional a distância horizontal entre os dois refletores, com as intensidades como funções peso. Agora podemos definir o Problema 3.

**Problema 3.** *Minimizar o funcional  $\mathcal{F}$  em  $\Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$ .*

**Proposição 4.5.1.** *Existe um par  $(z, \omega) \in \Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$  tal que*

$$\mathcal{F}(z, \omega) = \inf_{(\zeta, \omega) \in \Pi(\Omega, \Psi_\alpha)} \mathcal{F}(\zeta, \omega). \quad (4.74)$$

*Demonstração.* Sejam  $(\zeta_n, \omega_n) \in \Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pares de refletores do tipo A, tal que

$$\mathcal{F}(\zeta_n, \omega_n) \leq \mathcal{F}(z, \omega) + \frac{1}{n}. \quad (4.75)$$

Pelo Lema 4.3.5,  $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são Lipschitz, ambos com constante de Lipschitz  $K = \frac{1}{\beta} \sup_{(x,p) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Psi}_\alpha} |x - p|$ . Assim, os pares de refletores  $(\zeta_n, \omega_n)$  são equicontínuas para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Agora precisamos mostrar que  $(\zeta_n, \omega_n)$  são equilimitadas para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por causa de (4.11),  $\mathcal{F}(\zeta_n, \omega_n)$  é invariante frente a translações  $\zeta_n \mapsto \zeta_n + \rho$  e  $\omega_n \mapsto \omega_n + \rho$  para  $\rho \in \mathbb{R}$ . Consequentemente, é suficiente considerar os pares  $(\zeta_n, \omega_n)$  tal que  $\zeta_n(x_0) = 0$  para  $x_0 \in \bar{\Omega}$ . De  $\zeta_n$  ser Lipschitz, temos que

$$|\zeta_n(x)| = |\zeta_n(x) - \zeta_n(x_0)| \leq K \text{diam}\Omega, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.76)$$

Logo,  $\zeta_n$  são equilimitadas para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De forma similar, para todo  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$  temos

$$\omega_n(p) \leq h_{x_0, \zeta_n(x_0)}(p) = \frac{|x_0 - p|^2 - \beta^2}{2\beta} \leq \max_{q \in \bar{\Psi}_\alpha} \frac{|x_0 - q|^2}{2\beta}. \quad (4.77)$$

Por outro lado, por (4.76), temos

$$h_{x, \zeta_n(x)}(p) = \frac{|x - p|^2 - \beta^2}{2\beta} + \zeta_n(x) \geq -\frac{\beta}{2} + \zeta_n(x) \geq -\frac{\beta}{2} - K \text{diam}\Omega, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad (4.78)$$

consequentemente,

$$\omega_n(p) = \inf_{x \in \bar{\Omega}} h_{x, \zeta_n(x)}(p) \geq -\frac{\beta}{2} - K \text{diam}\Omega, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.79)$$

Logo,  $\omega_n$  são equilimitadas para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, segue de os pares de refletos  $(\zeta_n, \omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  serem equicontínuas e equilimitadas em  $\bar{\Omega} \times \bar{\Psi}_\alpha$ , que existe um par de subsequências convergentes  $(\zeta_{n_k}, \omega_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  que converge uniformemente para um par  $(z, \omega)$  em  $\bar{\Omega} \times \bar{\Psi}_\alpha$ . Da continuidade da funcional  $\mathcal{F}$  em  $C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_\alpha)$ , o ínfimo de  $\mathcal{F}$  é atingido para  $(z, \omega)$ .  $\square$

**Teorema 4.5.2.** *Sejam  $(z, \omega) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_\alpha)$  dois-refletos do tipo A. Então são equivalentes:*

1.  $(z, \omega)$  é uma solução fraca do tipo A para o Problema 1;
2.  $(z, \omega)$  minimiza  $\mathcal{F}$  em  $\Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$ .

*Demonstração.* 1  $\implies$  2. Para qualquer par  $(\zeta, \omega) \in \Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$ , por (4.72) e pelo Lema 4.3.9,  $\forall x \in \bar{\Omega}$ ,

$$\zeta(x) - \omega(\tilde{P}_\alpha(x)) \geq \frac{1}{2\beta} \left( \beta^2 - |\beta^2 - \tilde{P}_\alpha(x)| \right) = z(x) - \omega(\tilde{P}_\alpha(x)). \quad (4.80)$$

Integrando, obtemos

$$\int_{\Omega} \zeta(x) I(x) dx - \int_{\Omega} \omega(\tilde{P}_\alpha(x)) I(x) dx \geq \int_{\Omega} z(x) I(x) dx - \int_{\Omega} \omega(\tilde{P}_\alpha(x)) I(x) dx. \quad (4.81)$$

Usando o Lema 4.3.11,

$$\mathcal{F}(\zeta, \omega) = \int_{\Omega} \zeta(x)I(x)dx - \int_{\Psi_{\alpha}} \omega(p)L(p)dp \geq \int_{\Omega} z(x)I(x)dx - \int_{\Psi_{\alpha}} \omega(p)L(p)dp = \mathcal{F}(z, \omega). \quad (4.82)$$

Logo, a solução fraca  $(z, \omega)$  do Problema 1 minimiza o funcional  $\mathcal{F}$  em  $\Pi(\Omega, \Psi_{\alpha})$ .

2  $\implies$  1. Para a segunda parte do teorema, precisamos mostrar que, se o par de refletores  $(z, \omega)$  minimiza o funcional  $\mathcal{F}$  em  $\Pi(\Omega, \Psi_{\alpha})$ , então

$$\int_{\tilde{P}_{\alpha}^{-1}(\tau)} I(x)dx = \int_{\tau} L(p)dp, \quad \forall \tau \subseteq \Psi_{\alpha}, \quad (4.83)$$

onde  $\tilde{P}_{\alpha} : \Omega \rightarrow \Psi_{\alpha}$  é o mapa associado a solução fraca  $(z, \omega)$ .

Primeiramente, suponha  $\tau = B_r(p_0) \subseteq \Psi_{\alpha}$ , bola aberta de raio  $r$  centrada em  $p_0 \in \Psi_{\alpha}$ . Para  $i \in \mathbb{N}$  e  $p \in \alpha$ , defina a função

$$\chi_i(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } |p - p_0| < r - \frac{1}{i} \\ i(r - |p - p_0|) & \text{se } r - \frac{1}{i} \leq |p - p_0| < r \\ 0 & \text{se } |p - p_0| \geq r \end{cases} \quad (4.84)$$

Logo,  $\chi_i$  é contínua em  $\alpha$ ,  $0 \leq \chi_i \leq 1$ , e a sequência  $\{\chi_i(p) \mid p \in \alpha\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge pontualmente em  $\alpha$  para a função característica de  $\tau$ , denotada por  $\chi_{\tau}(p)$ .

Agora, fixe  $i$  e  $\varepsilon \in (-1, 1)$ , defina

$$\omega_{\varepsilon}(p) = \omega(p) + \varepsilon \chi_i(p), \quad (4.85)$$

e

$$z_{\varepsilon}(x) = \sup_{p \in \tilde{\Psi}_{\alpha}} k_{p, \omega_{\varepsilon}(p)}(x) = \sup_{p \in \tilde{\Psi}_{\alpha}} \left[ \frac{1}{2\beta} (\beta - |x - p|^2) + \omega_{\varepsilon}(p) \right]. \quad (4.86)$$

Precisamos mostrar que  $(z_{\varepsilon}, \omega_{\varepsilon}) \in \Pi(\Omega, \Psi_{\alpha})$ . Como  $\omega_{\varepsilon}$  é a soma de duas funções contínuas também é contínua. Para  $z_{\varepsilon}$  vamos mostrar que é Lipschitz em  $\bar{\Omega}$ . Seja  $x, x' \in \bar{\Omega}$  tal que  $z_{\varepsilon}(x') \geq z_{\varepsilon}(x)$ . Escolha  $p' \in \tilde{\Psi}_{\alpha}$  tal que  $z_{\varepsilon}(x') = k_{p', \omega_{\varepsilon}(p')}(x')$ .



Logo

$$\begin{aligned}
|z_\varepsilon(x') - z_\varepsilon(x)| &= |k_{p',\omega_\varepsilon(p')}(x') - z_\varepsilon(x)| \leq |k_{p',\omega_\varepsilon(p')}(x') - k_{p',\omega_\varepsilon(p')}(x)| \\
&\leq \sup_{s \in (x',x)} |\nabla k_{p',\omega_\varepsilon(p')}(s)| |x' - x| = \frac{1}{\beta} \sup_{s \in (x',x)} |s - p'| |x' - x| \quad (4.87) \\
&\leq \frac{1}{\beta} \sup_{s \in \bar{\Omega}, p \in \bar{\Psi}_\alpha} |s - p| |x - x'|.
\end{aligned}$$

Assim  $(z_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Psi}_\alpha)$  e por construção satisfaz (4.72), então  $(z_\varepsilon, \omega_\varepsilon) \in \Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$ .

Sejam  $x \in \bar{\Omega}$  e  $p_\varepsilon \in \bar{\Psi}_\alpha$  para cada  $\varepsilon \in (-1, 1)$ , tal que  $z_\varepsilon = k_{p_\varepsilon, \omega_\varepsilon(p_\varepsilon)}(x)$ .

Logo

$$\begin{aligned}
z_\varepsilon(x) - z(x) &= k_{p_\varepsilon, \omega_\varepsilon(p_\varepsilon)}(x) - z(x) \leq k_{p_\varepsilon, \omega_\varepsilon(p_\varepsilon)}(x) - k_{p_\varepsilon, \omega(p_\varepsilon)}(x) \quad (4.88) \\
&= \omega_\varepsilon(p_\varepsilon) - \omega(p_\varepsilon) = \varepsilon \chi_i(p_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Similarmente, escolha  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$  tal que  $p = \tilde{P}_\alpha(x)$ , segue do Lema 4.3.9 que  $z(x) = k_{p, \omega(p)}(x)$ , logo

$$\begin{aligned}
z_\varepsilon(x) - z(x) &= z_\varepsilon(x) - k_{p, \omega(p)}(x) \geq k_{p, \omega_\varepsilon(p)}(x) - k_{p, \omega(p)}(x) \quad (4.89) \\
&= \omega_\varepsilon(p) - \omega(p) = \varepsilon \chi_i(p).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$-|\varepsilon| \leq \varepsilon \chi_i(p) \leq z_\varepsilon(x) - z(x) \leq \varepsilon \chi_i(p_\varepsilon) \leq |\varepsilon|, \quad (4.90)$$

para todo  $x \in \bar{\Omega}$ . Em particular,  $z_\varepsilon$  converge uniformemente para  $z$  em  $\bar{\Omega}$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Agora, precisamos mostrar que  $p_\varepsilon$  converge para  $p$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Para isso, vamos supor que essa afirmação é falsa. Logo, existe uma sequência  $\{p_{\varepsilon_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  e dado  $\varepsilon_j = 1/j$ , quando  $j \rightarrow \infty$ , deve existir  $\eta > 0$  tal que

$$|p - p_{\varepsilon_j}| > \eta, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4.91)$$

Defina  $z'(x) = \max_{p' \in \bar{\Psi}_\alpha, |p' - p| \geq \eta} k_{p', \omega(p')}(x)$ . Note que o máximo definido por  $z'$  é alcançado. Pelo Lema 4.3.9, existe um único  $p \in \bar{\Psi}_\alpha$  tal que  $z(x) = k_{p, \omega(p)}(x)$ , segue

então que  $z' < z(x)$ . Portanto, para todo  $j$  temos

$$\begin{aligned} z(x) - z_{\varepsilon_j}(x) &= z(x) - k_{p_{\varepsilon_j}, \omega_{\varepsilon_j}(p_{\varepsilon_j})}(x) = z(x) - k_{p_{\varepsilon_j}, \omega(p_{\varepsilon_j})}(x) + \omega(p_{\varepsilon_j}) - \omega_{\varepsilon_j}(p_{\varepsilon_j}) \\ &= z(x) - k_{p_{\varepsilon_j}, \omega(p_{\varepsilon_j})}(x) - \varepsilon_j \chi_i(p_{\varepsilon_j}) \geq z(x) - z' - |\varepsilon_j|. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Isso contraria o fato de  $z_\varepsilon(x)$  convergir para  $z(x)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , logo  $p_\varepsilon$  converge para  $p$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Segue de (4.90) que

$$\left| \frac{z_\varepsilon(x) - z(x)}{\varepsilon} - \chi_i(p) \right| \leq |\chi_i(p_\varepsilon) - \chi_i(p)|, \quad (4.93)$$

fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  e usando a continuidade de  $\chi_i$ , concluímos que para quase todo ponto  $x \in \Omega$  temos

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} z_\varepsilon(x) = \chi_i(p) = \chi_i(\tilde{P}_\alpha(x)), \quad (4.94)$$

logo

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_\Omega z_\varepsilon(x) I(x) dx = \int_\Omega \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} z_\varepsilon(x) I(x) dx = \int_\Omega \chi_i(\tilde{P}_\alpha(x)) I(x) dx. \quad (4.95)$$

De forma similar, usando (4.85), segue

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \omega_\varepsilon(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_\varepsilon(p) - \omega(p)}{\varepsilon} = \chi_i(p), \quad (4.96)$$

logo

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{\Psi_\alpha} \omega_\varepsilon(p) L(p) dp = \int_{\Psi_\alpha} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \omega_\varepsilon(p) L(p) dp = \int_{\Psi_\alpha} \chi_i(p) L(p) dp. \quad (4.97)$$

Do funcional  $\mathcal{F}$  ser mínimo para o par de refletores  $(z, \omega)$ , obtemos

$$0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}(z_\varepsilon, \omega_\varepsilon) = \int_\Omega \chi_i(\tilde{P}_\alpha(x)) I(x) dx - \int_{\Psi_\alpha} \chi_i(p) L(p) dp. \quad (4.98)$$

Como  $\chi_i(p)$  converge pontualmente para  $\chi_\tau(p)$  em  $\alpha$ , consequentemente,  $\chi_i(\tilde{P}_\alpha(x))$  converge pontualmente para  $\chi_\tau(\tilde{P}_\alpha(x))$  para quase todo ponto  $x \in \Omega$ . Note que, pela

Observação 4.3.8, se  $\tilde{P}_\alpha(x) \in \tau$  então  $x \in \tilde{P}_\alpha^{-1}(\tau)$ , assim  $\chi_\tau(\tilde{P}_\alpha(x)) = \chi_{\tilde{P}_\alpha^{-1}(\tau)}(x)$ .

Usando (4.98), obtemos

$$\begin{aligned} \int_\tau L(p)dp &= \int_{\Psi_\alpha} \chi_\tau(p)L(p)dp = \int_\Omega \chi_\tau(\tilde{P}_\alpha(x))I(x)dx = \int_\Omega \chi_{\tilde{P}_\alpha^{-1}(\tau)}(x)I(x)dx \\ &= \int_{\tilde{P}_\alpha^{-1}(\tau)} I(x)dx. \end{aligned} \quad (4.99)$$

que equivalente a solução fraca do Problema 1.

□

## 4.6 Existência e Unicidade da Solução Fraca para o Problema dos Dois-Refletores

A existência da solução fraca foi encontrada definindo dois problemas de minimização, um com formato de Monge e um problema de cálculo variacional. A unicidade também pode ser obtida de duas formas, usando a unicidade da aplicação ótima pelo Teorema de Brenier ou através do Teorema 4.4.1. No Teorema 4.6.1, é enunciado e demonstrada a existência e a unicidade da solução fraca para o Problema 1.

**Teorema 4.6.1.** *Existe uma solução fraca para refletores do tipo A para o Problema 1. Se  $(z, \omega)$  é solução para o Problema 1, então  $z$  é Lipschitz em  $\bar{\Omega}$  e  $\omega$  é Lipschitz em  $\bar{\Psi}_\alpha$ . O mapa  $\tilde{P}_\alpha : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Psi}_\alpha$  associado a solução fraca  $(z, \omega)$  é único em quase todo ponto, tal que*

$$\tilde{P}_\alpha = \{x + \beta \nabla z(x)\}.$$

*Além disso, se  $(z, \omega)$  e  $(z', \omega')$  são soluções do mesmo tipo com mapas  $\tilde{P}_\alpha$  e  $\tilde{P}'_\alpha$ , respectivamente, então*

$$\tilde{P}_\alpha(x) = \tilde{P}'_\alpha(x)$$

*para quase todo ponto  $x \in \text{supp}(I) \setminus \{x \in \Omega \mid I(x) = 0\}$ .*

*Demonstração.* A existência da solução fraca para o Problema 1, pode ser alcançada de duas formas. Através do Problema 2, onde é definido um problema de minimização do custo total de transporte com custo quadrático em  $\mathbb{R}^n$ , e a existência da aplicação ótima vem do Teorema de Brenier. Através do Problema 3, onde, pela Proposição 4.5.1, existe um par de dois-refletores  $(z, \omega) \in \Pi(\Omega, \Psi_\alpha)$  que minimiza o funcional  $\mathcal{F}$ , e, pelo Teorema 4.5.2, esse par é a solução fraca do Problema 1.

Segue do Lema 4.3.5 e da Observação 4.3.8 que  $z$  e  $\omega$  são Lipschitz, respectivamente, em  $\bar{\Omega}$  e  $\bar{\Psi}_\alpha$ . Também da Observação 4.3.8, temos

$$\tilde{P}_\alpha = \partial V^*(x) = \{\nabla V(x)\} = \{x + \beta \nabla z(x)\},$$

pois  $V^*(x) = V(x)$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$ , e, pelo Lema 4.3.7, temos que  $\tilde{P}_\alpha : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Psi}_\alpha$  é sobrejetivo.

Se  $(z, \omega)$  e  $(z', \omega')$  são soluções para o Problema 1, com seus respectivos mapas associados  $\tilde{P}_\alpha$  e  $\tilde{P}'_\alpha$ , pela condição (4.62) esses mapas são aplicações de transporte e, pelo Teorema 4.4.1,  $\tilde{P}_\alpha = \tilde{P}'_\alpha$  para quase todo ponto  $x \in \text{supp}(I) \setminus \{x \in \Omega \mid I(x) = 0\}$ . □

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, iniciou-se o estudo em teoria de transporte. Foram apresentadas as formulações dos problemas de Monge e Kantorovich, e as condições necessárias para existência de uma aplicação ótima em  $\mathbb{R}^n$  com função custo de transporte contínua. A teoria de transporte ótimo pode ser formulada em condições mais gerais, com funções custo semicontínuas inferiormente e em espaços poloneses, isto é, espaços métricos, completos e separáveis. A opção pela formulação realizada, se deu pelos resultados necessário para a aplicação no sistema óptico.

A aplicação proposta consistia na modelagem de um sistema óptico com dois refletores em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e encontrar as posições e os tipos de refletores que transportassem os sinais luminosos da antena fonte até a antena receptora. A modelagem geométrica e caracterização dos refletores foram realizadas através de princípios de óptica e de análise convexa. A formulação para essa aplicação, projetando a seção de saída do sistema  $\Psi$  para o plano  $\alpha$  possibilitou reduzir o problema para  $\mathbb{R}^n$ . Através de um problema de minimização de Monge foi possível obter a existência e unicidade da solução fraca utilizando o Teorema de Brenier. De uma forma alternativa, a existência da solução fraca também pôde ser obtida através de um novo problema de minimização utilizando cálculo variacional e o Teorema de Arzelà-Ascoli.

Para trabalhos futuros, pode-se estender a aplicação para o caso de não existir conservação de energia.

## Referências Bibliográficas

- [1] AMBROSIO, L., AND GIGLI, N. *A user's guide to optimal transport*, 2009.
- [2] BALANIS, C. A. *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, 2012.
- [3] BILLINGSLEY, P. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, 1999.
- [4] BRENIER, Y. Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 305 (1987), 805–808.
- [5] EVANS, L. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, 2015.
- [6] GLIMM, T., AND OLIKER, V. Optical design of two-reflector systems, the monge-kantorovich mass transfer problem and fermat's principle. *Indiana University Mathematics Journal* (2004), 1255–1277.
- [7] JIMENEZ, C., AND SANTAMBROGIO, F. Optimal transportation for a quadratic cost with convex constraints and applications. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 98, 1 (2012), 103–113.
- [8] KANTOROVICH, L. V. On the translocation of masses. 199–201.
- [9] MARCON, D. *Transporte Ótimo - Notas de Aula*, 2018.
- [10] MONGE, G. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1781).
- [11] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex analysis*. Princeton university press, 2015.
- [12] SANTAMBROGIO, F. *Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling*, vol. 87. Birkhäuser, 2015.

- [13] STUTZMAN, W. L., AND THIELE, G. A. *Antenna Theory and Design*. Wiley, Hoboken, NJ, 2012.
- [14] VILLANI, C. *Topics in optimal transportation*, vol. 58. American Mathematical Soc., 2003.