

## UMA SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA DA DISPERSÃO DE POLUENTES COM A EQUAÇÃO DO TELÉGRAFO E FLUXO CONTRA-GRADIENTE

LIDIANE BULIGON, MARCO TÚLLIO MENNA BARRETO DE VILHENA e  
DAVIDSON MARTINS MOREIRA

<sup>1</sup>Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Física, Santa Maria, RS, Brasil.  
97105-900, Santa Maria, RS, Brasil. Tel: (55)220-8305. E-mail: lidiane@mail.ufsm.br

<sup>2</sup>Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Porto Alegre, RS, Brasil.

<sup>3</sup>Universidade Luterana do Brasil, Engenharia Ambiental, Canoas, RS, Brasil.

Recebido Outubro 2004 - Aceito Abril 2006

### RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma solução semi-analítica para a equação do telégrafo no estudo da dispersão vertical turbulenta na Camada Limite Atmosférica (CLA). A equação foi resolvida para representar uma difusão turbulenta que se processa sob velocidades finitas, associada a uma forma contra-gradiente para fluxos turbulentos. Considerando-se o caráter não-local do transporte turbulento surgem as seguintes variáveis na equação que representa a dispersão do poluente a partir de uma fonte área: tempo de relaxação, assimetria, escala de tempo lagrangiana e velocidade turbulenta vertical, consideradas como variáveis estocásticas independentes. A solução desta equação é obtida utilizando-se a técnica da transformada de Laplace considerando-se a CLA como um sistema multicamadas. Nesse trabalho, os parâmetros necessários na equação foram derivados da teoria de difusão estatística de Taylor combinada com a teoria de similaridade. Testes de sensibilidade foram realizados para diferentes condições de estabilidade da atmosfera obtendo-se as concentrações de poluentes no solo e no topo da CLA. A análise dos resultados indica pouca sensibilidade no máximo de concentração do poluente em relação à variação da assimetria, sendo mais expressiva a alteração do máximo na Camada Limite Convectiva (CLC).

**Palavras-Chave:** Camada Limite Atmosférica; Equação do Telégrafo; Fonte Área; Dispersão de Poluentes; Solução Semi-Analítica.

### ABSTRACT: SEMI-ANALYTICAL SOLUTION OF POLLUTANTS DISPERSION WITH THE TELEGRAPH EQUATION AND COUNTER-GRADIENT FLUX

In this work we report a semi-analytical solution for the telegraph equation in the study of turbulent vertical dispersion in an Atmospheric Boundary Layer (ABL). The analyzed equation considers the diffusion with finite speeds, which represents the turbulent transport physically correct. Considering the nonlocal character of the turbulent transport appear the following terms in the equation that represents an area source: relaxation time, asymmetry, lagrangian time scale and the vertical turbulent speed. The solution is obtained using the Laplace transform technique considering the ABL as a multilayer system. The necessary parameters in the equation are derived from the Taylor's statistical diffusion theory combined to the similarity theory. Simulations of pollutants concentration for different stabilities in the ground and in the top of the ABL are shown. The analysis of the results shows a small influence in the maximum of pollutant concentration in relation to variation of the asymmetry, being more expressive the alteration of the maximum in the Convective Boundary Layer (CBL).

**Keywords:** Atmospheric Boundary Layer; Telegraph Equation; Area Source; Pollutants Dispersion; Semi-analytical Solution.

## 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento industrial e urbano tem causado em todo mundo o aumento da emissão de poluentes antropogênicos na atmosfera. Os problemas ocasionados pela poluição do ar são complexos e afeta os processos naturais, influenciando de forma marcante o equilíbrio ecológico. Por esta razão, é importante estudar e entender o processo de dispersão de poluentes na atmosfera para prever as possíveis conseqüências do impacto provocado por estas fontes poluidoras sobre os diversos ecossistemas.

Para estudar a dispersão de poluentes na atmosfera utilizam-se dois métodos de investigação: os experimentos de campo ou de laboratório e as simulações computacionais. O fato dos experimentos de campo serem muitas vezes dificultados por problemas operacionais e pelo alto custo financeiro torna a simulação computacional o método mais utilizado para a compreensão desses processos.

Os modelos utilizados para estudar a dispersão de poluentes atmosféricos podem ser classificados em duas grandes categorias: (a) modelos eulerianos e (b) modelos lagrangianos. Os modelos eulerianos baseiam-se na chamada “equação de difusão-advecção”. Essa equação é uma aproximação da equação de conservação de massa de um gás ideal válida para um escoamento de regime turbulento, a qual é obtida da equação original desconsiderando-se a viscosidade molecular e após a aplicação da média de Reynolds (Sutton, 1953). Os modelos lagrangianos baseiam-se na “equação de Langevin” derivada originalmente para descrever o movimento browniano. A equação de Langevin é a expressão da segunda lei de Newton associada à aceleração de uma partícula de um processo markoviano (com memória), forçada pelas diferenças de tensões de um escoamento de regime turbulento sobre sua superfície. As diferenças de formulação entre essas duas grandes categorias não surgem simplesmente da mudança de sistema de coordenada. Em geral, o sistema de coordenadas da abordagem euleriana é fixo e único, mas não obrigatoriamente, como no caso do modelo ARPS onde o sistema de coordenadas pode se deslocar para acompanhar o centro de uma tempestade ou ainda nos modelos eulerianos em que a grade se ajusta durante a simulação às variações do gradiente dos campos. Também em geral, nos modelos lagrangianos utiliza-se um sistema de coordenadas para cada partícula em dispersão, que lhes acompanham em suas trajetórias. A diferença que é essencial advém da natureza contínua da abordagem euleriana e da natureza discreta da abordagem lagrangiana. A concentração na abordagem euleriana é um escalar contínuo no espaço, portanto, uma variável extensiva e macroscópica; enquanto que nos modelos lagrangianos, a concentração pode obtida por inferência estatística da densidade de partículas em dado volume e intervalo de tempo, estabelecida ou por contagem direta ou ponderada por um Kernel, sobre um grande número de partículas, mas que permanece finito.

Os modelos eulerianos de dispersão têm como objetivo principal a solução da equação de difusão-advecção, uma equação diferencial, cujo fechamento, em geral, é obtido através da parametrização dos fluxos turbulentos na equação da conservação de massa. Sob certas condições particulares, obtêm-se expressões para o campo de concentração que sejam funções da emissão de poluentes, de variáveis meteorológicas e de parâmetros de dispersão da pluma.

A solução da equação unidimensional transiente com o fechamento da turbulência tradicional, ou seja, o fluxo é proporcional ao gradiente da concentração, é bastante utilizada para o estudo da difusão vertical de poluentes. Neste trabalho, diferentemente do modo tradicional, considera-se uma equação genérica para difusão turbulenta (a soma do fluxo mais a sua derivada são proporcionais ao gradiente da concentração) sugerida por van Dop e Verver (2001). Desta forma, obtém-se a conhecida equação do telégrafo que é muito utilizada em outros ramos da ciência. Portanto, o objetivo do presente trabalho é a obtenção de uma solução analítica para esta equação, obtendo-se um modelo que analisará o processo de dispersão vertical de poluente na Camada Limite Convectiva (CLC) e na Camada Limite Estável (CLE) investigando-se o efeito do termo de contra-gradiente presente no mesmo. A solução da equação, que representa uma fonte área, será obtida utilizando-se a técnica da transformada de Laplace considerando-se a Camada Limite Atmosférica (CLA) como um sistema multicamadas (Moura, 1995; Vilhena et al., 1998; Moreira et al., 1999). Os parâmetros que encerram a turbulência serão derivados da teoria de difusão estatística lagrangiana de Taylor combinada com a teoria de similaridade (Degrazia e Moraes, 1992; Degrazia et al., 1998) válidos para grandes tempos de difusão.

## 2. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO

Na abordagem euleriana a dispersão é representada por uma equação diferencial que expressa a conservação da massa do poluente:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'c'}}{\partial z} \quad (1)$$

onde  $\bar{c}$  é a concentração média de poluentes e  $\overline{w'c'}$  é o fluxo turbulento de poluentes na vertical.

Um modo de solucionar o problema de fechamento da equação (1) está baseado na hipótese de transporte por gradiente que, em analogia com a difusão molecular, assume que a turbulência é proporcional à magnitude do gradiente de concentração média (Pasquill e Smith, 1983):

$$\overline{w'c'} = -K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad (2)$$

onde  $K_z$  é o coeficiente de difusão vertical (específico para cada tipo de CLA considerada).

A proposta deste trabalho é considerar uma equação genérica para difusão turbulenta, isto é, considerar termos adicionais na equação (2), conforme sugerido por van Dop e Verver (2001):

$$\left[ 1 + \left( \frac{S_k T_{L_w} \sigma_w}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right] \overline{w'c'} = -K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad (3)$$

onde  $S_k$  é a assimetria (skewness),  $T_{L_w}$  é a escala de tempo Lagrangeana vertical,  $\sigma_w^2$  é a variância da velocidade turbulenta vertical e  $\tau$  é o tempo de relaxação. Substituindo-se a equação (3) na equação (1) obtém-se:

$$\tau \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \left( \frac{S_k T_{L_w} \sigma_w}{2} \right) \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z \partial t} = K_z \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \quad (4)$$

Para resolver a equação (4) faz-se necessário determinar não apenas o coeficiente de difusão, como no modelo tradicional, mas a escala de tempo lagrangiana vertical (ou descorrelação), a variância da velocidade turbulenta vertical, a assimetria e o tempo de relaxação. A equação (4) está relacionada à “equação do telégrafo” (Monin e Yaglom, 1971), mediante a substituição de variável:

$$z' = z$$

$$t' = t + \frac{\beta}{2K_z} z$$

sendo que  $\beta = \frac{S_k T_{L_w} \sigma_w}{2}$ . Logo:

$$\left( \tau + \frac{\beta^2}{4K_z} \right) \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial t'^2} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial t'} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z \partial t'} = K_z \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z'^2} \quad (5)$$

sendo que esta equação considera a difusão com velocidades finitas, o que representa uma descrição fisicamente correta do transporte turbulento. Observa-se que para  $\tau \rightarrow 0$  e  $S_k \rightarrow 0$ , a equação (4) coincide com a equação de difusão que considera o fechamento da turbulência tradicional, o que conduz a uma velocidade de propagação infinita.

Tendo em vista a dependência de  $K_z$  com a altura  $z$ , faz-se necessário discretizar a altura da CLA em  $N$  subcamadas (Vilhena et al., 1998 e Moreira et al., 1999), de modo que em cada camada  $K_z$  assume um valor médio constante. Com a discretização,  $K_z$  passa a ser denominado  $K_n$ , uma vez que ele depende da região  $n$  considerada. Assim, a solução da equação (4) está relacionada à solução de  $N$  problemas da forma:

$$\tau \frac{\partial^2 \bar{c}_n}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial t} + \left( \frac{S_k T_{L_w} \sigma_w}{2} \right) \frac{\partial^2 \bar{c}_n}{\partial z \partial t} = K_n \frac{\partial^2 \bar{c}_n}{\partial z^2} \quad (6)$$

com  $z_{n-1} < z < z_n$ ,  $t > 0$  e  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Para que o problema de difusão vertical seja resolvido, toma-se como fronteiras a superfície da Terra e o topo da CLA,

supondo-se que não há passagem de qualquer poluente. Desta forma, a equação (6) está sujeita às seguintes condições de contorno:

$$K_n \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad \text{e } z = h_{CLA} \quad (7)$$

Supõe-se também, contato perfeito entre as subcamadas nas quais a CLA foi dividida. Sendo assim, consideram-se as condições de continuidade para a concentração e fluxo de concentração na interface, respectivamente:

$$\bar{c}_n = \bar{c}_{n+1} \quad n = 1, 2, \dots, (N-1) \quad (8)$$

$$K_n \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial z} = K_{n+1} \frac{\partial \bar{c}_{n+1}}{\partial z} \quad n = 1, 2, \dots, (N-1) \quad (9)$$

e a seguinte condição inicial:

$$\bar{c}_n(z, 0) = Q\delta(z - H_s) \quad \text{em } t = 0 \quad (10)$$

representando a emissão de uma fonte área; onde  $Q$  é a taxa de emissão da fonte área localizada na altura  $H_s$  e  $\delta$  é a função generalizada Delta de Dirac.

Aplicando-se a transformada de Laplace na variável  $t$  ( $L_p\{\bar{c}_n(z,t); t \rightarrow s\}$ ; sendo que  $L_p$  denota a transformada de Laplace) na equação (6), obtém-se a equação transformada:

$$\frac{d^2 \bar{c}_n(z,s)}{dz^2} - \frac{\beta_n s}{K_n} \frac{d \bar{c}_n(z,s)}{dz} - \frac{(\tau s^2 + 1)}{K_n} \bar{c}_n(z,s) = -\frac{(\tau s + 1)}{K_n} c_n(z,0) \quad (11)$$

A solução da equação diferencial linear não-homogênea com coeficientes constantes representada pela equação (11) é:

$$\bar{c}_n(z,s) = A_n e^{(F_n+R_n)z} + B_n e^{(F_n-R_n)z} \quad (12)$$

para a região que não contém a fonte e,

$$\bar{c}_n(z,s) = A_n e^{(F_n+R_n)z} + B_n e^{(F_n-R_n)z} + \frac{(\tau s + 1)}{R_a} Q \left( e^{(F_n-R_n)(z-H_s)} - e^{(F_n+R_n)(z-H_s)} \right) \quad (13)$$

para a região que contém a fonte emissora de poluentes; onde  $A_n$  e  $B_n$  são as constantes de integração obtidas a partir da aplicação das condições de contorno (7) e as  $(2N-2)$  condições de interfaces (8) e (9). Onde,

$$R_n = \frac{\sqrt{\beta_n^2 s^2 + 4K_n(\tau s^2 + s)}}{2K_n} \quad ; \quad R_a = 2R_n K_n = \sqrt{\beta_n^2 s^2 + 4K_n(\tau s^2 + s)}$$

$$F_n = \frac{\beta_n s}{2K_n} \quad ; \quad \beta_n = \frac{S_k T_{L_w} \sigma_w}{2} \quad (14)$$

Mediante uso do método de inversão numérica de quadratura de Gauss obtém-se a equação final para a concentração de poluentes:

$$\bar{c}_n(z, t) = \sum_{j=1}^8 W_j \frac{P_j}{t} \left[ A_n e^{(F_n^* + R_n^*)z} + B_n e^{(F_n^* - R_n^*)z} \right] \quad (15)$$

e

$$\bar{c}_n(z, t) = \sum_{j=1}^8 W_j \frac{P_j}{t} \left[ A_n e^{(F_n^* + R_n^*)z} + B_n e^{(F_n^* - R_n^*)z} + \frac{(\tau P_j + t)Q}{R_a^*} \left( e^{(F_n^* - R_n^*)(z - H_s)} - e^{(F_n^* + R_n^*)(z - H_s)} \right) \right] \quad (16)$$

onde  $W_j$  e  $P_j$  são, respectivamente, os pesos e as raízes da quadratura de Gauss. Os termos adicionais são:

$$R_n^* = \frac{\sqrt{\beta_n^2 P_j^2 + 4K_n P_j (\tau P_j + t)}}{2K_n t} \quad ;$$

$$R_a^* = \sqrt{\beta_n^2 P_j^2 + 4K_n P_j (\tau P_j + t)} \quad (17)$$

$$F_n^* = \frac{\beta_n P_j}{2K_n t}$$

### 3. PARAMETRIZAÇÃO DA TURBULÊNCIA

Em problemas de dispersão atmosférica, a escolha de uma parametrização turbulenta representa uma decisão fundamental para a modelagem da dispersão de poluentes. A partir de um ponto de vista físico, uma parametrização significa uma representação idealizada do fenômeno de transporte turbulento. Neste sentido, quando parametriza-se os processos de troca turbulenta introduz-se nas equações que descrevem as leis de conservação (modelos físicos) relações matemáticas aproximadas, que em princípio, são usadas para substituir os termos desconhecidos presentes no fenômeno natural. A confiabilidade de cada modelo depende fortemente da maneira como os parâmetros turbulentos são calculados e relacionados ao entendimento da CLA.

Seguindo Degrazia e Moraes (1992) obtém-se um coeficiente de difusão para grandes tempos sob a forma:

$$K_\alpha = \frac{\sigma_i^2 \beta_i F_i^E(0)}{4} \quad (18)$$

onde:  $\sigma_i^2$  é a variância da velocidade turbulenta;  $\beta_i$  é o parâmetro definido como a razão das escalas de tempo lagrangiana e euleriana e  $F_i^E(0)$ , é o espectro euleriano unidimensional de energia turbulenta normalizado pela variância de velocidade na origem, isto é:

$$F_i^E(0) = \frac{S_i^E(0)}{\sigma_i^2} \quad (19)$$

onde a frequência  $n \approx 0$  indica que o comportamento do coeficiente de dispersão para grandes tempos de difusão será dependente, basicamente, da energia cinética contida nos turbilhões

de baixa frequência ( $n \approx 0$ ), isto é, o coeficiente de difusão dependerá do comportamento do espectro próximo a origem.

### 3.1 Coeficiente de difusão para a CLC

A equação para o espectro da velocidade euleriana sob condições instáveis, pode ser expressa como função das escalas convectivas (Degrazia et al., 1998):

$$\frac{n S_i^E(n)}{w_*^2} = \frac{1,06 c_i f \psi^{2/3} \left( \frac{z}{z_i} \right)^{2/3}}{\left( f_m^* \right)_i^{5/3} \left[ 1 + 1,5 \left( \frac{f}{\left( f_m^* \right)_i} \right) \right]^{5/3}} \quad (20)$$

com:

- $c_i = \alpha_i \alpha_u (2\pi k)^{-2/3}$ ;  $\alpha_i$  é derivado experimentalmente a partir do espectro para cada componente de direção do vento; vale 1, 4/3 e 4/3 para  $u$ ,  $v$  e  $w$ ; respectivamente;  $\alpha_u = 0,5 \pm 0,05$  (Champagne et al., 1977; Sorbján, 1989) e  $k = 0,4$  é a constante de Von Kármán;
- $f = \frac{nz}{U(z)}$ , é a frequência reduzida, onde  $z$  é a altura acima do solo e  $U(z) = U$  é a velocidade média do vento horizontal;
- $\psi = 1,5 - 1,2 \left( \frac{z}{z_i} \right)^{1/3}$  é a taxa de dissipação adimensional;
- $Z_i$  é a altura da CLC;
- $\omega^*$  é a escala de velocidade convectiva (Olesen, 1984);
- $\left( f_m^* \right)_i = \frac{z}{(\lambda_m)_i}$  é a frequência reduzida do pico espectral convectivo; onde  $(\lambda_m)_i$  é o comprimento de onda associado ao máximo do espectro vertical (Carvalho et al., 2002):

$$(\lambda_m)_w = \begin{cases} \frac{z}{0,55 - 0,38 \left| \frac{z}{L} \right|} & 0 \leq z \leq |L| \\ 5,9z & |L| \leq z \leq 0,1z_i \\ 1,8z_i \left[ 1 - \exp\left(\frac{-4z}{z_i}\right) - 0,0003 \exp\left(\frac{8z}{z_i}\right) \right] & 0,1z_i < z \end{cases} \quad (21)$$

- $L$  é o comprimento de Monin-Obukov.

Substituindo-se  $f$  em (20) e integrando-se analiticamente a equação para o espectro sobre todo o domínio de frequência,

$$\int_0^\infty S_i^E(n) dn = \frac{1,06 c_i z \psi^{2/3} \left( \frac{z}{z_i} \right)^{2/3}}{U \left( f_m^* \right)_i^{5/3}} w_*^2 \int_0^\infty \left[ 1 + 1,5 \left( \frac{z}{U \left( f_m^* \right)_i} n \right) \right]^{5/3} dn \quad (22)$$

obtém-se uma expressão para a variância da velocidade turbulenta vertical  $\sigma_w^2$ , dada por:

$$\sigma_w^2 = \frac{1,06c_w \Psi^{2/3} \left(\frac{z}{z_i}\right)^{2/3}}{(f_m^*)^2/3} w_*^2 \quad (23)$$

O espectro de energia euleriano normalizado pela variância da velocidade turbulenta pode ser expresso por:

$$F_i^E(0) = \frac{S_i^E(0)}{\sigma_i^2} = \frac{z}{U(f_m^*)_i} \quad (24)$$

De acordo com Degrazia et al. (1998),  $\beta_i$  é dado por:

$$\beta_i = 0,55 \frac{U}{\sigma_i} \quad (25)$$

Assim, o coeficiente de difusão vertical  $K_z$  na CLC é dado pela equação:

$$K_z = \frac{0,55}{4} \frac{\sigma_w z}{(f_m^*)_w} \quad (26)$$

e a escala de tempo lagrangiana vertical na CLC é dada por:

$$T_{L_w} = \frac{0,55}{4} \frac{1}{\sigma_w} \frac{z}{(f_m^*)_w} \quad (27)$$

Desta forma, foram obtidos os parâmetros  $\sigma_w^2$ ,  $K_z$  e  $T_{L_w}$  para serem substituídos na solução da equação do telégrafo.

### 3.2 Coeficiente de difusão para a CLE

De acordo com a teoria local (Nieuwstadt, 1984 e Sorbjan, 1989) a equação para o espectro da velocidade euleriana sob condições estáveis pode ser expressa como uma função de escalas locais (Degrazia e Moraes, 1992):

$$\frac{nS_i^E(n)}{u_*^2} = \frac{1,5c_i}{(f_m^*)_i^{5/3}} \frac{f}{q} \left[ 1 + \frac{1,5}{(f_m^*)_i^{5/3}} \left(\frac{f}{q}\right)^{5/3} \right]^{-1} \left(\frac{\phi_E}{q}\right)^{2/3} \quad (28) \text{ com:}$$

- $u_*$  é a velocidade de fricção;
- $(f_m^*)_i$  é a frequência do pico espectral da estratificação neutra;
- $q = \frac{(f_m^*)_i}{(f_m^*)_i} = 1 + 3,7 \frac{z}{\Lambda}$  é uma função de estabilidade;  $(f_m^*)_i$  é a frequência adimensional do pico espectral;
- $\Lambda = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{1,5\vartheta_1 - \vartheta_2} L$  é o comprimento de Monin-Obukov local (Nieuwstadt, 1984), onde  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  são constantes que dependem do estado de evolução da CLE.
- $h$  é a altura da CLE;
- $\phi_E = 1,25q$  é a função dissipação adimensional.

Substituindo-se  $f$  e  $\phi_E$  na equação (28) e integrando-se analiticamente a equação para o espectro sobre todo o domínio de frequência, obtém-se:

$$\int_0^\infty S_i^E(n) dn = \frac{1,74c_i}{(f_m^*)_i^{5/3}} \frac{U_*^2 z}{Uq} \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{1,5}{(f_m^*)_i^{5/3}} \left(\frac{z}{Uq}\right)^{5/3} n^{5/3} \right]^{-1} dn \quad (29)$$

onde  $U_*^2 = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\vartheta_2} u_*^2$  é a velocidade de fricção local. Logo, a expressão para a variância da velocidade turbulenta vertical  $\sigma_w^2$  é dada por:

$$\sigma_w^2 = \frac{2,7c_w U_*^2}{(f_m^*)_w^{2/3}} \quad (30)$$

O valor do espectro de energia euleriano normalizado pela variância da velocidade turbulenta pode ser expresso por:

$$F_i^E(0) = \frac{S_i^E(0)}{\sigma_i^2} = \frac{0,64}{(f_m^*)_i} \frac{z}{Uq} \quad (31)$$

Assim, o coeficiente de difusão vertical  $K_z$  é dado pela equação:

$$K_z = \frac{0,64}{4} \frac{\sigma_w^2 \beta_w}{(f_m^*)_w} \frac{z}{Uq} \quad (32)$$

e a escala de tempo lagrangiana vertical na CLE é dada por:

$$T_{L_w} = \frac{0,64}{4} \frac{\beta_w}{(f_m^*)_w} \frac{z}{Uq} \quad (33)$$

Portanto, foram obtidos os parâmetros  $\sigma_w^2$ ,  $K_z$  e  $T_{L_w}$  para o caso estável. Desta forma, os parâmetros para o caso convectivo e estável devem ser substituídos na solução da equação do telégrafo e realizadas simulações com dados experimentais obtidos na literatura.

## 4. DADOS EXPERIMENTAIS E RESULTADOS

### 4.1 Caso convectivo

Para simular os valores de concentração a partir da solução obtida para o modelo proposto, emprega-se o experimento de dispersão realizado na cidade de Copenhagen. O experimento oito foi escolhido por ser um experimento bem convectivo ( $-z_i/L > 10$ ). Este experimento é descrito nos artigos de Gryning e Lyck (1984) e Gryning (1987).

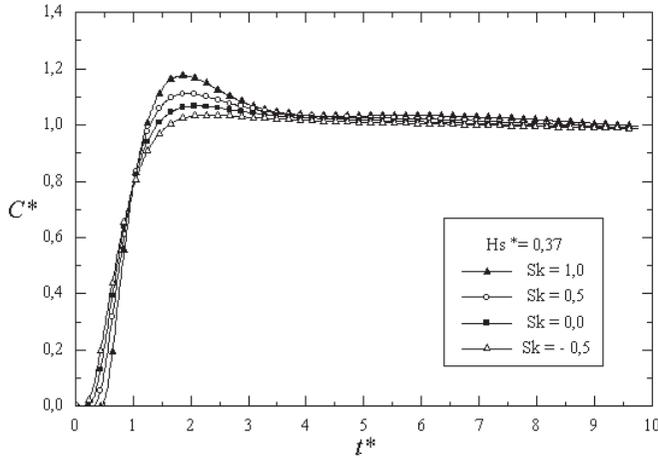
**Tabela 1** - Parâmetros meteorológicos para o experimento oito de Copenhagen.

-L(m)	$z_i$ (m)	$u_*$ (ms <sup>-1</sup> )	$w_*$ (ms <sup>-1</sup> )	U (ms <sup>-1</sup> )
56	810	0,69	2,28	9,4

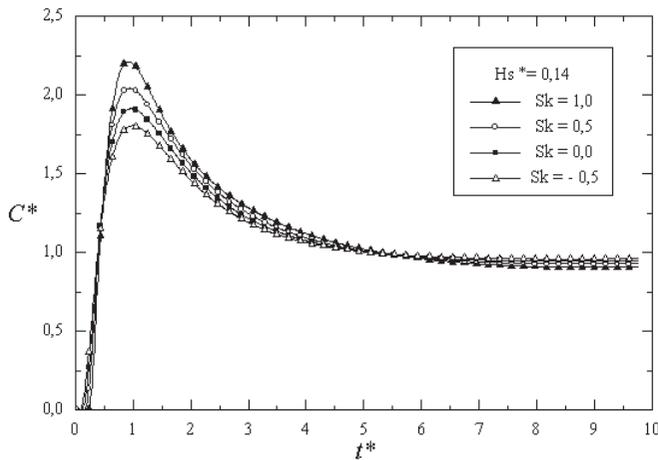
Todas as simulações foram feitas para o período de tempo de  $t = 1h$ . O tempo de relaxação considerado é  $\tau = 0,5s$ , conforme sugerido por van Dop e Verver (2001). A taxa de emissão da fonte área utilizada foi  $Q = 100 \text{ g/m}^2$ .

Nas Figuras 1, 2 e 3 apresentam-se as simulações da concentração de poluentes em função do tempo na altura  $z = 1\text{m}$  e, nas Figuras 4, 5 e 6, na altura  $z = 750\text{m}$  para diferentes assimetrias.

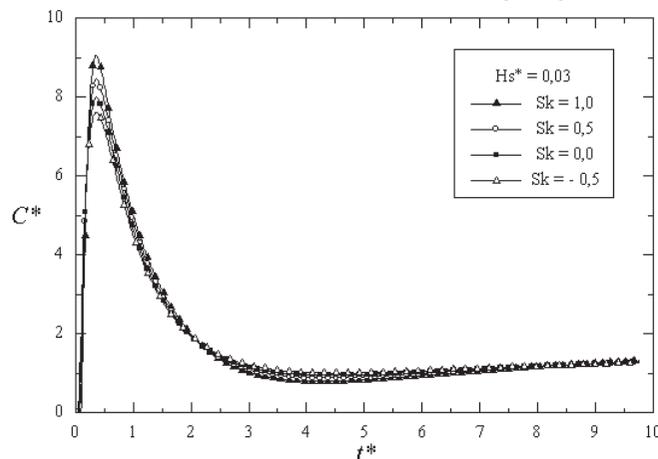
**Figura 1** – Concentração ( $C^* = C_z/Q$ ) em função do tempo ( $t^* = tw_w/zi$ ) para diferentes assimetrias em  $z^* = z/zi = 0,001$  e  $H_s^* = H_s/z_1 = 0,37$ .



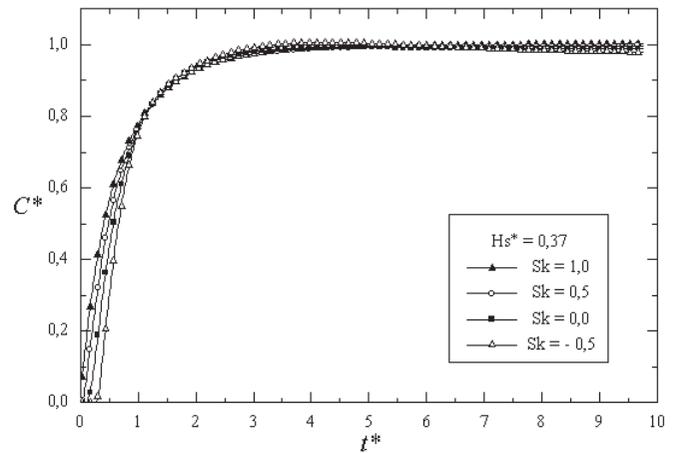
**Figura 2** – Concentração ( $C^* = C_z/Q$ ) em função do tempo ( $t^* = tw_w/zi$ ) para diferentes assimetrias em  $z^* = z/zi = 0,001$  e  $H_s^* = H_s/z_1 = 0,14$ .



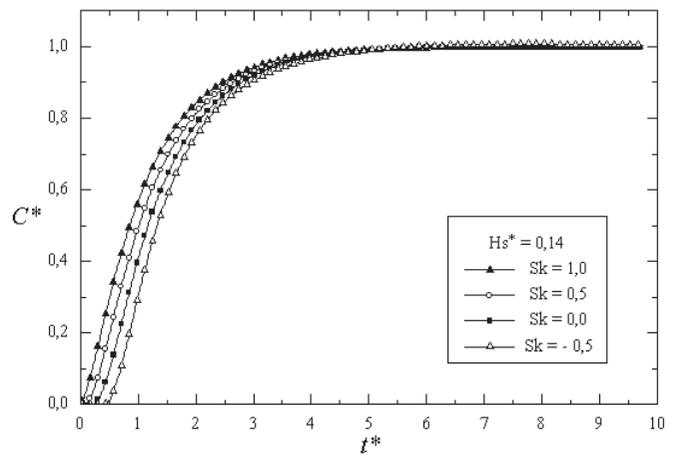
**Figura 3** – Concentração ( $C^* = C_z/Q$ ) em função do tempo ( $t^* = tw_w/zi$ ) para diferentes assimetrias em  $z^* = z/zi = 0,001$  e  $H_s^* = H_s/z_1 = 0,03$ .



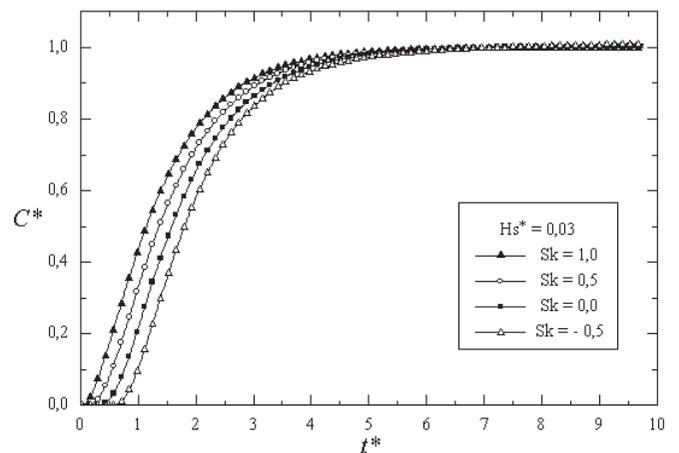
**Figura 4** – Concentração ( $C^* = C_z/Q$ ) em função do tempo ( $t^* = tw_w/zi$ ) para diferentes assimetrias em  $z^* = z/zi = 0,925$  e  $H_s^* = H_s/z_1 = 0,37$ .



**Figura 5** – Concentração ( $C^* = C_z/Q$ ) em função do tempo ( $t^* = tw_w/zi$ ) para diferentes assimetrias em  $z^* = z/zi = 0,925$  e  $H_s^* = H_s/z_1 = 0,14$ .



**Figura 6** – Concentração ( $C^* = C_z/Q$ ) em função do tempo ( $t^* = tw_w/zi$ ) para diferentes assimetrias em  $z^* = z/zi = 0,925$  e  $H_s^* = H_s/z_1 = 0,03$ .



Observa-se, no caso convectivo, que a utilização da equação genérica para a difusão turbulenta no fechamento da turbulência influenciou os valores de concentração tanto para

alturas próximas do solo quanto às próximas do topo da CLC. Verifica-se no primeiro caso (alturas próximas do solo) que para tempos pequenos a influência tende ser mais significativa à medida que a altura da fonte é aumentada. Os intervalos onde ocorrem os valores máximos de concentração tendem diminuir quando a altura da fonte é menor. Para a fonte mais baixa obteve-se a concentração mais alta e, em contra-partida, observou-se a menor influência da assimetria. Para as três alturas de fonte área analisada a concentração tendeu a homogeneizar-se com o passar do tempo. Para alturas próximas do topo da CLC a influência da assimetria não ocorreu nos valores máximos de concentração, como no caso anterior. A concentração tendeu a homogeneizar-se na concentração máxima. A influência da assimetria aumenta à medida que a altura da fonte diminui, porém, quanto mais alta é a fonte mais rapidamente ocorre à homogeneização da concentração.

**4.2 Caso estável**

Para simular valores de concentração de poluentes na CLE utilizam-se as medidas realizadas em Minnesota, como mostra a Tabela 2.

**Tabela 2** – Valores utilizados para as constantes no cálculo da componente vertical do coeficiente de difusão válido para a CLE.

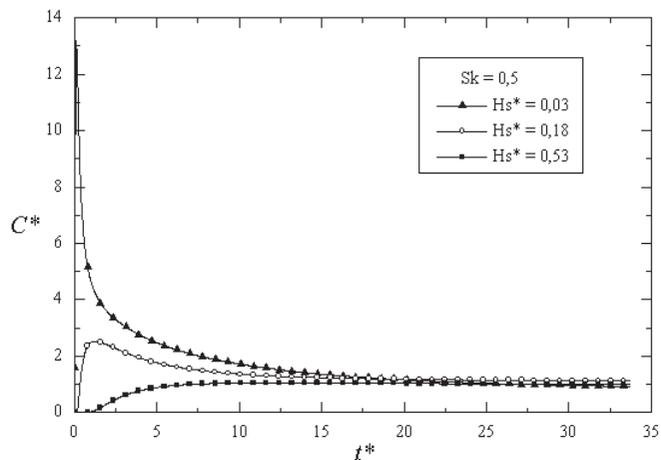
Constante	Valor	Referência
$u_*$	0,31 m/s	Experimento de Minnesota
$ L $	116 m	Experimento de Minnesota
$\vartheta_1$	2	Experimento de Minnesota
$\vartheta_2$	3	Experimento de Minnesota
$(f_m)_w$	0,33	Sorbjan (1986)
$c_w$	0,4	Sorbjan (1986)
$h$	400 m	Experimento de Minnesota
$Q$	400 g/m <sup>2</sup>	Moura (1995)

Todas as simulações foram feitas para o período de tempo de  $t = 12h$ . O tempo de relaxação considerado é  $\tau = 0,5s$ , conforme sugerido por van Dop e Verver (2001).

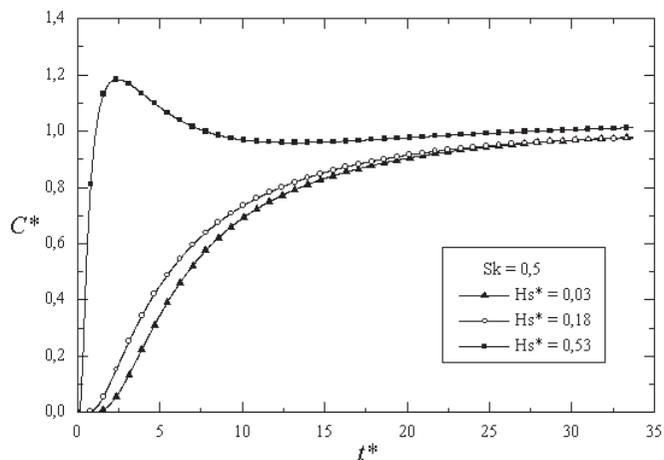
Na Figura 7 apresentam-se as simulações da concentração de poluentes em função do tempo em  $z = 1m$  e, na Figura 8, em  $z = 300m$  para diferentes alturas de fonte área.

No caso da dispersão de poluentes na CLE observa-se uma insignificante influência da assimetria no cálculo da concentração. Isto ocorre tanto para alturas próximas do solo quanto às próximas do topo da CLE (desta forma mostra-se somente  $S_k = 0,5$ ). Verifica-se que para regiões próximas ao solo,

**Figura 7** – Concentração ( $C^* = Ch/Q$ ) em função do tempo ( $t^* = tu/h$ ) para diferentes alturas de fonte área em  $z^* = z/h = 0,0025$ .



**Figura 8** – Concentração ( $C^* = Ch/Q$ ) em função do tempo ( $t^* = tu/h$ ) para diferentes alturas de fonte área em  $z^* = z/h = 0,75$ .



à medida que altura da fonte aumenta, a concentração diminui, mas para regiões próximas ao topo da CLE, à medida que a altura da fonte aumenta a concentração também se eleva.

**5. CONCLUSÕES**

Neste trabalho obteve-se uma solução semi-analítica para a equação do telégrafo na determinação da concentração de poluentes atmosféricos. Na solução da equação foi utilizada a técnica da transformada de Laplace considerando-se a CLA como um sistema multicamadas, o que permite simular turbulência não-homogênea representada por perfis contínuos dos parâmetros turbulentos. A equação analisada considera que a difusão turbulenta ocorre com velocidades finitas, o que representa o transporte turbulento fisicamente correto. Considerando-se o caráter não-local da turbulência adicionaram-se à equação que representa a difusão de uma fonte área os seguintes termos: tempo de relaxação, assimetria, escala de tempo lagrangiana e

a velocidade turbulenta vertical. Isso foi feito pela utilização da forma contra-gradiente do fluxo proposta por van Dop e Verver (2001). Os parâmetros que encerram a turbulência foram derivados da teoria de difusão estatística de Taylor combinada com a teoria de similaridade.

Os resultados das simulações mostraram uma pequena influência do termo de contra-gradiente na determinação da concentração de poluentes, observada de forma mais expressiva na Camada Limite Convectiva. A influência da assimetria na CLE é menos importante devido ao fato da turbulência nesta região ser gerada somente pelo cisalhamento do vento. Em aplicações práticas, o termo de contra-gradiente representado pelos termos adicionais no fechamento da turbulência, pode ser negligenciado.

Para trabalhos futuros pretende-se adicionar o termo de advecção longitudinal aplicando-se esta mesma metodologia. Desta forma, serão realizadas simulações do transporte de poluentes atmosféricos considerando-se o termo de contra-gradiente no fechamento da turbulência de forma que os resultados poderão ser confrontados com dados experimentais de concentração ao nível do solo.

## 6. AGRADECIMENTOS

FAPERGS e CNPq pelo suporte financeiro deste trabalho.

## 7. REFERÊNCIAS

- CARVALHO, J.C.; DEGRAZIA, G.A.; ANFONSSI, D.; CAMPOS, C.R.J.; ROBERTI, D.R.; KERR, A.S. Lagrangian stochastic dispersion modeling for the simulation of the release of contaminants from tall and low sources. *Meteorologische Zeitschrift*, v. 11, n. 2, p. 89–97, 2002.
- CHAMPAGNE, F.H.; FRIEHE, C.A.; LARVE, C.J.; WYNGAARD, J.C. Flux measurements, flux estimation techniques, and fine scale turbulence measurements in the instable surface layer over land. *J. Atmos. Society*, v. 34, p. 515–520, 1977.
- DEGRAZIA, G.A.; ANFONSSI, D.; CARVALHO, J.C.; MANGIA, C.; TIRABASSI, T.; CAMPOS VELHO, H.F. Turbulence parameterization for PBL dispersion models in all stability conditions. *Atmospheric Environment*, v. 34, p. 3575–3583, 2000.
- DEGRAZIA, G.A.; MORAES, O.L.L. Uma revisão da teoria estatística da difusão turbulenta. *Ciência e Natura*, v. 14, p. 64–70, 1992.
- DEGRAZIA, G.A.; MANGIA, C.; RIZZA, U. A comparison between different methods to estimate the lateral dispersion parameter under convective conditions. *J. Appl. Meteor.*, v. 37, p. 227–231, 1998.
- DEGRAZIA, G.A.; MOREIRA, D.M.; VILHENA, M.T. Derivation for eddy diffusivity depending on source distance for vertically inhomogeneous turbulence in a convective boundary layer. *J. Appl. Meteor.*, v. 40, p. 1233–1240, 2001.
- GRYNING, S.E.; LICK, E. Atmospheric dispersion from elevated source in an urban area: comparison between tracer experiments and model calculations. *J. Climate Appl. Meteor.*, v. 23, p. 651–654, 1984.
- GRYNING, S.E. Applied dispersion modeling based on meteorological scaling parameters. *Atmospheric Environment*, v. 21, p. 79–89, 1987.
- MONIN, A.S.; YAGLOM, A.M. *Statistical Fluid Mechanics*. Cambridge, M.A.: MIT Press, 1971. 769 p.
- MOREIRA, D.M.; DEGRAZIA, G.A.; VILHENA, M.T. Dispersion from low sources in a convective boundary layer: an analytical model. *Il Nuovo Cimento*, v. 22C, p. 685–691, 1999.
- MOURA, A. B. D. *Solução analítica para a dispersão vertical turbulenta em uma Camada Limite Estável*. Porto Alegre, 1995. 79p. [Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul]
- NIEUWSTADT, F.T.M. The turbulence structure of the stable boundary layer. *J. Atmos. Soc.*, v.41, p. 2202–2216, 1984.
- OLESEN, H.R.; LARSEN, S.E.; HØJSTRUP. Modeling velocity spectra in the lower part of the planetary boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 29, p. 285–312, 1984.
- SORBJAN, Z. Local similarity of spectral and co spectral characteristics in the stable-continuous boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 35, p. 257–275, 1986.
- SORBJAN, Z. *Structure of the atmospheric boundary layer*. New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- STROUD, A.H.; SECREST, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, Inc.

SUTTON, O.G. **Micrometeorology**. New York: MacGraw-Hill.

VAN DOP, H.; VERVER, G. Countergradient transport revisited. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 58, p. 2240-2247, 2001.

VILHENA, M.T.; RIZZA, U.; DEGRAZIA, G.A.; MANGIA, C.; MOREIRA, D.M.; TIRABASSI, T. An analytical air pollution model: development and evaluation. **Contr. Atmos. Phys.**, v. 71, n. 3, p. 315-320, 1998.