Série Ensino, Aprendizagem e Tecnologias

Funções Reais de uma Variável Real: um Curso EAD para Licenciatura

Rodrigo Sychocki da Silva

UFRGS EDITORA

SEAD UFRGS
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Série Ensino, Aprendizagem e Tecnologias

Funções Reais de uma Variável Real: um Curso EAD para Licenciatura

Rodrigo Sychocki da Silva

UFRGS EDITORA

SEAD UFRGS
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

1.ª edição: 2019

Coordenação da Série:
Laura Wunsch, Cínthia Kulpa, Tanara Forte Furtado e Marcello Ferreira

Coordenação da Editoração: Cínthia Kulpa e Ely Petry
Revisão: Equipe de Revisão da SEAD
Capa: Bruno Assis e Tábata Costa
Editoração eletrônica: Bruno Assis e Tábata Costa

A grafia desta obra foi atualizada conforme o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa, de 1990, que entrou em vigor no Brasil em 1º de janeiro de 2009.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

S586f Silva, Rodrigo Sychocki da
Funções reais de uma variável real: um curso EAD para licenciatura [recurso eletrônico] / Rodrigo Sychocki da Silva ; coordenado pela SEAD/UFRGS. — dados eletrônicos . — Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2019.
323 p. : pdf

(Série Ensino, Aprendizagem e Tecnologias)

Inclui respostas e dicas para os problemas, apêndice e referências.
1. Matemática. 2. Ensino e aprendizagem. 3. Funções reais. I. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Secretaria de Educação a Distância. II. Título. III. Série.
CDU 51:37

CIP-Brasil. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
(Jaqueline Trombin– Bibliotecária responsável CRB10/979).

ISBN 978-85-386-0481-5

Sumário

Apresentação

A partir da necessidade de ler e entender o mundo, as civilizações inventaram a matemática. Com os quinze termos que estão na primeira frase desta apresentação, já é possível escrever quantidade significativa de material e oportunizar um profícuo debate de ideias, porém esse não é o objetivo principal do presente texto.

Ao contrário das expectativas, por vezes presentes no senso comum, a ciência matemática está em constante crescimento e aperfeiçoamento. O desenvolvimento e a evolução das ciências permitem que constantemente ajustemos as lentes que usamos para observar o mundo. Com isso, a matemática inserida no escopo das “Ciências Exatas e da Terra”, tal como preconiza os órgãos governamentais no Brasil, tem o seu estudo iniciado desde os primeiros anos da vida escolar dos sujeitos (até antes mesmo da vida escolar!). Com o passar do tempo, a matemática deixa de ser predominantemente lúdica e se torna abstrata. É recorrente observar que ao longo da vida escolar o uso de outros tipos de materiais entra em cena, entre esses os materiais digitais.

Para o público geral, a matemática perpassa um comportamento "dual", ou seja: é uma ciência "teórica" ou "prática"; uma disciplina "amada" ou "odiada" pelos estudantes/professores nas instituições de ensino; uma área do conhecimento humano "linda como a pétala de uma flor" ou "espinhenta como um cacto". Novamente reafirmo que o presente texto não tem a intenção de caracterizar a matemática com atributos X ou Y, ou quiçá provocar polêmicas. Far-se-á nestas notas um olhar e estudo dos objetos da matemática chamados de "funções". Em particular, o estudo concentra-se nas "Funções Reais de uma Variável Real". O significado da passagem entre as últimas aspas da frase anterior será oportunamente explicado em detalhes.

A discussão sobre tais objetos (Funções Reais de uma Variável Real) será instrumental, ou seja, as notas aqui produzidas têm o objetivo de servir como material teórico para a construção de conceitos matemáticos. A disciplina "Fundamentos de Matemática" (MAT01115) tem caráter teórico e ocorre na modalidade a distância no curso de Licenciatura em Ciências da Natureza da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Se você chegou até aqui na leitura deste texto de apresentação, pode ter em mente os seguintes questionamentos (outras perguntas diferentes dessas podem existir e não foram elencadas aqui): (1) Quais são os requisitos para cursar a disciplina ou ler/estudar as notas aqui expostas? (2) O que é necessário para estudar os conteúdos apresentados neste material? (3) A disciplina "Fundamentos de Matemática" parece ser isolada das demais do início do curso de graduação. Essa é a ideia?

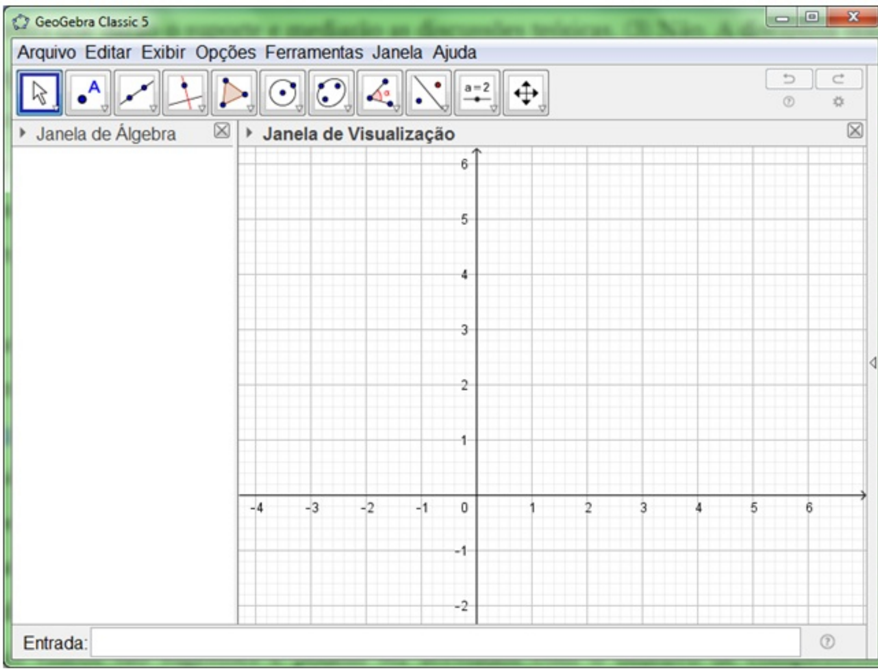
Quanto às respostas: (1) O requisito para estar vinculado a curso superior no Brasil é ter concluído o ensino básico. Para a presente disciplina, não há requisitos ou exigências específicas. O que se pretende é alcançar tudo e todos com as notas aqui expostas. (2) Entendo que sejam necessárias vontade e persistência. As dificuldades que surgem no decorrer do percurso podem e devem ser contornadas. Para tal, o curso conta com o apoio de tutores que darão o suporte e mediarão as discussões teóricas. (3) Não. A disciplina dialoga implicitamente, e por vezes explicitamente, com as demais disciplinas do curso de Licenciatura em Ciências da Natureza. Conforme mencionado, a matemática é a ciência que oportuniza ler e entender o mundo, portanto as demais disciplinas (ou ideias apresentadas no curso de Licenciatura) farão uso dos conceitos e conteúdos aqui estudados.

Ao longo do texto[1], permeando a apresentação e discussão dos conceitos matemáticos, far-se-á o uso de *software*. O *software* usado será o GeoGebra (versão 5), que tem licença gratuita e é de acesso livre e irrestrito. O *software* pode ser obtido em https://www.geogebra.org/do-

1 A inspiração para a construção do presente material ocorre a partir da releitura dos materiais produzidos pelos estudantes da Licenciatura em Matemática para a disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática III (MAT01072) em 2016/2. A autorização para o uso explícito ou implícito dos materiais foi obtida em 2017.

wnload e “roda” em *smartphones*, *tablets*, *notebooks*, *netbooks* e *desktops*. Há no *site* do GeoGebra uma coletânea com mais de um milhão de materiais[2] postados por usuários *web* do planeta inteiro.

Figura 1: *Layout* do *Software* GeoGebra



Fonte: arquivo pessoal.

Por vezes haverá a indicação de *links* do material que pode ser acessado e usado diretamente na plataforma *web*. Para encerrar, serão indicados, ao longo da apresentação dos conteúdos, vídeos da plata-

2 Informação em abril de 2018.

forma do YouTube™. Tais vídeos são sugestões e podem ser acessados com o objetivo de complementar e enriquecer o estudo dos objetos aqui apresentados.

Como se trata de um curso de formação inicial de professores, em cada módulo será apresentada uma seção que versa sobre "reflexões sobre o *ensino* de...". Tal seção busca apresentar sugestões de leituras e trabalhos acadêmicos que abordam a temática do ensino dos assuntos apresentados neste material. A leitura e exploração destas seções são opcionais, não sendo necessário seu conhecimento para o andamento da disciplina Fundamentos de Matemática. Porém, em um momento futuro, fica o convite para que o leitor visite novamente tais seções para se apropriar das ideias e conhecer o material indicado.

Desejo a tod@s uma ótima exploração do material.

Rodrigo Sychocki da Silva

1

Módulo I

Conteúdos abordados: Conjuntos numéricos. Reta numérica. Intervalos numéricos. Sistema métrico decimal (comprimentos, áreas, volumes). Grandezas e relações entre grandezas. Situações-problema.

1.1 NÚMEROS E GRANDEZAS[3]

Lista de símbolos que serão usados ao longo da obra:

N : conjunto dos números naturais.

Z : conjunto dos números inteiros.

Q : conjunto dos números racionais.

$R-Q$: conjunto dos números não racionais (irracionais).

R : conjunto dos números reais.

Durante milhões de anos, o homem passou por um processo de evolução. De nômade foi aos poucos convergindo para a necessidade de se fixar. Seus gestos e a comunicação podem ser considerados consequências de tal evolução. Talvez relacionada ao aumento populacional dos seres humanos, emerge em diversas situações a necessidade de quantificar. Quantos animais? Quantas pessoas? Quantos alimentos? Assim, tal como as civilizações se desenvolveram, o mesmo ocorreu com a numeração.

Desse modo, foram surgindo formas "convencionadas", as quais serviram para a representação das quantidades. Egípcios, babilônicos e romanos foram povos que desenvolveram sua própria lógica de representação para as "quantidades". É interessante observar que os povos babilônicos desenvolveram o sistema sexagesimal de representação e

3 Inspirado no material produzido por Leandro Carlos Blum e Martinho Prudêncio de Andrade.

que esse é usado até hoje para "medir" o tempo (hora, minutos, segundos). Se você for consultar um livro didático e em seguida um livro de História da Matemática, constatará que a apresentação sobre números e conjuntos parece não estar bem relacionada... Trata-se de uma polêmica e exige discussão matemática para que avancemos nessa direção, no entanto se afasta do propósito do presente capítulo.

Vamos assumir e entender que *conjunto* é "uma coleção de objetos". A partir dessa noção, pode-se pensar que qualquer agrupamento de objetos consiste em um exemplo de conjunto. O agrupamento pode ser de objetos físicos de fácil percepção ou não... depende da imaginação. Por exemplo, se você olha para um agrupamento de ovelhas pode relacioná-lo com um número, de modo intrínseco e único. Tal relação cria a noção de *cardinalidade* ao conjunto de ovelhas observado. O mesmo pode ser feito com o número de grãos de areia numa praia ou com o grupo de jogadores de futebol que participarão da Copa do Mundo. A diferença é que a percepção sobre cada um dos cardinais dos exemplos anteriores exige considerável esforço mental.

No nosso caso, para evitar divagações e especulações, os elementos que pertencerão aos conjuntos serão *números*. Neste caso, o que vem a ser "*número*"? Número é um objeto abstrato na matemática, o qual se tem noção por meio de um símbolo. Logo, quando se pensa em "dois", está se pensando num cardinal livre de qualquer caracterização específica. No âmbito da matemática que será abordada ao longo dos módulos, o "dois" mencionado anteriormente poderá representar comprimentos, áreas, volumes, temperaturas, tempo... enfim, tudo o que possa ser de alguma forma “inferido”. Aqui se usa o termo “inferido” no sentido de “obtido”. Porém “medida” é outra noção da matemática que exige discussões densas e complexas. Para os propósitos do presente texto, isso será evitado.

Pode-se dizer que o primeiro[4] conjunto numérico que se tem contato na vida é o conjunto dos números naturais. Tal conjunto é simbolizado pela letra N. Usualmente usa-se um par de chaves $\{\ \}$ para organizar e apresentar os elementos. Quando se quer expressar a relação entre elemento – conjunto usa-se a noção de “pertinência” (símbolo: $\in$) e “não-pertinência” (símbolo: $\notin$). Nesse caso, se a é um número natural diz-se que $a \in N$. Você (provavelmente) chegou até aqui no curso de graduação em Licenciatura conhecendo *fatos* sobre tal conjunto numérico. Eis uma lista de fatos:

Fato 1: Um número natural *sempre* terá um sucessor. Se excluirmos o zero do conjunto, então o “1” é o único número natural que não será sucessor de outro no conjunto. Esse fato permite inferir que o conjunto tem infinitos elementos, ou seja, há infinitos números naturais.

Fato 2: Se pensarmos que sucessor é o número natural que sucede em uma unidade, então o sucessor de um número natural é único. O sucessor do número 10 é o número 11, o sucessor do 5628799256232326547 é o 5628799256232326548 e assim por diante. Com esse fato, podemos voltar ao exemplo de grãos de areia na

4 Aqui parece especulativo, mas é essa a ideia.

praia. Se o número de grãos de areia, o qual representa uma quantidade, pudesse ser facilmente obtido, então um grão de areia a mais gera o sucessor do número em questão.

Fato 3: A soma e multiplicação de números naturais são operações que ocorrem com naturalidade. Por meio de *algoritmos*, é possível obter o resultado da soma $1356+6587$ e do produto 1356×6587. A *associatividade* e *comutatividade* nos cálculos (também) são conhecidas e usadas anteriormente ao curso de graduação. Portanto, as operações de soma e a multiplicação de números naturais tratam da noção mais elementar de organização em agrupamentos de determinados objetos.

Fato 4: A noção de ordem. É natural pensar que sete é menor do que dez, ou seja, $7<10$. Essa relação pode ser expressa também como $10>7$. Nesse caso, a leitura fica "dez maior do que sete". A ordenação é uma ideia subjacente ao conjunto dos números naturais. A ideia é válida e anterior ao curso de graduação provavelmente já fazia parte de vosso escopo de pensamentos. Poderia se ter ainda a noção de "menor do que ou igual" representado pelo símbolo $\leq$ ou "maior do que ou igual" representado por $\geq$. Nesse caso, se a e b são números naturais com "a menor do que ou igual a b", tal sentença é representada por $a\leq b$. A mesma ideia serve para "a maior do que ou igual a b", representada por $a\geq b$.

A junção dos quatro fatos expostos permite caracterizar *muito bem*, para os propósitos do presente texto, o conjunto dos números naturais. Vamos pôr em prática o que discutimos por meio do seguinte problema.

P1) Explicite os elementos dos seguintes conjuntos abaixo.

a) $\{x \in N \,/\, x < 11\}$

b) $\{x \in N \,/\, x \geq 7\}$

c) $\{x \in N \,/\, 51 \leq x \leq 65\}$

d) $\{x \in N \,/\, 10 < x < 11\}$

e) $\{x \in N \,/\, 101 < x < 105\}$

Ao inserir a noção de "simétrico" aos números naturais e o elemento "zero", constrói-se o conjunto dos números inteiros (Z). Os fatos explicitados (provavelmente), se conhecidos por você antes da graduação, agora estão "certificados" e podem ser utilizados. Os únicos cuidados que se deve ter é quanto à regra de sinais para as operações de soma e produto (multiplicação) entre números inteiros. Na soma de dois números inteiros, prevalece o sinal do número que em valor absoluto[5] seja maior. Já para o produto, as regras operatórias são: $(+)\times(+)=(+)$, $(-)\times(-)=(+)$ e $(+)\times(-)=(-)\times(+)=(-)$. A associatividade e comutatividade dessas operações são válidas e você já usa desde antes do curso de graduação. Um exemplo para ilustrar a comutatividade da soma é $514+123=123+514=637$. A comutatividade para o produto também é válida. Um exemplo sobre associatividade no produto é $(12\times 7)\times 5 = 12\times(7\times 5) = 420$. A mesma propriedade vale para a soma.

Vamos estender a ideia do problema (P1) anterior ao próximo.

---

5 Valor absoluto de um número x é definido como $|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0. \\ -x & se \quad x < 0. \end{cases}$

P2) A partir das ideias vistas em (P1), explicite os elementos dos seguintes conjuntos.

a) $\{x \in Z \,/\, x < -5\}$

b) $\{x \in Z \,/\, x \geq -10\}$

c) $\{x \in Z \,/ -4 < x \leq 5\}$

d) $\{x \in Z \,/ -10 < x < 5\}$

e) $\{x \in Z \,/\, x \geq 0\}$

Depois de construídos os conjuntos dos números naturais e inteiros, agora é o momento de conversar sobre números racionais (Q). Tais números são chamados de frações. O número escrito na parte superior da fração chama-se *numerador*, enquanto que o número escrito na parte inferior chama-se *denominador*. A definição matemática do conjunto dos números racionais é

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle/ a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

Diz-se que uma fração, a partir da definição, terá denominador *sempre* não nulo. As frações podem ser entendidas como "um quociente entre dois números inteiros", desde que um deles seja não nulo pelo menos (aqui no caso, o denominador).

Os números racionais são representados por meio de frações, irredutíveis ou não. Frações irredutíveis são aquelas que "não tem mais como simplificar". Em linguagem técnica, uma fração é irredutível quando tanto numerador quanto denominador *não* tiverem múltiplos em comum. Caso contrário, a fração será redutível. Dois exemplos sobre isso são:

$$\frac{2}{3}$$

é uma fração irredutível, pois não há múltiplo comum entre numerador e denominador, ao contrário da fração

$$\frac{25}{100}$$

perceba que

$$\frac{25}{100} = \frac{5\times 5}{2\times 2\times 5\times 5} = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$$

o que torna a fração

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

As regras de simplificação precisam ser cuidadosamente executadas para não incorrer em erros nem passar a impressão casual de acerto. Por exemplo, na fração

$$\frac{16}{64}$$

ao ser aplicada a “regra de simplificação por cortes”, tem-se que

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

o que é uma igualdade verdadeira, porém obtida de forma casual, não causal.

As frações não irredutíveis, mostradas antes, oportunizaram que despercebidamente fosse escrito um sinal de igual entre duas frações. Sim, isso é possível! Ao escrever um sinal de igualdade entre dois números racionais, está-se afirmando que os dois são equivalentes. Matematicamente, duas frações

$$\frac{a}{b} \text{ e } \frac{c}{d}$$

são *equivalentes* se, e somente se, $a \times d = b \times c$. Esse é o princípio elementar das frações equivalentes. Portanto, no exemplo anterior,

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

pois $25 \times 4 = 100 \times 1$. A mesma ideia se aplica para

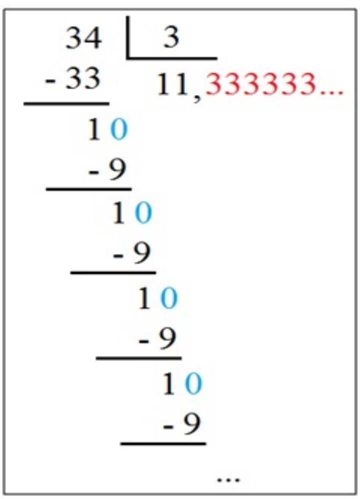
$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

No início da conversa sobre números racionais, mencionou-se "quociente entre dois números inteiros". A partir de tal quociente, é possível obter uma segunda representação para uma fração: a decimal. Tal representação é popularmente conhecida por "expressão com vírgula". Há dois caminhos a serem explorados/lembrados aqui. O primeiro consiste em, dada uma fração, obter a sua representação na forma decimal. O segundo é, dada uma forma decimal (periódica[6] ou truncada), como obter uma fração geratriz.

6 Adiante se vê que as representações decimais não periódicas são números não racionais (ou irracionais).

A transformação de uma fração na sua forma decimal é possível devido ao teorema da divisão de Euclides. Tal teorema afirma que, dados dois números inteiros a e b (dividendo e divisor), *sempre* é possível obter um quociente q e um resto r, tal que $a = b \times q + r$. Com números, para ilustrar com um exemplo, $34 = 3 \times 11 + 1$. No caso, se quiséssemos continuar o processo de divisão, ignorando o resto "1", acrescentaríamos a vírgula (como um símbolo que separa a parte inteira da divisão da parte decimal) e continuaríamos o processo, tal como ilustrado abaixo.

Figura 2: Algoritmo da Divisão



Fonte: arquivo pessoal.

Nesse caso, dois fatos devem ser observados. O primeiro é que o processo de divisão "nunca" teria fim. O segundo fato, derivado do primeiro, é que a representação na forma decimal da fração

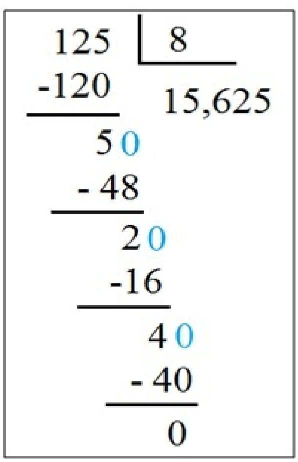
$$\frac{34}{3}$$

é um número decimal com uma quantidade infinita de “casas” depois da vírgula. Tal representação decimal para a matemática tem o nome de *dízima periódica*. Observe, na ilustração a seguir, que isso não ocorre para a fração

$$\frac{125}{8}$$

a qual pode ser considerada uma fração com representação decimal finita.

Figura 3: Algoritmo da Divisão



Fonte: arquivo pessoal.

A notação para dízimas periódicas é feita inserindo-se uma “barra” horizontal sobre o período (bloco de algarismo(s) que se repetem). Neste caso, evitam-se ambiguidades e mal entendidos no momento de fazer a leitura de informações. Por exemplo, as representações decimais para as frações

$$\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{71}{9}$$

são respectivamente: $0,\overline{6}$ e $7,\overline{8}$. Por outro lado, se a informação conhecida é a forma decimal (finita ou infinita periódica) de um número racional, a questão é: como fazer o processo de construção de tal fração? Tal fração tem o nome de fração geratriz.

P3) Há um processo matemático que permite obter frações geratrizes. Pesquise em livros e *sites* como é o processo de construção da fração geratriz a partir da representação decimal (finita ou infinita periódica) de um número.

É chegada a hora de conversar um pouco sobre operações com frações. Diferentemente dos números naturais e números inteiros, aqui talvez você não lembre ou desconheça como tal processo é feito. Para tal, vamos discorrer sobre as operações de soma, produto e divisão de frações.

A soma de frações está ancorada no princípio da equivalência entre frações, anteriormente discutido. Se a operação ocorre com frações de mesmo denominador, então é plausível pensar no agrupamento dos numeradores. No caso das frações terem denominadores diferentes, trabalha-se com a possibilidade de inicialmente construir frações equivalentes que depois possam ser agrupadas. Observe os exemplos a seguir:

a) $\frac{2}{5}+\frac{17}{5}=\frac{2+17}{5}=\frac{19}{5}$

b) $\frac{9}{7}+\frac{2}{3}=\frac{27}{21}+\frac{14}{21}=\frac{27+14}{21}=\frac{41}{21}$

Logo, a soma de frações ancoradas no princípio da equivalência em linguagem algébrica fica:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d\times a}{d\times b}+\frac{c\times b}{d\times b}=\frac{d\times a+c\times b}{d\times b}$$

Vale ressaltar que o produto “ $d\times b$ ” sempre que possível pode ser substituído pelo MMC (Mínimo Múltiplo Comum) dos denominadores.

O produto de frações está ancorado na multiplicação de números inteiros. Observe os exemplos a seguir:

a) $\frac{2}{5}\times\frac{7}{3}=\frac{2\times 7}{5\times 3}=\frac{14}{15}$

b) $-\frac{2}{7}\times\frac{9}{5}=-\frac{2\times 9}{7\times 5}=-\frac{18}{35}$

O produto, ou a multiplicação de duas frações, pode ser escrito de forma genérica como

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

respeitando-se as regras de sinais para a multiplicação de números inteiros. A associatividade e comutatividade na soma e no produto de frações são propriedades verdadeiras e podem ser usadas, sempre que necessário.

Por fim, a divisão de frações exige um processo um pouco menos usual. Para dividir uma fração por outra, “multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda”. Chama-se fração inversa toda fração que tem numerador e denominador trocados de posição (note que os inversos das frações

$$\frac{1}{n} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{n}$$

são respectivamente os números inteiros positivos e negativos para n >0).

Observe os exemplos:

a) $\dfrac{3/5}{2/9} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{9}{2} = \dfrac{3 \times 9}{5 \times 2} = \dfrac{27}{10}$

b) $\dfrac{4/7}{3/5} = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{4 \times 5}{7 \times 3} = \dfrac{20}{21}$

A divisão de frações fica escrita, em linguagem algébrica, como

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

respeitando-se as regras de sinais para a multiplicação de números inteiros. Coloque em prática a discussão feita sobre operações com frações no problema a seguir.

P4) Usando as ideias de operações com frações, obtenha o resultado dos seguintes cálculos.

a) $\dfrac{2}{9} + \dfrac{15}{9} + \dfrac{17}{9} - \dfrac{25}{9} =$

b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{15}{4} + \dfrac{1}{2} =$

c) $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{7}{6} \times \dfrac{1}{9} =$

d) $\left(-\dfrac{2}{11}\right) \times \left(-\dfrac{5}{6}\right) \times \left(-\dfrac{7}{4}\right) =$

e) $\dfrac{2/5}{4/7}$

f) $\dfrac{24/7}{5/12}$

Após o estudo dos números racionais, o próximo conjunto numérico a ser explorado é o dos números não racionais (ou irracionais, simbolizado por $R-Q$). Neste caso, *todas* as representações decimais não periódicas constituem os elementos desse conjunto. Você também deve lembrar-se de um "famoso" número que faz parte dos estudos da geometria, a saber, π (lê-se: PI). Sim, ele é um número não racional.

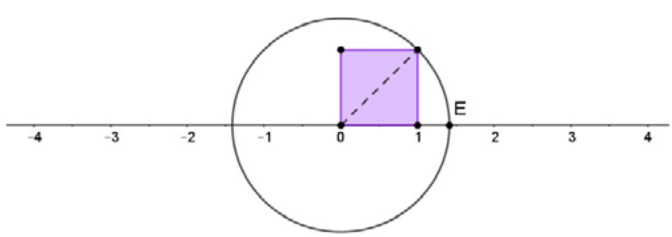
E também todas as raízes quadradas de números primos ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ...) são números irracionais. Há muitos outros tipos de números que são irracionais, mas não cabe aqui no texto a exploração de todos. O importante é saber que as operações aritméticas com tais números não são feitas da forma como explicado até aqui. O fato principal é que toda representação decimal desse tipo de número consiste em uma *aproximação*. Em matemática, "aproximação" é uma ideia relativa, ou seja, o que é uma aproximação para mim talvez não seja para você e vice-versa. Trata-se de um olhar mais refinado e apurado sobre o que seja de fato um número. Para o presente momento, basta que você saiba que existem e não podem ser operados da forma usual como se estava discutindo até então.

Por fim, em se tratando de conjuntos numéricos, chega-se ao conjunto dos números reais. É um conjunto importante da área de conhecimento da matemática e permite entender os objetos de estudo a partir do segundo módulo que são as funções. Até o conjunto de números reais, temos relação de ordem e propriedades de associatividade e comutatividade para as operações. Após os números reais, há a construção de outros conjuntos numéricos que não estão no escopo do presente material, por exemplo: Números Complexos e Hipercomplexos.

Quando se estuda o conjunto dos números reais, há a construção do objeto “reta real”. Tal objeto permite adiante realizar a construção dos sistemas de eixos cartesianos, necessários para a representação das funções reais. Você provavelmente conhece o fato de localização e representação dos números na reta numérica. A respeito dos números reais, nota-se que nem sempre é possível localizar (no sentido de representar) com exatidão um número na reta, porém há argumentos matemáticos suficientemente estruturados que permitem afirmar sobre a localização de um número.

Um exemplo que pode ser usado para ilustrar o que se falou aqui é: localizar na reta real o número que representa a medida do segmento da diagonal de um quadrado de lado unitário. Com o uso da régua e compasso, no *software* GeoGebra tal construção fica conforme ilustrado na figura abaixo.

Figura 4: Reta Numérica e Construção Geométrica do Número Real Raiz Quadrada de Dois



Fonte: arquivo pessoal.

O ponto E localiza *precisamente* a posição do número real $\sqrt{2}$. A reta numérica é um objeto matemático abstrato, no qual há a posição de uma "origem", onde se convenciona posicionar o "zero" e os dois sentidos, um para os números positivos e o outro para os números negativos. A construção anterior, a partir de uma circunferência centrada na origem (zero) e o raio sendo a medida da diagonal, como o ponto E é a interseção da circunferência com a reta numérica, permite inferir que o segmento que parte da origem e vai até o ponto E tem medida $\sqrt{2}$.

Por outro lado, caso quiséssemos construir uma aproximação para $\sqrt{2}$, procederíamos como segue. Primeiramente, note que $1=\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}=2$, portanto $1<\sqrt{2}<2$. Constata-se com um cálculo aritmético simples que $1,4<\sqrt{2}<1,5$. Isso já possibilita uma *melhor* aproximação para o número. Novamente, com um cálculo aritmético, observa-se que $1,41<\sqrt{2}<1,42$. E assim *sucessivamente*... Perceba que tal processo não terá fim. Portanto, o máximo que pode ser feito são construções de aproximações para o número irracional $\sqrt{2}$. A conclusão que se chega até o presente momento é a de que um número real tem uma posição única na reta numérica, porém o procedimento para se conhecer tal "lugar" por vezes não é trivial. O mesmo pensamento se aplica a todos os números irracionais. É demasiado complexo compreender sobre sua localização na reta numérica.

Para os propósitos do texto, é suficiente entender que há inerente ao assunto um objeto chamado reta numérica na qual todos os números (desde os naturais) podem ser posicionados. O processo de alocação e representação fica mais complicado quando se considera os números não racionais.

P5) Pesquise como é feita a alocação ou representação na reta numérica dos números racionais.

Após a discussão sobre os conjuntos numéricos feita até aqui, é chegado o momento de discorrer sobre *grandezas*, *sistema métrico decimal* e *intervalos numéricos*. Vamos fazer a discussão por partes...

Parte 1: Grandezas

Grandeza é uma abstração da mente humana. Objetos existem na natureza na forma de plantas, animais ou seres inanimados. Com isso, podem-se atribuir *qualidades matemáticas* a cada um deles, tais como comprimento, área, volume e massa. A essas qualidades matemáticas, chamamos de grandezas. De acordo com o *site* Brasil Escola[7], uma grandeza "é tudo aquilo que pode ser medido e possibilita que tenhamos características baseadas em informações numéricas e/ou geométricas".

7 Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-e-grandeza.htm. Acesso em: abr. 2018.

A definição anterior é *boa* e atende os propósitos do presente texto. O importante aqui é entender que podemos usar os conjuntos numéricos para fazer uma leitura ou mapeamento sobre o mundo que nos cerca. Tal mapeamento pode ocorrer por meio da observação de objetos (vivos ou não) ou de fenômenos. As áreas da química, física e biologia são por excelência as ciências da observação de fenômenos. Não se está excluindo a ciência matemática de todo o rol das ciências da observação... Porém a matemática é conhecida por *matematizar*, ou seja, ir além da observação. Observa, analisa, reflete, RELACIONA, generaliza. Isso se aplica a padrões (ou não) aritméticos ou geométricos.

Portanto, é importante entender que observar e atribuir rótulos para "grandezas" não torna uma observação válida em si. Antecipo que construção de relações (diretas, inversas, proporcionais, não proporcionais) oportuniza desenvolver todos os módulos de estudo que estão adiante. Logo, sobre grandezas é válido considerar o exercício da percepção e leitura que se pode fazer do mundo a nossa volta e, sempre que possível, relacionar os elementos envolvidos.

Parte 2: Sistema Métrico Decimal

Uma aplicação direta dos conjuntos numéricos é o chamado Sistema Métrico Decimal. Tal sistema foi proposto na França, no período da Revolução Francesa. Nós utilizamos os algarismos $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ para representar qualquer número. Com isso, é possível a partir de uma convenção relacionar grandezas. O sistema métrico decimal (de base 10) é usado para relacionar múltiplos e submúltiplos das grandezas comprimento, área, volume, massa e tempo.

Para **comprimentos**, a partir de fatores múltiplos de 10, usa-se a seguinte tabela:

— MÚLTIPLOS — Unidade — SUBMÚLTIPLOS —

Quilômetro km	Hectômetro hm	Decâmetro dam	Metro m	Decímetro dm	Centímetro cm	Milímetro mm
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

$$\xleftarrow{\div 10} \quad \xrightarrow{\times 10}$$

Para **áreas,** a partir de fatores múltiplos de 100, usa-se a seguinte tabela:

— MÚLTIPLOS — Unidade — SUBMÚLTIPLOS —

Quilômetro^2 km^2	Hectômetro^2 hm^2	Decâmetro^2 dam^2	Metro^2 m^2	Decímetro^2 dm^2	Centímetro^2 cm^2	Milímetro^2 mm^2
0,000001	0,0001	0,01	1	100	10000	1000000

$$\xleftarrow{\div 100} \quad \xrightarrow{\times 100}$$

Para **volumes**, a partir de fatores múltiplos de 1000, usa-se a seguinte tabela:

— MÚLTIPLOS — Unidade — SUBMÚLTIPLOS —

Quilômetro^3 km^3	Hectômetro^3 hm^3	Decâmetro^3 dam^3	Metro^3 m^3	Decímetro^3 dm^3	Centímetro^3 cm^3	Milímetro^3 mm^3
0,000000001	0,000001	0,001	1	1000	1000000	1000000000

$$\xleftarrow{\div 1000} \quad \xrightarrow{\times 1000}$$

Uma tabela auxiliar para a de volumes é a da **litragem**, conforme abaixo:

— MÚLTIPLOS — Unidade — SUBMÚLTIPLOS —

Quilolitro kl	Hectolitro hl	Decalitro dal	Litro l	Decilitro dl	Centilitro cl	Mililitro ml
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

$\xleftarrow{\div 10} \quad \xrightarrow{\times 10}$

Para **massas**, a partir de fatores múltiplos de 10, usa-se a seguinte tabela:

— MÚLTIPLOS — Unidade — SUBMÚLTIPLOS —

Quilograma kg	Hectograma hg	Decagrama dag	Grama g	Decigrama dg	Centigrama cg	Miligrama mg
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

$\xleftarrow{\div 10} \quad \xrightarrow{\times 10}$

Há situações que é possível relacionar grandezas expressas e localizadas em tabelas diferentes. Eis as relações:

1 m^3 = 1000L (lê-se: um metro cúbico equivale a mil litros)

1 dm^3 = 1L (lê-se: um decímetro cúbico equivale a um litro)

1000 cm^3 = 1L = 1000 ml (lê-se: mil centímetros cúbicos equivalem a um litro ou mil *eme éles*)

1 t = 1000 kg (lê-se: uma tonelada equivale a mil quilogramas)

Quanto à grandeza **tempo**, o fator que relaciona as três representações (segundo – minuto – hora) é o 60, ou seja, um minuto tem sessenta segundos, assim como uma hora tem sessenta minutos, logo em uma hora se tem três mil e seiscentos segundos.

P6) Pesquise e observe diferentes objetos que tenham representações para as quantidades ou informações em rótulos. As embalagens podem ser um bom exemplo de objetos a minerar.

Parte 3: Intervalos Numéricos

Intervalos numéricos são importantes objetos matemáticos que auxiliam a compreensão dos elementos: domínio, contradomínio e imagem das funções (os próximos módulos são inteiramente sobre "funções"). A partir do conjunto dos números reais e considerando a e b números reais, tais $a \leq b$, podem ocorrer todas as seguintes possibilidades de intervalos numéricos, com os respectivos significados:

$[a;b] = \{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$ — Significa intervalo fechado.

$(a;b) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$ — Significa intervalo aberto.

$[a;b) = \{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$ — Significa intervalo fechado à esquerda.

$(a;b] = \{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$ — Significa intervalo fechado à direita.

Como a reta numérica é a abstração de um objeto matemático, naturalmente se inserem mais dois símbolos aos intervalos, os chamados "infinitos". Quando se escreve $+\infty$ ou $-\infty$, não se está mencionando um número especificamente. É importante ter isso esclarecido. Com isso, têm-se ainda as seguintes possibilidades para intervalos numéricos (esses são considerados intervalos “ilimitados” em matemática).

$$[a;+\infty)=\{x\in R\,/\,x\geq a\}$$

$$(a;+\infty)=\{x\in R\,/\,x>a\}$$

$$(-\infty;b]=\{x\in R\,/\,x\leq b\}$$

$$(-\infty;b)=\{x\in R\,/\,x<b\}$$

$$(-\infty;+\infty)=R$$

A partir dessa caracterização sobre intervalos numéricos, explore os seguintes problemas.

P7) Represente geometricamente os seguintes intervalos numéricos:

a) Dos números reais maiores do que sete.

b) Dos números reais maiores do que zero.

c) Dos números reais menores do que dez.

d) Dos números reais menores do que dois terços.

e) Dos números reais maiores do que ou iguais a dois negativo.

P8) Descreva, por meio da notação de conjuntos, os seguintes intervalos numéricos:

a) $[-2;0)$

b) $(-\infty;7]$

c) $[2;8]$

d) $(-3;5]$

P9) Determine $A \cap B$ quando (o que se pede aqui é a interseção de intervalos, ou seja, pede-se para construir o intervalo que contenha TODOS os números reais que estão em ambos os intervalos, A e B):

a) $A = \{x \in R \,/\, -1 < x \leq 5\}$ e $B = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 3\}$

b) $A = \{x \in R \,/\, x \leq 5\}$ e $B = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 1\}$

c) $A = \{x \in R \,/\, 0 < x \leq 7\}$ e $B = \{x \in R \,/\, x < 3\}$

d) $A = \{x \in R \,/\, -3 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in R \,/\, 1 < x \leq 3\}$

Com isso, encerra-se a apresentação e discussão matemática do módulo I.

Sugestões de vídeos do YouTube™ que podem ser assistidos para complementar o estudo (todos os *links* abaixo foram acessados em abril de 2018):

Conjuntos Numéricos (parte 1): https://youtu.be/Y_mYgLkuEl4

Conjuntos Numéricos (parte 2): https://youtu.be/NYAeWhz53NM

Conjuntos Numéricos (parte 3): https://youtu.be/J4vD5RpOqJY

Soma: https://youtu.be/az6OYFS7AUA

Subtração: https://youtu.be/oSzh7TjIsjs

Multiplicação: https://youtu.be/BetgRvNQEC0

Divisão: https://youtu.be/GpnfZHB3Rpw

Frações (parte 1): https://youtu.be/i2GEeGSrZ_E

Frações (parte 2): https://youtu.be/RbLQCSB4EUY

Dízimas Periódicas: https://youtu.be/d9GBEzzCuRg

Sistema Métrico Decimal: https://youtu.be/VaxJAPbZMFg

Conjuntos (parte 1): https://youtu.be/0aUEDxYjZg8

Conjuntos (parte 2): https://youtu.be/Wxm3ugnq9Sw

Conjuntos (parte 3): https://youtu.be/c5a99sX-Sq8

Em todos os módulos, é necessário que se entenda a diferença entre “sugestão” e “recomendação”... Serão indicados, em cada módulo, vídeos que contabilizam um expressivo número de horas em dedicação para assistir. No entanto, cada vídeo é uma sugestão, que serve para complementar a discussão feita no decorrer do módulo. Use os *links* de acesso aos vídeos na necessidade ou curiosidade sobre o assunto explorado, não sendo obrigatória a visita. Todos os vídeos ao longo do material foram indicados de um mesmo canal do YouTube™, a fim de tornar padrão a indicação de material complementar ao estudo.

1.2 REFLEXÕES SOBRE O *ENSINO* DE NÚMEROS E GRANDEZAS

No decorrer do presente material, você encontrará uma seção que versa sobre o *ensino* do conteúdo abordado no módulo. Antecipo que a leitura da presente seção é facultativa, porém menciona-se a importância de se conhecer, em um curso inicial de formação de professores, propostas de pesquisa já ocorridas no âmbito da educação básica. A apresentação e a sugestão de leituras aderentes ao assunto do módulo ocorrerão da seguinte forma: haverá a apresentação do resumo da obra publicada. Aqui a escolha será por apresentar sempre textos em nível de pós-graduação, seja de especialização, mestrado ou doutorado. A apresentação ocorrerá por meio da transcrição do "resumo" da obra, com a devida identificação autoral. Em seguida, será indicado o *link* para o acesso *web* do material. Assim, é possível acessar os materiais e textos de forma integral e completa.

Título: Fórmula (-1): desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem para as operações com números positivos e negativos

RESUMO: "Essa dissertação apresenta um conjunto de Objetos Digitais de Aprendizagem (ODAs) que foram desenvolvidos com o objetivo de promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos sob a perspectiva da teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. Além disso, também foi desenvolvida uma proposta didática para auxiliar o professor que desejar utilizá-lo nas suas aulas. Nossa pesquisa ainda apresenta a construção histórica do conjunto dos números positivos e negativos, uma discussão sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação (TICs) em Educação e uma revisão de propostas voltadas para o ensino dos números positivos e negativos. De caráter experimental, nossa proposta foi aplicada em dois momentos diferentes: no final de 2008 numa turma de 6º série do Ensino Fundamental do Colégio de Aplicação da UFRGS e durante o primeiro semestre de 2010 numa escola da rede privada do município de Guaíba/RS. A análise dos resultados obtidos serviu como subsídio para a implementação de modificações no ODA e na proposta didática, bem como para a reflexão do desenvolvimento de ODAs que promovam o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo através de problemas que envolvam operações com números positivos e negativos."

Autor: Anuar Daian de Morais

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10183/31426 (acesso em abril/2018)

Título: Os números decimais e sua utilidade no cotidiano

RESUMO: "Este trabalho caracteriza-se pelo relato, análise e contextualização teórica de uma experiência pedagógica vivenciada por alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. A proposta de ensino que desencadeou tal experiência foi organizada de acordo com o modelo de Engenharia Didática e teve como objetivo principal a investigação das dificuldades apresentadas por esses alunos, ao relacionarem as atividades realizadas no ambiente escolar, envolvendo números decimais, com situações do cotidiano, nas quais esses números costumam ser empregados. Na fase de elaboração da proposta foram analisados alguns livros didáticos, em termos da abordagem do conteúdo números decimais, e algumas teses, tendo em vista a definição desse conteúdo e as aplicações do mesmo em situações vivenciadas pelos alunos. Nessa fase, também foram aplicados questionários com a turma, que forneceram dados sobre o que os alunos sabem acerca do conteúdo em estudo. Tais informações foram fundamentais na elaboração de um plano de ensino diferenciado e voltado, primeiramente, a sanar as dúvidas expostas

pelos alunos. Para aplicação da proposta, foram utilizados vários recursos didáticos, entre eles, jornais e revistas para recortes; vídeo sensibilizador para introduzir o conteúdo; frutas e verduras para montagem de uma feira na sala de aula, com a finalidade de reproduzir situações reais do cotidiano que envolvesse o conteúdo de números decimais; e *software*, como recurso digital, utilizado para auxiliar na aprendizagem. A utilização em sala de aula de situações próximas do cotidiano, como a realização da feira, aproximou os alunos da realidade onde as operações com números decimais são mais evidenciadas. As atividades realizadas no laboratório de informática mostraram que os recursos tecnológicos, cada vez mais modernos e atrativos aos alunos, podem auxiliar o professor em sua prática pedagógica. Além disso, as várias situações vivenciadas durante este processo indicaram que resultados positivos acontecem com mais facilidade quando os alunos são envolvidos na construção e elaboração de um conceito."

Autor: Ederson Iachinski

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10183/31589 (acesso em abril/2018)

Título: A construção dos números reais na escola básica

RESUMO: "Este trabalho busca, num primeiro momento, caracterizar a problemática aprendizagem do número real na Escola Básica, aplicando questionários-sondagem, analisando livros didáticos e comparando-os com os Parâmetros Curriculares Nacionais. Num segundo momento desenvolvemos um efetivo estudo de Matemática: as maneiras mais comuns de se construir números reais e a equivalência entre todas elas. Mostramos também como, a partir de cada uma destas abordagens, chega-se à representação decimal de um número real positivo. Finalizamos com uma proposta pedagógica para o Ensino Fundamental, e uma experiência didática, numa 8ª série, de construção de um número real via medição exata de segmentos de reta."

Autor: Daiane Scopel Boff

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10183/11188 (acesso em abril/2018)

Título: A metrologia no ensino da reta real

RESUMO: "Este trabalho tem por objetivo trazer a Metrologia para sala de aula, motivando os alunos no estudo da reta real, melhorar a compreensão da reta real e conhecer a Metrologia como ciência e área de trabalho, através de atividades elaboradas. As práticas ocorreram em uma escola estadual, localizada na zona sul de Porto Alegre, com alunos que frequentam a 8ª Série do ensino fundamental regular, no turno da tarde, no total de três encontros, sendo que cada encontro durou dois períodos de 50 minutos. As atividades consistem em padronizar medidas, perceber as diferenças entre instrumento digital e analógico com o intuito de transferir esta diferença para a reta e, ao realizar medições, os alunos percebam a necessidade de aproximar medidas usando o erro, além da construção da reta. Além de trazer todo o desenvolvimento das atividades realizadas na escola, este trabalho traz aspectos teóricos sobre a reta real, os conceitos que envolvem a Metrologia, o desenvolvimento histórico em busca da padronização do metro e a história da Metrologia no Brasil."

Autor: Leandro Subtil Moura

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10183/31621 (acesso em abril/2018)

Título: Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino

RESUMO: "Esta investigação tem como objectivo perceber de que modo o trabalho com as diferentes representações de número racional, nos seus diferentes significados, pode contribuir para a compreensão da noção de número racional e dos conceitos de ordenação e comparação de número racional e equivalência de fracções, em alunos do 5º ano, tendo por base uma unidade de ensino e uma abordagem de cunho exploratório. O quadro teórico evidencia a complexidade do conceito de número racional, constatando-se que os alunos têm muita dificuldade na aquisição da noção e do sentido do número racional. Assume-se que o ensino dos números racionais deve: (i) ter como base os conhecimentos anteriores dos alunos; (ii) enfatizar as inter-relações entre os vários significados de número racional; e (iii) reforçar as relações entre conceitos e procedimentos, bem como as conversões dentro e entre as diferentes representações. Este estudo constitui uma investigação sobre a minha prática profissional que segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, com observação participante. A recolha de dados foi realizada numa turma do 5º ano, sendo estudada a própria turma e, de forma mais aprofundada, uma aluna objecto de estudo de caso. A recolha de dados inclui dois testes, duas entrevistas, produções dos alunos e registros em diário de bordo. Os resultados mostram que os alunos melhoraram a sua compreensão da representação fraccionária e da percentagem e até da representação decimal. Contudo, continuam a mostrar dificuldades na representação de fracções impróprias. Também melhoraram na sua compreensão da comparação e ordenação dos números racionais, utilizando, sobretudo, a representação decimal. Os alunos revelam compreender a equivalência de fracções, mas só a usam pontualmente como estratégia para comparar fracções. Isso, possivelmente, deve-se ao trabalho desenvolvido durante a unidade de ensino, dado que os alunos puderam utilizar as mais diversas representações. A hipótese de ensino-aprendizagem fica sustentada pela compreensão que os alunos revelam dos números racionais como números, mostrando compreender que um número racional pode ser representado de diversas formas e mostrando flexibilidade na escolha da representação mais adequada, ou onde se sentem mais à vontade e com a qual conseguem resolver as tarefas propostas."

Autor: Marisa Alexandra Ferreira Quaresma

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10451/2451 (acesso em abril/2018)

Entende-se que as indicações anteriores não esgotam a discussão sobre o assunto “ensino de números e grandezas”. Ao contrário, nas pesquisas apresentadas é possível encontrar iniciativas diferentes, mas que almejam a meta coincidente: desenvolver e executar atividades, ou sequências de atividades, que envolvam os discentes na apreensão e construção dos conceitos relativos a números e grandezas.

2
Módulo II

Conteúdos abordados: Relações entre grandezas. Análise e interpretação de gráficos. Fenômenos de crescimento e decrescimento. Conjunto domínio e conjunto imagem para funções. Situações-problema.

2.1 INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES[8]

No módulo anterior, fez-se a exploração dos conjuntos numéricos. Relembrou-se (ou se aprendeu) como operar com tais objetos matemáticos. O ponto "alto" do módulo foi estudar sobre grandezas. Tais ideias são fundamentais para o andamento do presente módulo e dos demais. Quando se relaciona duas grandezas, chama-se tal relação de *função*. Antes de inserir "algebrismo" e tornar a vida (talvez) complicada, o presente módulo fará a apresentação e análise de situações, as quais não necessitam de um complexo algebrismo, mas sim de leitura e interpretação no que tange ao tratamento das informações.

A partir disso, faz-se a análise e interpretação de gráficos, aliás, precisamos antes entender o que é gráfico. Fenômenos (químicos, físicos, biológicos, ...) ocorrem o tempo todo e nós, enquanto sujeitos pensantes, organizamos com princípios matemáticos informações e produzimos inferências. A organização das informações desde os tempos mais remotos já era feita por meio de representações. A matemática mais contemporânea (digamos nos últimos quatrocentos anos...) encarregou-se de organizar e tornar padrão as formas de escrita e padronização. Com isso, parte predominante do que se faz hoje é consequência de uma matemática criada e organizada há pouco tempo (menos de 400 anos!). Se você ficou curioso sobre essa nova face da matemática, consulte algum

8 Inspirado no material produzido por Alana Gomes Tomaz Louzada, Sheridan dos Reis Pinto e Vinicius Titto Machado Souto.

livro de História da Matemática e observe o esforço e a dedicação de inúmeras pessoas em prol de uma ciência organizada, consistente e que servisse para os propósitos coletivos.

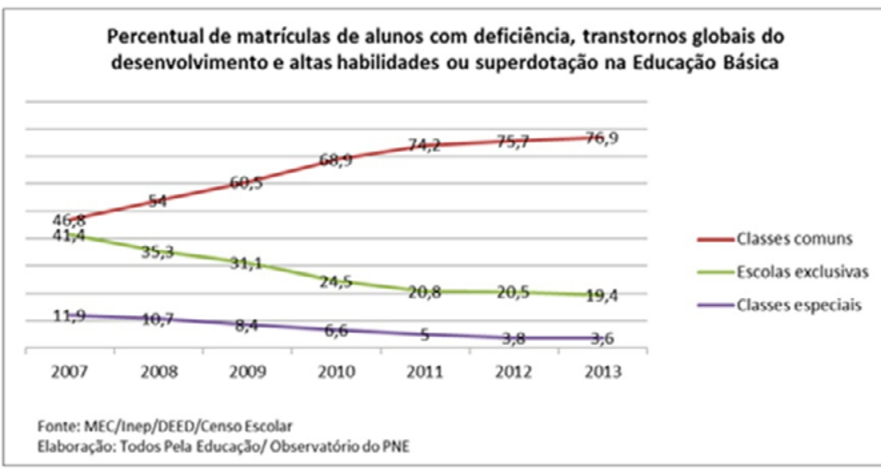
É fato que, ao acessar um *site* da Internet, revista, jornal ou panfleto entregue pela cidade, há informações organizadas na forma de um *desenho*. Tais informações podem estar dispostas em um histograma ("gráfico de barras" na Estatística), círculo ("gráfico de pizza"), curva ou poligonal. O fato é que a imagem contém informações organizadas, as quais são grandezas (estão apresentando a "medida" de algo/fenômeno) e que não estão sozinhas. Grandezas não têm o "hábito" de aparecerem sozinhas, *aparecem aos pares* (aqui nessa obra será sempre assim...) e estão (geralmente) relacionadas.

O objetivo do presente módulo é apresentar situações que ilustram relação de dependência entre grandezas. Tal dependência será neste texto manifestada por meio de um objeto, chamado de função. A partir do módulo III, as funções recebem nomes e regras algébricas específicas, a saber: função afim, função linear, função quadrática, função exponencial, função logarítmica e função trigonométrica. Cada uma delas tem um propósito que será oportunamente explorado.

Vamos iniciar!? A exploração será a partir de uma situação, tal como exposta abaixo. Em matemática, tem-se o costume de utilizar a nomenclatura *situação-problema* para descrever uma situação que pode de alguma forma ser "matematizada". Aqui se faz uso de tal nomenclatura a partir de agora.

Situação-problema 1: "Entre 2007 e 2013, a porcentagem de estudantes com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotação matriculados em salas de aula regulares cresceu de 46,8% para 76,9%. Em consequência, o número de crianças e jovens em escolas de Educação Especial decresce anualmente – no ano passado, dado mais recente, 843.342 frequentavam exclusivamente esse tipo de instituição." (Disponível em: http://www.todospelaeducacao.org.br/reportagens-tpe/31084/inclusao-de-alunos-com-deficiencia-cai-no-ensino-medio)

Figura 5: Gráfico da Situação-Problema 1



Fonte: ***Site*** **Todos pela Educação[9].**

9 Disponível em: http://www.todospelaeducacao.org.br/reportagens-tpe/31084/inclusao-de-alunos-com-deficiencia-cai-no-ensino-medio. Acesso em: abr. 2018.

A partir da situação-problema 1, há fatos que merecem nossa atenção. O primeiro é que as informações sobre o que está se discutindo estão sendo apresentadas por meio de um desenho. Note que ao longo de uma reta horizontal está alocado o tempo (representado pelos anos a partir de 2007) e na vertical estão alocados os percentuais. Há linhas (aparentemente contínuas) que "ligam" as informações em tempos distintos. Um matemático olha para essa notícia e se questiona: como os sujeitos que produziram esse texto e "gráfico" sabem que essas linhas são segmentos de retas? Bom... isso é assunto para outro momento, voltemos ao texto.

Esse esboço, por meio de um desenho, relaciona duas grandezas, a saber: tempo e percentual. Pode-se dizer que há, no contexto apresentado, uma relação funcional entre tempo e percentual. O esboço de uma linha na forma poligonal torna isso explícito. A partir da observação da notícia/fato/fenômeno, propõem-se as seguintes reflexões:

a) No período de 2007 a 2013, em que classe de ensino houve um aumento de alunos especiais matriculados?

b) Dentro da classe de aumento, em qual período ele ocorreu com mais magnitude?

c) Qual a variação percentual de 2007 a 2013 de matrículas realizadas em escolas exclusivas?

d) Houve uma variação maior que 50% das matrículas realizadas em escolas exclusivas? Qual foi esta variação, aproximadamente?

e) Houve algum período de decrescimento no número de matriculados? Em caso afirmativo, em qual(is)?

Para tal, os argumentos plausíveis para essas perguntas são:

a) Classes comuns. Possíveis justificativas: inclinação positiva da *reta* que representa esses alunos matriculados, perceber que, no ano de 2013, 76,9% dos alunos especiais se matricularam nas escolas de classe comum.

b) Fazendo-se a diferença percentual entre um período e outro, temos que no período de 2009 para 2010 houve um maior aumento, 8,4% no número de alunos matriculados.

c) Sabe-se (olhando para o gráfico!) que houve variação de 22 de 2007 a 2013. Resta saber qual porcentagem representa 22 de 41,4%. Por regra de três (aqui não se está usando regra de três no sentido que será adiante mencionado em funções afins...) tem-se:

$$\begin{array}{lll} 41,4 & ----- & 100\% \\ 22 & ------ & x \\ x = 53,14\% & & \end{array}$$

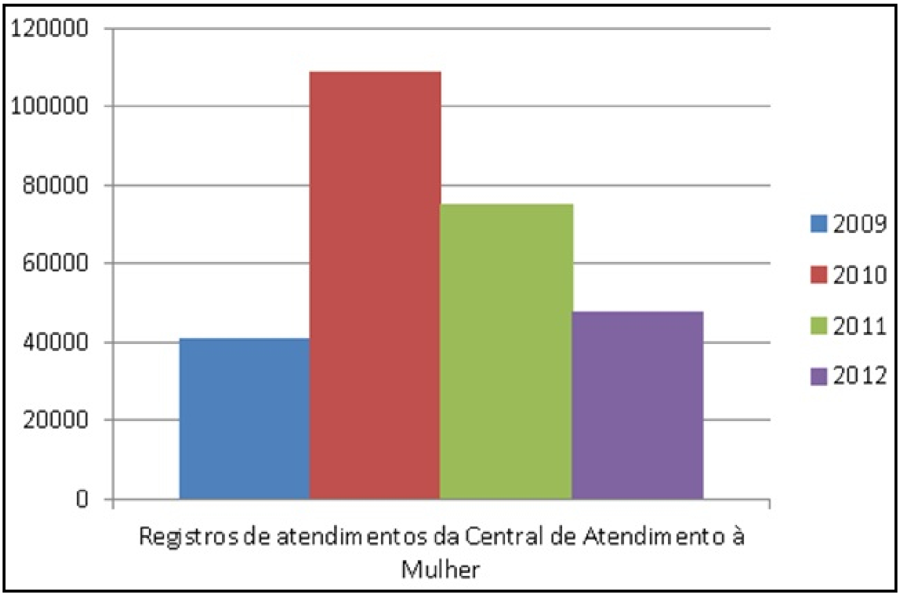
d) Sim, houve variação de 53,14% (vide raciocínio feito).

e) Sim, nas classes exclusivas e especiais, ambas no período de 2007 a 2013. Possível justificativa: há declínio nos dois segmentos de reta que representam os percentuais de cada classe.

Portanto, observam-se no desenho (gráfico) declínios (decrescimentos) e aumentos (crescimentos). Com isso, e munidos de técnicas e conhecimentos sobre conjuntos numéricos, fez-se uma reflexão profícua sobre os questionamentos anteriormente propostos.

Situação-problema 2: O gráfico abaixo representa o total dos registros de atendimentos da Central de Atendimento à Mulher:

Figura 6: Gráfico da Situação-Problema 2



Fonte: Adaptado do *site* IBGEeduca[10]

Reflitamos sobre os seguintes questionamentos:

a) Analisando o período de 2009 a 2011, o que você pode concluir? Houve um aumento no número de atendimentos na Central de Atendimentos à Mulher.

b) Qual o período entre dois anos quaisquer que apresenta maior variação positiva? E maior variação negativa? No período de 2009 a 2010, a variação foi de aproximadamente 60000, enquanto nos outros

10 Disponível em: http://teen.ibge.gov.br/noticias-teen/2822-violencia-contra-mulher. Acesso em: abr. 2018.

períodos houve menor variação, 2010-2011 a variação foi de aproximadamente 30000, e no período de 2011-2012 foi de aproximadamente 30000.

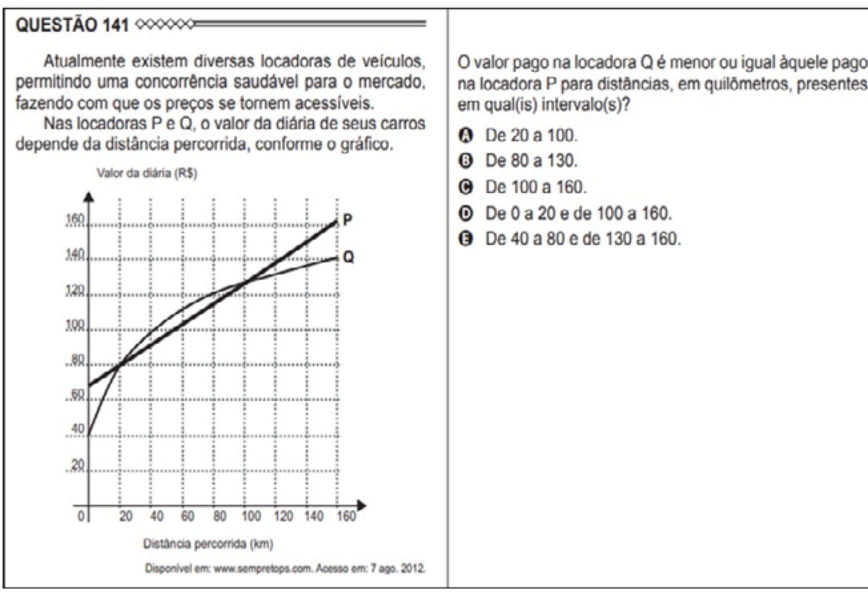
c) Como você justificaria essa diminuição nos atendimentos da Central de Atendimento a Mulher? Aqui se chegou a um ponto em que não há argumento matemático para justificar tal questionamento. A reflexão e resposta são pessoais e cabe a cada um dos sujeitos (leitores) fazer uma reflexão sobre.

Nessa segunda situação-problema, surgem novamente duas grandezas, a saber: tempo e número de atendimentos. Ambas estão relacionadas ao longo de um período e tal relação pode ser de alguma forma construída matematicamente. O fato é que para "perceber" crescimentos ou decrescimentos em um contexto não há a necessidade de saber se o comportamento é reto ou curvo. Para construir estimativas, basta observar as informações, organizar os fatos, relacioná-los e com isso produzir uma inferência.

A partir dos dois problemas apresentados, nota-se que "função" é um assunto necessário e importante. Com ele é possível fazer "leituras de mundo", conjecturar, inferir e (tentar pelo menos...) entender o comportamento de fenômenos. Após o término do ensino básico, os estudantes eventualmente realizam exames nacionais de larga escala. O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é um exemplo de avaliação que exige o conhecimento sobre grandezas e relações. Tais assuntos são cobrados, pois exigem do candidato posicionamento crítico e analítico de situações presentes no cotidiano.

Para a resolução dos problemas, exige-se do candidato que este saiba fazer uma leitura e interpretação das informações dispostas e organizadas em gráficos ou tabelas. Tal como nos problemas que iniciaram o presente módulo, aqui serão apresentados e comentados dois problemas das provas do ENEM ocorridas em 2015. Fica o convite ao leitor para que acesse o *site* do INEP (http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos) e faça uma mineração dos problemas que exigem conhecimentos reflexivos sobre o assunto funções.

Figura 7: Questão 141 ENEM/2015


QUESTÃO 141

Atualmente existem diversas locadoras de veículos, permitindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis.

Nas locadoras P e Q, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.

Disponível em: www.sempretops.com. Acesso em: 7 ago. 2012.

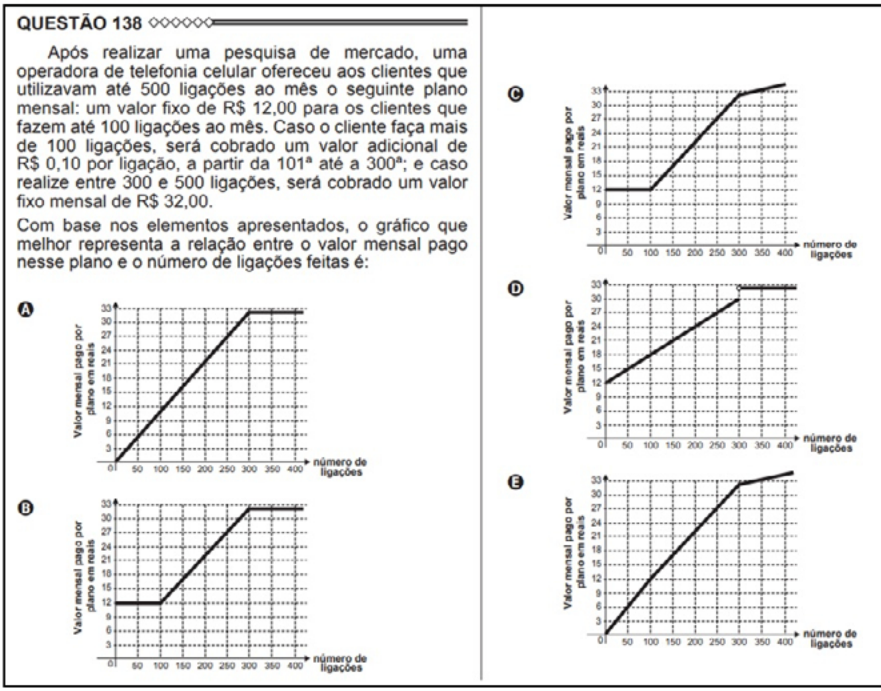
O valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

A. De 20 a 100.
B. De 80 a 130.
C. De 100 a 160.
D. De 0 a 20 e de 100 a 160.
E. De 40 a 80 e de 130 a 160.

Fonte: Prova Amarela ENEM/2015[11].

11 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

Figura 8: Questão 138 ENEM/2015



QUESTÃO 138

Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligação, a partir da 101ª até a 300ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00.

Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:

Fonte: Prova Amarela ENEM/2015[12].

A partir de agora, e visto que nos problemas anteriores foram solicitados conhecimentos mais específicos, trataremos de falar agora sobre: gráfico, conjunto domínio, conjunto contradomínio e conjunto imagem para funções.

Primeiramente, *plano cartesiano* é uma organização matemática na qual se necessita de duas retas numéricas (aqui são usados os números reais) posicionadas de forma concorrente (ou seja, com um ponto de interseção!) e que tem entre si uma abertura de ângulo reto (90 graus).

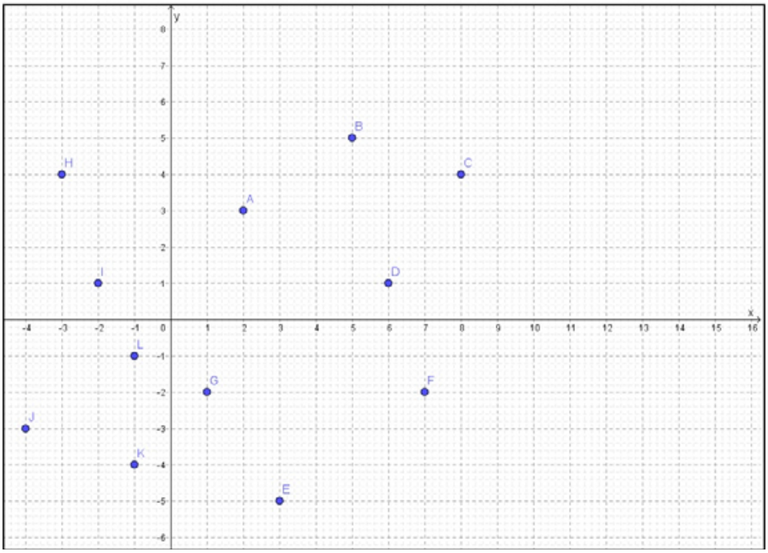
12 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

Convenciona-se uma posição para a "origem", ou seja, a posição do número zero para ambas as retas. Também se convenciona um sentido para o crescimento numérico, e isso é representado por uma "flecha" na extremidade da reta numérica. Aqui cabe um comentário filosófico: a delimitação da flecha na reta numérica não *limita* a reta, ou seja, não é na marcação da flecha que se impõe um limite. Isso fica mais claro, na figura 9 a seguir.

O que se comentou ao final do parágrafo anterior é que não há limite para os eixos, ou seja, mesmo que não apareçam para "xis" valores superiores a 16, nem para "ípsilon" valores superiores a 8, eles estão contemplados no esboço do plano cartesiano (vide figura 9). No plano cartesiano, podem ser representados os pontos. Cada ponto tem um único endereço, o qual é informado por suas *coordenadas*, numa certa ordem. As coordenadas, no presente material e na matemática, são de fato números reais (pensados no sentido abstrato das palavras...), porém é viável comentar que, na vida real, os números usados nas representações das grandezas não são números reais e sim uma aproximação (tão boa o quanto se deseja!). As coordenadas de um ponto são representadas por $(x_p; y_p)$, as quais são, respectivamente, *abscissa* e *ordenada*.

Abscissa e ordenada (a menos que sejam iguais) se trocadas de posição interferem na representação do ponto no plano cartesiano. Na figura 9 a seguir, as coordenadas do ponto A são $(2;3)$ e identificam de modo único a localização do ponto A no plano cartesiano. Portanto, tenha cuidado quando for lidar com coordenadas de pontos!

Figura 9: Plano Cartesiano



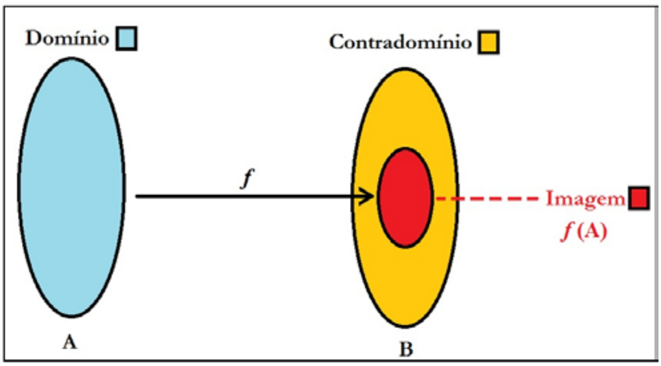
Fonte: arquivo pessoal.

P10) Determine as coordenadas dos pontos B, C, D, E, F, G, H. I, J, K e L na figura 9.

P11) Represente num mesmo plano cartesiano os pontos do problema anterior com as coordenadas “trocadas”. Faça a abscissa ser a ordenada e vice-versa.

Para o presente curso, a relação entre duas grandezas será chamada de *função*. A cada valor (partida) de uma grandeza “A”, na qual a relação faça sentido, será correspondido um único valor (chegada) da grandeza “B”. Nesse caso, todos os valores, os quais a grandeza A pode assumir e tenham sentido numérico na relação, definem o *conjunto domínio* da função. Todos os valores que podem ser assumidos pela grandeza B definem o *conjunto contradomínio* da função. Os valores da grandeza B que de fato estão relacionados com a grandeza A definem o *conjunto imagem* da função. Perceba o uso dos artigos definidos antes da palavra conjunto nas passagens anteriores. Isso significa que tais conjuntos são únicos e depende da função ou contexto que estão sendo estudados. O esquema da figura 10 a seguir procura ilustrar o que foi mencionado no parágrafo.

Figura 10: Ilustração sobre o Conceito de Função



Fonte: arquivo pessoal.

Ao transpor para o plano cartesiano as noções de conjunto domínio, conjunto contradomínio e conjunto imagem têm-se: os números reais (ou subconjunto de números reais) localizados no eixo horizontal determinam o domínio das funções, no eixo vertical ficam os números reais (ou subconjuntos de números reais) que determinam o contradomínio das funções. Quanto à imagem da função, é necessário conhecer o conjunto contradomínio. Assumiremos que *gráfico* de uma função f é um conjunto de pontos no plano cartesiano, tal que a abscissa (x) corresponde a um valor no domínio e a ordenada ao valor da imagem de x pela f. Em outras palavras, um ponto faz parte do gráfico de uma função f se, e somente se, as suas coordenadas forem do tipo $(x; f(x))$.

Os conhecimentos até agora construídos são úteis no entendimento das situações exigidas nas provas anuais do ENEM. As duas questões/problemas já apresentadas serão agora explanadas.

A questão 141 (figura 7) explicita um plano cartesiano no qual há uma relação entre duas grandezas, a saber: distância percorrida em quilômetros (km) e valor da diária (R$). O esboço gráfico permite observar um comportamento das grandezas bem entre as relações das locadoras P e Q. Quanto à pergunta: “O valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?”, considera-se que o sujeito consiga fazer uma leitura e apreensão das informações no contexto. Com isso, tem-se que a resposta para o problema é a alternativa D, ou seja, as ordenadas dos pontos que correspondem à locadora Q devem ser menores ou iguais do que as ordenadas dos pontos correspondentes à locadora P. Isso ocorre de acordo com as informações repassadas na alternativa D.

A partir do enunciado da questão 138 (figura 8), verifica-se uma relação entre duas grandezas, a saber: número de ligações (representado no eixo horizontal) e valor mensal pago por plano em reais (representado no eixo vertical). Com as informações do enunciado, infere-se que o comportamento da relação entre as grandezas é variável, ou seja, muda de acordo com o número de ligações feitas. De acordo com as informações do enunciado, para um número de ligações limitado a 100, o valor mensal a ser pago será de R$12,00. Com isso, para qualquer número de ligações realizado no intervalo de zero até 100, inclusive, o custo será de doze reais. Nas alternativas B e C, isso é mostrado no esboço gráfico. Entre 300 e 500 ligações, o valor fixo será de R$32,00, sendo que esse comportamento está mostrado na alternativa B.

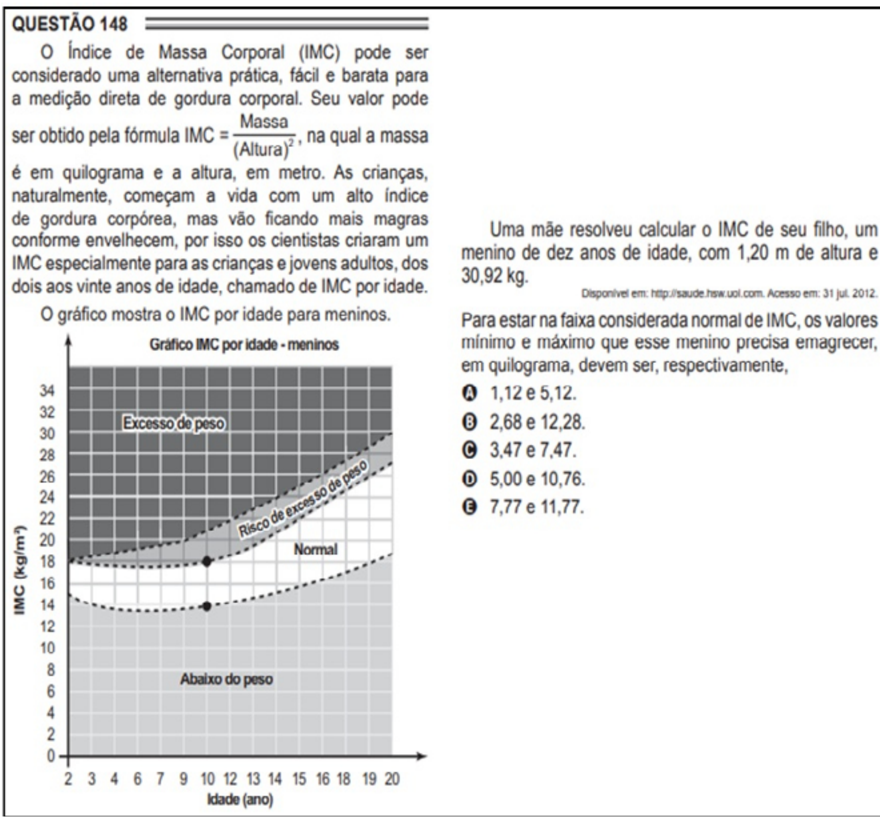
Contudo, a partir das informações do enunciado, precisamos inferir sobre o gasto quando o número de ligações está entre 101 e 300. Para tal, seja x a grandeza que representa o número de ligações de acordo com o contexto (entre 101 e 300). Acrescenta-se ao custo fixo de R$12,00 um custo variável que depende do número de ligações. Como cada ligação tem um custo de R$0,10, então ao final o sujeito terá gasto $(0,1).(x-100)+12$. O esboço de fato está na alternativa B, porém funções afins é o escopo do próximo módulo. Por enquanto *aceite* que o esboço de tal representação seja uma linha reta que une dois pontos.

Por fim, quando se discute o assunto funções, é necessário conhecer determinadas nomenclaturas. Cada uma das grandezas envolvidas em determinado problema, e que estão relacionadas por uma função, recebe nome específico: variável independente e variável dependente. "Variável" é pelo fato dos valores das grandezas estarem se alterando, "independente" soa como "a função assume valores que tornam o contexto válido" e "dependente" soa como "tem o seu valor intrinsecamente dependendo da variável independente". Portanto, quando se estabelece, cria, define-se a lei de uma função (relação entre duas grandezas), é notório dar-se conta que as duas grandezas envolvidas no contexto são variáveis, uma independente e outra dependente. Nos módulos seguintes, a diferenciação das variáveis (independente e dependente) no contexto será necessária.

A seguir são propostas situações-problema para que sejam explanadas as ideias debatidas aqui no texto do módulo II. Também serão propostos exercícios de caráter analítico, os quais serão úteis para o entendimento dos módulos seguintes.

P12) Prova Azul, ENEM, 2016.

Figura 11: Questão 148 ENEM/2016



QUESTÃO 148

O Índice de Massa Corporal (IMC) pode ser considerado uma alternativa prática, fácil e barata para a medição direta de gordura corporal. Seu valor pode ser obtido pela fórmula $\text{IMC} = \frac{\text{Massa}}{(\text{Altura})^2}$, na qual a massa é em quilograma e a altura, em metro. As crianças, naturalmente, começam a vida com um alto índice de gordura corpórea, mas vão ficando mais magras conforme envelhecem, por isso os cientistas criaram um IMC especialmente para as crianças e jovens adultos, dos dois aos vinte anos de idade, chamado de IMC por idade.

O gráfico mostra o IMC por idade para meninos.

Uma mãe resolveu calcular o IMC de seu filho, um menino de dez anos de idade, com 1,20 m de altura e 30,92 kg.

Disponível em: http://saude.hsw.uol.com. Acesso em: 31 jul. 2012.

Para estar na faixa considerada normal de IMC, os valores mínimo e máximo que esse menino precisa emagrecer, em quilograma, devem ser, respectivamente,

A 1,12 e 5,12.

B 2,68 e 12,28.

C 3,47 e 7,47.

D 5,00 e 10,76.

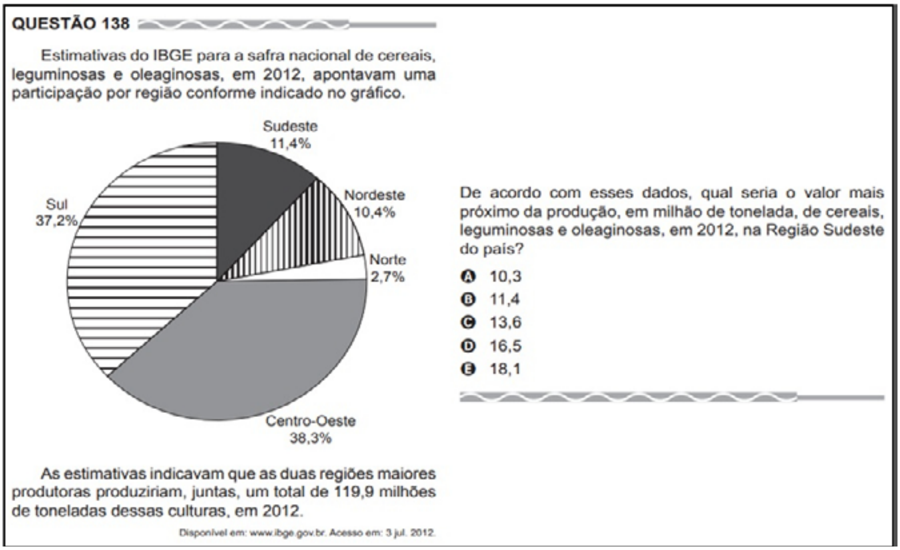
E 7,77 e 11,77.

Fonte: Prova Azul ENEM/2016[13].

13 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P13) Prova Cinza, ENEM, 2017.

Figura 12: Questão 138 ENEM/2017



QUESTÃO 138

Estimativas do IBGE para a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, apontavam uma participação por região conforme indicado no gráfico.

As estimativas indicavam que as duas regiões maiores produtoras produziriam, juntas, um total de 119,9 milhões de toneladas dessas culturas, em 2012.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 3 jul. 2012.

De acordo com esses dados, qual seria o valor mais próximo da produção, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país?

A 10,3
B 11,4
C 13,6
D 16,5
E 18,1

Fonte: Prova Cinza ENEM/2017[14].

14 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

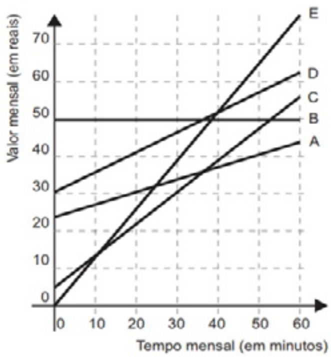
P14) Prova Rosa, ENEM, 2014.

Figura 13: Questão 160 ENEM/2014

QUESTÃO 160

No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular.

Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

A A
B B
C C
D D
E E

Fonte: Prova Rosa ENEM/2014[15].

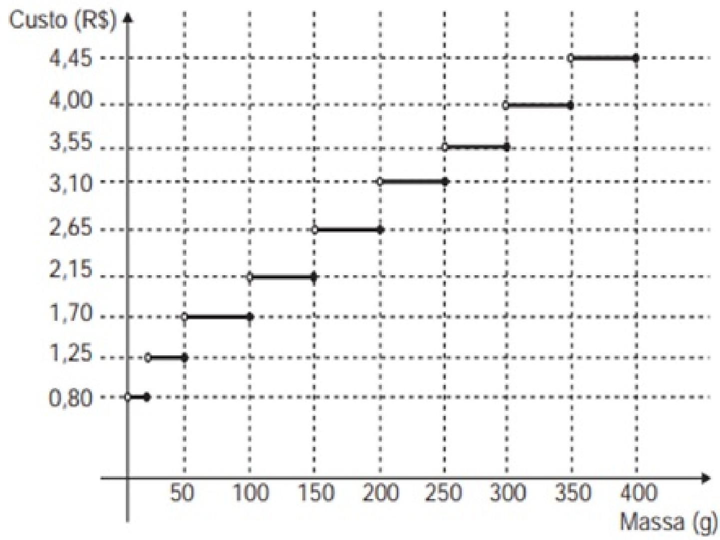
15 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P15) Prova Azul, ENEM, 2013.

Figura 14: Questão 161 ENEM/2013

QUESTÃO 161

Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



Disponível em: www.correios.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de

A 8,35.
B 12,50.
C 14,40.
D 15,35.
E 18,05.

Fonte: Prova Azul ENEM/2013[16].

16 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P16) Em cada uma das leis de funções abaixo, descreva matematicamente o conjunto domínio (chamaremos de $D(f)$ o conjunto domínio das funções).

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $f(x) = \dfrac{2}{4x - 3}$

c) $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{2}{5}}$

d) $f(x) = \dfrac{x + 4}{x}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x - 4}$

Sugestões de vídeos do YouTube™ que podem ser assistidos para complementar o estudo (todos os *links* abaixo foram acessados em maio de 2018):

Funções Noções Básicas (parte 1): https://youtu.be/SPZqQ5qn3P0

Funções Noções Básicas (parte 2): https://youtu.be/G3zjNRYbDv8

Funções Noções Básicas (parte 3): https://youtu.be/Y1urlgE0lBU

Funções Noções Básicas (parte 4): https://youtu.be/iC4q1AGeN5A

Funções Noções Básicas (parte 5): https://youtu.be/K7wtLRXGLJw

Funções Noções Básicas (parte 6): https://youtu.be/w13aeOGO3ZI

Funções Noções Básicas (parte 7): https://youtu.be/xsIMsYRl46M

Funções Noções Básicas (parte 8): https://youtu.be/5aLsdGSxCM4

2.2 REFLEXÕES SOBRE O *ENSINO* DE FUNÇÕES

Tal como ocorreu no módulo anterior, agora você encontrará uma seção que versa sobre o *ensino* do conteúdo abordado no módulo. Antecipo que a leitura da presente seção é facultativa. Novamente menciono sobre a importância de se conhecer, em um curso inicial de formação de professores, propostas de pesquisa já ocorridas no âmbito da educação básica.

Título: Gráficos e animações: uma estratégia lúdica para o ensino-aprendizagem de funções

RESUMO: "O conjunto de atividades que integram este trabalho foi construído com o propósito de promover um ensino-aprendizagem lúdico e dinâmico, a fim de estimular a memória gráfica e a inteligência visual. A sequência didática envolve o ensino de funções e foi aplicada na 1ª série do Ensino Médio. Com o equilíbrio entre a intuição e a visualização/concretização de idéias, acompanhado de uma linguagem Matemática formal, busca-se proporcionar uma aprendizagem significativa, em detrimento à tendência à memorização dos conteúdos. Neste intuito, são utilizados recursos de Informática na construção de objetos de aprendizagem animados (Flash 8), na exploração do plano cartesiano (Winplot) e apresentações multimídia (PowerPoint). As animações são voltadas a situações-problema relacionadas ao dia-a-dia e às demais Ciências, e a resgatar os conceitos de limite e de continuidade, outrora presentes neste nível de ensino. O material foi elaborado de forma a possibilitar o seu uso no computador e na TV. Uma pesquisa com professores de Matemática da Rede Estadual do Município de Alvorada revela que tecnologias pouco têm sido utilizadas na prática docente, nestas escolas."

Autor: Dircélia dos Santos

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10183/29993 (acesso em maio/2018)

Título: A leitura e interpretação de gráficos e tabelas no ensino fundamental e médio

RESUMO: "Cada vez mais se reconhece a importância do letramento estatístico, compreendido como a capacidade de utilizar os conceitos e procedimentos estatísticos na solução de problemas que permeiam o cotidiano dos cidadãos (Gal, 2002). Assim, o objetivo deste trabalho foi investigar e comparar as dificuldades que alunos, em diferentes estágios da escolaridade básica, apresentam ao ler e interpretar gráficos e tabelas. Foram sujeitos da pesquisa 399 alunos de 10 escolas públicas da cidade de São Paulo, sendo 159 da 5ª série e 80 da 8ª série do Ensino Fundamental e 160 alunos da 2ª série do Ensino Médio. Foi utilizado um questionário que incluiu quatro questões sobre a leitura de dados pontuais e globais contidos em gráficos e tabelas. Como referencial teórico foi utilizado a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (1995, 2003); os níveis de compreensão de leitura e interpretação de gráficos de Curcio (1989) e de tabelas de Wainer

(1995). Os resultados apontam que há avanços significativos de acordo com o nível de escolarização. Com relação à leitura de dados pontuais, esta não se constituiu problema para nenhum grupo de alunos. Já na leitura de dados globais, mesmo os alunos da série mais avançada apresentaram dificuldades, principalmente, na analise e cálculo de variação entre os dados. Concluímos que há uma urgência em se intensificar os estudos destas noções do tratamento da informação nas aulas de Matemática desde as séries iniciais."

Autores: Adriana Pagan, Ana Paula Leite e Sandra Magina

Link de acesso web:

http://www.lematec.net.br/CDS/SIPEMAT08/artigos/CO-76.pdf (acesso em maio/2018)

Título: Gráficos na mídia impressa

RESUMO: "Este artigo faz parte de estudo maior que teve como objetivo analisar gráficos veiculados na mídia impressa considerando três tipos de suporte: um jornal diário, uma revista semanal e uma mensal. Constatamos nesses suportes uma ampla utilização de gráficos, inclusive numa mesma reportagem. Observamos diferentes relações entre texto e gráfico, desde a descrição e análise do gráfico no texto até gráficos que não fazem parte da reportagem, mantendo apenas ligações temáticas com a mesma. Ressaltamos que apenas 6% dos gráficos analisados apresentavam a escala explícita e 39% das escalas apresentaram erro de proporcionalidade. Consideramos que esta pesquisa vem ratificar a importância do ensino-aprendizagem deste eixo matemático devido a sua presença constante no cotidiano dos indivíduos e da necessidade de compreensão destes para o desenvolvimento de uma atitude cidadã.”

Autores: Milka Rossana G. Cavalcanti, Karla Renata B. Natrielli e Gilda Lisbôa Guimarães.

Link de acesso web:

http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4038/3275 (acesso em maio/2018)

Título: O conceito de função no currículo de Matemática

RESUMO: “Este artigo apresenta alguns dos aspectos mais salientes da história e da natureza do conceito de função, bem como das suas ligações com as outras ciências e da sua utilização para o estudo de situações da realidade. O problema do seu enquadramento didáctico é equacionado em termos da natureza e generalidade do conceito, das suas formas de representação e do tipo de actividades a desenvolver pelos alunos, discutindo-se ainda as implicações derivadas da moderna tecnologia.”

Autor: João Pedro da Ponte

Link de acesso web:

http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4473/1/90%20Ponte%20EM%2015.pdf (acesso em maio/2018)

Título: Produção de sentidos no uso que se faz de gráficos

RESUMO: “Este artigo discute os sentidos que leitores potenciais de jornais e revistas produzem para relações quantitativas apresentadas graficamente em textos da mídia impressa. Nosso foco é o processo de semiotização próprio à produção de sentidos em um contexto extra-escolar, que ilustramos através da análise de entrevistas com uma adolescente de 16 anos. A partir de uma leitura crítico-metodológica das proposições de L. Wittgenstein em Investigações Filosóficas, propomos a noção de trânsito linguístico entre certa “gramática da escola” e os jogos de linguagem experienciados pelo sujeito no entendimento de gráficos, enquanto componente central do referido processo. O artigo visa contribuir para o debate acerca do uso que se faz de informações sobre quantidades na vida diária fora da escola, assim como para o desenvolvimento de uma perspectiva cognitiva acerca de questões relacionadas com a produção de sentidos.”

Autores: Luciano Lemos Meira e Marina Assis Pinheiro

Link de acesso web: http://www.scielo.br/pdf/epsic/v12n2/a01v12n2 (acesso em maio/2018)

3

Módulo III

Conteúdos abordados: Funções lineares. Grandezas diretamente proporcionais. Funções afins. Taxa de variação. Esboço gráfico. Zeros das funções lineares e afins. Modelos de crescimento/decrescimento linear. Situações-problema.

3.1 FUNÇÕES LINEARES E FUNÇÕES AFINS[17]

A partir deste módulo, o estudo ocorrerá sobre as funções reais de variável real específicas. O presente módulo tratará sobre as funções lineares e funções afins. Antecipo que a primeira é um tipo particular da segunda e isso será adiante explorado. Em cada módulo, serão usados os conteúdos dos módulos I e II, portanto, se ainda existir dúvida, visite novamente os materiais anteriores e faça uma consulta. Os tutores do curso também podem ser consultados. Também me coloco à disposição para consulta e troca de mensagem sobre o assunto.

A temática para início do estudo de cada função será a partir da apresentação e exploração de uma situação-problema, a qual mobiliza o pensamento e usa a matemática na construção de uma solução. Usaremos aqui também o *software* GeoGebra para o esboço de gráficos, portanto, caso tenha interesse, faça o *download* do *software* e instale em algum dispositivo (*notebook*, *tablet*, *desktop*, celular, ...) para o uso particular.

Situação-problema 1: O preço de uma corrida de táxi inclui uma parte fixa (bandeirada) mais um valor variável que depende do número de quilômetros rodados. Numa cidade, a bandeirada custa R$5,20 e o quilômetro rodado custa R$0,68. A partir dessas informações, explore os seguintes itens:

17 Inspirado no material produzido por Ana Lúcia Martini, Bruno Hubert, Juliana Ribeiro, Leandro Blum e Vera Anjos.

a) Determine o preço a pagar por uma corrida de 7,5 km. Se fossem percorridos 15 km, o que aconteceria com o valor da corrida? Se a corrida fosse de 30 km? Há proporcionalidade entre os valores pagos?

b) Considere que x seja o número de quilômetros percorridos e y o preço (R$). Você consegue elaborar uma lei matemática que relaciona x com y? Em caso afirmativo, explicite a lei. Descreva quem é, no contexto, a variável independente e dependente respectivamente.

c) Calcule a distância percorrida por um passageiro que pagou R$8,26.

d) A partir dos itens anteriores, faça um esboço do gráfico da função que relaciona as duas grandezas "distância percorrida" e "valor pago". Explore quem são os conjuntos "domínio" e "imagem" para a função.

Vamos fazer a análise por itens. Os argumentos para o item (a) serão: de acordo com o enunciado, a bandeirada (valor fixo) é de R$5,20 e para cada quilômetro rodado paga-se R$0,68. Nesse caso, uma corrida de 7,5 km custará ao passageiro $0,68 \times 7,5 + 5,2 = 10,30$. No caso de 15 km, o custo será de $0,68 \times 15 + 5,2 = 15,40$. E se a corrida for de 30 km o custo será de $0,68 \times 30 + 5,2 = 25,60$. A questão de proporcionalidade será debatida mais adiante em funções lineares, porém para o momento é suficiente entender que o questionamento é "caso dobre a distância percorrida, o valor pago também dobrará?". Observando-se os valores calculados, constata-se que não há proporcionalidade entre a distância percorrida e o valor pago, ou seja, mesmo que a distância percorrida dobre, o valor pago não necessariamente dobrará.

O item (b) será organizado a partir do item anterior. Observe que na situação-problema a variável independente será x, pois denota a quantidade de quilômetros da viagem. Já a variável dependente será y, pois denota o valor pago a partir da quantidade de quilômetros percorridos. Quando se calculou os valores, usou-se a expressão $0,68 \times (???\text{km}) + 5,2 = ???$ para expressar o valor pago. Nesse caso, fazendo-se as adaptações necessárias, obtém-se a expressão $0,68 \times (x) + 5,2 = y$ ou ainda, em notação mais enxugada e usual, $y = 0,68x + 5,2$.

O item (c) questiona sobre qual distância se percorreu para gerar um gasto de R$8,26. Nesse caso, solicita-se o valor que a variável independente tem para produzir o valor da variável dependente de R$8,26. Pela lei (expressão), devemos calcular x que verifique a igualdade: $8,26 = 0,68x + 5,2$. Pelo passo a passo, resolvendo a equação de primeiro grau[18], tem-se:

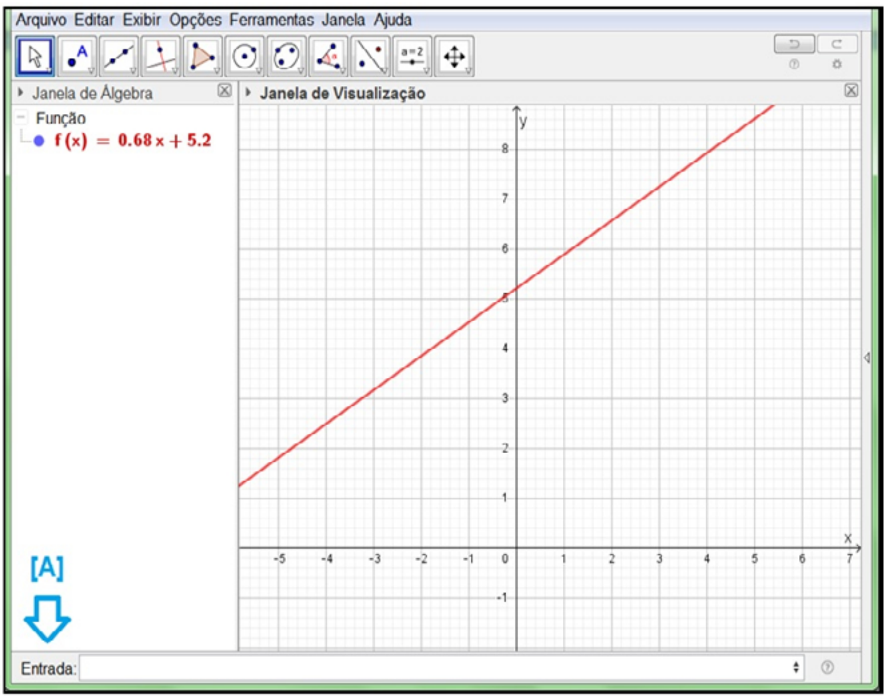
$$\begin{cases} 0,68x + 5,2 = 8,26 \quad \Leftrightarrow \\ 0,68x + 5,2 - 5,2 = 8,26 - 5,2 \quad \Leftrightarrow \\ 0,68x = 3,06 \quad \Leftrightarrow \\ \dfrac{0,68x}{0,68} = \dfrac{3,06}{0,68} \quad \Leftrightarrow \\ x = 4,5 \\ 4,5km \end{cases}$$

18 Uma equação do primeiro grau da forma $ax + b = c$ tem solução, por meio de etapas aritméticas, $x = \dfrac{c-b}{a}$ (sempre que "*a*" é não nulo).

Logo, ao percorrer um trajeto de 4,5 km, o passageiro terá um custo de R$8,26.

O item (d) solicita que seja feito um esboço de gráfico. Para tal, vamos usar o *software* GeoGebra. Ao digitar na caixa de entrada [A] a expressão $0,68x+5,2$, o esboço que surge na tela é:

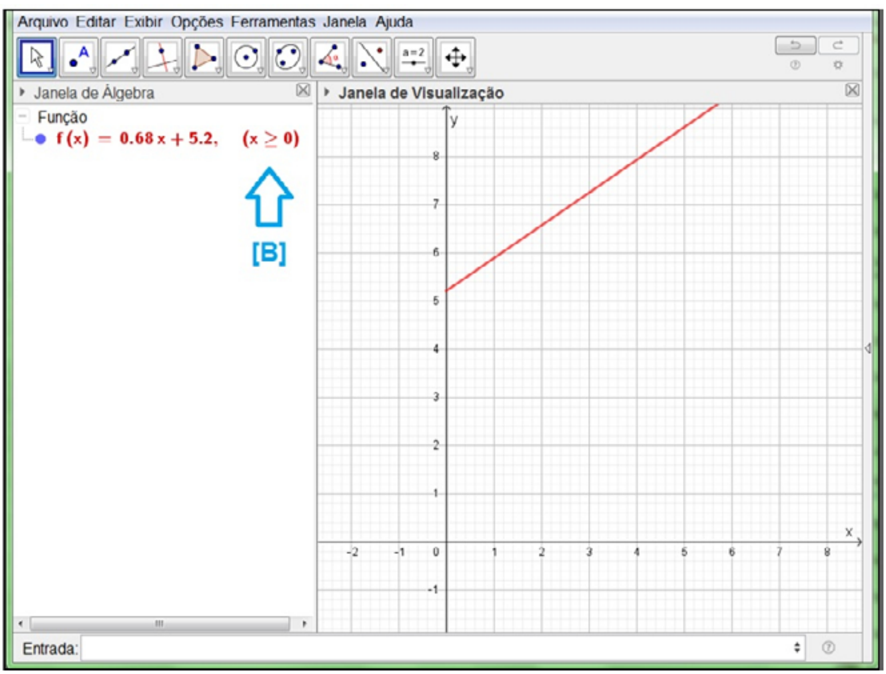
Figura 15: Esboço do Gráfico da Função Afim $f(x)=0,68x+5,2$



Fonte: arquivo pessoal.

Duas observações, a partir do esboço anterior, precisam ser feitas. A primeira é que a grandeza "valor pago" foi chamada/rotulada por "$f(x)$". Não há problemas em considerar a grandeza pelo nome $f(x)$. O entendimento que se deve ter aqui é: $f(x)$ é o valor da imagem de x pela f, ou seja, o valor pago a partir de percorridos x quilômetros. A segunda observação é: observe que há esboço de pontos para valores negativos da variável independente x. Nesse caso, não faz sentido na situação-problema considerar quantidades negativas $(x < 0)$ de quilômetros, portanto cabe aqui a restrição [B] quanto aos valores que a variável independente possa assumir. Neste caso, o esboço mais correto será:

Figura 16: Esboço do Gráfico da Função $f(x) = 0,68x + 5,2$ com Restrição



Fonte: arquivo pessoal

A partir do esboço da figura 16, vamos debater sobre os conjuntos "domínio" e "imagem" para a função $f(x)=0,68x+5,2$. Com a imposição da restrição, temos que os valores, os quais a variável independente pode assumir, são $x \geq 0$. Logo, $D(f)$ será $D(f)=\{x \in R \,/\, x \geq 0\}$. Escrevemos anteriormente que "xis" é um número real no conjunto de domínio, mas será que faz sentido isso? Claramente não... Lembra da discussão sobre números reais no módulo I? Pois é... as funções têm variável real, porém o valor, enquanto número real, não é contemplado, ou seja, SE o objeto função for tratado da forma "objeto matemático abstrato", SIM, as funções são reais e os números que estão no seu domínio/contradomínio/imagem SÃO números reais. Caso contrário, em situações-problema, as quais modelam um contexto, os números usados serão aproximações. A conclusão, depois de toda a conversa, é que mesmo que não se perceba no GeoGebra o esboço do gráfico está cheio de "buracos"[19].

Sobre o conjunto imagem, observa-se que o mesmo seja um subconjunto do contradomínio (discussão feita no módulo II). Como $x \geq 0$, temos que $f(x)=0,68x+5,2 \geq 5,2$. Com isso, todos os valores $f(x)$ da imagem são tais que $f(x) \geq 5,2$.

19 Para os propósitos do texto, não vejo problema em "entender" as linhas de forma contínua, mas em termos matemáticos, deve-se ter noção da diferenciação entre OBJETO ABSTRATO e um MODELO APROXIMADO. A discussão é ampla e não cabe aqui no texto... Portanto, caso deseje, consulte algum livro de "análise matemática na reta real" para um estudo mais minucioso sobre a temática.

Após o estudo da primeira situação, eis a segunda:

Situação-problema 2: Uma fábrica produz três tipos de camisetas (A, B e C respectivamente). Cada uma delas tem um valor fixado para a venda e para o custo. Observe as informações a seguir:

Camiseta do tipo A (valores por unidade): venda de R$1,75 e custo de R$1,00.

Camiseta do tipo B (valores por unidade): venda de R$2,50 e custo de R$1,50.

Camiseta do tipo C (valores por unidade): venda de R$6,60 e custo de R$4,60.

Com base nisso, explore os seguintes itens:

a) O lucro da empresa quando você compra 100 camisetas do tipo A.

b) O lucro da empresa quando você compra 100 camisetas do tipo B.

c) O lucro da empresa quando você compra 100 camisetas do tipo C.

d) Escreva a função lucro $l_A(x)$ na venda de x camisetas do tipo A. Idem para as camisetas do tipo B e C.

e) Faça um esboço no mesmo sistema cartesiano de eixos dos gráficos de $l_A(x)$, $l_B(x)$ e $l_C(x)$, identificando as variáveis independentes e dependentes.

Tal como na situação-problema anterior, vamos explorar os itens.

Os itens (a), (b) e (c) são idênticos quanto ao pensamento a ser utilizado. Observe que a diferença "venda – custo" define lucro. Assim, o lucro na venda de cada tipo de camiseta será:

$1,75 \times 100 - 1,00 \times 100 = 175 - 100 = 75$ (camiseta A)

$2,50 \times 100 - 1,50 \times 100 = 250 - 150 = 100$ (camiseta B)

$6,60 \times 100 - 4,60 \times 100 = 660 - 460 = 200$ (camiseta C)

A partir dos valores calculados, pode-se ter a inspiração para a construção das leis $l_A(x)$, $l_B(x)$ e $l_C(x)$, identificando as variáveis independentes e dependentes no contexto (item (d)). Primeiramente, x será a variável independente e representará a quantidade de camisetas (de algum tipo) vendidas. O lucro será a variável dependente, o qual necessita da quantidade de camisetas vendidas para existir. Nesse caso, e com as informações do problema, tem-se que:

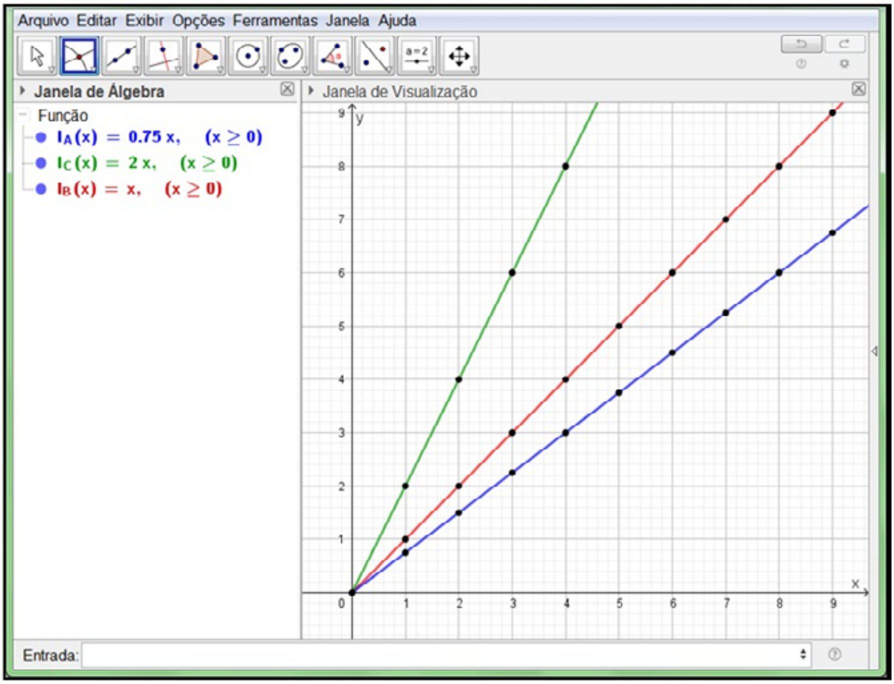
$l_A(x) = 1,75 \times (x) - 1,00 \times (x) = 1,75x - 1,00x = 0,75x$ (camiseta A)

$l_B(x) = 2,50 \times (x) - 1,50 \times (x) = 2,50x - 1,50x = 1x = x$ (camiseta B)

$l_C(x) = 6,60 \times (x) - 4,60 \times (x) = 6,60x - 4,60x = 2x$ (camiseta C)

Para o item (e), usaremos o *software* GeoGebra para construir o esboço dos gráficos. A mesma discussão feita para a primeira situação-problema desse módulo cabe aqui, ou seja, mesmo que a variável seja um "número real", o contexto exige que sejam considerados apenas valores inteiros positivos. Com isso, os esboços das relações de lucro para o problema são os pontos marcados em preto na figura a seguir. Contudo, deixamos indicado nas cores azul, verde e vermelho o esboço das leis $l_A(x)$, $l_B(x)$ e $l_C(x)$. Novamente, pelo contexto "xis", não pode ser um número real de fato, porém podemos "aceitar" sem problemas que a linha de cada esboço seja contínua.

Figura 17: Esboço das Relações de Lucro



Fonte: arquivo pessoal.

A partir das funções de lucro construídas no problema anterior, é possível refletir sobre "proporcionalidade". Note que para cada função, se o número de camisetas "triplica" em quantidade, então o lucro também triplica. Se o número de camisetas "dobra", o mesmo ocorre com o lucro. Isso acontece, pois a "função de lucro" aqui construída para cada camiseta é um exemplo de "função linear", ou seja, funções nas quais ocorre $f(k.x) = k.f(x)$ para qualquer valor de k (isso é válido para esse tipo de função, pois são atendidas as condições do teorema fundamental da proporcionalidade). Caso a proporcionalidade fosse inversa, aconteceria

$$f(k.x) = \frac{f(x)}{k}$$

para valores não nulos de k. Nesse caso, se dobrasse uma grandeza, a outra ficaria reduzida à metade. Se triplicasse uma das grandezas, a outra ficaria reduzida à terça parte, e assim por diante.

Uma característica fundamental das funções afins (f) refere-se ao fato dos pontos $(x; f(x))$ estarem colineares (alinhados). Isso caracteriza um tipo específico de comportamento variacional que é conhecido em matemática por "taxa de variação". Considerando-se, sem a "pilha de teoremas para tal", que as funções afins têm a aparência estrutural $f(x) = Ax + B$, para constantes numéricas A e B, pode-se dizer que a taxa de variação[20] para essas funções é *constante*, ou seja (supondo $a \neq b$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{A.a + B - (A.b + B)}{a - b} = \frac{A(a - b)}{a - b} = A$$

Observe que esse mesmo comportamento ocorre para as funções lineares, que podem ser caracterizadas por $f(x) = Ax$, para uma constante numérica A (novamente supondo $a \neq b$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{A.a - (A.b)}{a - b} = \frac{A(a - b)}{a - b} = A$$

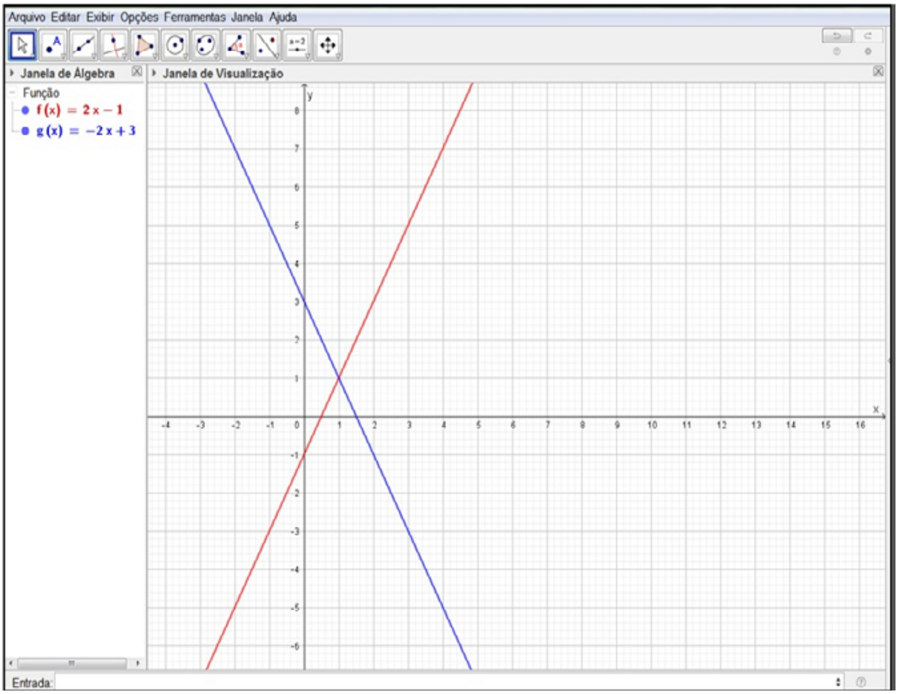
20 Vamos assumir sem "delongas" que a taxa de variação para uma função f seja a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Isso (taxa de variação constante) não ocorrerá para as funções que serão estudadas nos próximos módulos! Adiante veremos que os comportamentos de variação para as outras funções do curso ocorrerão de forma não constante, caracterizando assim um não alinhamento de pontos, quando for feito o esboço do gráfico.

Se a taxa de variação é constante, igual a um número, esse tem sinal (positivo ou negativo). Isso será o determinante para sabermos se a função afim (em particular, linear) é crescente ou decrescente. Quando a *taxa de variação for positiva* $(A > 0)$, diz-se que a função afim (respectivamente linear, em particular) é *crescente*. Quando a *taxa de variação for negativa* $(A < 0)$, diz-se que a função afim (respectivamente linear, em particular) é *decrescente*. A seguir, nas análises de esboços gráficos, constataremos que isso se reflete em olhar no sentido de crescimento dos números no domínio (já assimile que a ideia de crescimento/decrescimento pode ser estendida para outros tipos de funções...). Portanto, se uma função afim tem taxa de variação positiva, então a reta do esboço gráfico tem aclive (crescente) no sentido de aumento dos valores do domínio. Caso a taxa de variação da função afim seja negativa, então a reta do esboço gráfico tem declive (decrescente) no sentido de aumento dos valores do domínio.

A figura 18 ilustra o que foi debatido até então. A função $f(x) = 2x - 1$ tem taxa de variação positiva, a saber, 2, logo a reta que esboça o gráfico da função tem comportamento crescente. A função $g(x) = -2x + 3$ tem taxa de variação negativa, a saber, -2, portanto a reta que esboça o gráfico da função tem comportamento decrescente.

Figura 18: Aclive e Declive de Funções Afins



Fonte: arquivo pessoal.

P17) O que acontece com a função afim caso a taxa de variação seja nula? Explore.

A partir da caracterização da função afim como $f(x) = Ax + B$, podemos pensar no chamado "zero da função". A noção de "zero da função" se estende para todas as outras que serão exploradas no curso, portanto, esclarecida aqui a ideia, basta aplicá-la adiante conforme a demanda e necessidade.

Chama-se *zero de uma função real* f o número real x, tal que $f(x) = 0$. De outro modo, é todo número (ou conjunto de números no domínio) que ao ser computado pela função f resulta em imagem nula. Em coordenadas, os pontos que correspondem ao(s) zero(s) de uma função são indicados por $(x;0)$.

Façamos um exemplo para ilustrar a conversa teórica feita após a situação-problema 2. Considere a função afim representada pela lei: $g(x) = 3x - 4$.

a) Calcule a taxa de variação para a função $g(x)$ e infira sobre o comportamento da função.

Aqui se pode usar o procedimento explicado anteriormente para obter

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ou observar que nessa informação está o coeficiente "3" escrito antes da variável independente. Nesse caso, a taxa de variação é positiva e vale 3, caracterizando assim uma função com comportamento crescente.

b) Calcule o zero da função $g(x)$.

O zero da função afim será obtido resolvendo-se a equação: $3x - 4 = 0$. Neste caso,

$$x = \frac{4}{3}$$

c) Esboce um gráfico para $g(x)$.

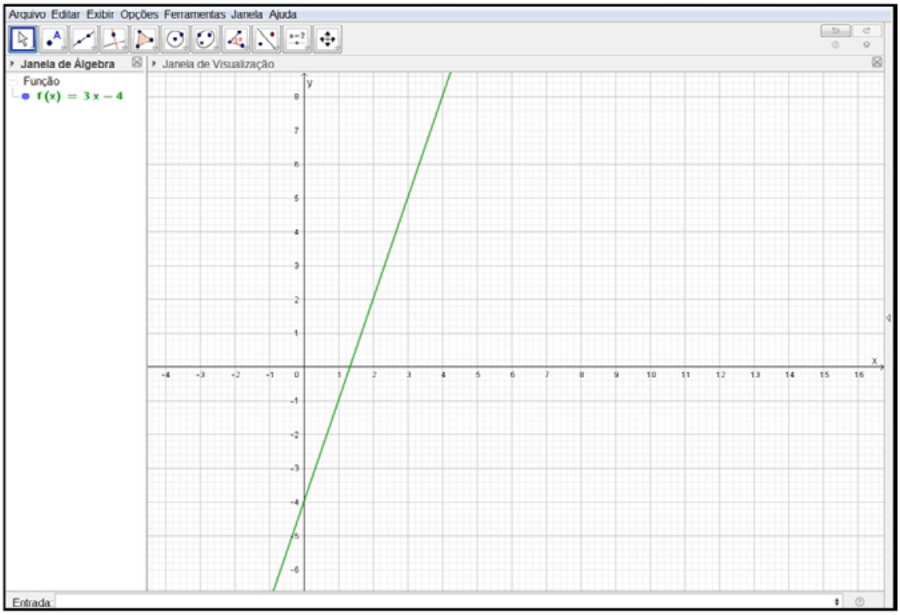
Usando o *software* GeoGebra, o esboço para o gráfico da função está mostrado na Figura 19, a seguir.

d) Mencione o que são os conjuntos Domínio e Imagem para $g(x)$.

Aqui não há restrições ou contextos atrelados a uma situação, logo o conjunto domínio será o maior conjunto numérico possível, no escopo desse curso, ou seja, o conjunto dos números reais. A notação fica $D(g) = R$. Quanto ao conjunto imagem, todos os números do contradomínio (que é R) são imagem de algum número do conjunto domínio, portanto o conjunto imagem é também R.

Observe o *termo independente* nesse exemplo. Em todas as situações, em particular nesse exemplo, o termo independente na lei de uma função indicará o intercepto "y". O intercepto y, em outras palavras, é a imagem (ou ordenada) do ponto de abscissa nula. No exemplo aqui explorado, ele é o ponto de coordenadas $(0; -4)$.

Figura 19: Esboço do Gráfico da Função $g(x) = 3x - 4$

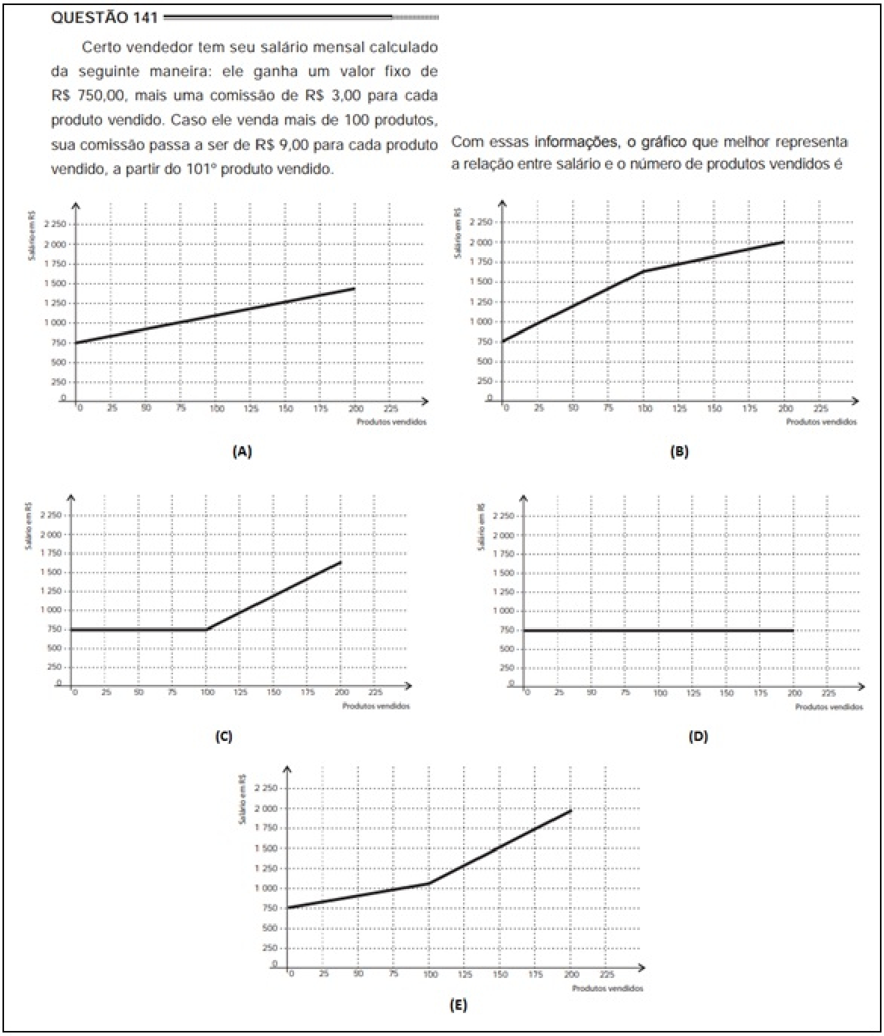


Fonte: arquivo pessoal.

A seguir, são propostas situações-problema para que sejam explanadas as ideias debatidas aqui no texto do módulo III. Após os problemas, você encontrará uma lista com sugestões de vídeos sobre o assunto aqui debatido e que podem enriquecer o estudo.

P18) Prova Cinza, ENEM, 2012.

Figura 20: Questão 141 ENEM/2012


QUESTÃO 141

Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R$ 750,00, mais uma comissão de R$ 3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R$ 9,00 para cada produto vendido, a partir do 101° produto vendido.

Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é

Fonte: Prova Cinza ENEM/2012[21].

21 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

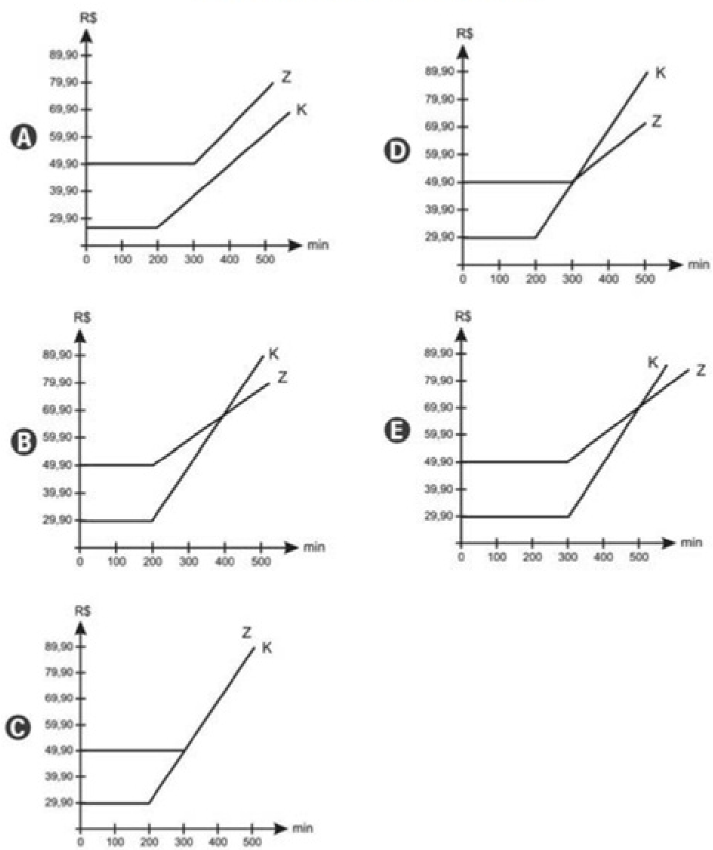
P19) Prova Azul, ENEM, 2011.

Figura 21: Questão 179 ENEM/2011

QUESTÃO 179

Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é

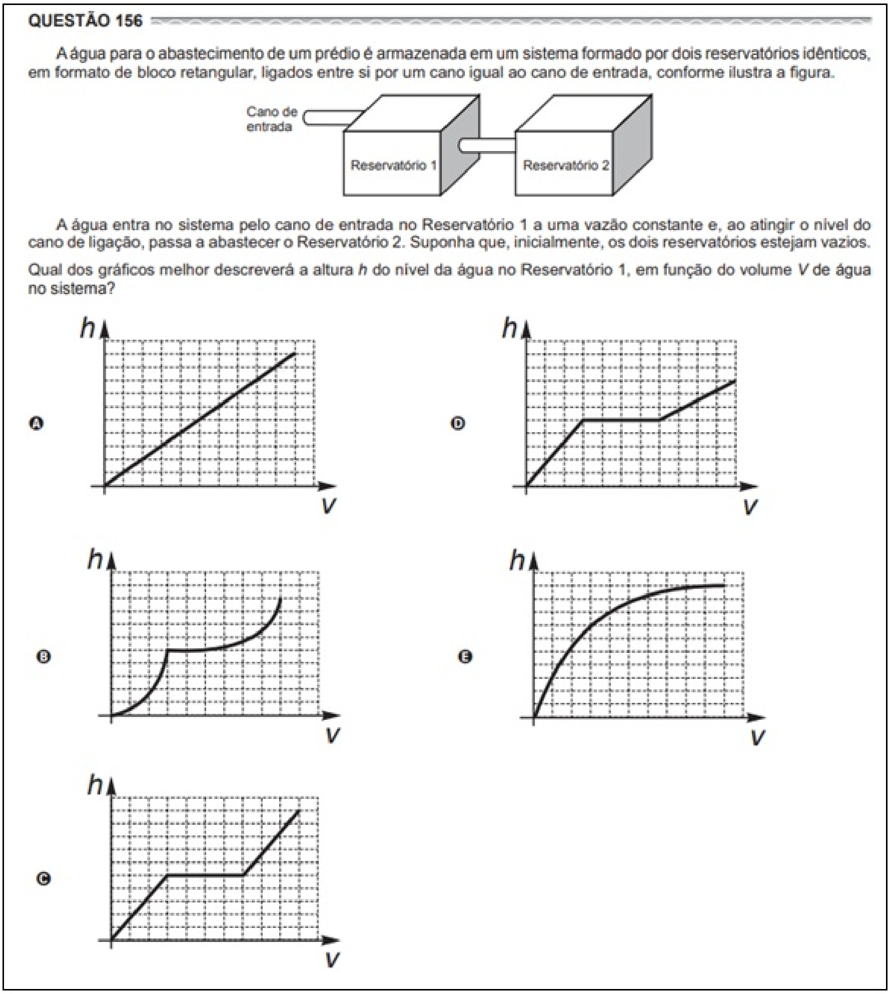


Fonte: Prova Azul ENEM/2011[22].

22 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P20) Prova Amarela, ENEM, 2017.

Figura 22: Questão 156 ENEM/2017


QUESTÃO 156

A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.

A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.

Qual dos gráficos melhor descreverá a altura *h* do nível da água no Reservatório 1, em função do volume *V* de água no sistema?

Fonte: Prova Amarela ENEM/2017[23].

23 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P21) Uma companhia de telefones celulares oferece a seus clientes duas opções: na primeira opção, cobra R$35,00 pela assinatura mensal e R$0,50 por minuto de conversação; na segunda, não há taxa de assinatura, mas o minuto de conversação custa R$1,20. Com base nessas informações, explore os seguintes itens.

a) Qual o plano mais vantajoso para uma hora de conversação mensal?

b) Explore as vantagens e desvantagens de cada plano ofertado pela operadora. Para tal, esboce os gráficos para os custos em cada plano, em um mesmo plano cartesiano.

P22) Ao chegar a um aeroporto, um turista informou-se sobre a locação de automóveis e organizou as seguintes informações na forma de tabela:

Opções	Diária	Preço por km rodado
Locadora 1	R$60,00	R$0,50
Locadora 2	R$80,00	R$0,35
Locadora 3	R$160,00	km livre

Com base nesta tabela, explore os seguintes itens:

a) Qual o custo de diária em cada locadora para realizar um passeio de 80 km? Qual a locadora mais em conta?

b) Construa para cada locadora a função custo da diária, em termos do número de quilômetros rodados em um dia.

c) Esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções construídas em (b) e faça inferências sobre qual a vantagem de cada locadora.

d) Há uma quantidade mínima de quilômetros que faça o turista *sempre* escolher a locadora 3?

P23) Uma relação curiosa é sobre como obter uma estimativa para o número do sapato que usamos[24]. A partir da medida do comprimento do pé (*x*), é possível obter o número do calçado a ser usado por meio da relação:

$$N(x) = \frac{5x + 28}{4}$$

Tenha o bom senso para efetuar arredondamentos para "mais", caso seja necessário.

a) Meça o seu pé e verifique se a função fornece o número de calçado que você de fato usa.

b) A pessoa que tem o comprimento do pé com 28 cm usa qual numeração de calçado de acordo com a relação $N(x)$?

c) Um calçado número 36 está relacionado com um pé de qual medida?

d) Faça um esboço do gráfico de $N(x)$ e tente explicar o que seria $N(0)$.

24 Disponível em: https://escolakids.uol.com.br/a-matematica-e-o-numero-que-voce-calca.htm. Acesso em: maio 2018.

Sugestões de vídeos do YouTube™ que podem ser assistidos para complementar o estudo (todos os *links* abaixo foram acessados em maio de 2018):

Função Afim (parte 1): https://youtu.be/hdMFIAv5GkU

Função Afim (parte 2): https://youtu.be/-EnodYhcQw4

Função Afim (parte 3): https://youtu.be/yTfNuU2xrrc

Função Afim (parte 4): https://youtu.be/2KWDWpmDZwQ

Função Afim (parte 5): https://youtu.be/xDTd2a4NJ40

Função Afim (parte 6): https://youtu.be/Bs2YIb4x2V8

Função Afim (parte 7): https://youtu.be/567sWGTnf5Q

Função Afim (parte 8): https://youtu.be/PgOLmJ00KPQ

Função Afim (parte 9): https://youtu.be/5FpSn7-k2sk

3.2 REFLEXÕES SOBRE O *ENSINO* DE FUNÇÕES LINEARES E FUNÇÕES AFINS

Se você está se encorajando a ler esta seção, ótimo! Sinta-se convidado para explorar a temática dos trabalhos indicados. Eles versam sobre o *ensino* do conteúdo abordado no módulo. E se você ficou curioso e quer voltar para explorar as duas seções opcionais dos módulos anteriores, sinta-se convidado.

Título: Fragmentações e aproximações entre matemática e física no contexto escolar: problematizando o conceito de função afim

RESUMO: "Teve como preocupação a investigação do processo de construção e compreensão do conceito de função, no contexto do ensino de Matemática. Aponta fragilidades e possibilidades deste ensino, bem como sua ligação com fenômenos naturais, estudados na física. Desenvolveu uma proposta alternativa para o ensino do conceito de função afim, através da abordagem dos conceitos unificadores. Acreditamos que a associação destes elementos permite o redimensionamento do conceito de função afim, para além da Matemática, aproximando-o com o ensino da física."

Autor: Janice Pereira Lopes

Link de acesso web: http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/87093 (acesso em maio/2018)

Título: Função afim *y = ax + b*: a articulação entre os registros gráfico e algébrico com o auxílio de um *software* educativo

RESUMO: "Este trabalho tem por objetivo estudar a aquisição de saberes relacionados aos coeficientes da equação y = ax + b pela articulação dos registros gráfico e algébrico da função afim, com o auxílio de um *software* construído especialmente para esta finalidade. Para atingir este objetivo foi elaborada uma sequência didática baseada em alguns princípios da Informática na Educação e na teoria de Raymond Duval (1999), que considera importante para as representações gráficas o procedimento de interpretação global, e leva em consideração a discriminação de variáveis visuais pertinentes e a percepção das variações correspondentes na escrita algébrica. A sequência foi trabalhada com 5 duplas de alunos da 2ª série do ensino médio de uma escola particular em São Paulo. Os resultados obtidos revelam que houve uma evolução em relação à construção de significados dos coeficientes da representação algébrica da função afim associados a sua representação gráfica, isto é, a reta correspondente. A investigação evidencia que o ambiente informático estabelecido possibilitou uma nova forma de trabalhar com os alunos, de avaliar seus desempenhos, enfim, de desenvolver o processo de ensino-aprendizagem da função afim, mais especificamente da conversão do registro gráfico para o algébrico."

Autor: Edivaldo Pinto dos Santos

Link de acesso web:

https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11148 (acesso em maio/2018)

Título: Modelagem Matemática e introdução da função afim no ensino fundamental

RESUMO: "O principal objetivo dessa dissertação é apresentar uma proposta para o ensino de função afim, desenvolvendo-se todas as atividades em turmas de primeiro ano do terceiro ciclo, o equivalente ao sétimo ano do Ensino Fundamental, a partir do emprego da Modelagem Matemática inserida em um cenário para investigação e compreendida como ambiente de aprendizagem. Pretende, também, verificar a pertinência de trabalhar tal conteúdo matemático com alunos dessa faixa etária. A turma investigada frequentava, na ocasião em que a proposta foi realizada, uma Escola de Ensino Fundamental da rede Municipal de Porto Alegre. Como referencial teórico, os estudos foram fundamentados, principalmente, nos conceitos de Modelagem Matemática, apresentados por Barbosa (2001), Biembengut (2000) e Skovsmose (2000). Para a investigação, a metodologia de pesquisa utilizada foi o Estudo de Caso. O tema da Modelagem Matemática teve como base uma investigação acerca dos planos de telefonia celular oferecidos pelas companhias existentes no Rio Grande do Sul, com o intuito de descobrir qual delas apresenta a proposta mais vantajosa, dependendo da necessidade do cliente. Durante os encontros, houve transição entre os diferentes ambientes de aprendizagem de Skovsmose (2000), bem como entre os diferentes casos propostos por Barbosa (2001). O desempenho dos alunos durante as aulas e os resultados por eles apresentados no final da sequência de atividades mostrou que a proposta desenvolvida é válida e adequada para a faixa etária em questão, bem como que, através da

Modelagem Matemática, ocorre uma melhor compreensão da Matemática envolvida no trabalho. Como produto final, há ainda o material elaborado durante a realização do trabalho, o qual pode ser utilizado futuramente por professores que busquem valer-se de atividades semelhantes em suas aulas."

Autor: Belissa Schonardie

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10183/32422 (acesso em maio/2018)

Título: Modelação e utilização das tecnologias no estudo da função afim: um estudo de caso

RESUMO: "Esta investigação visa conhecer os processos e estratégias de alunos do 8.º ano em situações problemáticas realistas, recorrendo ao *software* GeoGebra no estudo da função afim, tendo por base uma sequência de tarefas implementada na aula de Matemática. O quadro teórico aborda três temas essenciais para o desenvolvimento do estudo: a educação matemática realista (RME) e toda uma didáctica específica inerente a esta perspectiva teórica, o desenvolvimento da investigação relativa ao ensino e à aprendizagem da álgebra, destacando a sua importância quer na Matemática quer na sociedade actual, e a utilização das tecnologias, tendo em conta as suas potencialidades pedagógicas no trabalho dos alunos em sala de aula. A abordagem metodológica adaptada é qualitativa, de cariz interpretativo, tendo como modalidade de investigação o estudo de caso e utilizando como instrumentos de recolha de dados a observação participante, com registro em áudio e vídeo na sala de aula, a entrevista semi-estruturada, o diário de bordo e a recolha documental (em papel e em ficheiros informáticos). A experiência de ensino que constitui o contexto do presente estudo desenvolveu-se numa turma de 8.º ano de escolaridade com o novo programa de matemática do ensino básico. A sequência de sete tarefas apresentada aos alunos privilegia a utilização da Matemática, e em particular dos conceitos de variação linear e de função afim, para a compreensão de problemas reais, com recurso a modelos computacionais. No estudo de situações concretas de variação linear, o GeoGebra teve como principal efeito suscitar uma análise de índole geométrica do modelo matemático, que se sobrepôs a procedimentos de natureza algébrica, como seja a concretização de valores de uma variável numa equação para determinar a outra variável. Em segundo lugar, destaca-se a eficácia dos alunos na utilização das ferramentas oferecidas pelo *software* para atingirem os seus objectivos de análise e exploração dos modelos. Um dos pares de alunos observados usou o *software* como um ambiente intelectual em que foram aproveitadas as possibilidades gráficas e, sobretudo, a combinação entre diversas formas de representação matemática. Uma das principais vantagens do GeoGebra parece ser a ênfase no mecanismo de passagem entre diferentes tipos de representação: gráfica, geométrica, algébrica, etc., contribuindo assim para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos (variáveis independentes e dependentes, taxa de variação, função afim, declive da recta, ordenada na origem e influência de parâmetros no comportamento da função). Os resultados revelam ainda que os alunos se apropriaram da noção de modelo matemático e das suas possíveis formas de descrição e formulação, desenvolvendo conceitos matemáticos fundamentais em tarefas que evoluíram desde a análise de modelos associados a problemas concretos até à construção de um modelo matemático geral e abstracto da função afim."

Autor: Maria de Fátima Maduro Canário

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10451/6038 (acesso em maio/2018)

Título: Análise de uma sequência didática para a aprendizagem do conceito de função afim

RESUMO: "Esta pesquisa teve como objetivo principal investigar os efeitos de uma sequência didática nas concepções de alunos do 1º ano do Ensino Médio em relação ao conceito de Função Afim, abordado a partir da resolução de problemas de contexto realístico. A sequência didática composta de dois grupos de atividades foi elaborada com ênfase na compreensão da noção de variação entre grandezas lineares, privilegiando a articulação entre as representações em linguagem natural, gráfica, algébrica e tabular da Função Afim. De acordo com a literatura pesquisada, o estudo de situações que introduzam o conceito de função por meio de grandezas que variam, uma dependendo da outra, pode facilitar a construção do conceito de Função Afim. Fundamentamos a elaboração e a aplicação da sequência em alguns princípios da

Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1982), segundo a qual os fenômenos que regem o processo de ensino-aprendizagem envolvem três polos: o professor, o aluno e o saber. Para este autor, a aprendizagem de um objeto matemático está diretamente ligada ao envolvimento do aluno na busca da solução de um problema, por intermédio de uma situação didática formulada pelo professor. A sequência foi aplicada em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade do Recife – PE. Os resultados obtidos nos levam a concluir que houve uma evolução nas concepções dos alunos, na apreensão do conceito de Função Afim, propiciado pela compreensão do relacionamento entre as variáveis dependente e independente e pelas devidas conexões entre as diferentes representações da função."

Autor: Julienne Jane Barbosa Dornellas

Link de acesso web:

http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/5908 (acesso em maio/2018)

4

Módulo IV

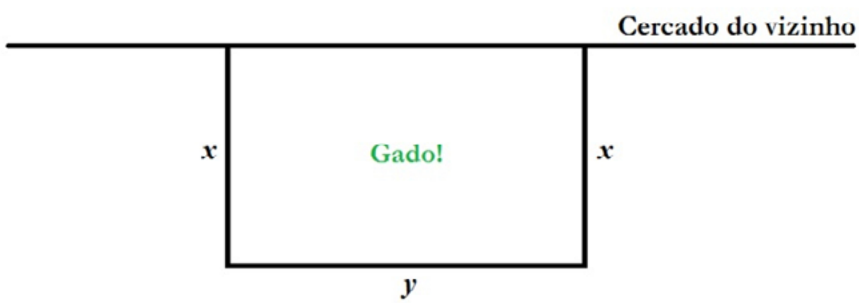
Conteúdos abordados: Funções quadráticas: domínio e imagem, esboço gráfico, ponto de mínimo/ponto de máximo, valor mínimo/valor máximo da função, crescimento/decrescimento. Obtenção de raízes por completamento de quadrados. Zeros da função quadrática. Modelagem envolvendo funções quadráticas. Composições de funções quadráticas e lineares: translações, alongamentos e compressões. Situações-problema.

4.1 FUNÇÕES QUADRÁTICAS[25]

Iniciaremos o estudo das funções quadráticas com a seguinte situação-problema: Um fazendeiro quer construir um cercado em forma de um retângulo para confinar gado. Com o dinheiro que ele tem é possível fazer apenas 200 metros (lineares) de cerca. Resolveu, então, aproveitar uma parte da cerca do vizinho para economizar e construiu, com apenas 3 lances de cerca, um cercado retangular. Construa uma função que permita obter a área desse cercado, de acordo com as dimensões do retângulo, e conjecture sobre uma maneira de otimizar o problema, em termos da área cercada ser a maior possível.

Um esboço com a vista superior da situação pode ser visto na figura a seguir:

Figura 23: Esboço do Cercado



Fonte: arquivo pessoal.

25 Inspirado no material produzido por Kristine Sheila Schuster, Leonardo Thomaz Sauter e Maurício Corrêa da Rosa.

A partir do contexto, definindo-se as dimensões do retângulo do cercado como x e y e lembrando que a área de um retângulo é calculada fazendo-se o produto da largura e comprimento, temos $2x + y = 200$ e a função área será $A(x, y) = x.y$. Observe que a função área tem duas variáveis, porém há um vínculo implícito entre elas (pelo contexto dos 200 metros de cerca). Portanto, podemos reescrever a função área com apenas uma variável, digamos x . Nesse caso, temos $A(x) = x.(200 - 2x) = 200x - 2x^2$, pois da relação $2x + y = 200$ segue que $y = 200 - 2x$. A situação-problema exige, implicitamente, que ambas as variáveis x e y sejam positivas para que o cercado possa existir. Com isso, $x > 0$ e $y > 0$. Porém devem-se desconsiderar valores de "x" que tornam a expressão $200 - 2x$ negativa, para isso deve se ter $200 - 2x > 0$, ou seja, $100 > x$.

Atribuindo-se valores para a variável independente, pode-se calcular o valor de área $A(x)$ correspondente. E também a dimensão "y" do terreno. Por inspeção, impondo valores arbitrários para a variável independente temos:

$$A(5) = 200.(5) - 2(5)^2 = 1000 - 50 = 950$$
$$A(10) = 200.(10) - 2(10)^2 = 2000 - 200 = 1800$$
$$A(15) = 200.(15) - 2(15)^2 = 3000 - 450 = 2550$$
$$A(20) = 200.(20) - 2(20)^2 = 4000 - 800 = 3200$$
$$A(70) = 200.(70) - 2(70)^2 = 14000 - 9800 = 4200$$
$$A(80) = 200.(80) - 2(80)^2 = 16000 - 12800 = 3200$$
$$A(90) = 200.(90) - 2(90)^2 = 18000 - 16200 = 1800$$

Observe que os cálculos anteriores explicitam o valor numérico da área do cercado quando uma das dimensões é conhecida. A outra dimensão "y" é calculada pela relação $y = 200 - 2x$. A partir da observação dos valores dos quais resultaram os cálculos acima, nota-se que os valores numéricos de área se alteram de acordo com as dimensões do cercado. As alterações ocorrem também no momento que a variável independente "aumenta", não sendo verdade necessariamente que a área sempre aumenta também.

Uma conjectura sobre a área do cercado é: "A área se altera, fica numericamente maior perto de um valor (desconhecido ainda...) para a variável independente e depois parece diminuir, inclusive assumindo valores que já assumia antes" (veja, quando x = 10 e x = 90, o valor numérico da área é igual...).

Tal conjectura faz sentido para você?

Perceba que esse comportamento não se parece com o que ocorria com as funções do módulo anterior. Isso nos leva a acreditar, mesmo sem esboçar o gráfico, que agora *não se trata mais de uma reta* o esboço para o gráfico de tais funções. A partir do problema do cercado, surge o seguinte questionamento: Existem e quais são as dimensões *ótimas* para o cercado?

A partir de agora, no módulo IV, trataremos de estudar os objetos da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tal objeto $f(x)$, quando os coeficientes *a*, *b* e *c são números reais e "a"* é não nulo, define a lei (expressão algébrica) para uma função quadrática. Naturalmente, se o problema envolve uma função quadrática e não há restrições quanto ao domínio, considera-se que o domínio para essas funções seja R.

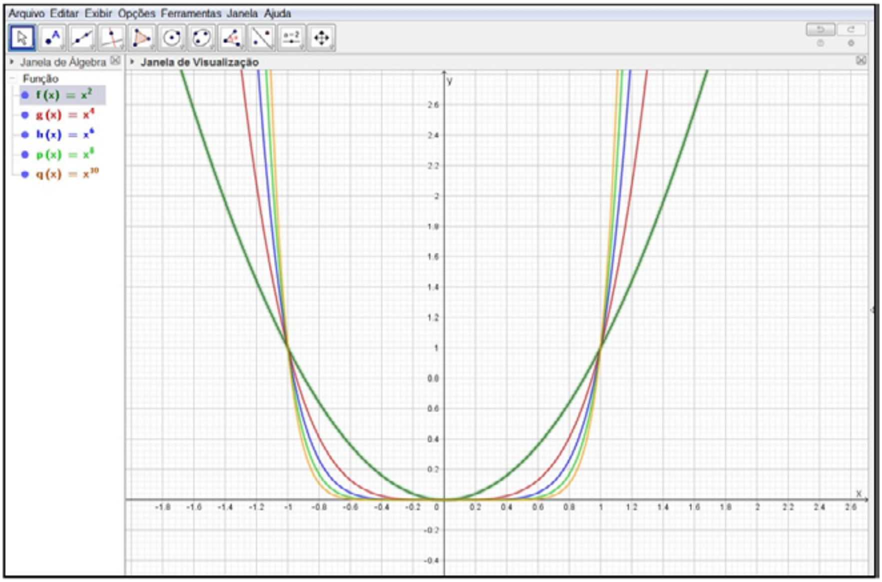
Aqui assumiremos como verdade resultados matemáticos, para os quais o não conhecimento de suas justificativas não compromete o andamento do módulo (são por vezes matematicamente densas as explicações... e para tal podem ser consultadas as referências que estão no final do material). A utilização dos resultados é necessária para explorar as características das funções quadráticas.

Primeiramente, vamos ao fato matemático mais importante (minha opinião...) para essas funções.

Fato: O esboço do gráfico de qualquer função quadrática **É** uma parábola.

O termo parábola pode remeter a um termo "bíblico", porém na matemática isso não tem relação com o que seja uma "parábola bíblica". Parábola é um lugar geométrico, conjunto de pontos criados a partir de uma definição geométrica. Causalmente, tal lugar geométrico também ocorre como esboço do gráfico para qualquer função quadrática. Aliás, de todas as curvas que esboçam relações da forma x^n, a ÚNICA que é uma parábola ocorre para n = 2 (em destaque na figura). A seguir, é possível ver os esboços para n = 2, 4, 6, 8 e 10.

Figura 24: Esboço de Gráficos de Relações x^n.



Fonte: arquivo pessoal.

Já que x^2 é uma parábola, note que há ponto de mínimo ou ponto de máximo, respectivamente o ponto "mais baixo" ou o "mais alto", dependendo como o esboço é feito. O motivo para isso será debatido adiante.

Há relação entre o trinômio $ax^2 + bx + c$ e a parábola x^2 esboçada na figura anterior? Para tal, façamos o raciocínio de "completamento de quadrados". Um completamento de quadrados é uma forma de reescrever o trinômio $ax^2 + bx + c$ na forma $\pm A.(x \pm B)^2 \pm C$, em que os coeficientes A, B e C dependem dos coeficientes anteriores "a", "b" e "c". Façamos com um trinômio específico, depois raciocinamos de forma genérica.

Seja o trinômio $2x^2 + 16x + 29$, realizamos o completamento de quadrados para verificar como ele pode ser reescrito. Essa reescrita será útil nas discussões adiante. Então:

$$2x^2+16x+29=2.(x^2+8x)+29=2.(x^2+8x+16-16)+29=$$
$$2.(x^2+8x+16)-2.(16)+29=2.(x+4)^2-32+29=2.(x+4)^2-3$$

O que foi feito em cada passo?

1 – Foi colocado inicialmente o “2” em evidência.

2 – Foi somado e descontado “16”. (Você sabe por quê?)

3 – Note que $x^2+8x+16=(x+4)^2$.

4 – Agrupe as demais parcelas –32 e 29.

Outro exemplo: façamos o completamento de quadrados no trinômio $-5x^2+20x-13$. Por meio de passos ou etapas aritméticas, temos:

$$-5x^2+20x-13=-5.(x^2-4x)-13=-5.(x^2-4x+4-4)-13=$$
$$-5.(x^2-4x+4)-5.(-4)-13=-5.(x-2)^2+20-13=-5.(x-2)^2+7$$

Portanto, $-5x^2+20x-13=-5.(x-2)^2+7$. Agora é a sua vez de exercitar o completamento de quadrados nos trinômios a seguir.

P24) A partir da técnica do completamento de quadrados, obtenha a forma equivalente de cada trinômio a seguir:

a) $3x^2+6x+5$

b) $-4x^2+56x-195$

c) $-x^2-10x-15$

d) $2x^2-12x+13$

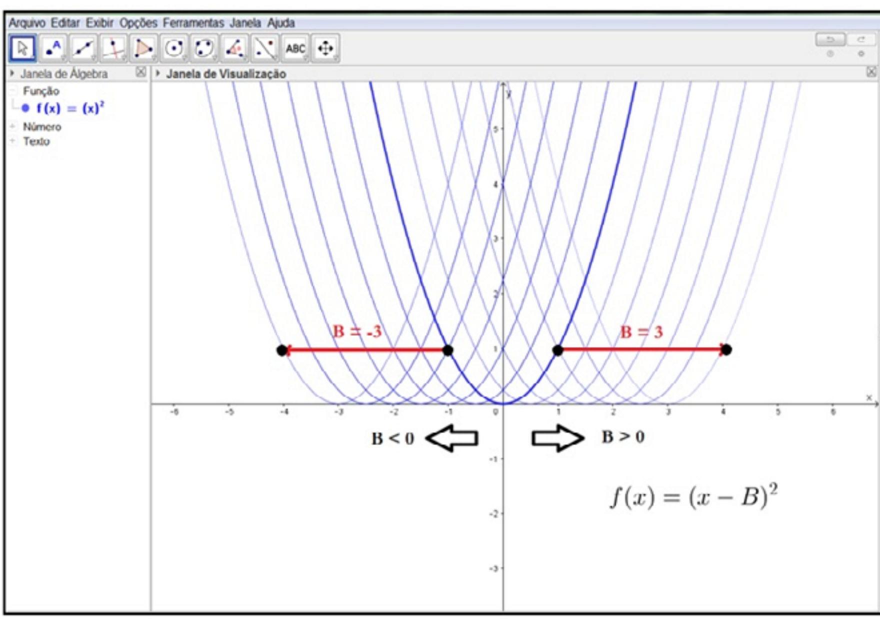
e) $10x^2+80x+144$

O completamento de quadrados permite observar que a transformação do trinômio em formas que sejam equivalentes torna a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ equivalente “ponto a ponto” à função

$f(x) = \pm A.(x \pm B)^2 \pm C$. Entendamos agora qual o papel de cada coeficiente (A, B e C) nessa escrita. Desta forma, podemos inferir que *qualquer* função quadrática é derivada da função "mãe" x^2. Para isso, vamos considerar o estudo de uma função que tenha sido transformada em $f(x) = A.(x - B)^2 + C$.

Termo "B": Esse termo é responsável por mexer no domínio, logo ele oportuniza fazer translações horizontais com o esboço gráfico de x^2. Ele não altera valores de imagem na função, dependendo apenas do seu valor e do seu sinal para conhecermos a translação. Observe o que comentamos na figura a seguir.

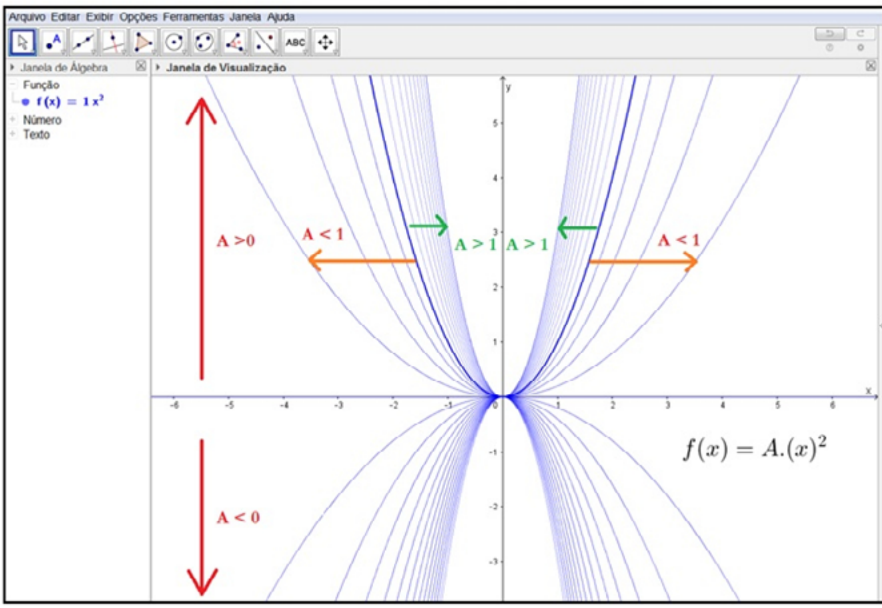
Figura 25: Translação Horizontal



Fonte: arquivo pessoal.

Termo "A": Esse termo é responsável por mexer na imagem, logo ele oportuniza fazer alongamentos ou compressões de x^2. Dependendo do sinal desse termo, ocorre ainda a reflexão em torno do eixo horizontal. Observe os efeitos na figura a seguir.

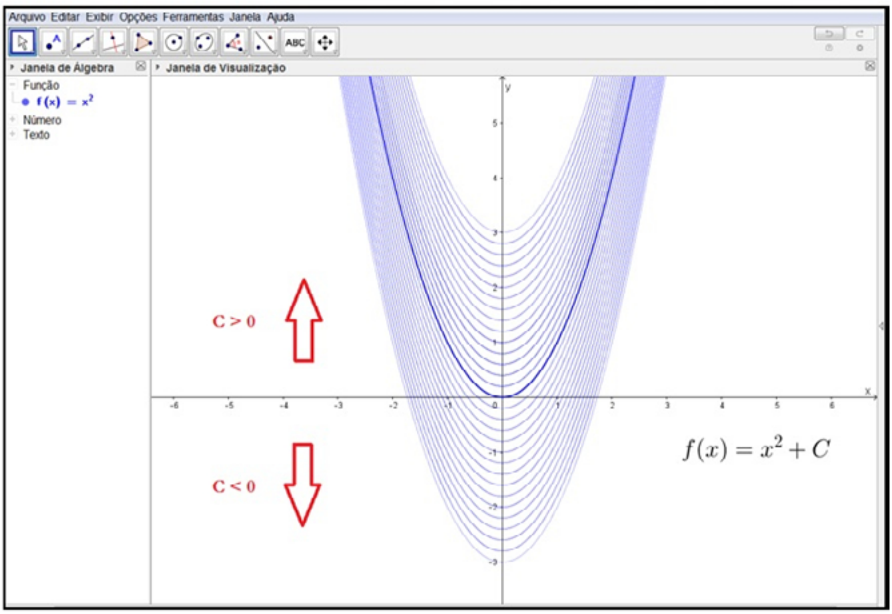
Figura 26: Alongamentos/Compressões/Reflexões



Fonte: arquivo pessoal.

Termo "C": Por fim, esse coeficiente é responsável novamente por mexer na imagem. Tal como o primeiro parâmetro exposto, com ele é possível realizar translações verticais em x^2. Observe como isso ocorre na figura a seguir.

Figura 27: Translação Vertical

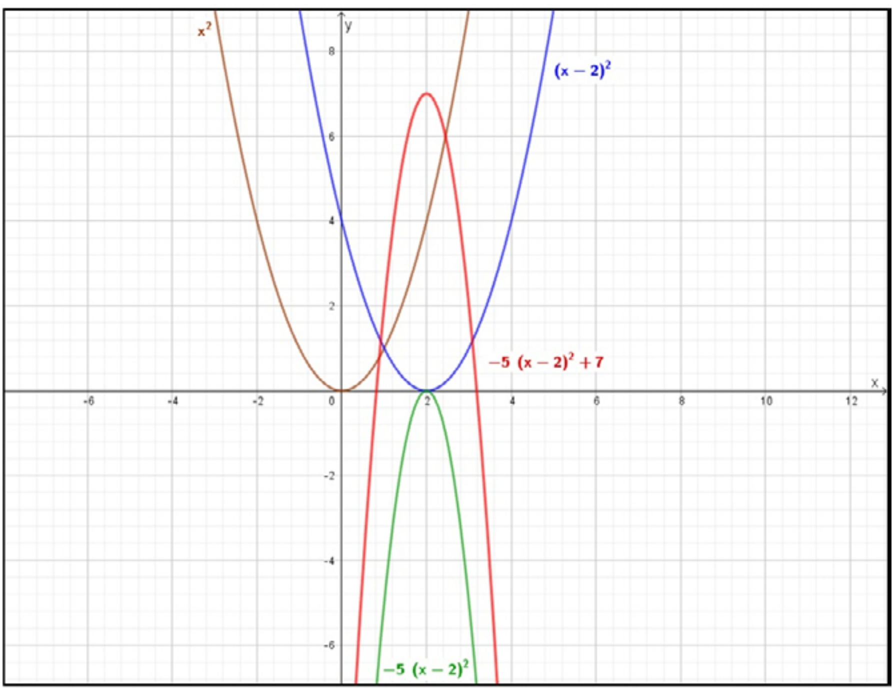


Fonte: arquivo pessoal.

Portanto, a partir da análise anterior, conclui-se que conhecida uma função quadrática escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, por meio da técnica de completamento de quadrados, é possível escrevê-la (com coeficientes específicos) no formato $f(x) = A.(x - B)^2 + C$. Com isso, a partir de operações de translação (horizontal/vertical) e alongamentos/compressões de x^2, é construído o esboço para $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Façamos um exemplo para ilustrar. Esbocemos o gráfico de $f(x) = -5x^2 + 20x - 13$. Para tal, façamos em etapas, sabendo que $f(x) = -5x^2 + 20x - 13 = -5.(x-2)^2 + 7$. A partir do gráfico de x^2, façamos (1º) uma translação horizontal de duas unidades para a direita; (2º) uma dilatação de cinco unidades, seguida de uma reflexão em torno do eixo horizontal, pois o sinal do cinco é negativo; após (3º) faz-se uma translação vertical de sete unidades, assim construindo um esboço para $f(x)$.

Figura 28: Esboço de $f(x) = -5x^2 + 20x - 13$



Fonte: arquivo pessoal.

P25) A partir da discussão sobre os coeficientes, esboce os gráficos das seguintes funções. Observe que essas funções foram mencionadas em P24.

a) $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$

b) $g(x) = -4x^2 + 56x - 195$

c) $h(x) = -x^2 - 10x - 15$

d) $p(x) = 2x^2 - 12x + 13$

e) $q(x) = 10x^2 + 80x + 144$

O problema anterior permite observar algo interessante. Lembra quando falamos em "zero" da função no módulo III? Você percebeu que o gráfico de $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ não tem interseção com o eixo horizontal (*x*)? Sendo assim, há funções quadráticas que não têm zeros, essa é a constatação. E, claro, quem não se recorda da "famosa" fórmula de Bháskara do Ensino Fundamental ou Médio?

A fórmula de Bháskara (que não é propriedade exclusiva dele...) serve para resolver equações da forma $ax^2 + bx + c = 0$. Portanto, para se obterem os "zeros" de uma função quadrática, precisamos resolver uma equação do segundo grau[26] ou, alternativamente, como sabemos a técnica de completamentos de quadrados, a construção dos zeros da função pode ser feita resolvendo-se a equação $\pm A.(x \pm B)^2 \pm C = 0$.

---

26 Uma equação do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$ é resolvida por meio da relação (usual "fórmula de Bháskara"): $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$, para valores de "*a*" não nulos.

Voltemos ao exemplo $f(x) = -5x^2 + 20x - 13$. Pelo completamento de quadrados, escrevemos

$$f(x) = -5x^2 + 20x - 13 = -5.(x-2)^2 + 7$$

Agora, observando a figura 28, nota-se que o esboço do gráfico vermelho intercepta o eixo horizontal em dois "lugares". Calculemos as abscissas dos pontos resolvendo a equação: $-5.(x-2)^2 + 7 = 0$.

A resolução[27] analítica é:

$$\begin{aligned}
&-5.(x-2)^2 + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&-5.(x-2)^2 = -7 \quad \Leftrightarrow \\
&(x-2)^2 = \frac{-7}{-5} \quad \Leftrightarrow \\
&(x-2)^2 = \frac{7}{5} \quad \Leftrightarrow \\
&\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{\frac{7}{5}} \quad \Leftrightarrow \\
&|x-2| = \sqrt{\frac{7}{5}} \quad \Leftrightarrow \\
&x - 2 = +\sqrt{\frac{7}{5}} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{\frac{7}{5}} \\
&x - 2 = -\sqrt{\frac{7}{5}} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{\frac{7}{5}}
\end{aligned}$$

Logo, uma função quadrática pode ter *nenhum*, ou *um* ou *dois* zeros, dependendo da resolução da equação de segundo grau envolvida. Nos esboços de gráficos das funções quadráticas mostrados até aqui, você deve ter percebido duas características:

---

27 Aqui é necessário lembrar que $\sqrt{\Omega^2} = |\Omega|$ onde $\Omega \in R$.

1 – A curva tem simetria.

2 – A curva tem apenas um ponto de ou máximo ou mínimo.

De fato, são duas características dos gráficos das funções quadráticas. Para os propósitos do presente curso, basta que saibamos que as duas características existem, sendo dispensado o entendimento das justificativas. Sempre que você se sentir desconfiado das informações mais específicas da matemática, as obras mencionadas nas referências podem ser consultadas (caso você queira aguçar o seu "espírito matemático").

Caso a função quadrática tenha dois zeros distintos, a abscissa do ponto (chamado de *vértice*) será obtida fazendo-se a média aritmética dos zeros. Caso a função tenha apenas um zero, esse é propriamente o vértice e, caso a função não tenha zero (real), a abscissa pode ser calculada pela relação

$$x_v = -\frac{b}{2.a}$$

Nos três casos, pode ser aplicada a relação x_v para se obter a *abscissa* do vértice.

A *ordenada* é a imagem da abscissa do vértice pela função f, ou seja, $f(x_v)$. Caso isso não seja lembrado, a coordenada pode ser obtida por meio da relação

$$y_v = -\frac{b^2 - 4.a.c}{4.a}$$

Então as coordenadas do vértice de uma função quadrática podem ser expressas assim:

$$(x_v;y_v)=\left(-\frac{b}{2.a};-\frac{b^2-4.a.c}{4.a}\right)$$

A partir do conhecimento dos zeros de uma função quadrática, pode-se expressar a função por meio da forma fatorada. A forma fatorada usa, na essência, duas parcelas da forma "(x – zero da função)". Isso significa que a função $f(x)=ax^2+bx+c$ pode ser reescrita, conhecendo-se os zeros da forma $f(x)=a.(x-zero_1).(x-zero_2)$. Note que isso não é possível de fazer[28] quando a função não tem zeros reais. Lembre-se que nesse curso estamos tratando das funções reais de variável real, portanto tal possibilidade é excluída no caso de "zeros não reais".

Façamos um exemplo para ilustrar. Usamos anteriormente a função $f(x)=-5x^2+20x-13$. Pelo completamento de quadrados, obtivemos para "zeros" da função os números reais

$$x=2+\sqrt{\frac{7}{5}} \quad \text{e} \quad x=2-\sqrt{\frac{7}{5}}$$

Na figura 28, vê-se que a função tem um ponto de máximo. A abscissa pelo que acabamos de comentar pode ser calculada fazendo-se a média aritmética, ou seja,

$$x_v=\frac{\left(2+\sqrt{\frac{7}{5}}\right)+\left(2-\sqrt{\frac{7}{5}}\right)}{2}=\frac{2+2}{2}=2$$

28 Se o conjunto fosse dos Números Complexos, aí a conversa seria diferente...

ou pela relação chega-se a

$$x_v = -\frac{20}{2.(-5)} = -\frac{20}{-10} = 2$$

A ordenada no exemplo, calculada da primeira forma explicada, fica $f(2) = -5(2)^2 + 20(2) - 13 = -5.4 + 40 - 13 = -20 + 40 - 13 = 7$.

Pela outra relação mostrada, a ordenada do vértice será calculada assim:

$$y_v = -\frac{(20)^2 - 4.(-5).(-13)}{4.(-5)} = -\frac{400 - 260}{-20} = -\frac{140}{-20} = 7$$

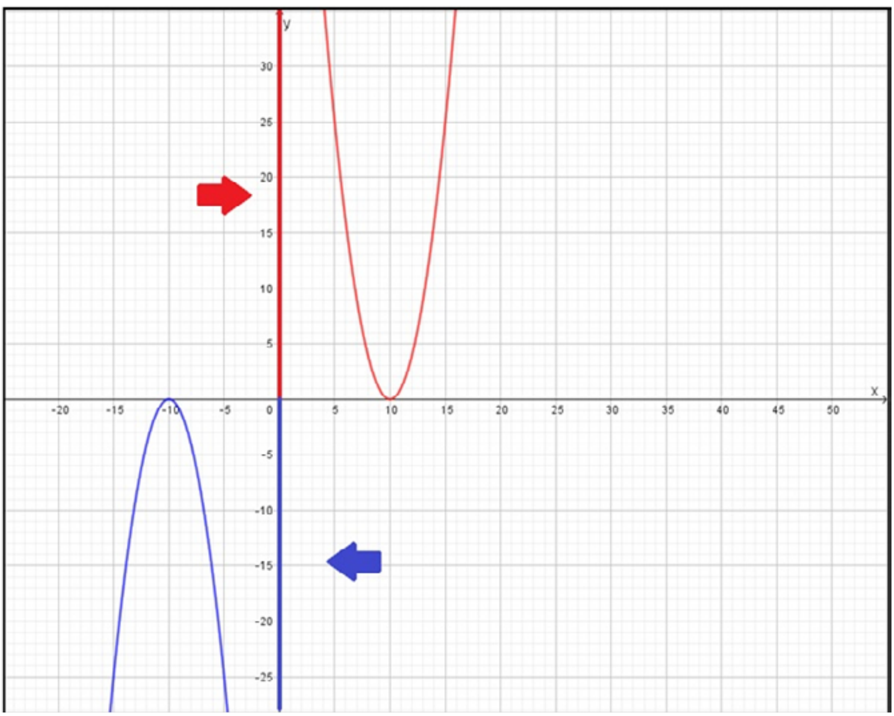
Por fim, como são conhecidos os zeros da função $f(x) = -5x^2 + 20x - 13$, pode-se reescrever a lei da função na forma fatorada, ficando assim:

$$f(x) = -5.\left(x - \left(2 + \sqrt{\frac{7}{5}}\right)\right).\left(x - \left(2 - \sqrt{\frac{7}{5}}\right)\right)$$

Torna-se útil na resolução de problemas também conhecer a forma fatorada da função quadrática (vide problema 27 adiante).

O ponto de vértice desempenha nas funções quadráticas papel importante na construção do *conjunto imagem* da função. Para essas funções o contradomínio é R, porém não é R o conjunto imagem. A figura a seguir ilustra o que refletiremos sobre o conjunto imagem das funções quadráticas.

Figura 29: Conjunto Imagem



Fonte: arquivo pessoal.

Uma função quadrática tem ou concavidade para cima ou concavidade para baixo (no curso de cálculo diferencial adiante você explorará com mais detalhes essa temática para as funções...). Com isso, há para as funções quadráticas, respectivamente, ponto de mínimo ou ponto de máximo. Quando a função tem ponto de mínimo (esboço vermelho na figura 29), o conjunto imagem é $\left[y_v;+\infty\right)$. E quando a função tem ponto de máximo (esboço azul na figura 29), o conjunto imagem é $\left(-\infty;y_v\right]$. Para a função $f(x)=-5x^2+20x-13$, como conhecemos a ordenada do ponto de vértice e sabemos que ele é ponto de máximo (para isso, observe que o sinal do coeficiente de x^2 é negativo...), o conjunto imagem será $\left(-\infty;7\right]$. Para identificarmos se a função tem a concavidade ou para cima ou para baixo, observa-se o sinal do coeficiente da parcela x^2. Caso ele seja um número real positivo, então a função tem um ponto de mínimo, caso contrário (seja um número real negativo), a função terá um ponto de máximo.

P26) Para cada uma das funções a seguir, mencione se o vértice é um ponto de ou máximo ou mínimo e construa o conjunto imagem.

a) $f(x)=3x^2+6x+5$

b) $g(x)=-4x^2+56x-195$

c) $h(x)=-x^2-10x-15$

d) $p(x)=2x^2-12x+13$

e) $q(x)=10x^2+80x+144$

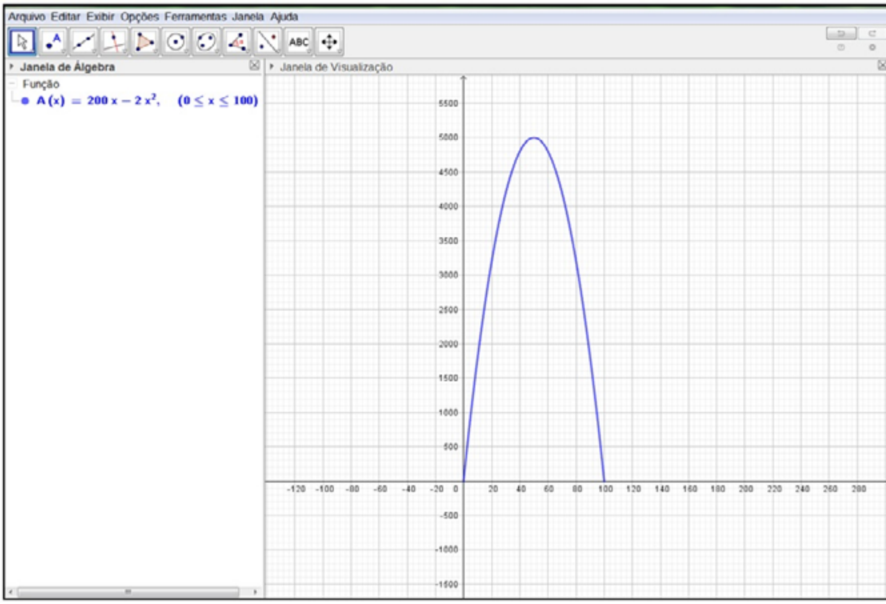
Por fim, antes de voltarmos para a situação inicial do módulo, façamos uma reflexão sobre o comportamento de crescimento/decrescimento das funções quadráticas. Como a função quadrática é uma curva, a taxa de variação da função não será constante, tal como ocorreu com as funções afins no módulo anterior. Antecipo que na disciplina de cálculo isso será melhor explanado... Para o momento, é suficiente saber que a taxa de variação das funções quadráticas não é constante e que o ponto de vértice serve como um "divisor de águas" para a função. Ou seja, se o vértice é ponto de máximo, observando-se o conjunto de domínio, "antes" do vértice a função tem comportamento crescente e após o vértice comportamento decrescente. Ocorre o comportamento contrário quando o ponto é de mínimo. "Antes" do vértice, a função tem comportamento decrescente e depois do vértice comportamento crescente.

Voltemos agora para o problema do confinamento de gado, que inaugurou o estudo desse módulo. Na ocasião, foi construída a seguinte função área para o cercado: $A(x) = 200x - 2x^2$. A função área é uma função quadrática, cujos "zeros" são 0 e 100. Isso significa que os interceptos no eixo horizontal se encontram nos pontos de abscissas 0 e 100, respectivamente. Pela discussão teórica sobre o vértice, para a função $A(x) = 200x - 2x^2$ o ponto de vértice tem coordenadas

$$\left(-\frac{200}{2.(-2)};200.(50)-2(50)^2\right)=(50;5000)$$

Isso significa que as dimensões ótimas para o cercado são x = 50 e y = 100 que fornece uma área de 5000 metros quadrados. Aqui se assume que x possa ser, inclusive, 0 ou 100, não há problemas matemáticos com isso, porém para o problema não faz sentido considerar essas dimensões para o cercado. Naturalmente, elas são medidas excluídas pelo contexto imposto. O esboço do gráfico da função $A(x)$, de acordo com a situação, é:

Figura 30: Construção da Função Área do Cercado



Fonte: arquivo pessoal.

Por fim, as funções quadráticas têm inúmeras utilidades na matemática (tal como os outros tipos de funções), pois permitem aumentar nossa compreensão sobre os fenômenos que ocorrem. A seguir, serão apresentados problemas, os quais exploram e utilizam os conceitos apresentados no módulo das funções quadráticas e permitem refletir sobre o que discutimos teoricamente.

Com o intuito de complementar o estudo sobre o assunto desse módulo, faço as seguintes sugestões de vídeos do YouTube™ que podem ser assistidos para enriquecer o debate feito até aqui (todos os *links* abaixo foram acessados em maio de 2018):

Função Quadrática (parte 1): https://youtu.be/Z5aVW_Zgifk

Função Quadrática (parte 2): https://youtu.be/CNqeTO2tCuI

Função Quadrática (parte 3): https://youtu.be/4d48gLFe3F0

Função Quadrática (parte 4): https://youtu.be/oPLsPe94q8Y

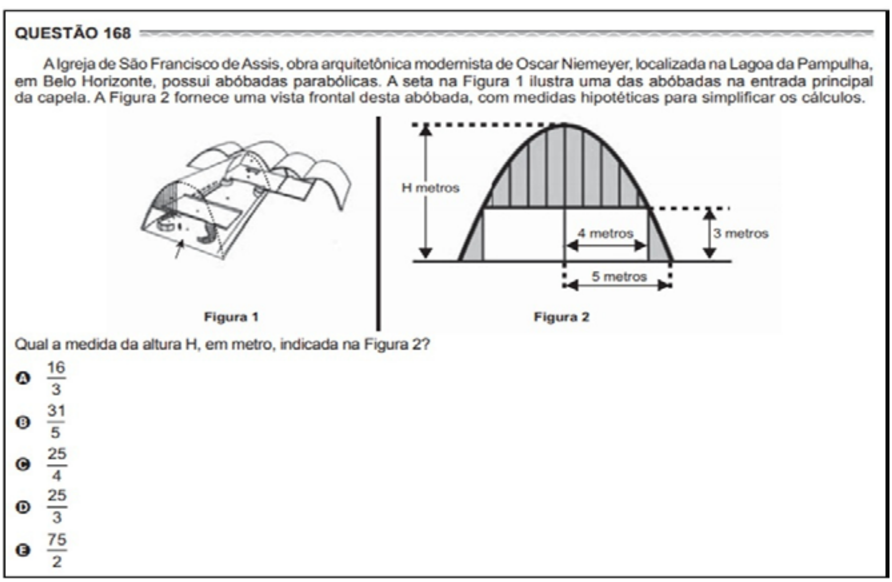
Função Quadrática (parte 5): https://youtu.be/ZnxMdyN4Xp8

Função Quadrática (parte 6): https://youtu.be/U9I1LFFcUkw

Função Quadrática (parte 7): https://youtu.be/SggGwu1VV3s

P27) Prova Azul, ENEM, 2017.

Figura 31: Questão 168 ENEM/2017



QUESTÃO 168

A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

A $\frac{16}{3}$

B $\frac{31}{5}$

C $\frac{25}{4}$

D $\frac{25}{3}$

E $\frac{75}{2}$

Fonte: Prova Azul ENEM/2017[29].

29 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P28) Prova Azul, ENEM, 2016.

Figura 32: Questão 167 ENEM/2016

QUESTÃO 167

Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

Ⓐ 18
Ⓑ 20
Ⓒ 36
Ⓓ 45
Ⓔ 54

Fonte: Prova Azul ENEM/2016[30].

30 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P29) Prova Amarela, ENEM, 2014.

Figura 33: Questão 164 ENEM/2014

QUESTÃO 164

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial *f*, de grau menor que 3, para alterar as notas *x* da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

A) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

B) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

C) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

D) $y = \frac{4}{5}x + 2$

E) $y = x$

Fonte: Prova Amarela ENEM/2014[31].

31 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P30) Prova Azul, ENEM, 2013.

Figura 34: Questão 172 ENEM/2013

QUESTÃO 172

A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\dfrac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 °C.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

A 19,0
B 19,8
C 20,0
D 38,0
E 39,0

Fonte: Prova Azul ENEM/2013[32].

P31) Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$800,00 mais R$10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?[33]

P32) Numa concorrência pública para a construção de uma pista circular de patinação apresentam-se as firmas A e B. A firma A cobra 20 reais por metro quadrado de pavimentação, 15 reais por metro linear

32 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

33 LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do Ensino Médio**. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2016.

do cercado, mais uma taxa fixa de 200 reais para administração. Por sua vez, a firma B cobra 18 reais por metro quadrado de pavimentação, 20 reais por metro linear do cercado e a taxa de administração de 600 reais. Para quais valores do diâmetro da pista a firma A é mais vantajosa? Esboce um gráfico que ilustre a situação. Resolva um problema análogo com os números 18, 20 e 400 para A e 20, 10, 150 para B.[34]

4.2 REFLEXÕES SOBRE O *ENSINO* DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Os trabalhos apresentados a seguir tratam da temática sobre o ensino e aprendizagem do tópico "função quadrática" na escola básica. A leitura é opcional, porém fica estabelecido o convite para que você conheça cada uma das pesquisas.

Título: Explorando a função quadrática com o *software* Winplot

RESUMO: "A Matemática contribuiu, e continua contribuindo muito, para o desenvolvimento da tecnologia em geral, e dos computadores em particular. No entanto, na era da computação, a Matemática continua sendo ensinada de forma clássica. Os profissionais da computação sempre olharam para a Matemática e a Física como fonte de

34 *Idem. Ibidem.*

tecnologia, mas agora, nós, os profissionais da educação, precisamos olhar para os computadores com a perspectiva da educação matemática. Neste contexto, nós realizamos um trabalho sobre as funções quadráticas e sua ocorrência nos vestibulares usando o *software* Winplot. O Winplot é uma ferramenta computacional para a construção de gráficos, disponível gratuitamente na web, ou seja, é um *software* livre. O objetivo final deste trabalho é que os educandos aprendam a identificar e descrever os efeitos, na parábola, da variação dos coeficientes da equação que descreve a função quadrática. Essa experiência de aprendizagem proporciona aos estudantes uma oportunidade para entender a função quadrática e suas representações, bem como o papel desempenhado por cada um de seus coeficientes."

Autores: Josy Rocha e Fernando Flores Miragem

Link de acesso web:

http://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/18105 (acesso em maio/2018)

Título: O ensino de física e matemática a partir do jato de água

RESUMO: "Este trabalho relata os resultados obtidos por um projeto realizado com alunos de 1º ano do ensino técnico e pretende mostrar como a interdisciplinaridade pode contribuir com a aprendizagem da matemática e da física. A realização dessa atividade teve o objetivo de proporcionar, através de prática, a compreensão do uso das funções quadráticas para interpretar o comportamento de um corpo em movimento oblíquo. A reprodução do experimento, através da construção e interpretação de gráficos e a identificação das fórmulas, induziram os alunos a perceberem a relação existente entre a física e a matemática. Durante e após a aplicação do projeto, os alunos mostraram-se mais motivados ao estudo e interessados em resolver situações-problema diversas."

Autores: Claudete Cargnin Ferreira, Adriana da Silva Fontes e Angela Mognon

Link de acesso:

http://www.cienciaemtela.nutes.ufrj.br/artigos/0110_cargnin.pdf (acesso em maio/2018)

Título: Octave: uma proposta para o ensino de funções

RESUMO: "Ferramentas computacionais se fazem continuamente mais presentes em ambientes escolares, por meio de iniciativas como o Paraná Digital. A partir dos recursos disponibilizados, esta pesquisa apresentou e realizou uma atividade utilizando um *software* de análise numérica (Octave) com o objetivo de contribuir para o ensino de função. O programa foi escolhido por possuir os recursos necessários para trabalhar os conteúdos de Matemática selecionados na pesquisa e a possibilidade do aluno manipular e visualizar situações reais a partir de simulação. A teoria de aprendizagem significativa de Ausubel foi empregada para organizar a abordagem realizada. Foi realizado um projeto piloto abordando o ensino de funções, seguido de um segundo momento em que se incluíram conceitos de Física. O projeto envolveu alunos de diferentes anos do Ensino Médio. Verificou-se que o uso do Octave contribuiu para que houvesse de fato a aprendizagem significativa no assunto de funções do primeiro e segundo grau, bem como as relações com o movimento retilíneo."

Autor: Thiago Henrique das Neves Barbosa

Link de acesso:

http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1109 (acesso em maio/2018)

Título: Função afim e quadrática: representações mobilizadas nas atividades propostas no livro didático Matemática: Contexto e Aplicações

RESUMO: "Esta pesquisa investiga as representações semióticas mobilizadas nas atividades das funções afim e quadrática propostas no livro didático Matemática: Contexto & Aplicações de Dante (2010). Para tanto, o estudo embasa-se na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2003, 2009, 2011) bem como nos parâmetros e orientações curriculares nacionais publicadas em Brasil (2002, 2012). Com base nos dados coletados e seguindo os princípios da análise de conteúdo de Bardin (2010), conclui-se que a conversão é a transformação semiótica mais adotada nas atividades do livro didático e que ocorre a mobilização em larga escala do registro algébrico, principalmente utilizando-o como registro de partida. Além disso, constata-se que o registro gráfico foi pouco mobilizado nas atividades e que praticamente elas não priorizavam as conversões nos dois sentidos o que, segundo Duval (2003, 2009, 2011), pode prejudicar a aquisição do conceito de função."

Autores: Leonel Ricardo Machado Meneses e Rita de Cássia Pistóia Maria

Link de acesso:

http://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/27 (acesso em maio/2018)

Título: O *software* GeoGebra e as possibilidades do trabalho com animação

RESUMO: "Este artigo tem por objetivo apresentar resultados de uma pesquisa que tem por uma das metas investigar as possibilidades do trabalho com o recurso de animação do *software* GeoGebra, e analisar a relação desses recursos e a produção do conhecimento matemático. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi desenvolvida com professores da rede de Ensino, Fundamental e Médio, do Estado do Paraná, na região de Londrina. Os dados foram coletados a partir do desenvolvimento das atividades ocorridas em sala de aula e posteriormente postadas na plataforma Moodle. A análise dos dados sugere que o recurso de animação de figuras geométricas pode levar os alunos/professores à manipulação de objetos matemáticos e a consequente reformulação de suas conjecturas acerca da construção e conceitualização dos elementos geométricos."

Autor: Sandra Malta Barbosa

Link de acesso:

https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/12843

(acesso em maio/2018)

5

Módulo V

Conteúdos abordados: Potências e propriedades operatórias. Crescimento/decrescimento exponencial e modelagem. Função exponencial: domínio, imagem e esboço gráfico. Situações-problema.

5.1 FUNÇÕES EXPONENCIAIS[35]

Os módulos V e VI tratam, respectivamente, das funções exponenciais e funções logarítmicas. Tais conteúdos são de incomensurável importância na matemática e na leitura de mundo que se pode fazer a partir da compreensão e utilização desses objetos matemáticos. Eles são dois assuntos alocados geralmente no Ensino Médio, sendo que a função exponencial tem inserções desde o Ensino Fundamental, já com os trabalhos desenvolvidos a partir das "potências" de números e que vão até a modelagem de situações mais elementares.

O presente módulo abordará sobre as exponenciais, conteúdo que se inicia com as potências de números e se estende até a função exponencial. Aqui iniciaremos com uma "lenda" e uma recomendação para assistir a um vídeo, o qual considero ser benéfico para o entendimentodo assunto que em seguida será apresentado.

O jogo de xadrez é conhecido por uma enorme parcela da população mundial. Você sabe sobre o que se trata esse jogo? Há diversas lendas que procuram explicar como esse jogo foi inventado. Vou apresentar uma delas aqui...

> Um rei solicitou aos seus súditos que criassem um novo jogo, a fim de diminuir seu tédio. O criador do melhor jogo poderia solicitar qualquer desejo que o rei realizaria. Então um dos seus súditos criou o jogo de xadrez. O rei se encantou com

35 Inspirado no material produzido por Gustavo Schreiber Nunes, Luiz Felipe Sfoggia e Nathália Pinheiro.

> este novo jogo, e viu-se obrigado a cumprir sua promessa. Chamou, então, o criador do jogo e disse que ele poderia lhe pedir o que quisesse. O inventor pediu que as 64 casas do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro, com a seguinte condição: Na primeira casa seria colocada uma moeda e em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia na casa anterior. O rei considerando o pedido fácil ordenou que providenciassem o pagamento. Os tesoureiros do reino apresentaram ao rei a suposta conta, e foi constatado que apenas na última casa o total de moedas era de: 9.223.372.036.854.775.808.

A partir disso, observe o quanto é absurdamente enorme a quantia a ser paga ao inventor. Uma tabela oportuniza ver o quão rápido os valores aumentam. Aqui se mostra apenas a quantidade de moedas que há em cada uma das primeiras 32 casas do tabuleiro (coluna A indica a posição da casa e a coluna B quantas moedas há):

Figura 35: Moedas no Tabuleiro de Xadrez

	A	B
1	1	1
2	2	2
3	3	4
4	4	8
5	5	16
6	6	32
7	7	64
8	8	128
9	9	256
10	10	512
11	11	1024
12	12	2048
13	13	4096
14	14	8192
15	15	16384
16	16	32768
17	17	65536
18	18	131072
19	19	262144
20	20	524288
21	21	1048576
22	22	2097152
23	23	4194304
24	24	8388608
25	25	16777216
26	26	33554432
27	27	67108864
28	28	134217728
29	29	268435456
30	30	536870912
31	31	1073741824
32	32	2147483648

Fonte: arquivo pessoal.

A partir desse debate inicial que envolve o jogo de xadrez, poderiam ser exploradas inúmeras atividades no Ensino Fundamental, uma vez que o jogo e a proposta podem mobilizar os estudantes a investigar a temática.

Sobre o mundo “macro” e “micro”, recomendo que assista ao vídeo ilustrado na figura a seguir. Ele certamente irá fazer você refletir sobre as suas noções e percepções que envolvem distâncias e espaço.

Figura 36: Tela Inicial do Vídeo

Fonte: ***Site*** **YouTube™.**[36]

A partir dos dois contextos apresentados, vê-se o quanto a noção de crescimento ou decrescimento exponencial é importante no estudo ou na investigação de um contexto/fenômeno. Outras situações, que não foram mencionadas, também *bebem na fonte* de conhecimento das

36 Disponível em: https://youtu.be/0fKBhvDjuy0. Acesso em: maio 2018.

funções exponenciais. São estas: crescimentos populacionais, decomposição em meia vida de elementos químicos, eliminação de resíduos de medicamentos pelo corpo na forma natural e aplicações financeiras.

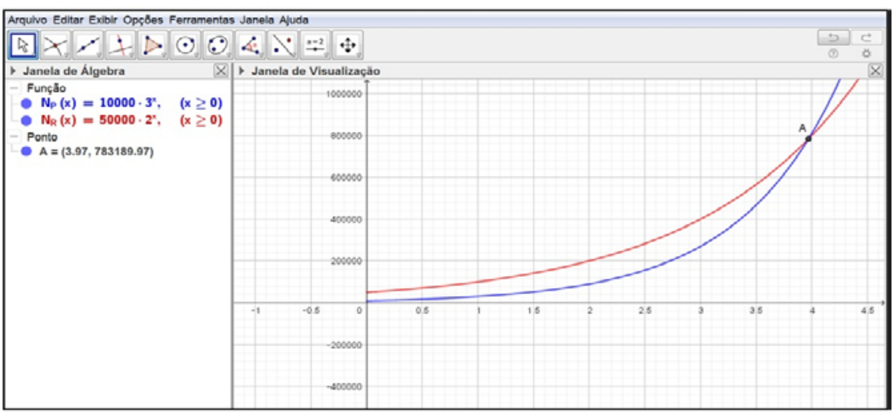
Vamos explorar a temática a partir de situações-problema e com isso emergirá a necessidade de saber operar com bases e expoentes. Nesse compêndio, será feito um estudo das potências e propriedades operatórias.

Situação-problema 1: Devido às doenças ocorridas em uma pequena cidade, serão utilizadas duas funções, $N_R(t)$ e $N_P(t)$, para modelar o crescimento populacional dos ratos e das pessoas respectivamente, em um período entre 0 e 5 anos. Inicialmente, há 50000 ratos e 10000 pessoas. O pesquisador verificou que, a cada ano que passa, a população de ratos dobra de tamanho e a de pessoas triplica. Vamos construir uma tabela para representar a situação:

Tempo (anos)	Nº de ratos $N_R(t)$	Tempo (anos)	Nº de pessoas $N_P(t)$
0	50000	0	10000
1	$100000 = 50000 \times (2)$	1	$30000 = 10000 \times (3)$
2	$200000 = 50000 \times (2)^2$	2	$90000 = 10000 \times (3)^2$
3	$400000 = 50000 \times (2)^3$	3	$270000 = 10000 \times (3)^3$
4	$800000 = 50000 \times (2)^4$	4	$810000 = 10000 \times (3)^4$
5	$1600000 = 50000 \times (2)^5$	5	$2430000 = 10000 \times (3)^5$

A partir do contexto, podemos pensar que as funções $N_R(t)$ e $N_P(t)$ sejam dadas por $N_R(t) = 50000 \times (2)^t$ e $N_P(t) = 10000 \times (3)^t$. Ambas são funções exponenciais. Por inspeção na tabela, vê-se que, mesmo que inicialmente o número de pessoas seja menor do que o número de ratos, entre 3 e 4 anos as quantidades ficam reordenadas. Tal valor de *t* pode ser calculado por meio de uma equação exponencial. O esboço dos gráficos em um mesmo sistema de eixos permite observar a evolução das duas populações. A abscissa do ponto A indica quando as populações invertem a ordem de crescimento. Em ambas, pode-se constatar que são funções de comportamento crescente.

Figura 37: Esboço das Funções de Crescimento Populacional



Fonte: arquivo pessoal.

Analisemos agora outro contexto. A ingestão de medicamentos ou de outras drogas de controle lícito ocorre usualmente pelas pessoas no tratamento de alguma enfermidade. Na ocasião da ingestão de um medicamento, o corpo reage de forma a combinar quimicamente os elementos e produzir a cura ou a solução para o problema e também se organiza para eliminar resíduos de fármacos que estejam "sobrando" no corpo. O fato é que com o passar do tempo, após a ingestão de um medicamento, a quantidade de medicação ativa no organismo se altera. Isso é o contexto do próximo problema.

Situação-problema 2: Quando uma pessoa toma um medicamento, este vai sendo eliminado naturalmente de tal modo que a quantidade ativa do remédio no organismo $Q(t)$ segue uma lei exponencial da forma

$$Q(t) = Q_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

em que Q_0 é a quantidade (em mg) ingerida inicialmente e t significa o tempo decorrido da ingestão do medicamento.

a) Construa uma tabela para a quantidade de medicamento ativo no organismo de uma pessoa que ingere inicialmente 2000 mg para $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$. Essas quantidades estão aumentando ou diminuindo? Conjecture e explore.

b) Depois de quanto tempo a quantidade ativa de medicamento está 64 vezes menor do que a quantidade inicial ingerida? Explore.

c) É possível que todo esse medicamento seja eliminado do organismo, ou seja, é possível que a quantidade $Q(t)$ seja zero após algum tempo? Explore.

d) Faça o esboço do gráfico da função $Q(t)$ e verifique sua conjectura (sobre decrescimento/crescimento) elaborada em (a).

Façamos a exploração dos itens. O primeiro é sobre a construção de uma tabela, a qual fornecerá a quantidade de medicamento ativo no organismo transcorrido determinado tempo após a ingestão. Pelas informações do problema temos:

Tempo (t)	$Q(t) = Q_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^t \quad ; \quad Q_0 = 2000$
0	$Q(0) = 2000.\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2000.1 = 2000$
1	$Q(1) = 2000.\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2000.\frac{1}{2} = 1000$
2	$Q(2) = 2000.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2000.\frac{1}{4} = 500$
3	$Q(3) = 2000.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2000.\frac{1}{8} = 250$

Os valores calculados e explicitados na tabela anterior mostram que a quantidade ativa de medicamento no organismo está diminuindo. Isso tem relação com o tipo de função exponencial que estamos tratando aqui, no caso com base < 1. No problema dos ratos anteriormente, isso não ocorreu, pois lá as duas funções envolvidas tinham base > 1. Observe que tanto neste problema como naquele foi necessário calcular a potência de um número. Adiante exploraremos a temática do cálculo e das propriedades de potências.

O item (b) instiga a refletirmos sobre: se a quantidade de medicação ativa vai diminuindo com o passar do tempo, quando ela fica 64 vezes menor do que a quantidade inicial? Ou seja, se a quantidade inicial for $Q(t)$, quando teremos

$$\frac{Q(t)}{64}?$$

Para isso vamos calcular um tempo *t*, tal que

$$\frac{Q_0}{64} = Q_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Ao resolver o cálculo[37], segue que $t = 6$.

Para o item (c), a reflexão a ser feita é a seguinte: não é possível, matematicamente falando, eliminar toda a quantidade de medicamento inicialmente ingerida, pois a função

$$Q(t) = Q_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

não tem "zeros", no sentido de "não há pontos de intercepto no eixo do domínio". Ou, ainda, não há solução para a equação exponencial

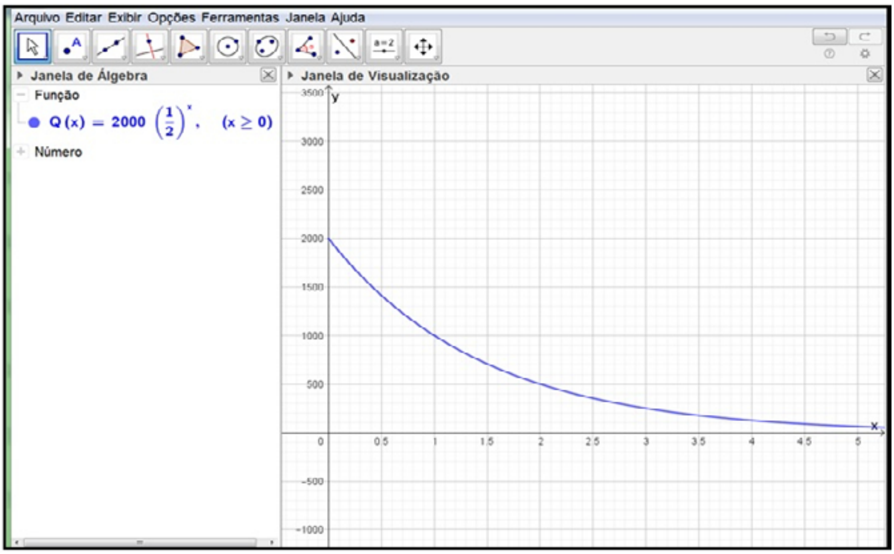
$$Q_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0$$

37 Tal cálculo está ancorado nas propriedades das potências e no fato de que a função exponencial é injetora (consulte as referências caso tenha curiosidade em saber o que seja isso). Por isso que as equações exponenciais podem ser "resolvidas" pela técnica de cancelamento das bases e comparação dos expoentes. Neste caso, o "cálculo" é:

$$\frac{Q_0}{64} = Q_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^t \Leftrightarrow Q_0 .(64)^{-1} = Q_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^t \Leftrightarrow (64)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^t \Leftrightarrow$$
$$\left(2^6\right)^{-1} = \left(2^{-1}\right)^t \Leftrightarrow (2)^{-6} = (2)^{-t} \Leftrightarrow -6 = -t \Leftrightarrow 6 = t$$

pois a imagem zero não é obtida como resultado de potência alguma no contexto envolvido. Na figura a seguir, apresento o esboço do gráfico para a função $Q(t)$ (a variável independente no esboço está indicada por “x”).

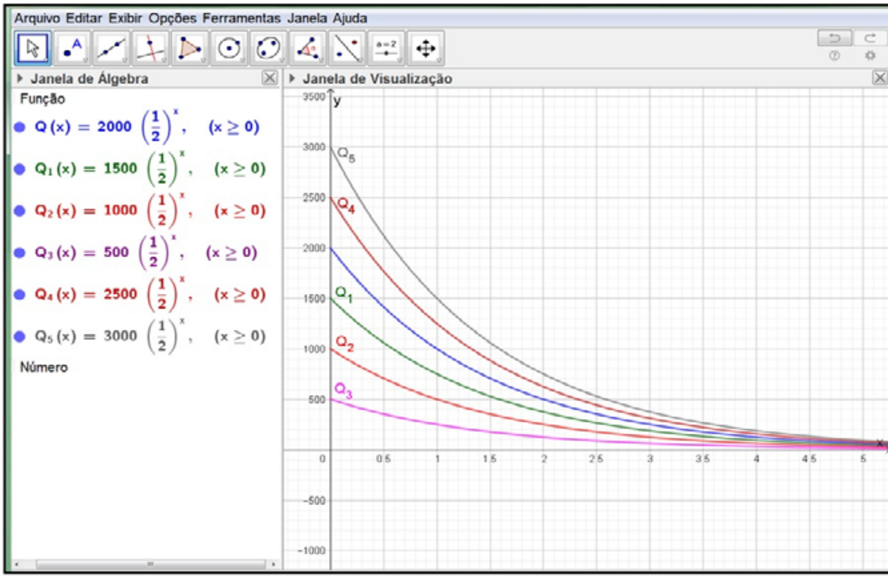
Figura 38: Esboço do Gráfico da Função $Q(t)$



Fonte: arquivo pessoal.

Se as quantidades iniciais de remédio se alteram, então o esboço fica “levemente” modificado, porém todos os contextos ainda continuam sendo funções exponenciais decrescentes. Observe isso na figura a seguir.

Figura 39: Esboço do Gráfico com Alteração na Quantidade Inicial



Fonte: arquivo pessoal.

Por meio das duas situações-problema anteriores, vimos como as funções exponenciais podem ser usadas para a compreensão de fenômenos. Vamos agora fazer uma apresentação e discussão sobre as potências e propriedades das potências para números, em seguida das funções exponenciais. Prepare-se para a matemática explanada nas próximas linhas!

Consideremos um número real não nulo a. Para todo $n \in N$, a potência a^n de base a e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais a a. No caso de $n = 1$, como não há produto de um só fator, convenciona-se que $a^1 = a$. Indutivamente podemos pensar na definição de a^n. Assumindo que $a^1 = a$, devemos ter $a^{n+1} = a.a^n$. Percebe-se que para quaisquer valores $m, n \in N$ é válido que $a^n.a^m = a^{n+m}$, uma vez que em cada lado da igualdade temos o produto de $n+m$ fatores iguais à a. Generalizando, segue que para quaisquer m_1, m_2, ... , $m_k \in N$ vale:

$$a^{m_1}.a^{m_2}.\cdots.a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\ldots+m_k}$$

Em particular, se $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = m$, temos válida a propriedade $\left(a^m\right)^k = a^{m.k}$.

Quando o expoente se torna um número inteiro $n \in Z$, ele pode assumir valores negativos ou zero. A potência a^n deve ser definida de modo que seja preservada a propriedade fundamental $a^n.a^m = a^{n+m}$. Observamos que a definição de $a^0 = 1$ ocorre neste momento, pois deve ser verdadeira a igualdade: $a^0.a^1 = a^{0+1}$. Como $a^1 = a$, segue-se que $a^0 = 1$ para que não haja problemas adiante.

Em seguida notamos que, dado qualquer $n \in Z$, devemos ter $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, o que implica

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Logo, para estender o conceito de potência do número real a, para admitirmos expoentes inteiros quaisquer e preservar a propriedade $a^n.a^m = a^{n+m}$, devemos definir: $a^0 = 1$ e

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Observamos que ainda continua válida a propriedade $\left(a^m\right)^k = a^{m.k}$ para quaisquer $m, k \in Z$.

Na continuação da construção, vamos dar um sentido para a potência a^r quando o expoente for um número racional da forma

$$r = \frac{m}{n}$$

com $m \in Z$ e $n \in N$, de modo que continue válida a propriedade $a^r.a^s = a^{r+s}$. Dessa última igualdade resulta que devemos ter para

$$r = \frac{m}{n}:$$

$$\left(a^r\right)^n = a^r.a^r.\cdots a^r = a^{r+r+...+r} = a^{r.n} = a^m$$

Na igualdade acima, nota-se que a^r é o número real positivo cuja *enésima* potência é igual a a^m. Desse modo, a única maneira de definir a potência a^r, em que

$$r = \frac{m}{n}, \ m \in Z \ \text{ e } \ n \in N$$

é pondo $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. A regra $a^r.a^s = a^{r+s}$ continua válida com

$$r = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad s = \frac{p}{q}$$

ou seja, para expoentes fracionários.

A partir dessa propriedade, é necessário garantir que se pode calcular o valor de a^r e encontrar o seu valor em algum ponto de R^+ (subconjunto dos números reais positivos e não nulo). Isso é garantido pelo seguinte resultado (teorema) matemático: *Fixado um número real a não nulo e $a \neq 1$, em todo intervalo de R^+, existe alguma potência a^r com*

$$r = \frac{m}{n} \in Q$$

De mão do resultado matemático anterior, podemos estender a ideia da potência para os números irracionais (não racionais). Consideremos um número real (positivo) $a > 1$. Basta observar que dado um número não racional x, existem números racionais r e s com $r < s$, tais que $r < x < s$, logo teremos $a^r < a^x < a^s$.

Para obter o valor de a^x, construímos uma sequência de números racionais (r_n) que se aproximam do número irracional x por falta, ou seja, consideramos a sequência crescente de números racionais $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots < x$. Como $a > 1$, temos que $a^{r_1} < a^{r_2} < \ldots < a^{r_n} < \ldots < a^x$. Agora construímos uma sequência de números racionais (s_n) que se aproximam do número irracional x por excesso, ou seja, consideramos a sequência decrescente de números racionais $x < \ldots < s_n < \ldots < s_2 < s_1$. Como $a > 1$, temos que $a^x < \ldots < a^{s_n} < \ldots < a^{s_2} < a^{s_1}$.

Observamos que as desigualdades abaixo indicam a construção de uma sequência de intervalos que se encaixam e convergem para um único ponto da reta real, que é o valor da potência a^x que ocorre quando $n \to +\infty$ (lê-se: “*ene* tende ao infinito”), ficando escrito assim: $a^{r_1} < a^{r_2} < \ldots < a^{r_n} < \ldots < a^x < \ldots < a^{s_n} < \ldots < a^{s_2} < a^{s_1}$. O mesmo pensamento pode ser feito supondo $0 < a < 1$.

Segue um quadro com exemplos para ilustrar o debate técnico sobre potências de números e propriedades, antes de prosseguirmos para a apresentação e para o estudo da função exponencial.

Definição de potência	$7^4 = 7\times 7\times 7\times 7 = 2401$ $(-2)^5 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = -32$
Multiplicação com mesma base	$3^2\times 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$ $(-5)^6\times(-5)^8 = (-5)^{6+8} = (-5)^{14}$
Divisão com mesma base	$\frac{4^5}{4^2} = 4^5\times\frac{1}{4^2} = 4^5\times 4^{-2} = 4^{5+(-2)} = 4^3$ $\frac{5^8}{5^3} = 5^8\times\frac{1}{5^3} = 5^8\times 5^{-3} = 5^{8+(-3)} = 5^5$
Expoente fracionário	$(7)^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{(7)^3}$ $(2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(2)^3}$
Expoente não racional (aqui as aproximações podem ser melhoradas tanto quanto se queira!)	$2^{1,73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74}$ $5^{3,14} < 5^{\pi} < 5^{3,15}$ $4^{2,23} < 4^{\sqrt{5}} < 4^{2,24}$

Uma vez debatida a temática das definições e propriedades das potências, é chegada a hora de explorar as funções exponenciais. A função exponencial de base a (fixado um número real positivo), $f: R \to R^+$ [38], indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as propriedades fundamentais a seguir:

i) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

ii) $a^1 = a$;

38 Essa notação, se ainda não utilizada, significa um modo “abreviado” de mencionar quem são o *domínio* e *contradomínio* de uma função, respectivamente.

iii) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

A consequência das propriedades fundamentais apresentadas acima é a ocorrência de quatro teoremas (resultados matemáticos) que caracterizam "bem" as funções exponenciais. Caso você queira, as justificativas podem ser encontradas nos livros indicados nas referências.

Teorema 1: A função $f : R \to R^+$ definida por $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente.

Teorema 2: A função exponencial definida por $f : R \to R^+$ com a lei $f(x) = a^x$ é contínua em R.

Teorema 3: A função exponencial definida por $f : R \to R^+$ com a lei $f(x) = a^x$ é sobrejetiva[39].

Teorema 4 (caracterização da função exponencial): Seja $f : R \to R^+$ uma função monótona injetiva[40] (crescente ou decrescente). As afirmações abaixo são equivalentes:

i) $f(nx) = [f(x)]^n$ para todo $n \in Z$ e todo $x \in R$;

ii) $f(x) = a^x$ para todo $x \in R$, em que $f(1) = a$;

iii) $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in R$.

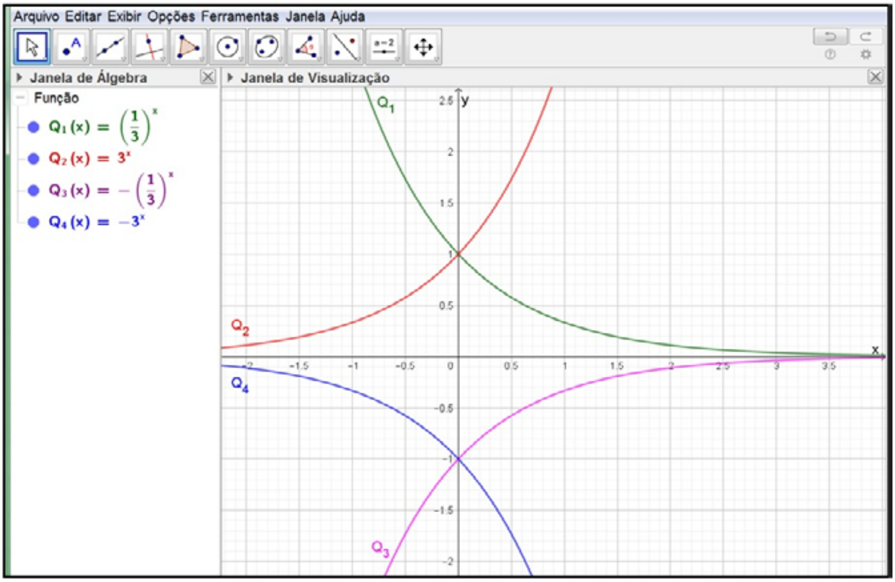
39 Significa que todo elemento do conjunto de contradomínio é imagem de algum elemento do domínio da função.

40 Significa que valores diferentes assumidos no domínio da função resultam em imagens diferentes, depois de computados pela função.

Por fim, os resultados apresentados "sustentam" a matemática das funções exponenciais e, apesar de parecerem árduos e complicados, são necessários para que as contas e procedimentos analíticos ocorram de modo consistente. Antes de avançar na indicação de problemas para a exploração, retoma-se a temática do esboço do gráfico de tais funções.

Pelo debate técnico-teórico feito, segue que uma função exponencial $f(x) = a^x$ com base $a > 1$ terá comportamento crescente (tal como a da primeira situação-problema) e de base $0 < a < 1$ terá comportamento decrescente (vide segunda situação-problema anterior). É válido mencionar que isso não se aplica aos casos de $f(x) = -a^x$, pois o sinal de negativo não é da base "*a*" e sim do resultado da potência a^x. A seguir, mostra-se o esboço de quatro funções exponenciais com as ideias explicitadas nesse parágrafo.

Figura 40: Esboço de Gráficos Crescente/Decrescente



Fonte: arquivo pessoal.

Note que os esboços das funções Q_2 e Q_4 na imagem anterior têm simetria em relação ao eixo horizontal. Isso também ocorre com os esboços de Q_1 e Q_3. O fato é que isso ocorre devido ao sinal de "menos" na lei da função. Porém, nesses casos, mesmo que a base seja

$$0 < \frac{1}{3} < 1$$

na função Q_3, esta tem comportamento crescente. A mesma ideia se aplica à função Q_4, ou seja, mesmo que a base seja $3 > 1$, a função tem comportamento decrescente. Portanto, não "decore" que as funções exponenciais de base $a > 1$ são *sempre* crescentes e com base $0 < a < 1$ são *sempre* decrescentes. Isso se aplica apenas à situação em que a lei da função é da forma $f(x) = a^x$.

Antes de mencionar os problemas para estudo, faço as seguintes sugestões de vídeos do YouTube™ que podem ser assistidos para complementar o estudo desse módulo (todos os *links* abaixo foram acessados em maio de 2018):

Potências: https://youtu.be/n5NRv2cWQIg

Função Exponencial (parte 1): https://youtu.be/9FGtZt84w6U

Função Exponencial (parte 2): https://youtu.be/SXkjJZHM5UU

Função Exponencial (parte 3): https://youtu.be/31N3orMcdVU

Equação Exponencial (parte 1): https://youtu.be/3EXISt9iVqg

Equação Exponencial (parte 2): https://youtu.be/NPBry6hE3NA

Inequação Exponencial: https://youtu.be/Y7gaJoRnLAY

Problemas (parte 1): https://youtu.be/KEzrU0NXm5g

Problemas (parte 2): https://youtu.be/CFb6-3bR98M

P33) Prova Cinza, ENEM, 2015.

Figura 41: Questão 163 ENEM/2015

QUESTÃO 163

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geq 1$?

- **A** $P(t) = 0{,}5 \cdot t^{-1} + 8\,000$
- **B** $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8\,000$
- **C** $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8\,000$
- **D** $P(t) = 8\,000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$
- **E** $P(t) = 8\,000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

Fonte: Prova Cinza ENEM/2015[41].

41 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P34) Prova Amarela, ENEM, 2012.

Figura 42: Questão 177 ENEM/2012

QUESTÃO 177

Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa *m* pela fórmula $A = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$, em que *k* é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

A) $\sqrt[3]{16}$

B) 4

C) $\sqrt{24}$

D) 8

E) 64

Fonte: Prova Amarela ENEM/2012[42].

42 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P35) Prova Amarela, ENEM, 2012.

Figura 43: Questão 150 ENEM/2012

QUESTÃO 150

Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55 000,00;
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30 000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Fonte: Prova Amarela ENEM/2012[43].

43 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P36) Prova Cinza, ENEM, 2015.

Figura 44: Questão 167 ENEM/2015

QUESTÃO 167

O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1\,800 \cdot (1{,}03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,

(A) 7 416,00.
(B) 3 819,24.
(C) 3 709,62.
(D) 3 708,00.
(E) 1 909,62.

Fonte: Prova Cinza ENEM/2015[44].

44 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P37) Prova Rosa, ENEM, 2016.

Figura 45: Questão 161 ENEM/2016

QUESTÃO 161

O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

(A) reduzida a um terço.

(B) reduzida à metade.

(C) reduzida a dois terços.

(D) duplicada.

(E) triplicada.

Fonte: Prova Rosa ENEM/2016[45].

P38) Um imóvel adquirido na planta valoriza 1% a cada semestre. O preço do imóvel na planta é de R$500.000,00. Faça uma estimativa de quanto tempo um investidor precisa esperar para vender esse imóvel, adquirido na planta, e obter um lucro de pelo menos 10% do valor pago na planta. Esboce o gráfico da função f(x) que representa a valorização do imóvel ao longo do tempo. Em quanto tempo este imóvel atinge 50% de valorização? Explore.

45 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

5.2 REFLEXÕES SOBRE O *ENSINO* DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Os trabalhos apresentados a seguir tratam da temática sobre o ensino e aprendizagem do tópico "função exponencial" na escola básica. A leitura é opcional, porém fica estabelecido o convite para que você conheça cada uma das pesquisas. Aqui também são sugeridas leituras sobre experimentações didáticas ocorridas no Ensino Médio e Ensino Superior.

Título: O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica

RESUMO: "Este trabalho apresenta uma proposta de ensino envolvendo funções, funções exponenciais e funções logarítmicas na escola básica. Através da verificação do processo de aprendizagem de funções pelos alunos, buscamos na teoria dos campos conceituais de Vergnaud e na teoria das representações semióticas de Duval os subsídios necessários para compreender as dificuldades dos alunos e com isso propor uma sequência didática para ser utilizada em sala de aula. A proposta parte da hipótese que a investigação de problemas cotidianos envolvendo o estudo das funções proporciona aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos e definições matemáticas envolvidos. Os alunos são confrontados com problemas que permitem o reconhecimento do conceito de função através da relação entre grandezas, da noção de variável dependente e variável independente e a visualização gráfica com a possibilidade da identificação das propriedades de crescimento e decrescimento. As funções exponenciais e logarítmicas são tratadas via problemas em que a aplicação dessas funções é necessária, tais como: crescimento populacional, rendimento de um imóvel, medições das escalas de terremotos, cálculo do pH de soluções químicas, entre outros. A apresentação dos gráficos dessas funções se faz no laboratório de informática, onde os alunos utilizam a tecnologia como recurso para visualizar as características de cada função. Portanto, buscamos com essa sequência didática propor uma alternativa para a abordagem dos conceitos de matemática e através da investigação em grupo possibilitar a aprendizagem de matemática."

Autor: Rodrigo Sychocki da Silva

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10183/49422 (acesso em maio/2018)

Título: Estudo da função exponencial e a indução matemática com aplicação da Torre de Hanói

RESUMO: "O presente estudo procura investigar o papel metodológico do uso de jogos no processo ensino-aprendizagem da matemática, destacando o uso do jogo da Torre de Hanói no ensino de funções. Inicialmente é feita uma análise bibliográfica sobre o tema, destacando as opiniões de vários autores, bem como um estudo sobre o tema funções. Em seguida, a partir de uma análise qualitativa dos dados, são apresentados os resultados sobre a implementação de uma proposta pedagógica, em duas escolas públicas, com base no jogo da Torre de Hanói, na aprendizagem da função exponencial. Esta metodologia utiliza-se dos fundamentos do jogo da Torre de Hanói para introduzir os princípios das funções, explorando a lenda que envolve o jogo. A partir da definição de uma lei de associação da função, o aluno irá deduzir que existe uma relação entre o número de movimentos e o número de discos. Através da indução matemática o aluno poderá comprovar que esta relação dar-se-á em qualquer situação, independente do número de discos utilizados."

Autores: Evaldo José Drabeski e Reinaldo Francisco

Link de acesso web:

http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/696-4.pdf (acesso em maio/2018)

Título: Biologia e Matemática: diálogos possíveis no Ensino Médio

RESUMO: "A complexidade das Ciências face à realidade dos indivíduos, aliada ao ensino brasileiro que muitas vezes ainda se baseia na utilização de conteúdos fragmentados, dificulta a possibilidade de articular saberes provenientes de diferentes campos de conhecimento. Os conhecimentos elaborados pela Biologia, Física e Química, a partir, principalmente, da segunda metade do século XIX, estão intimamente relacionados à aplicação da Matemática, que organiza, expressa e analisa resultados em pesquisas científicas. Entretanto, a mesma aproximação entre a Matemática e as demais Ciências não ocorre em sala de aula e na práxis dos professores no Ensino Médio. A partir da necessidade de integração de conhecimentos, busca-se, com este trabalho, articular saberes nas ações didáticas relacionadas aos currículos de Matemática e Biologia no Ensino Médio brasileiro. Partindo desses currículos, instaura-se uma proposta de apontar sugestões concretas como contribuição ao processo de ensino-aprendizagem dessas duas ciências. Diante do panorama de fragmentação de conhecimentos na formulação dos currículos escolares, partiu-se das idéias de Lévy (2006), Machado (2005) e Morin (2004) para a tessitura do referencial teórico em busca de elementos articuladores entre saberes da Biologia e da Matemática em livros didáticos de biologia do Ensino Médio. A partir das reflexões, a metáfora da rede (MACHADO, 2005) apresenta-se como o principal elemento de uma teia de relações que não se esgota nem se fecha em si mesma. A análise dos resultados permitiu a identificação de duas categorias de integração entre Biologia e Matemática no Ensino Médio. Na primeira, verificam-se os fenômenos biológicos que são descritos por meio de instrumentos matemáticos. Na segunda, encontram-se aqueles em que a Matemática é utilizada como instrumento para a resolução de problemas provenientes da Biologia. Por essa caracterização, o trabalho apresenta-se como estudo teórico. Chegou-se à conclusão da possibilidade do estabelecimento de redes entre Biologia e Matemática como elementos articuladores de saberes, abrindo possibilidades de elaborar formas de ação didática que não recorram à fragmentação do conhecimento nem à desvirtuação de contextos científicos. Como encaminhamento, utilizou-se o pensamento complexo apoiado nas redes de significações para indicar essas novas formas de gerar inovações no pensar e agir em Educação. Verificou-se que existem elementos comuns nas práticas de Biologia e de Matemática no nível médio. As funções podem ser utilizadas como elementos descritores de fenômenos biológicos; a Análise Combinatória, as Probabilidades e a Estatística podem ser aplicáveis à resolução de problemas. Conforme as duas Ciências sejam vistas, existem possibilidades de práticas articuladoras entre elas por toda a extensão do Ensino Médio."

Autor: Geraldo Bull da Silva Júnior

Link de acesso web:

http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_BullG_1.pdf (acesso em maio/2018)

Título: Diferentes abordagens para o ensino e a aprendizagem de funções exponenciais

RESUMO: "O texto apresenta e fundamenta uma proposta de ensino e aprendizagem de funções exponenciais com atividades que mobilizam os alunos do Ensino Médio para a construção de conhecimentos e a socialização de ideias, contemplando o desenvolvimento de importantes habilidades matemáticas, a resolução de problemas contextualizados e a utilização de materiais manipulativos. Os contextos abordados são os Jogos, a Biologia e a Geometria Fractal. Nesses cenários, pretende-se desenvolver as habilidades de criar e testar hipóteses, representar relações entre grandezas, transformar uma representação em outra, e socializar e argumentar ideias. Os materiais concretos utilizados nessa proposta são jogos e objetos de dobradura e recorte. Acredita-se que, com a aplicação e a reflexão sobre essas atividades, os alunos do Ensino Médio possam assumir o papel de sujeitos ativos do processo de aprendizagem e os professores tenham condições de criar novas situações de ensino."

Autores: Raquel Milani, Débora Bonatto e Carina de Araujo

Link de acesso web:

http://mdmat.mat.ufrgs.br/xenem/artigos/MC/T11_MC948.pdf (acesso em maio/2018)

Título: Tecnologias de informação e comunicação para o enriquecimento no ensino/aprendizagem

RESUMO: "Este trabalho pretende descrever um estudo de caso no âmbito das novas Tecnologias da Informação no ensino da Matemática, desenvolvido nos Cursos de Especialização Tecnológica de Tecnologia e Gestão Automóvel e de Construção Civil e Obras Públicas no Instituto Superior de Engenharia de Coimbra. O objetivo principal deste trabalho incide sobre o estudo da função afim, da função exponencial e da função logarítmica com o recurso ao *software* dinâmico "GeoGebra", no sentido de enriquecer a tradicional metodologia de ensino, facilitando e incentivando o desenvolvimento de competências e a melhoria das aprendizagens dos alunos. Os resultados deste trabalho contribuem para um processo de ensino e aprendizagem, mais rico, motivador e estimulante, onde os alunos trabalham ao seu próprio ritmo e se envolvem mais ativamente."

Autor: Cristina M. R. Caridade

Link de acesso web:

http://ticeduca.ie.ul.pt/atas/pdf/8.pdf (acesso em maio/2018)

6

Módulo VI

Conteúdos abordados: Logaritmos e propriedades operatórias. Logaritmo natural. Número de Euler. Crescimento/decrescimento logarítmico e modelagem. Função logarítmica: domínio, imagem e esboço gráfico. Situações-problema.

6.1 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS[46]

A frase que inicio este módulo é: "O módulo VI tem relação intrínseca com o módulo V". Funções exponenciais e funções logarítmicas são objetos que tem a relação: um é o "inverso" do outro. Inverso não no sentido multiplicativo, mas sim no sentido de função inversa. A temática do curso não é fazer uma abordagem sobre funções inversas, porém a ideia é: se $f : A \to B$ é uma função entre dois conjuntos A e B, pode-se pensar a partir de certas condições atendidas[47], quando existe $f^{-1} : B \to A$.

Historicamente, a criação dos logaritmos deu-se a partir da necessidade de simplificação de cálculos matemáticos, principalmente por conta do desenvolvimento da Astronomia e da expansão do comércio causada pelas navegações. Uma maior intensidade nesse desenvolvimento se deu entre os séculos XVI e XVII e os logaritmos surgiram como recursos para os extensivos cálculos, que transformavam complexas operações de multiplicação e divisão em simples operações de adição e subtração.

Lembre-se do vídeo "Potências de 10" e do problema do tabuleiro de xadrez no módulo anterior. Imagine o quanto é trabalhoso lidar com números de magnitude expressiva e o quanto pode ser mais acessível uma abordagem que manipule os expoentes. Além do mais, nem todas

46 Inspirado no material produzido por Maurício Dieckmann Moreira e Victor Ricardo Coronel.
47 A função precisa ser "bijetora" para ter inversa.

as equações exponenciais podem ser resolvidas pelo método de "cancelamento das bases e comparação dos expoentes". Surge, portanto, uma necessidade que além de prática é uma nova aritmética, a qual torna possível entender e resolver problemas da forma $a^x = b$ com *a* e *b* não nulos, distintos e positivos.

Antes de iniciar com as definições e propriedades matemáticas dos logaritmos, observe o seguinte texto:

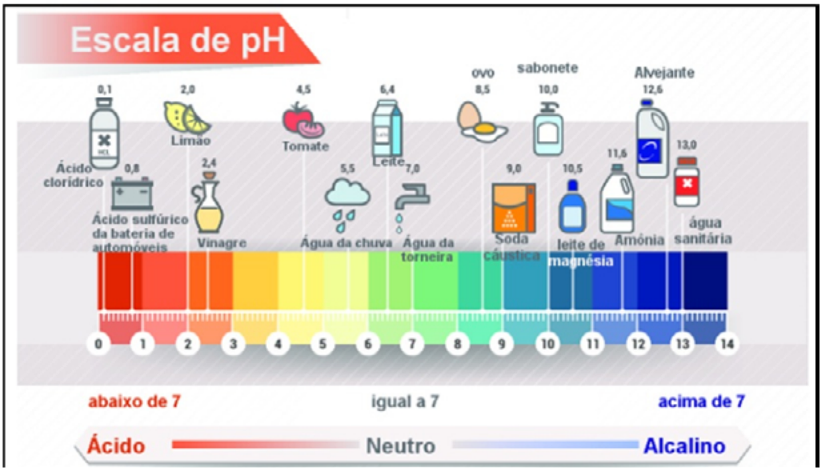
> "A sensação é proporcional ao logaritmo dos estímulos."
>
> Já ouviu isso antes? Se ouviu, então já conhece a lei de Weber-Fechner. Se nunca ouviu, mesmo assim não pode ter escapado às suas aplicações. Como, por exemplo, o facto de que é necessário elevar ao quadrado a intensidade sonora, para que a altura do som seja percebida como tendo dobrado. No entanto, por que é assim? Em princípio, há muitas outras possibilidades para relacionar sensação e estímulo. Uma recente investigação em matemática e psicologia mostra como a lei do logaritmo tem uma função central na sobrevivência dos nossos antepassados num mundo onde erros de perceção podem ser fatais.
>
> No século XIX, o médico alemão Ernest Weber fez um interessante experimento. Deu dois pesos, de diferentes valores, a várias pessoas, e perguntou qual era o maior. Às vezes a resposta era óbvia, pois todos percebemos a diferença entre um e dois quilogramas. Por vezes, a diferença era tão subtil, de uns poucos gramas por quilo, que ninguém via claramente qual era o de maior valor. De facto, o que Weber constatou

era que a diferença que tornava a maioria das pessoas capaz de detetar corretamente o maior peso era proporcional às quantidades envolvidas. Assim, se é necessário uma diferença de 10 gramas para perceber variações quando se trata de pesos de cerca de 100 gramas, então, quando estivermos a tratar de pesos de 1 kg, a diferença necessária será da ordem de 100g. (CHALUB, Fabio. *O Logaritmo dos Estímulos*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática/Repositório da Universidade Nova de Lisboa, 2013. p. 13. Disponível em: http://hdl.handle.net/10362/24789. Acesso em: 08 maio 2018.)

No texto acima, percebe-se, a partir de um contexto prático, a necessidade e importância dos logaritmos. Nas ciências, em particular nas ciências da natureza, há diversas aplicações dos logaritmos e das funções logarítmicas. Eis a próxima, na forma de uma situação-problema.

Situação-problema 1: O cálculo para determinar o pH de uma solução é dado pela relação $pH = P(H^+) = -\log_{10}\left(H^+\right)$, em que H^+ representa a quantidade de íons de Hidrogênio na solução. A definição inicial de solução ácida, básica (alcalina) e neutra é: para $pH = 7$ temos uma solução neutra, para $pH > 7$ a solução básica (alcalina) e para $pH < 7$ a solução ácida. A faixa de valores é $0 \leq pH \leq 14$ (Adaptado de https://pt.wikipedia.org/wiki/PH). A figura a seguir ilustra com exemplos o que foi inicialmente apresentado.

Figura 46: Espectro do pH em Objetos do Cotidiano



Fonte: ***Site*** **Mundo Educação[48].**

Um químico, em seu trabalho cotidiano de laboratório, necessita calcular o pH de quatro soluções que estão dispostas na tabela a seguir. Antes de efetuar os cálculos, ele obteve as quantidades dos íons de Hidrogênio das soluções:

Solução	Concentração
A	$H^+ = 10^{-8}$
B	$H^+ = 10^{-4}$
C	$H^+ = 10^{-7}$
D	$H^+ = 10^{-12}$

48 Disponível em: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/quimica/conceito-ph-poh.htm. Acesso em: maio 2018.

a) Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra por meio de cálculos matemáticos e comparações com a figura 46.

b) Qual das soluções na tabela acima tem a maior concentração hidrogeniônica? E qual tem a menor concentração? Justifique a sua resposta.

Observe que a situação anterior exige a necessidade de uma aritmética com números "pequenos". Antecipo que terremotos ou quaisquer abalos sísmicos também podem ser "modelados" com logaritmos, porém os números envolvidos, tal como nas distâncias astronômicas, são de magnitudes "grandes". Portanto, desenvolveremos agora ideias matemáticas úteis para a resolução e exploração da situação-problema.

A definição de logaritmo é: dado um número real $a > 0$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a, de tal modo que $a^y = x$. Escreve-se $\log_a x = y$ e lê-se y é o logaritmo de x na base a.

A partir da definição, o logaritmo tem as seguintes propriedades:

i) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ para quaisquer $x, y > 0$ e $b > 0, b \neq 1$;

ii) $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$ para quaisquer $x, y > 0$ e $b > 0, b \neq 1$;

iii) $\log_b(x)^r = r.\log_b x$ para quaisquer $x > 0$, $b > 0, b \neq 1$ e $r \in R$;

iv) $\log_b x = \dfrac{\log_k x}{\log_k b}$ para quaisquer $x > 0$, $b > 0, b \neq 1$ e $k > 0, k \neq 1$ (mudança de base nos logaritmos).

As propriedades não serão aqui demonstradas, porém nas referências é possível encontrar a fundamentação matemática necessária para justificar cada uma das quatro propriedades enunciadas anteriormente. Apenas por motivo de esclarecimento, as quatro propriedades derivam das regras e propriedades operatórias para as potências de números reais.

Se você tem uma calculadora científica, certamente há dois botões intitulados "log" e "ln". Quando se escreve apenas "log", está-se assumindo que a base para o cálculo com esse logaritmo seja 10. Então, a notação $\log_{10}$ e $\log$ tem o mesmo significado. Já a notação "ln" significa "logaritmo natural". Nesse caso, a base para o logaritmo é o número de Euler[49] (*e*), que é um número não racional e tem valor aproximado de 2,718. A notação $\log_e$ e $\ln$, portanto tem o mesmo significado.

Da mesma maneira que foi feito no módulo anterior, segue um quadro com exemplos para ilustrar o debate técnico sobre logaritmos de números e propriedades, antes de prosseguirmos para a apresentação e estudo da função logarítmica.

49 Um livro que julgo interessante e que a leitura é sugerida para ampliar e aprofundar os conhecimentos sobre o número de Euler é: "e: a história de um número" do autor Eli Maor.

Definição de logaritmo	$\log_2(8) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$ $\log_3(243) = 5 \Leftrightarrow 3^5 = 243$
Multiplicação no logaritmando	$\log_2(16\times 4) = \log_2(16) + \log_2(4) = 4+2=6$ $\log_3(81\times 9) = \log_3(81) + \log_3(9) = 4+2=6$
Divisão no logaritmando	$\log_2\left(\frac{64}{8}\right) = \log_2(64) - \log_2(8) = 6-3=3$ $\log_3\left(\frac{81}{27}\right) = \log_3(81) - \log_3(27) = 4-3=1$
Expoente no logaritmando	$\log_4(16)^3 = 3\times\log_4(16) = 3\times 2 = 6$ $\log_5(125)^7 = 7\times\log_5(125) = 7\times 3 = 21$
Mudança de base	$\log_4(7) = \frac{\log_5(7)}{\log_5(4)} = \frac{\log_3(7)}{\log_3(4)} = \frac{\log_9(7)}{\log_9(4)} = \cdots = \frac{\log_b(7)}{\log_b(4)}$ $\log_2(3) = \frac{\log_5(3)}{\log_5(2)} = \frac{\log_3(3)}{\log_3(2)} = \frac{\log_9(3)}{\log_9(2)} = \cdots = \frac{\log_b(3)}{\log_b(2)}$

Uma vez debatida a temática das definições e propriedades dos logaritmos, é chegada a hora de debater sobre as funções logarítmicas. A função logarítmica de base a (fixado um número real positivo), $f: R^+ \to R$, indicada pela notação $f(x) = \log_a(x)$, deve ser definida de modo a ter as propriedades fundamentais a seguir explanadas.

Assumiremos que a inversa da função exponencial de base a é a função $\log_a : R^+ \to R$ que relaciona cada número real positivo x com o valor de $\log_a(x)$, chamado de logaritmo de x na base a. Desse modo, a função $g: R^{+} \rightarrow R$, indicada pela notação $g(x)=\log_{a}(x)$, chamada de função logarítmica, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades:

i) $g(xy)=g(x)+g(y)$;

ii) $x<y \Rightarrow \log_{a} x<\log_{a} y$ quando $a>1$ e $x<y \Rightarrow \log_{a}(y)<\log_{a}(x)$ quando $0<a<1$.

Destaco que, a partir das propriedades apresentadas acima, é possível verificar os próximos teoremas, em que cada resultado caracteriza uma propriedade que envolve a função logarítmica. Salientamos que o resultado do primeiro teorema possibilita demonstrar os demais resultados considerando como hipótese a função $g(x)=\log(x)$ em vez de $g(x)=\log_{a}(x)$ com uma base arbitrária a (nas referências você pode consultar os livros, caso queira, que abordam as demonstrações dos resultados matemáticos enunciados).

Teorema 1: Dadas duas funções logarítmicas $L, M: R^{+} \rightarrow R$, existe uma constante real $c>0$, tal que $M(x)=c.L(x)$ para qualquer $x \in R^{+}$.

O teorema acima é a verificação de que a propriedade de mudança de base dos logaritmos vale também para as funções logarítmicas. Note que, pelo teorema anterior, tem-se que

$$g(x)=\log_{a}(x)=\frac{\log(x)}{\log(a)}=\frac{1}{\log(a)}.\log(x)=c.\log(x)=c.f(x)$$

em que $f(x)=\log(x)$ e $c>0$.

No caso em que $\log(a) < 0$, escrevemos:

$$g(x) = \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{1}{\log(a)}.\log(x) = c.(-\log(x)) = c.f(x)$$

com $f(x) = -\log(x)$ e $c > 0$.

Teorema 2: Uma função logarítmica $g: R^+ \to R$, indicada pela notação $g(x) = \log(x)$, é sempre injetiva.

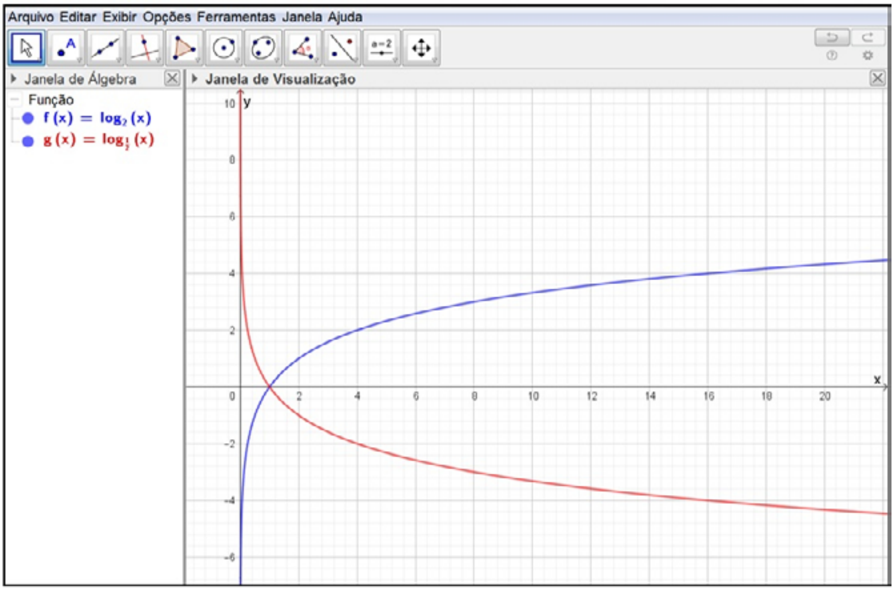
Teorema 3: Uma função logarítmica $g: R^+ \to R$, indicada pela notação $g(x) = \log(x)$, é ilimitada superior e inferiormente.

Teorema 4: Uma função logarítmica $g: R^+ \to R$, indicada pela notação $g(x) = \log(x)$, é sempre sobrejetiva.

Repetindo o discurso já feito para as funções exponenciais... por fim, os resultados apresentados "sustentam" a matemática das funções logarítmicas e, apesar de parecerem árduos e complicados, são necessários para que as contas e os procedimentos analíticos ocorram de modo consistente. Antes de avançar na indicação de problemas para a exploração, retoma-se a temática do esboço do gráfico de tais funções.

Pelo debate técnico-teórico feito, segue que uma função logarítmica $f(x) = \log_a(x)$ com base $a > 1$ terá comportamento crescente e de base $0 < a < 1$ terá comportamento decrescente. É válido mencionar que isso não se aplica aos casos de $f(x) = -\log_a(x)$, pois o sinal de negativo é do resultado do logaritmo $\log_a(x)$. A seguir, mostra-se o esboço de duas funções logarítmicas com as ideias explicitadas nesse parágrafo.

Figura 47: Esboço de Gráficos Crescente/Decrescente de Funções Logarítmicas



Fonte: arquivo pessoal.

Lembra da situação-problema apresentada sobre o pH?... Ela não foi esquecida! Façamos o debate e a exploração do contexto. O problema apresentava uma tabela com as concentrações de quatro soluções:

Solução	Concentração
A	$H^+ = 10^{-8}$
B	$H^+ = 10^{-4}$
C	$H^+ = 10^{-7}$
D	$H^+ = 10^{-12}$

a) Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra por meio de cálculos matemáticos e comparações com a figura 46.

b) Qual das soluções na tabela acima tem a maior concentração hidrogeniônica? E qual tem a menor concentração? Justifique a sua resposta.

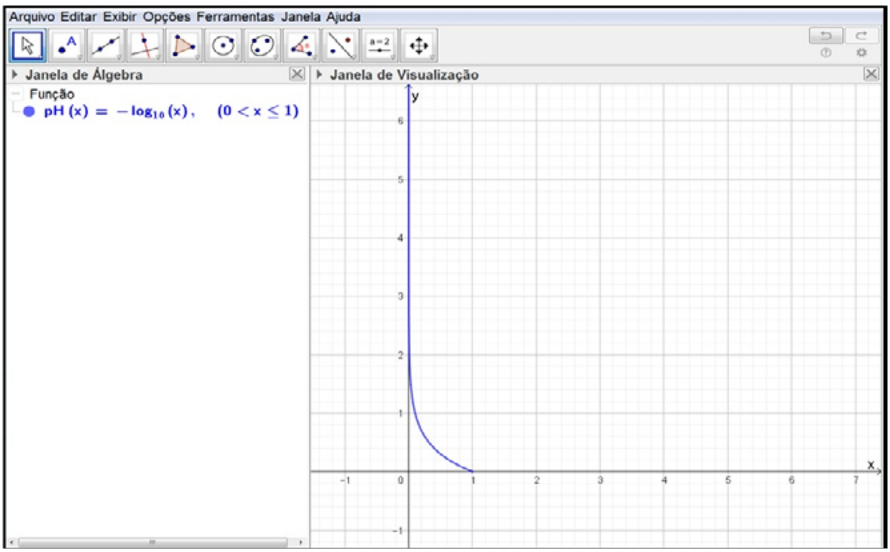
Foi apresentado no contexto que o pH de uma solução é obtido pela relação $pH = P(H^+) = -\log_{10}\left(H^+\right)$. Com isso, é possível calcular o pH das quatro soluções mostradas na tabela como segue (usa-se aqui as propriedades dos logaritmos).

$$pH_A = P_A(H^+) = -\log_{10}\left(10^{-8}\right) = -(-8)\times\log_{10}(10) = 8\times 1 = 8$$
$$pH_B = P_B(H^+) = -\log_{10}\left(10^{-4}\right) = -(-4)\times\log_{10}(10) = 4\times 1 = 4$$
$$pH_C = P_C(H^+) = -\log_{10}\left(10^{-7}\right) = -(-7)\times\log_{10}(10) = 7\times 1 = 7$$
$$pH_D = P_D(H^+) = -\log_{10}\left(10^{-12}\right) = -(-12)\times\log_{10}(10) = 12\times 1 = 12$$

Portanto, as soluções são (em resposta ao item a): Solução A – fracamente alcalina; Solução B – fracamente ácida; Solução C – neutra; Solução D – fortemente alcalina.

Pela análise das concentrações (item b), nota-se que a maior concentração está na solução B e a menor concentração está na solução D, visto que esses são os expoentes que tornam o resultado da concentração maior e menor, respectivamente, na tabela. O esboço gráfico permite visualizar o que ocorre com a alcalinidade de acordo com as concentrações. Observe que, se está mais próximo de zero uma concentração, então o comportamento do pH é fortemente alcalino (perto de 14). Caso ocorra o contrário, ou seja, concentrações altas (próximas de 1), isso implica que o pH será perto de zero, o que torna uma solução fortemente ácida. E, por fim, um número de concentração próximo de 0,5 *não* torna necessariamente uma solução neutra (veja isso no gráfico).

Figura 48: Esboço do Gráfico da Relação de pH



Fonte: arquivo pessoal.

Seguem aqui novas sugestões de vídeos do YouTube™ que podem ser assistidos para complementar o estudo (todos os *links* abaixo foram acessados em maio de 2018):

Logaritmos (parte 1): https://youtu.be/esdFuyG7zGs

Logaritmos (parte 2): https://youtu.be/BzbzlRyaj2U

Logaritmos (parte 3): https://youtu.be/cjXN-cs5deo

Propriedades (parte 1): https://youtu.be/3gNGS4vzM_o

Propriedades (parte 2): https://youtu.be/BkNmuxmnvEc

Cálculo com Logaritmos: https://youtu.be/E-upQwSS2Vw

Mudança de Base: https://youtu.be/kZUCI3nFfwk

Logaritmos e Exponenciais: https://youtu.be/kZUCI3nFfwk

Aplicações: https://youtu.be/IEDBi4x_zQE

Função Logarítmica: https://youtu.be/MkgfW2MMnHc

Problemas (parte 1): https://youtu.be/LXamhAIIaUg

Problemas (parte 2): https://youtu.be/M99eny1lY2M

Problemas (parte 3): https://youtu.be/2ZZ599-7XMo

P39) Prova Azul, ENEM, 2017.

Figura 49: Questão 137 ENEM/2017

QUESTÃO 137

Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5 000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5\,000 \times 1{,}013^{n} \times 0{,}013}{(1{,}013^{n} - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

A) 12.
B) 14.
C) 15.
D) 16.
E) 17.

Fonte: Prova Azul ENEM/2017[50].

50 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P40) Prova Rosa, ENEM, 2016.

Figura 50: Questão 141 ENEM/2016

QUESTÃO 141

Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2?

A) $E_1 = E_2 + 2$

B) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$

C) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$

D) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$

E) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

Fonte: Prova Rosa, ENEM, 2016[51].

51 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P41) Prova Azul, ENEM, 2013.

Figura 51: Questão 166 ENEM/2013

QUESTÃO 166

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A) 27
B) 36
C) 50
D) 54
E) 100

Fonte: Prova Azul ENEM/2013[52].

52 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P42) Prova Azul, ENEM, 2011.

Figura 52: Questão 137 ENEM/2011

QUESTÃO 137

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).
U.S. GEOLOGICAL SURVEY. **USGS Earthquake Magnitude Policy**.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina·cm)?

A) $10^{-5,10}$
B) $10^{-0,73}$
C) $10^{12,00}$
D) $10^{21,65}$
E) $10^{27,00}$

Fonte: Prova Azul ENEM/2011[53].

53 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P43) Prova Rosa, ENEM, 2016.

Figura 53: Questão 148 ENEM/2016

QUESTÃO 148

Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.

Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

A) 22.

B) 50.

C) 100.

D) 200.

E) 400.

Fonte: Prova Rosa ENEM/2016[54].

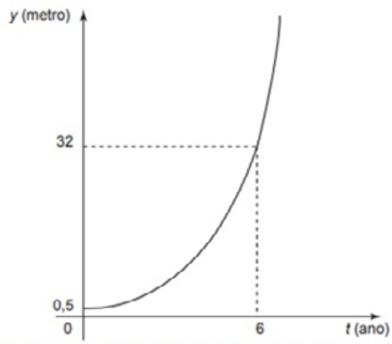
54 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P44) Prova Rosa, ENEM, 2016.

Figura 54: Questão 141 ENEM/2016

QUESTÃO 141

Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.

O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

- **A** 3.
- **B** 4.
- **C** 6.
- **D** $\log_2 7$.
- **E** $\log_2 15$.

Fonte: Prova Rosa ENEM/2016[55].

6.2 REFLEXÕES SOBRE O *ENSINO* DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Os trabalhos apresentados a seguir tratam da temática sobre o ensino e aprendizagem do tópico “função logarítmica” na escola básica. A leitura é opcional, porém fica estabelecido o convite para que você

55 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

conheça cada uma das pesquisas. Aqui também são sugeridas leituras sobre experimentações didáticas ocorridas no Ensino Médio e Ensino Superior.

Título: O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica

RESUMO: "Este trabalho apresenta uma proposta de ensino envolvendo funções, funções exponenciais e funções logarítmicas na escola básica. Através da verificação do processo de aprendizagem de funções pelos alunos, buscamos na teoria dos campos conceituais de Vergnaud e na teoria das representações semióticas de Duval os subsídios necessários para compreender as dificuldades dos alunos e com isso propor uma sequência didática para ser utilizada em sala de aula. A proposta parte da hipótese que a investigação de problemas cotidianos envolvendo o estudo das funções proporciona aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos e definições matemáticas envolvidos. Os alunos são confrontados com problemas que permitem o reconhecimento do conceito de função através da relação entre grandezas, da noção de variável dependente e variável independente e a visualização gráfica com a possibilidade da identificação das propriedades de crescimento e decrescimento. As funções exponenciais e logarítmicas são tratadas via problemas em que a aplicação dessas funções é necessária, tais como: crescimento populacional, rendimento de um imóvel, medições das escalas de terremotos, cálculo do pH de soluções químicas, entre outros.

A apresentação dos gráficos dessas funções se faz no laboratório de informática, onde os alunos utilizam a tecnologia como recurso para visualizar as características de cada função. Portanto, buscamos com essa sequência didática propor uma alternativa para a abordagem dos conceitos de matemática e através da investigação em grupo possibilitar a aprendizagem de matemática."

Autor: Rodrigo Sychocki da Silva

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10183/49422 (acesso em maio/2018)

Título: O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do *software* GeoGebra

RESUMO: "Este estudo tem como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que envolveu o tema função logarítmica utilizando o *software* GeoGebra como uma estratégia pedagógica. Para tanto escolhemos como aporte teórico a Teoria dos Registros de Representação e Semiótica descrita por Duval (2009) e os processos do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (1991). Como referencial metodológico, utilizamos os pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE, DOUADY, MORENO, 1995). As escolhas das atividades para compor a sequência foram retiradas do Caderno do Professor de Matemática da 1ª Série do Ensino Médio volume 3 (SÃO PAULO, 2009) com algumas adaptações que julgamos necessárias. Os sujeitos da pesquisa foram estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de São Paulo no Município de Itaquaquecetuba, durante oito encontros presenciais. As análises das produções realizadas pelos alunos em conjunto com as transcrições dos diálogos gravados em áudio durante a aplicação da sequência didática apontaram que houve dificuldade em fazer a conversão do registro gráfico no registro de partida para os registros: algébrico e na língua natural no registro de chegada. Segundo relato dos participantes, o uso do *software* GeoGebra contribuiu para a visualização e para a compreensão do comportamento gráfico das funções estudadas. Os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvido nas estratégias de resoluções dos estudantes foram: a descoberta por meio de investigação, mudança de representação de um mesmo conceito, generalização e abstração. Segundo Dreyfus (1991) esses processos são relevantes para a compreensão de um conceito matemático. Após as análises dos resultados concluímos que a aplicação da sequência didática utilizando o *software* GeoGebra foi uma estratégia eficiente para atingir os nossos objetivos propostos inicialmente."

Autor: Adriana Tiago Castro dos Santos

Link de acesso web:

https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10854 (acesso em maio/2018)

Título: Representações matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem de função logarítmica com uso de *software* Winplot

RESUMO: "O experimento foi realizado em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, no Colégio Estadual Arnoldo Agenor Zimmermann na cidade de Gaspar SC, na qual as autoras do artigo desempenham as atividades do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID Matemática da Universidade de Blumenau FURB. A turma trabalhada é composta por aproximadamente 20 alunos com idade entre 15 e 16 anos. A professora regente da turma é a própria supervisora do programa na escola. Planejamos esta atividade durante o mês de outubro de 2012 e fizemos a primeira aplicação no início de novembro do mesmo ano. O presente trabalho discorre sobre representações matemáticas nos processos de ensino aprendizagem de função logarítmica com uso do *software* Winplot e tem como objetivos, reconhecer função logarítmica nos registros de linguagem natural, algébrica, tabular e gráfica, compreender os procedimentos de tratamento nos diferentes registros, realizar o procedimento de conversão entre os diferentes registros."

Autores: Dionara Freire de Almeida e Andrea Cristina Vieira

Link de acesso web:

http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/132_34_ID.pdf (acesso em maio/2018)

Título: A apresentação de funções exponenciais e logarítmicas em livros didáticos para o Ensino Médio

RESUMO: "O presente artigo é um recorte de nossa dissertação de mestrado que tem como objetivo investigar como as funções exponenciais e logarítmicas são abordadas em livros didáticos de Matemática, oferecidos às escolas brasileiras pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, no Ensino Médio de 2015 e como é proposta a construção, sistematização e consolidação de conhecimentos nesses manuais. Nosso propósito é analisar situações matemáticas, conceitos, proposições, procedimentos, linguagem e argumentações que o livro didático apresenta, contabilizando diferentes tipos de tarefas que os autores propõem ao estudante para aplicação dos conhecimentos. O estudo alicerça-se na revisão da literatura sobre a análise de manuais, as orientações curriculares de Matemática para o Ensino Médio, e o livro do 1º ano do Ensino Médio das seis coleções aprovadas pelo PNLD de 2015; a publicação Mathematics Teachers at Work – Connecting Curriculum Materials and Classroom Instruction (2009), coordenada por Janine T. Remillard, Professor Associado de Educação da Faculdade de Educação da Universidade da Pensilvânia, Beth A. Herbel-eisenmann, Professora Assistente de Formação de Professores, Michigan State University e Gwendolyn M Lloyd, professor do Departamento de Matemática, Virginia Tec. Optou-se pela metodologia de natureza qualitativa e a técnica utilizada foi análise documental; o instrumento de recolhimento de dados foram grelha de análise."

Autores: Cristina Masetti e Célia Maria Carolino Pires

Link de acesso web:

http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/epd/article/view/943 (acesso em maio/2018)

Título: Logaritmos e função logarítmica na matemática escolar brasileira

RESUMO: "Este trabalho tem o objetivo de verificar como o logaritmo e a função logarítmica são abordados nos livros didáticos de Matemática do século XIX ao XXI, indicando a inserção desses conteúdos na Matemática Escolar brasileira. Baseamo-nos, dentre outros autores, em Choppin (2004), Valente (1999, 2004, 2005 e 2008) e Bittencourt (2004 e 2008) para identificarmos o livro didático como fonte de pesquisa da Matemática Escolar, a partir de suas formas conceituais, de enfoque didático ou referente à organização do saber. A fim de verificar relações entre o histórico dos logaritmos e da função logarítmica na Matemática e na Matemática Escolar, apresentamos a ideia dos logaritmos de Napier como facilitadores de cálculos, interpretamos sua definição geométrica por meio de um sistema de equações diferenciais ordinárias e, assim, mostramos um breve histórico sobre a inserção do logaritmo como função no Cálculo Integral. Os livros didáticos de Matemática analisados foram publicados entre os anos de 1879 e 2013. Nesta análise, consideramos o modo como os autores abordam ou tratam a Matemática, os tipos de atividades que são propostas, os tipos de explicações, definições, exemplos, gráficos, exercícios, aplicações e problemas associados aos logaritmos e à função logarítmica. Os resultados apontam que no século XIX os logaritmos eram tratados nos livros didáticos, quase sempre, por meio da Aritmética. A partir da década de 1890, eles são abordados, tanto no campo aritmético, pela associação à teoria das progressões, como no campo algébrico, sendo expoentes numa equação ou função. A partir da década de 1930 até os dias de hoje verificamos uma predominância da concepção algébrico-funcional dos logaritmos. Com base nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), nos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNs – 2000), nos Parâmetros Curriculares Nacionais+ Ensino Médio (PCNs+ Ensino Médio – 2002), no Exame Nacional do Ensino Médio e em livros didáticos recentes, verificamos que os logaritmos e a função logarítmica se inserem, atualmente, na Matemática Escolar brasileira, pela sua associação às aplicações, como por exemplo, juros compostos, dinâmica populacional, desintegração radioativa, potencial hidrogeniônico, Escala Richter, Escala de Magnitude de Momento (MMS) e nível de intensidade sonora."

Autor: Diogo Oliveira Soares

Link de acesso web:

http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-26102017-173929/en.php (acesso em maio/2018)

7

Módulo VII

Conteúdos abordados: Trigonometria em triângulos retângulos. Teorema dos senos e teorema dos cossenos. Radianos e a extensão das funções trigonométricas para os números reais. Funções trigonométricas. Esboço de gráficos das funções trigonométricas. Composição envolvendo funções trigonométricas. Situações-problema.

7.1 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS[56]

Chegamos ao fim do curso! Inicia-se o último módulo de estudo previsto, o qual tratará sobre as funções trigonométricas. Juntamente com as funções explanadas nos módulos anteriores, esses objetos matemáticos são de suma importância. Com eles é possível modelar e compreender fenômenos, agora com uma nova qualidade, que sejam *periódicos*. O presente módulo pretende fazer uma explanação sobre a matemática envolvida em situações que tem padrão repetitivo, os quais ocorrem de forma periódica.

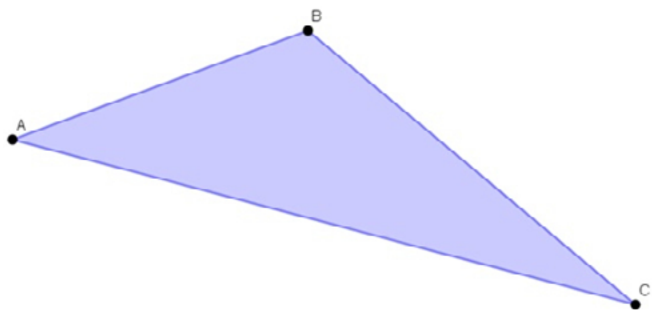
Entende-se por periódico todo valor, o qual uma função f possa assumir e que ocorra mais de uma vez da mesma forma, ou seja, $f(x) = f(x+P)$. Com isso, diz-se que a função f tem período "P". Antes de iniciar propriamente o estudo das funções periódicas, faz-se um estudo da trigonometria, ou seja, parte da matemática que estuda relações métricas de triângulos. Faz-se uma explanação sobre resultados matemáticos para triângulos, em particular para os triângulos retângulos, e com isso se estabelece uma "ponte" entre a trigonometria dos triângulos e as funções trigonométricas.

Triângulo é a região do plano formada pela união de três segmentos de retas conectados pelas suas extremidades (dois a dois). A representação de um triângulo está feita na figura a seguir e converge para a imagem mental que cada um de nós tem sobre tal objeto. O triângulo,

56 Inspirado no material produzido por Felipe Santos Ramos e Maiquel Orestes Grassi.

enquanto objeto matemático, tem três ângulos internos, sendo um em cada vértice. A definição de triângulo é simples e compreensível, porém deve-se diferenciar de sua representação. Atente que “definição” e “representação” são ideias diferentes para os objetos na matemática.

Figura 55: Esboço de um Triângulo



Fonte: arquivo pessoal.

Um triângulo tem três ângulos internos, os quais somam 180 graus (resultado talvez já conhecido por você desde o ensino básico). Quando um dos ângulos internos de um triângulo tem como medida 90 graus, o triângulo é chamado de “triângulo retângulo”. O grau é uma unidade usada para medir ângulos. Também é usada, para a medição de ângulos, a unidade radianos (derivada da palavra que lembra “raio”).

Interessante observar que a trigonometria, em seus primórdios na antiguidade, era utilizada para se tentar compreender sobre as órbitas ao redor da Terra (sim, a visão hegemônica não era antropocêntrica... e sim heliocêntrica!). Isso relacionaria uma corda de circunferência com o ângulo central correspondente, porém em uma falha de tradução do árabe para o latim, a palavra “jiba” (corda) foi confundida com “jaib” (dobra, cavidade, *sinus* em latim). Com isso, a palavra que na trigonometria conhecemos por "seno" teve sua origem a partir de um equívoco de tradução entre idiomas.

A partir do fato (historicamente convencionado pelos Babilônicos[57]) de que a circunferência tem 360 partes iguais, a convenção e relação entre grau e radiano é que $180^{\circ} = \pi \quad rad$. Todas as conversões entre as representações podem ser feitas com a aplicação de regra de três simples (raciocínios envolvendo proporcionalidade), ou seja,

$$\left.\begin{array}{l} 180^{\circ} = \pi \quad rad \\ X^{\circ} = Y \quad rad \end{array}\right\} \Leftrightarrow X^{\circ} = \frac{180^{\circ} \times Y}{\pi} \Leftrightarrow Y = \frac{X^{\circ} \times \pi}{180^{\circ}}$$

Com isso, por exemplo, segue que

$$60^{\circ} = \frac{\pi}{3} \quad rad \qquad 45^{\circ} = \frac{\pi}{4} \quad rad \qquad 150^{\circ} = \frac{5\pi}{6} \quad rad$$

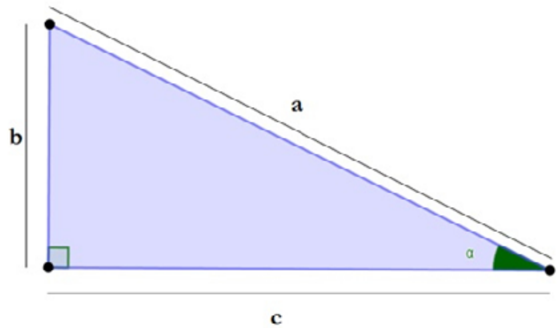
entre outros. A ideia de semelhança de triângulos permite para *triângulos retângulos* estabelecer as definições de seno, cosseno e tangente, assim como seguem, respectivamente:

$$sen(\alpha) = \frac{b}{a} \qquad \cos(\alpha) = \frac{c}{a} \qquad tg(\alpha) = \frac{b}{c}$$

Essas três razões estão construídas a partir da figura a seguir.

57 Em caso de curiosidade consulte o livro "Introdução à História da Matemática" do autor Howard Eves, Editora Unicamp.

Figura 56: Triângulo Retângulo



Fonte: arquivo pessoal.

Em certas situações, é útil saber que

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Ainda, no contexto de triângulos retângulos, vale a relação: $sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ (decorrência da aplicação do "famoso" Teorema de Pitágoras no contexto da figura 56). A partir da igualdade é possível relacionar seno e cosseno de um ângulo agudo e interno ao triângulo retângulo. Quando o triângulo é um triângulo não necessariamente retângulo valem os resultados dos dois teoremas seguintes. Considere o triângulo da figura 56. A partir dele é verdade que:

Teorema 1 (teorema dos senos): Em um triângulo ABC qualquer vale que:

$$\frac{med(AB)}{sen(\hat{C})} = \frac{med(AC)}{sen(\hat{B})} = \frac{med(BC)}{sen(\hat{A})}$$

Teorema 2 (teorema dos cossenos): Em um triângulo ABC qualquer vale que:

$$\begin{cases} \left(med(AB)\right)^2 = \left(med(BC)\right)^2 + \left(med(AC)\right)^2 - 2.\left(med(BC)\right).\left(med(AC)\right).\cos\left(\hat{C}\right) \\ \left(med(BC)\right)^2 = \left(med(AB)\right)^2 + \left(med(AC)\right)^2 - 2.\left(med(AB)\right).\left(med(AC)\right).\cos\left(\hat{A}\right) \\ \left(med(AC)\right)^2 = \left(med(AB)\right)^2 + \left(med(BC)\right)^2 - 2.\left(med(AB)\right).\left(med(BC)\right).\cos\left(\hat{B}\right) \end{cases}$$

*A sigla *med* nos resultados anteriores tem o significado de “medida do segmento”.

Esses dois teoremas valem também para triângulos retângulos, pois valem para qualquer triângulo. Os dois resultados anteriores são úteis para relacionar as medidas dos lados do triângulo e os ângulos internos deste. Em situações em que não se aplicam diretamente as definições de seno e cosseno, conhecer tais resultados é útil para a construção da solução, tal como no exemplo a seguir.

Situação-problema 1: Uma vista aérea da represa Tega, localizada na cidade de Caxias do Sul (RS) está mostrada a seguir.

Figura 57: Represa Tega

Fonte: ***Site* GeoGebra**[58]**.**

Usando-se o instrumento *teodolito* e conhecendo-se a distância entre os pontos E e G (localizados em uma das margens da represa) e os dois ângulos planos (α e β) por meio do teorema 1, pode-se estimar a distância entre os pontos F e E; como também a distância entre os pontos F e G, localizados em margens opostas da represa. Lembre-se que o terceiro ângulo do triângulo EFG pode ser obtido por meio da relação $\gamma = 180^{o} - (\alpha + \beta)$.

58 Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ecXWhsMp. Acesso em: maio 2018.

Figura 58: Represa Tega (Vista de Mapa)

Fonte: ***Site*** **GeoGebra**[59]**.**

De mão do resultado do teorema 1 (teorema dos senos), as distâncias (em metros) serão calculadas pelas relações:

$$\frac{med(FE)}{sen(88{,}12^{o})}=\frac{med(EG)}{sen(30{,}88^{o})}\Leftrightarrow med(FE)=\frac{sen(88{,}12^{o})\times med(EG)}{sen(30{,}88^{o})}\Rightarrow$$

$$med(FE)=\frac{sen(88{,}12^{o})\times 218{,}34}{sen(30{,}88^{o})}\Leftrightarrow med(FE)\approx 426$$

A outra distância é:

$$\frac{med(FG)}{sen(61^{o})}=\frac{med(EG)}{sen(30{,}88^{o})}\Leftrightarrow med(FG)=\frac{sen(61^{o})\times med(EG)}{sen(30{,}88^{o})}\Rightarrow$$

$$med(FG)=\frac{sen(61^{o})\times 218{,}34}{sen(30{,}88^{o})}\Leftrightarrow med(FG)\approx 373$$

59 Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ecXWhsMp. Acesso em: maio 2018.

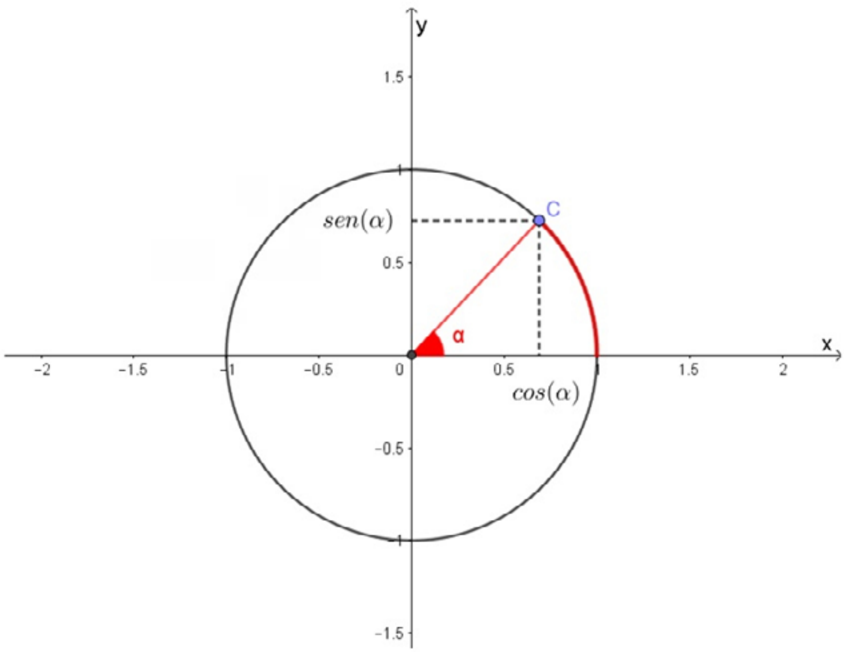
De forma resumida, pode-se inferir que os dois teoremas anteriores são úteis na resolução de problemas que envolvem o cálculo de distâncias inacessíveis. Com o intuito de aprofundar mais os aspectos teóricos/técnicos que envolvem triângulos e problemas, sugiro que você assista aos dois vídeos publicados no *site* do YouTube™ e mencionados adiante.

Após o debate inicial sobre trigonometria e as principais ideias que circundam a temática, é chegada a hora de iniciar o estudo das funções trigonométricas. Na matemática há basicamente duas funções trigonométricas, a saber, função seno e função cosseno; as quais são a base para a construção de todas as demais. Na verdade, poderia se afirmar que a base de construção das funções trigonométricas seja a função seno, pois a função cosseno é obtida mediante uma translação horizontal da primeira (caso tenha ficado curioso pesquise mais a respeito...).

Mencionou-se anteriormente que as funções trigonométricas têm a característica de serem periódicas. Primeiramente, para construir a noção de função precisamos aumentar a nossa compreensão sobre a relação $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$. A igualdade anterior é válida para ângulos que não são necessariamente internos de triângulos retângulos. Com isso, constrói-se a noção de circunferência trigonométrica (aqui o raio da circunferência é unitário... sabe por qual motivo?).

Observe que qualquer ponto que esteja na circunferência tem coordenadas $C = (\cos(\alpha); sen(\alpha))$. Com isso, emerge no contexto a noção de *período*, pois a cada volta completa de 2π "recai-se" sempre sobre a posição do ponto C. Isso se aplica também para os múltiplos de voltas, ou seja, $k \times (2\pi)$ para $k \in Z$.

Figura 59: Circunferência Trigonométrica



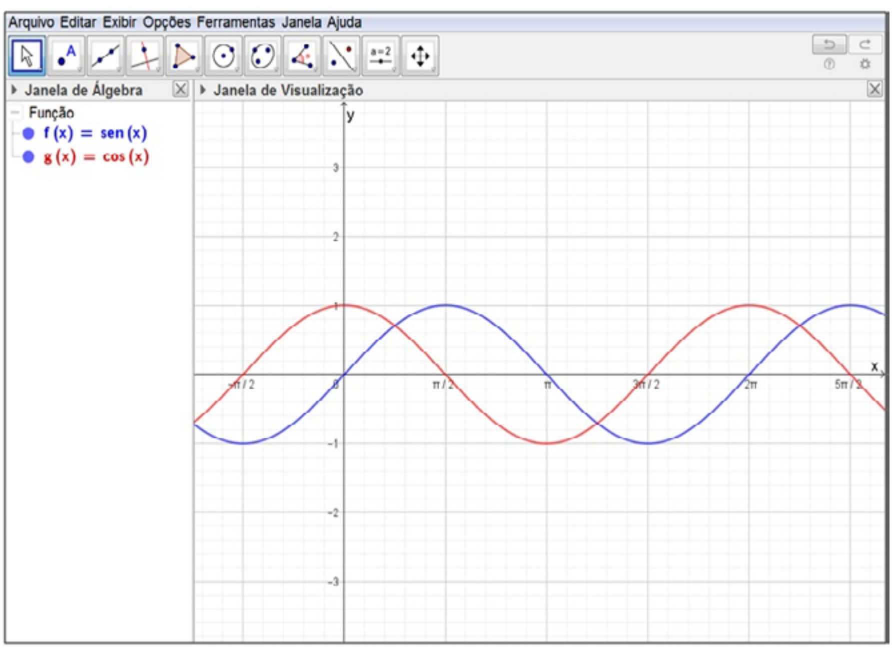
Fonte: arquivo pessoal.

De mão dessa noção, pode-se relacionar agora a medida do "arco" α com a reta numérica. Isso ocorrerá do seguinte modo: a cada arco, correspondente a um ângulo central, há um arco na circunferência cuja medida é equivalente. Na forma de um "carretel de linha", descola-se o arco da circunferência e a partir do zero (reta numérica) retifica-se o arco sobre a reta, fazendo a sua medida corresponder a um único número real. Caso isso tenha sido feito no sentido anti-horário da circunferência, cobre-se, a partir de zero, a semirreta real dos números $x \geq 0$. Se for feito no sentido horário, então se alcança os números $x \leq 0$. Isso é o princípio da chamada "função de Euler" $E(x)$, a qual faz corresponder a cada ponto da circunferência de raio unitário, de forma única, um ponto na reta numérica (nas referências você encontra indicação de materiais com mais fundamentos matemáticos para a função de Euler). Naturalmente, você consegue *perceber* que a função de Euler, a qual faz tal transformação, é periódica, ou seja, $E(x) = E(x+P)$.

O fato é que, por causa dessa relação, na forma de correspondência única, entre a circunferência de raio unitário e a reta numérica, torna-se possível construir uma função $f : R \rightarrow R$ de tal forma que $x \rightarrow sen(x)$. Em outras palavras, $f(x) = sen(x)$. A partir da figura 60, é possível observar que $-1 \leq sen(x) \leq 1$ e $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Portanto, sendo o conjunto dos números reais o contradomínio da função seno e função cosseno (função $g : R \rightarrow R$, tal que $x \rightarrow \cos(x)$, ou seja, $g(x) = \cos(x)$), tem-se que o intervalo $\left[-1;1\right]$ representa o seu conjunto imagem. Isso se aplica para as funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = \cos(x)$. As propriedades trigonométricas do seno e do cosseno permitem inferir sobre características das funções, tais como paridade. Esse debate não será feito aqui, mas pode ser encontrado nas referências.

Com auxílio do *software* GeoGebra, façamos os esboços dos gráficos de $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, os quais estão apresentados na figura abaixo. A partir dos esboços, faremos um estudo sobre as funções $F(x) = a + b.sen(c.x + d)$ e $G(x) = a + b.\cos(c.x + d)$ no que se refere ao período e conjunto imagem. Note que, nos esboços abaixo, pode-se inferir que ambas as funções são limitadas, na direção do eixo do contradomínio. Isso não ocorre com *todas* as funções trigonométricas (Não exploraremos no presente material as funções tangente, cotangente, secante e cossecante, porém é válido mencionar que nenhuma delas seja simultaneamente limitada superior e inferiormente pela definição usual).

Figura 60: Esboço da Função Seno e Função Cosseno



Fonte: arquivo pessoal.

Para as duas funções supramencionadas f e g, temos que o período é 2π e o conjunto imagem é $[-1;1]$. O período 2π significa que depois de percorrer "uma volta" na circunferência trigonométrica os valores das imagens começam a se repetir, tal como ocorrido antes. Nesse caso, para ambas as funções valem que: $f(x) = f(x+2\pi)$ e $g(x) = g(x+2\pi)$. Em geral, a periodicidade de uma função trigonométrica tem relação com o *menor número* "T", tal que $f(x) = f(x+T)$ e $g(x) = g(x+T)$.

Passemos ao estudo e à análise das funções $F(x) = a + b.sen(c.x+d)$ e $G(x) = a + b.\cos(c.x+d)$. Por meio de um processo aritmético/algébrico, veremos que essas funções têm relação com as que estão esboçadas na figura 60. Primeiramente, observe que $-1 \le sen(x) \le 1 \Leftrightarrow -1 \le sen(c.x+d) \le 1$ é uma alteração que não mexe no conjunto imagem da função seno. Trata-se de uma mudança no domínio e que não afeta o conjunto imagem (você pode consultar a literatura especializada para se certificar de tudo isso que estou afirmando...). Em seguida, a constante "b" promoverá a primeira alteração no conjunto imagem. Após, a constante "a" executará uma translação de vertical, para cima ou para baixo, tal como ocorreu com as funções quadráticas, lembra? Em se tratando das operações envolvidas, temos dois casos a considerar:

Caso 1 ($b > 0$):

$$-1 \leq sen(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq sen(c.x + d) \leq 1 \overset{(b>0)}{\Rightarrow}$$
$$b \times \left(-1\right) \leq b \times sen(c.x + d) \leq b \times \left(1\right) \Leftrightarrow$$
$$-b \leq b.sen(c.x + d) \leq b \overset{+a}{\Rightarrow} a - b \leq a + b.sen(c.x + d) \leq a + b \Leftrightarrow$$
$$a - b \leq F(x) \leq a + b$$

Para esse primeiro caso, o conjunto imagem será $\left[a - b; a + b\right]$.

Caso 2 ($b < 0$):

$$-1 \leq sen(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq sen(c.x + d) \leq 1 \overset{(b<0)}{\Rightarrow}$$
$$b \times \left(-1\right) \geq b \times sen(c.x + d) \geq b \times \left(1\right) \Leftrightarrow$$
$$-b \geq b.sen(c.x + d) \geq b \overset{+a}{\Rightarrow} a - b \geq a + b.sen(c.x + d) \geq a + b \Leftrightarrow$$
$$a - b \geq F(x) \geq a + b$$

Nesse segundo caso, o conjunto imagem será $\left[a + b; a - b\right]$.

A discussão feita nos casos acima se aplica também para a função $G(x) = a + b.\cos(c.x + d)$. Antes de avançar façamos um exemplo. Considere as funções $F(x) = 3 + 7.sen(2.x + 1)$ e $G(x) = 2 - 5.\cos(3.x - 4)$. Determine o conjunto imagem para cada uma das funções.

A partir da discussão realizada e aplicando as operações aritméticas necessárias, segue que:

$$-1 \leq sen(2.x + 1) \leq 1 \overset{\times 7}{\Leftrightarrow} 7 \times \left(-1\right) \leq 7 \times sen(2.x + 1) \leq 7 \times \left(1\right) \Leftrightarrow$$
$$-7 \leq 7.sen(2.x + 1) \leq 7 \overset{+3}{\Leftrightarrow} 3 - 7 \leq 3 + 7.sen(2.x + 1) \leq 3 + 7 \Leftrightarrow$$
$$-4 \leq 3 + 7.sen(2.x + 1) \leq 10 \Leftrightarrow -4 \leq F(x) \leq 10$$

O conjunto imagem da função $F(x)$ será o intervalo $\left[-4;10\right]$. Para a função $G(x)$, o processo aritmético fica:

$$-1 \le \cos(3.x-4) \le 1 \overset{\times(-5)}{\Leftrightarrow} (-5)\times(-1) \le (-5)\times\cos(3.x-4) \le (-5)\times(1) \Leftrightarrow$$
$$5 \ge -5.\cos(3.x-4) \le -5 \overset{+2}{\Leftrightarrow} 2+5 \ge 3-5.\cos(3.x-4) \ge -5+2 \Leftrightarrow$$
$$7 \ge 3-5.\cos(3.x-4) \ge -3 \Leftrightarrow 7 \ge G(x) \ge -3$$

Portanto, o conjunto imagem para a função $G(x)$ será o intervalo $\left[-3;7\right]$. Tanto no exemplo anterior como nas menções e explorações dos dois casos não foi mexido em elementos do domínio. Agora façamos uma reflexão sobre o período da função $F(x) = a + b.sen(c.x+d)$. Destaco que a mesma ideia pode ser usada para o entendimento sobre o período da função $G(x) = a + b.\cos(c.x+d)$.

O período para a função $f(x) = sen(x)$ é 2π, ou seja, o intervalo $0 \le x \le 2\pi$ de tamanho 2π define o percurso de "um ciclo" para a função (lembre-se da circunferência trigonométrica (raio = 1), 2π é tamanho do arco correspondente a uma volta inteira). Você se lembra da disciplina de física no ensino básico quando se falava sobre *movimentos circulares*? Na ocasião era mencionado que o "período" e a "frequência" eram duas características desse tipo de movimento, de tal forma que um era o inverso multiplicativo do outro. Isso se aplica causalmente aqui. A frequência da função seno é, portanto, $\frac{1}{2\pi}$. O mesmo se aplica para a função cosseno.

Sabendo-se que o objetivo, ao se analisar o período das funções $F(x)$ e $G(x)$, seja observar quando a variável independente está no intervalo $0 \le x \le 2\pi$, temos aqui novamente duas situações para considerar.

Caso 1 ($c > 0$):

$$0 \le c.x + d \le 2\pi \overset{-d}{\Leftrightarrow} 0 - d \le c.x + d - d \le 2\pi - d \Leftrightarrow$$

$$-d \le c.x \le 2\pi - d \overset{\div c}{\Leftrightarrow} \frac{-d}{c} \le \frac{c.x}{c} \le \frac{2\pi - d}{c} \Leftrightarrow \frac{-d}{c} \le x \le \frac{2\pi - d}{c}$$

Nesse caso, o "tamanho do intervalo" para a variação da variável independente é

$$\frac{2\pi - d}{c} - \left(\frac{-d}{c}\right) = \frac{2\pi - d + d}{c} = \frac{2\pi}{c}$$

Caso 2 ($c < 0$):

$$0 \le c.x + d \le 2\pi \overset{-d}{\Leftrightarrow} 0 - d \le c.x + d - d \le 2\pi - d \Leftrightarrow$$

$$-d \le c.x \le 2\pi - d \overset{\div c}{\Leftrightarrow} \frac{-d}{c} \ge \frac{c.x}{c} \ge \frac{2\pi - d}{c} \Leftrightarrow \frac{-d}{c} \ge x \ge \frac{2\pi - d}{c}$$

Nesse caso, o "tamanho do intervalo" para a variação da variável independente é

$$\frac{-d}{c} - \left(\frac{2\pi - d}{c}\right) = \frac{-d - 2\pi + d}{c} = \frac{-2\pi}{c}$$

Em ambos os casos, tem-se que o "tamanho do intervalo", ou seja, o período das funções $F(x) = a + b.sen(c.x + d)$ e $G(x) = a + b.\cos(c.x + d)$ será

$$p = \frac{2\pi}{|c|}$$

Isso significa que a frequência para ambas será

$$freq = \frac{1}{p} = \frac{1}{2\pi / |c|} = \frac{|c|}{2\pi}$$

Voltemos ao exemplo antes proposto para determinar o conjunto imagem e façamos uma análise sobre o período de cada uma das funções.

Novamente, considere as funções $F(x) = 3 + 7.sen(2.x + 1)$ e $G(x) = 2 - 5.\cos(3.x - 4)$. Determine o período e a frequência para cada uma das funções.

Pelo debate teórico feito, o período para a função $F(x)$ será

$$p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

E para a função $G(x)$ será

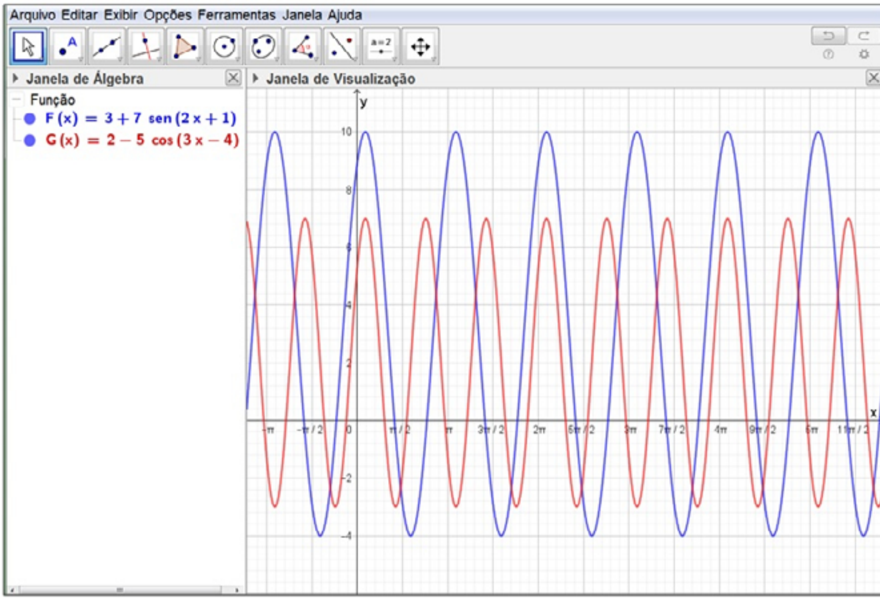
$$p = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

As frequências são respectivamente

$$freq_F = \frac{1}{\pi} \quad \text{e} \quad freq_G = \frac{1}{2\pi / 3} = \frac{3}{2\pi}$$

A partir dos gráficos apresentados na figura 60, é possível esboçar os gráficos das funções desse exemplo. Para esboçar o gráfico de funções trigonométricas da forma $F(x) = a + b.sen(c.x + d)$ e $G(x) = a + b.\cos(c.x + d)$, é necessário conhecer o conjunto imagem e o período. Ambas estão mostradas na figura seguinte, esboçadas em um mesmo sistema de eixos coordenados.

Figura 61: Esboço das Funções do Exemplo



Fonte: arquivo pessoal.

Antes de iniciarmos a exploração de duas situações-problema envolvendo o uso de funções trigonométricas, recomendo o seguinte exercício de construção de esboços de gráficos.

P45) Esboce os gráficos das funções trigonométricas a seguir. Determine o conjunto imagem e o período de cada uma das funções.

a) $f(x) = 1 + 2.sen(3.x + 8)$

b) $g(x) = -2 - 3.sen(x + 4)$

c) $h(x) = -5 + 3.sen(4x)$

d) $i(x) = -4 - 2.\cos(5.x + 7)$

e) $j(x) = 2 - 6.\cos(x)$

f) $k(x) = 4 + 6.\cos(x - 1)$

P46) Pesquise como é o comportamento das funções da forma $f(x) = a.sen(b.x) + c.\cos(d.x)$. Esse tipo de função é periódica? Em caso afirmativo para a pergunta anterior, como calcular o período?

Sigamos agora com a exploração de duas situações-problema, as quais são utilizadas funções trigonométricas para a sua explanação.

Situação-problema 1: Maré é o nome dado ao fenômeno cíclico e periódico de elevação e abaixamento do nível das águas do mar, com a respectiva corrente, provocado pela atração do Sol e da Lua em relação a uma referência fixa no solo. Tal fenômeno tem como principal causa a força de atração da Lua sobre as águas do planeta. Essa força faz com que a água dos oceanos avance sobre a parte da Terra mais próxima da Lua, bem como sobre a parte diametralmente oposta. O período de duração das marés (alta e vazante) é de aproximadamente seis horas. Quando as águas se encontram em níveis mais elevados, há cheia; em níveis mais baixos, há vazante.

Figura 62: Maré Cheia e Vazante

Fonte: ***Site*** **Igui Ecologia**[60]**.**

Suponha que o avanço $h(t)$ da maré ocorra em função do tempo t, a partir da zero hora, por

$$h(t) = 2{,}1 + 1{,}8.\cos\left(\frac{\pi.t}{3}\right)$$

O avanço é dado em metros e o tempo em horas. Explore os seguintes itens:

a) Há valor máximo para $h(t)$? E há valor mínimo? Em caso afirmativo, explicite.

60 Disponível em: http://www.iguiecologia.com/como-lua-influencia-mare. Acesso em: maio 2018.

b) Qual valor no eixo vertical (imagem) determina o ponto médio entre os valores máximo e mínimo encontrados no item (a)? (Este ponto médio determina o nível padrão do mar.)

c) Esboce o gráfico de $h(t)$. Faça uma inferência sobre o conjunto imagem e o período da função.

d) Em relação ao eixo horizontal: partindo de $t = 0$, qual o próximo ponto nesse eixo em que o esboço do gráfico apresenta a mesma imagem de $t = 0$? O que significa o tamanho desse intervalo?

Usaremos a matemática desenvolvida durante o módulo para explorar essas duas situações-problema. Para o item (a) observe que pelo fato da função cosseno ter o conjunto imagem limitado com operações aritméticas chega-se a:

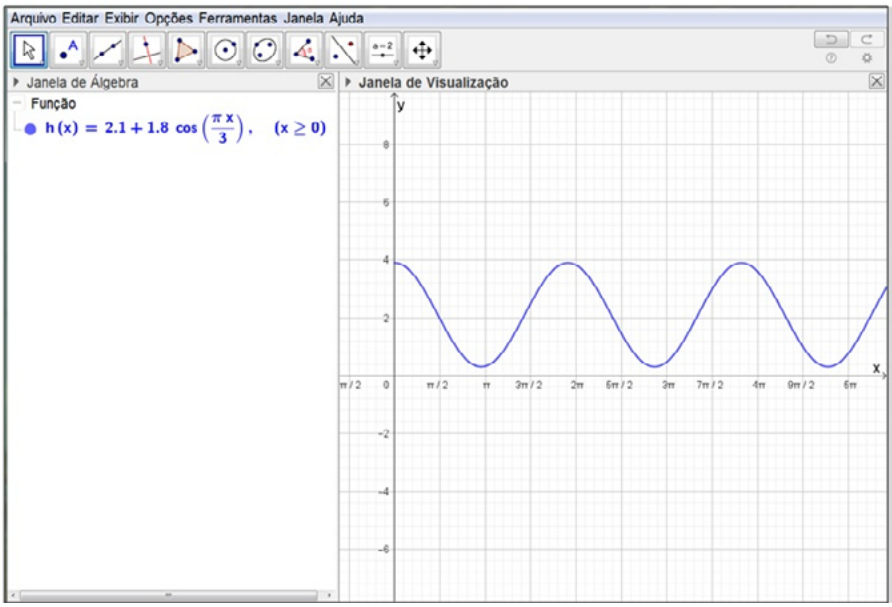
$$-1 \le \cos\left(\frac{\pi.t}{3}\right) \le 1 \overset{\times 1,8}{\Leftrightarrow} 1,8 \times (-1) \le 1,8 \times \cos\left(\frac{\pi.t}{3}\right) \le 1,8 \times (1) \Leftrightarrow$$
$$-1,8 \le 1,8 \times \cos\left(\frac{\pi.t}{3}\right) \le 1,8 \overset{+2,1}{\Leftrightarrow} 2,1 - 1,8 \le 2,1 + 1,8 \times \cos\left(\frac{\pi.t}{3}\right) \le 2,1 + 1,8 \Leftrightarrow$$
$$0,3 \le h(t) \le 3,9$$

Logo, os valores de mínimo e máximo para a função são, respectivamente, 0,3 metros e 3,9 metros. Para o item (b) o ponto médio será

$$\frac{0,3 + 3,9}{2} = \frac{4,2}{2} = 2,1$$

Isso significa que a maré está em processo de cheia ou vazante, porém ocorre uma *inflexão* no gráfico (o modo/velocidade em encher ou esvaziar se altera) quando $h(t) = 2,1$. Você pode calcular esse ponto a partir de dois modos: (1) a disciplina de cálculo diferencial ajudará nesse sentido... ou (2) pode resolver uma equação trigonométrica (fica o convite!). Façamos agora o esboço do gráfico da função $h(t)$. Isso ajudará a pensar sobre o item (d).

Figura 63: Esboço da Função $h(t)$



Fonte: arquivo pessoal.

O item (d) está questionando sobre o período da função $h(t)$. Nesse caso, pelas técnicas desenvolvidas ao longo do módulo, o período será

$$p = \frac{2\pi}{\left|\pi/3\right|} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 2\pi.\frac{3}{\pi} = 6$$

ou seja, a partir de $t = 0$ (verifique que a maré nesse tempo está na cheia máxima!) a maré demora um tempo de 6 horas para novamente atingir a cheia máxima. No tempo $t = 3$, a maré encontra-se na vazante (menor $h(t)$).

Discutiu-se no módulo que a frequência é o inverso multiplicativo do período. Logo, para a função $h(t)$, a frequência será

$$\frac{1}{6}$$

Isso significa que 1 ciclo completo de maré (cheia – vazante – cheia ou vazante – cheia – vazante) ocorre a cada 6 horas.

Situação-problema 2: Localizada no Centro de Cingapura, a Singapore Flyer é a segunda maior roda gigante do mundo e uma das atrações mais populares da cidade. A construção iniciou em 2005 e foi finalizada em 2008, sendo inaugurada em 11 de fevereiro de 2008. A líder no *ranking* é a High Roller, a maior roda gigante do mundo, construída no Texas, com 168 metros de altura.

Figura 64: Singapore Flyer

Fonte: ***Site*** **National Geographic[61].**

Suponha que a altura de um ponto na roda gigante em relação à horizontal seja modelada pela relação

$$h(t) = 84 + 84.sen\left(\frac{\pi.t}{15}\right)$$

O tempo *t* está expresso em segundos. Explore os seguintes itens:

a) Como determinar a altura máxima e mínima do ponto usando a função $h(t)$?

61 Disponível em: http://travel.nationalgeographic.com/travel/365-photos/ferris-wheel-singapore-flyer/. Acesso em: maio 2018.

b) Quanto tempo é necessário para um ponto na roda gigante percorrer uma volta completa? Explore.

c) A partir da função $h(t)$, qual a frequência e o período dessa função? Qual o significado físico disso no problema?

d) Esboce o gráfico da função $h(t)$ e reflita se é possível ocorrer $h(t) < 0$.

Com o conteúdo desenvolvido no módulo, façamos a explanação dos itens do problema. Para o item (a) observe que, pelo fato da função seno ser limitada, segue que:

$$-1 \le sen\left(\frac{\pi.t}{15}\right) \le 1 \overset{\times 84}{\Leftrightarrow} 84\times(-1) \le 84\times sen\left(\frac{\pi.t}{15}\right) \le 84\times(1) \Leftrightarrow$$

$$-84 \le 84.sen\left(\frac{\pi.t}{15}\right) \le 84 \overset{+84}{\Leftrightarrow} 84-84 \le 84+84.sen\left(\frac{\pi.t}{15}\right) \le 84+84 \Leftrightarrow$$

$$0 \le h(t) \le 168$$

Portanto, a altura máxima e mínima são, respectivamente, 168 metros e 0 metro. O conjunto imagem da função será $\left[0;168\right]$. Os itens (c) e (d) são relacionados. O período para a função significa o tempo que um ponto leva para realizar uma volta completa na roda gigante. Nesse caso, o período será

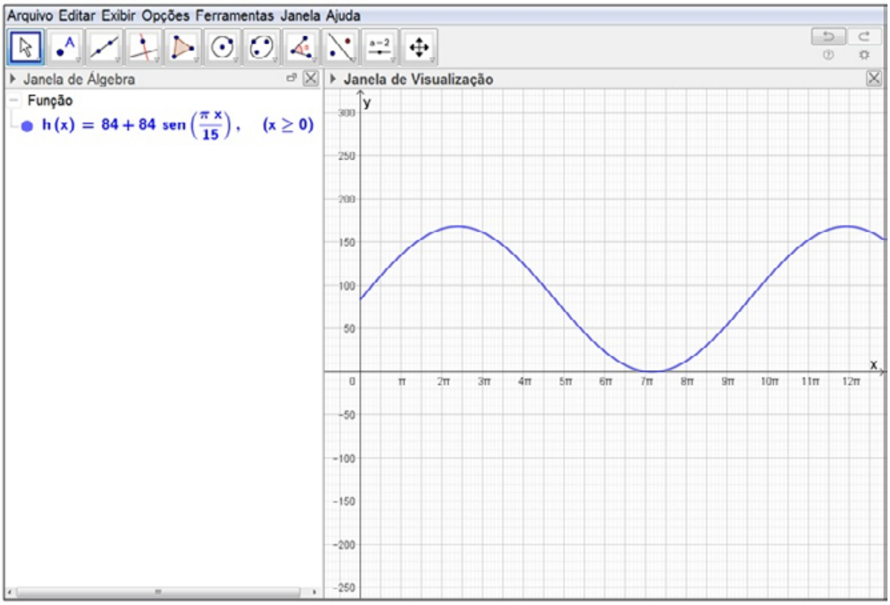
$$p = \frac{2\pi}{\left|\pi/15\right|} = \frac{2\pi}{\pi/15} = 2\pi.\frac{15}{\pi} = 30$$

ou seja, é necessário um tempo de 30 segundos para um ponto realizar uma volta completa na roda gigante. A frequência nesse exemplo é

$$\frac{1}{30}$$

ou seja, em meio minuto (30 segundos) ocorre um ciclo completo do movimento. O esboço da função $h(t)$ está na figura a seguir.

Figura 65: Esboço da Função $h(t)$



Fonte: arquivo pessoal.

Para encerrar, o cálculo feito para determinar o conjunto imagem da função $h(t)$ forneceu que este é $[0;168]$. Logo, nesse caso, não ocorre para valor algum da variável independente $h(t) < 0$.

Minha últimas sugestões de vídeos do YouTube™ que podem ser assistidos para complementar o estudo (todos os *links* abaixo foram acessados em maio de 2018):

Relações Métricas no Triângulo Retângulo: https://youtu.be/f4JBVvr72MQ

Problemas (Triângulo Retângulo): https://youtu.be/FpUGVLcIKEo

Na área da matemática, há anualmente a oferta de um curso[62] de aperfeiçoamento para professores de matemática que atuam no Ensino Médio (PAPEM[63]). Tal iniciativa oportuniza realizar formações continuadas de *forma massiva* no Brasil. Enquanto estudante da graduação e depois de "formado", cursei um total de cinco vezes o programa de extensão (foi uma ótima experiência!). As aulas, de modo síncrono, ocorrem diretamente do Rio de Janeiro (IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada) e são transmitidas para todo o Brasil, por meio da Internet. O curso tem duração intensiva de uma semana (férias escolares de julho e férias escolares de verão usualmente) e ocorre por meio de Universidades ou Institutos Federais. Atualmente é possível encontrar no YouTube™ os vídeos dos cursos das edições passadas. A seguir faço a sugestão de dois vídeos do curso, que complementam o assunto[64] debatido no módulo de funções trigonométricas (todos os *links* abaixo foram acessados em maio de 2018):

Trigonometria: https://youtu.be/jV5WDz7ZDwI

Funções trigonométricas: https://youtu.be/Ry6Bi06QLic

62 Tal curso tem ocorrido desde 1991.

63 Disponível em: https://www.youtube.com/user/impabr/playlists?view=50&flow=grid&shelf_id=12. Acesso em: maio 2018.

64 Acrescento que *todos* os assuntos debatidos e explanados ao longo dos módulos desse curso (funções reais de variável real) podem ser encontrados e acessados também no canal do PAPEM no YouTube™ .

P47) Prova Azul, ENEM, 2017

Figura 66: Questão 166 ENEM/2017

QUESTÃO 166

Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

A) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

B) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

C) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

D) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

E) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

Fonte: Prova Azul ENEM/2017[65].

65 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P48) Prova Cinza, ENEM, 2015

Figura 67: Questão 143 ENEM/2015

QUESTÃO 143

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

- **A** janeiro.
- **B** abril.
- **C** junho.
- **D** julho.
- **E** outubro.

Fonte: Prova Cinza ENEM/2015[66].

66 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P49) Prova Cinza, ENEM, 2015

Figura 68: Questão 179 ENEM/2015

QUESTÃO 179

Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\,sen\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite $(0 \leq h < 24)$ e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

A) $A = 18$ e $B = 8$

B) $A = 22$ e $B = -4$

C) $A = 22$ e $B = 4$

D) $A = 26$ e $B = -8$

E) $A = 26$ e $B = 8$

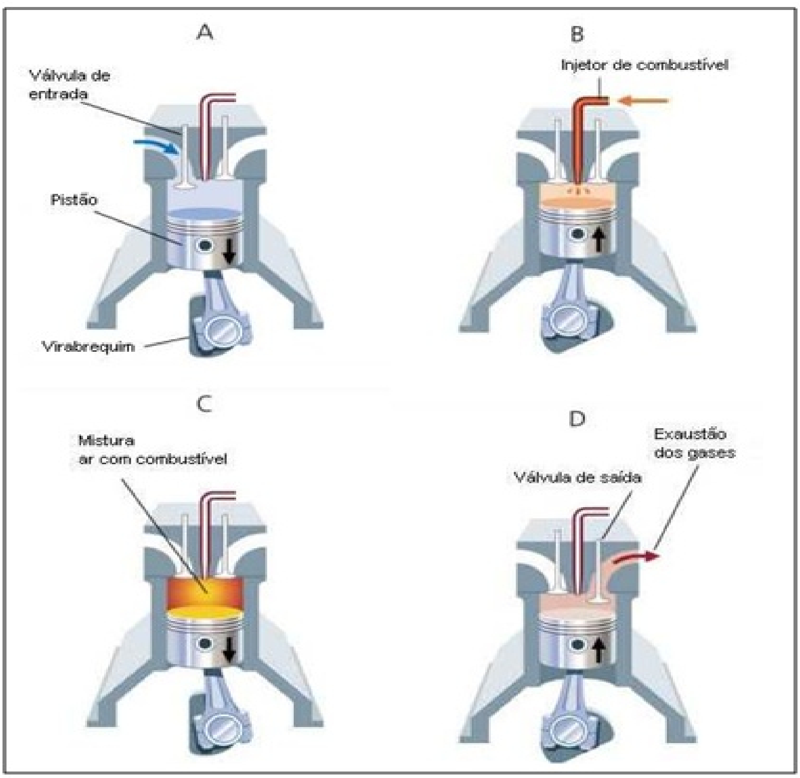
Fonte: Prova Cinza ENEM/2015[67].

67 Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: abr. 2018.

P50) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura (etapas A, B, C e D). Suponha que, em um instante *t*, em segundos, a altura *h(t)* do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão

$$h(t) = 4 + 4sen\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right)$$

Figura 69: Quatro Estágios de Movimento de um Pistão



Fonte: ***Site*** **Geocities**[68]**.**

68 Disponível em: http://www.geocities.ws/saladefisica7/funciona/diesel.html. Acesso em: maio 2018.

a) Determine a variação de altura do pistão dentro do cilindro.

b) Qual o período da função $h(t) = 4 + 4sen\left(\dfrac{2\pi t}{0,05}\right)$?

c) Quantos ciclos completos o pistão realiza após funcionar durante 1 minuto?

P51) No módulo VII não foram apresentadas as funções trigonométricas "tangente", "cotangente", "secante" e "cossecante". Faça uma pesquisa sobre o que são e quais as características matemáticas dessas funções bem como aplicações e usos dessas.

7.2 REFLEXÕES SOBRE O *ENSINO* DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Os trabalhos apresentados a seguir tratam da temática sobre o ensino e aprendizagem do tópico "função trigonométrica" na escola básica. A leitura é opcional, porém fica estabelecido o convite para que você conheça cada uma das pesquisas. Há menção de pesquisas que ocorrem fora do escopo do Ensino Fundamental.

Título: Trigonometria, relação entre movimentos circulares e gráficos com a ajuda do GeoGebra

RESUMO: "Essa dissertação analisará uma abordagem investigativa de ensino de funções trigonométricas que prioriza a compreensão da relação entre movimentos circulares em diferentes velocidades com a formação gráfica gerada por esses movimentos. Com o auxílio do *software* GeoGebra, diferentes movimentos foram criados, o que proporcionou a investigação gráfica por parte dos alunos. A atividade foi realizada no laboratório de informática onde, constantemente, houve investigação por parte dos alunos e intervenções significativas por parte do professor. Escolheu-se para essa pesquisa uma análise qualitativa embasada no processo descritivo das ações ocorridas em sala de aula. Para conhecer as características dessa abordagem, foi utilizado um estudo de casos. Após a atividade, os alunos conseguiram interpretar os principais movimentos gerados na circunferência e traduzi-los na sua forma gráfica. A análise mostra que os alunos não somente conseguiram desenvolver significados aos movimentos circulares, como também interpretaram corretamente situações cotidianas estabelecidas pelo professor ao fim do trabalho."

Autor: Daniel Rodrigues Topanotti

Link de acesso web:

http://hdl.handle.net/10183/172962 (acesso em maio/2018)

Título: A integração do ensino de funções trigonométricas e movimento harmônico simples por meio do *software* Modellus

RESUMO: "Este trabalho aborda o ensino de funções trigonométricas associado ao Movimento Harmônico simples por meio do *software* Modellus. O trabalho é parte de uma pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, do Centro Universitário UNIVATES. O estudo foi realizado em uma escola pública da rede estadual do município de Macapá, Amapá, tendo, como participantes, trinta e seis estudantes do 3º ano do Ensino Médio. O objetivo desta pesquisa é investigar as implicações de utilizar o s*oftware* Modellus, para ensinar os conceitos de Funções Trigonométricas por meio do Movimento Harmônico Simples, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio da Educação Básica na cidade de Macapá - AP. A pesquisa desenvolvida é de natureza qualitativa abordando um estudo de caso. Para análise e coleta dos dados, foram feitas observações, aplicação de um questionário prévio e desenvolvimento de atividades pedagógicas com o uso do *software* Modellus. Os resultados da pesquisa indicaram que a atividade pedagógica desenvolvida com os alunos mostrou ser potencialmente relevante, pois apresentou indícios de novos conceitos de funções trigonométricas integrados ao movimento harmônico simples, auxiliou no enriquecimento, modificação e elaboração."

Autores: Claudionor de Oliveira Pastana e Italo Gabriel Neide

Link de acesso web:

http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2017-0095 (acesso em maio/2018)

Título: A aprendizagem das funções trigonométricas na perspectiva da teoria das situações didáticas

RESUMO: "Esta pesquisa teve por objetivo geral analisar de que forma o uso do computador, enquanto ferramenta pedagógica, é capaz de levar os alunos da 1ª série do Ensino Técnico de Nível Médio Integrado em Sergipe a superarem suas dificuldades de aprendizagem do 1º modelo das Funções Trigonométricas f(x) = a + b sen (cx + d), bem como complementar a inquirição desenvolvida por Fonseca (2002), quando investigou a Aprendizagem em Trigonometria segundo os pressupostos teórico-metodológicos da Educação Matemática. Para tanto, baseei-me nos princípios da Engenharia Didática, definidos por Artigue (1988), nos pressupostos de Brousseau (2008) para tratar da Teoria das Situações Didáticas e em Ausubel (1980) para arrolar as condições de ocorrência da Aprendizagem Significativa. Participaram desta pesquisa 30 alunos, em média, de uma escola pública da cidade de Aracaju/SE. Ao final da experiência, ficou constatado que é possível alcançar a Aprendizagem Significativa das Funções Trigonométricas desde que se faça a opção por um método de ensino que acredite e permita a participação do aluno no processo de construção do conhecimento que, neste caso, repousou sobre a Teoria das Situações Didáticas."

Autor: Laerte Silva da Fonseca

Link de acesso web:

http://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/5085 (acesso em maio/2018)

Título: Funções trigonométricas: senx, cosx e tgx estudo de proposições de abordagem no ensino médio

RESUMO: "Historicamente o grande avanço dos resultados matemáticos relativos às funções trigonométricas se deu em função dos problemas matemáticos surgidos, principalmente em estudos de astronomia, da navegação e da geografia. Foram assim situações reais vividas pelos homens que deram o impulso ao desenvolvimento teórico. Na atualidade, faz-se uso da trigonometria em diferentes áreas como: Análise, Mecânica, Topografia, etc. Sabemos que noções de trigonometria são estudadas no ensino brasileiro nos níveis Fundamental e Médio. Poderíamos questionar sobre a importância deste saber na formação do cidadão, o que contribui esse conhecimento para o bem viver no dia a dia. Mas esta não é a finalidade deste trabalho. Sabemos que a maioria dos conteúdos abordados no Ensino Fundamental e Médio, antes de terem uma utilidade imediata no cotidiano das pessoas, tem um caráter cultural de conhecimentos básicos, julgados como relevantes para as pessoas. Neste trabalho, de maneira geral, estamos interessados em conhecer o que é e como o conceito de função trigonométrica, em particular das funções seno, cosseno e tangente são propostos nos diferentes níveis."

Autor: Franciely Samistraro

Link de acesso web:

http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/97046 (acesso em maio/2018)

Título: Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma sequência para o ensino

RESUMO: "Esse trabalho teve por objetivo contribuir com o ensino de trigonometria, em especial, na transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico. Foi elaborada uma sequência com 12 atividades, das quais dez foram criadas com a preocupação de conduzir o aluno a compreender as razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico, utilizando o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Uma atividade foi criada com o intuito de trabalhar com a definição de radianos e a conversão da unidade de arcos (radianos) para unidade de ângulos (graus) e, por fim, uma atividade que tinha por objetivo construir um dispositivo para ser utilizado em sala de aula quando não fosse possível utilizar a calculadora, ou o computador. As atividades foram aplicadas para oito alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da cidade de Francisco Morato, Grande São Paulo. Para tal foram usados quatro encontros para realizar a aplicação; os alunos fizeram as atividades em duplas e fora do horário de aula. A Teoria das Situações Didáticas e alguns pressupostos da Engenharia Didática foram usados na elaboração, análise, aplicação e coleta de dados da sequência de ensino. A experimentação aponta que os alunos não mobilizaram alguns conhecimentos prévios necessários e apresentam algumas dificuldades para exporem suas observações por

escrito. Mas também mostrou que houve avanços na aprendizagem dos alunos, pois ao executarem as atividades utilizando a geometria dinâmica, mostraram interesse e concentração."

Autor: Carlos Francisco Borges

Link de acesso web:

https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11401 (acesso em maio/2018)

Respostas e dicas para os problemas

P1)

a) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

b) $\{7,8,9,10,\cdots\}$

c) $\{51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65\}$

d) “vazio” ou $\{\ \}$ ou $\varnothing$

e) $\{102,103,104\}$

P2)

a) $\{x \in Z \,/\, x < -5\} = \{-6,-7,-8,\cdots\}$

b) $\{x \in Z \,/\, x \geq -10\} = \{-10,-9,-8,-7,\cdots\}$

c) $\{x \in Z \,/\, -4 < x \leq 5\} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

d) $\{x \in Z \,/\, -10 < x < 5\} = \{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

e) $\{x \in Z \,/\, x \geq 0\} = \{0,1,2,3,4,5,\cdots\}$

P3) É uma pesquisa, portanto, *pesquise*!

P4)

a) 1

b) $\dfrac{59}{12}$

c) $\dfrac{7}{135}$

d) $-\dfrac{35}{132}$

e) $\dfrac{7}{10}$

f) $\dfrac{288}{35}$

P5) É uma pesquisa, portanto, *pesquise*!

P6) É uma pesquisa, portanto, *pesquise*!

P7) Nos esboços abaixo, do lado esquerdo das "retas" está o $-\infty$ e do lado direito está o $+\infty$.

a) Geometricamente a representação é:

b) Geometricamente a representação é:

c) Geometricamente a representação é:

d) Geometricamente a representação é:

e) Geometricamente a representação é:

P8)

a) $\{x \in R / -2 \leq x < 0\}$

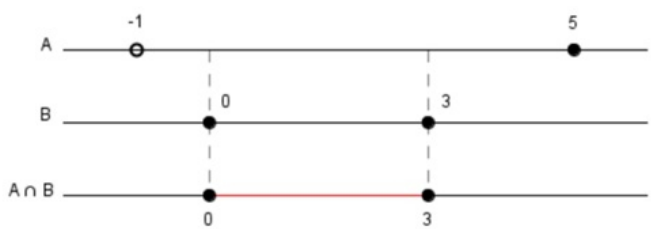
b) $\{x \in R / x \leq 7\}$

c) $\{x \in R / 2 \leq x \leq 8\}$

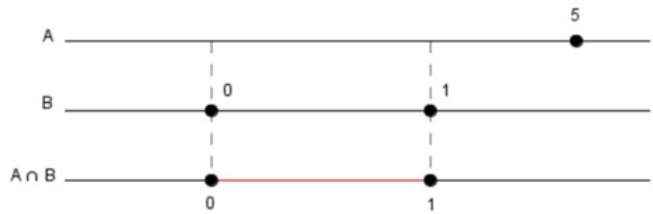
d) $\{x \in R / -3 < x \leq 5\}$

P9) Nos esboços abaixo, do lado esquerdo das "retas" está o $-\infty$ e do lado direito está o $+\infty$.

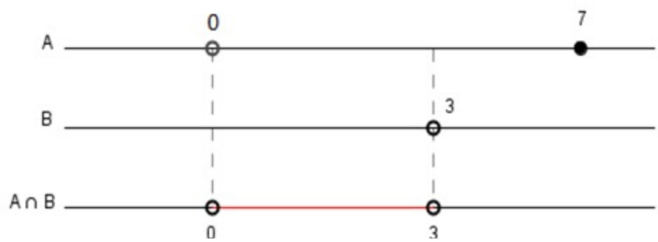
a) Em notação de intervalo, a resposta é $[0;3]$. A representação geométrica é:



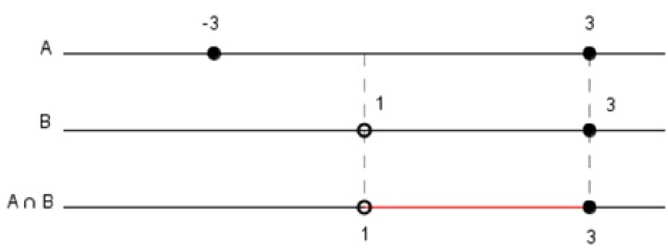
b) Em notação de intervalo, a resposta é $[0;1]$. A representação geométrica é:



c) Em notação de intervalo, a resposta é $(0;3)$. A representação geométrica é:



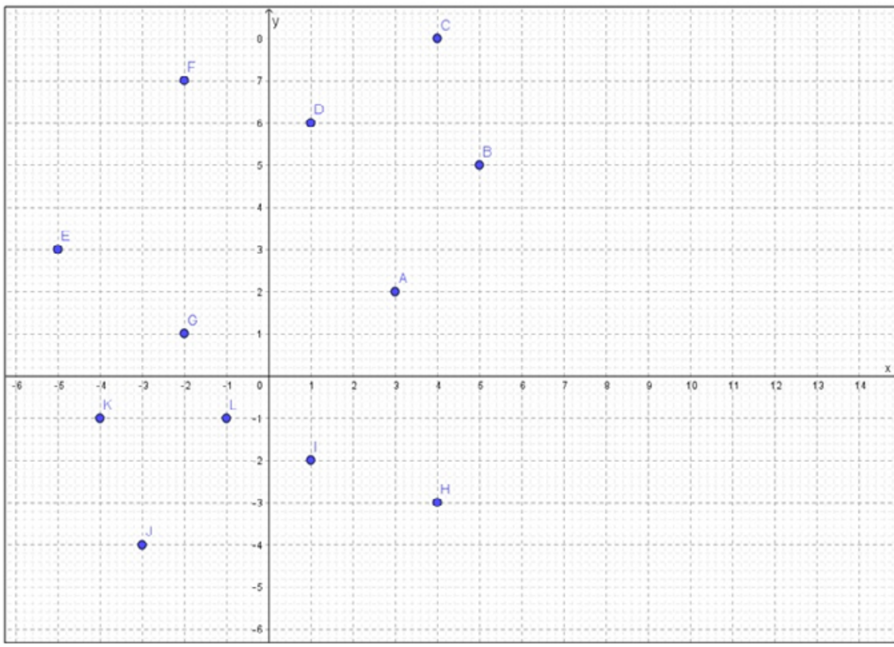
d) Em notação de intervalo, a resposta é $(1;3]$. A representação geométrica é:



P10)

$\mathrm{B}=(5;5)$ $C=(8;4)$ $D=(6;1)$ $E=(3;-5)$ $F=(7;-2)$ $G=(1;-2)$ $H=(-3;4)$ $I=(-2;1)$ $J=(-4;-3)$ $K=(-1;-4)$ $L=(-1;-1)$

P11)



P12)

Resposta D. Pela definição de IMC e a partir da observação no gráfico, o peso a ser "eliminado" é tal que

$$14 \leq \frac{30,92 - x}{(1,2)^2} \leq 18$$

Resolvendo-se a dupla inequação, tem-se $5 \leq x \leq 10,76$. Segue em detalhes a resolução da "dupla inequação":

$$14 \leq \frac{30,92 - x}{(1,2)^2} \leq 18 \quad \Leftrightarrow$$

$$14 \leq \frac{30,92 - x}{1,44} \leq 18 \quad \Leftrightarrow$$

$$14 \times (1,44) \leq \left(\frac{30,92 - x}{1,44}\right) \times (1,44) \leq 18 \times (1,44) \quad \Leftrightarrow$$

$$20,16 \leq 30,92 - x \leq 25,92 \quad \Leftrightarrow$$

$$20,16 - 30,92 \leq -x \leq 25,92 - 30,92 \quad \Leftrightarrow$$

$$-10,76 \leq -x \leq -5 \quad \Leftrightarrow$$

$$-10,76 \times (-1) \leq -x \times (-1) \leq -5 \times (-1) \quad \Leftrightarrow$$

$$10,76 \geq x \geq 5$$

P13) Resposta E. Juntando-se as duas maiores regiões, temos 37,2 + 38,3 = 75,5. Esse percentual do total equivale a 119,9 milhões de toneladas. Portanto, por regra de três, temos que 11,4% equivalem a 18,1%.

P14) Resposta C. A abscissa com valor de 30 tem a menor ordenada (a saber, 30 também) quando se olha para o gráfico indicado pelo nome "C".

P15) Resposta D. Os custos serão 1,7x2 = 3,4 para as duas cartas de 100g. Para as três seguintes, o custo será de 2,65x3 = 7,95. E para a carta de 350g, o custo será de 4,00. Portanto, o custo total será 3,4+7,95+4 = 15,35.

P16) Façamos a discussão por itens:

a) A variável independente da função pode assumir qualquer valor, neste caso $D(f) = R$.

b) A variável independente não pode "zerar" a parte de baixo da expressão da função. Neste caso, impõe-se que $4x-3 \neq 0$, ou seja

$$x \neq \frac{3}{4}$$

Neste caso

$$D(f)=\left\{x \in R \,/\, x \neq \frac{3}{4}\right\}$$

c) Não faz sentido raiz quadrada de número negativo (estamos falando de funções reais!), portanto o radicando pode ser nulo ou necessariamente positivo. Neste caso,

$$x-\frac{2}{5} \geq 0$$

ou seja,

$$x \geq \frac{2}{5}$$

Daí

$$D(f)=\left\{x \in R \,/\, x \geq \frac{2}{5}\right\}$$

d) A parte superior não atrapalha a função... mas a parte inferior não pode ser nula, logo $x \neq 0$. Com isso, $D(f)=\{x \in R \,/\, x \neq 0\}$.

e) Se você fizer testes em uma calculadora científica que calcula raízes cúbicas, perceberá (faça o teste!) que não importa se o radicando é positivo ou negativo. Sempre é possível calcular a raiz cúbica. Neste caso, $D(f)=R$.

P17) Trata-se da *função constante*! A reta neste caso fica paralela ao eixo da grandeza/variável independente.

P18) Resposta E. Pelas informações do enunciado, o salário (S) é calculado por meio da função:

S(x) = (parte fixa) + (parte comissionada). Em ambas as partes, o salário fixo é de R$750,00. A parte comissionada é a que se altera. Portanto, a função para esse contexto é:

$$S(x) = \begin{cases} 750 + 3x & se \quad 0 \leq x \leq 100 \\ 750 + 3 \times 100 + 9(x - 100) & se \quad x \geq 101 \end{cases}$$

Note que, para valores da variável independente maior do que 101, a taxa de variação é maior. Ambas as partes de S(x) são funções afins, cada um com uma taxa de crescimento. Caso queira esboçar à "mão os gráficos", calcule a função para dois valores da variável independente em cada pedaço do domínio e ligue os dois pontos por uma linha reta. Com isso, o único esboço possível é o mostrado na alternativa E.

P19) Resposta D. Façamos o mesmo pensamento que no anterior. Pelas informações do enunciado, a construção das funções é (a variável independente é "m" e representa os minutos):

$$K : \begin{cases} 29,90 & se \quad 0 \leq m \leq 200 \\ 29,90 + 0,20(m - 200) & se \quad m > 200 \end{cases}$$

$$Z : \begin{cases} 49,90 & se \quad 0 \leq m \leq 300 \\ 49,90 + 0,10(m - 300) & se \quad m > 300 \end{cases}$$

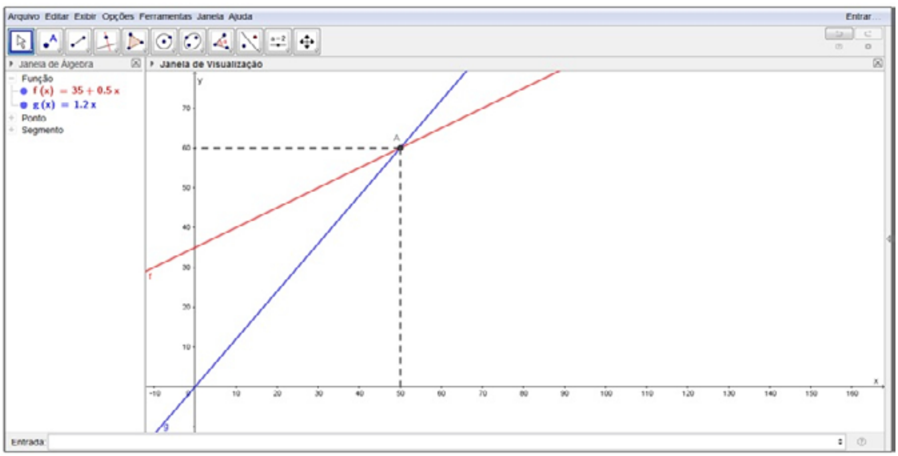
Note que para valores de até 200 (para K) e até 300 (para Z) as funções são constantes (taxa de variação nula), caracterizando a cobrança apenas pelo custo fixo. Para quantidades de minutos que ultrapassam a cota de 200 e 300, as leis são funções afins. Como a taxa de variação para Z é menor, o esboço gráfico de Z tem menos aclive em comparação ao esboço gráfico de K. Isso está caracterizado na alternativa D.

P20) Resposta D. A vazão constante significa que a velocidade de escoamento é sempre a mesma na entrada do reservatório 1. Como os reservatórios são paralelepípedos e a vazão é a mesma, a altura muda de "forma linear". Sendo que, após alcançar o cano de ligação entre os dois reservatórios, enche-se o segundo reservatório e o primeiro não tem mais a altura aumentada. Após o nível de água alcançar e "cobrir" o cano de ligação, volta-se a aumentar a altura da água no reservatório 1, desta vez um pouco mais devagar (diminui-se a taxa de variação da altura), pois estão sendo enchidos os dois reservatórios ao mesmo tempo. Isso está representado na alternativa D.

P21) Façamos a explanação por itens:

a) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ as funções que representam o custo mensal das opções 1 e 2 respectivamente. De acordo com as informações do problema, $f(x) = 35 + 0,50x$ e $g(x) = 1,20x$, em que a variável independente "x" denota número de minutos usados em cada opção. Com isso, o custo em cada opção será: $f(60) = 35 + 0,50.(60) = 35 + 30 = 65$ e $g(60) = 1,20.(60) = 72$. Logo, é mais vantajoso a opção 1 (mesmo que tenha assinatura mensal nesse caso).

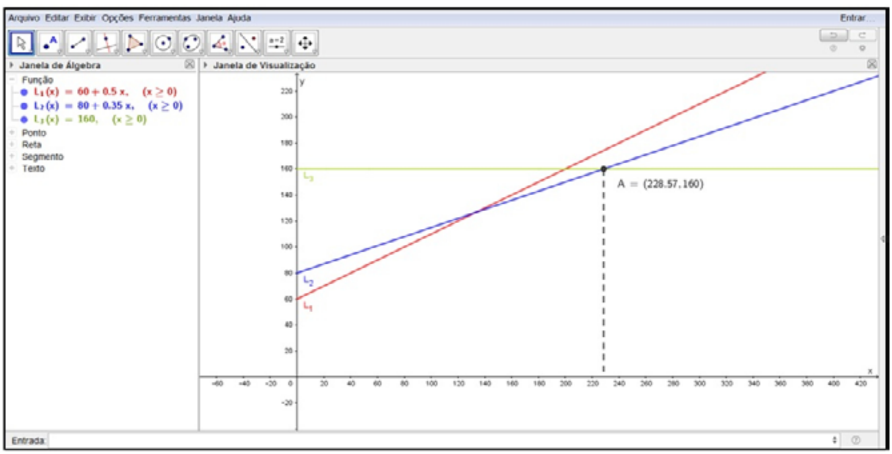
b) O esboço das funções está abaixo. Atente para o fato de $x \geq 0$, por causa do domínio... Assim, resolvendo-se $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 35 + 0,50x = 1,20x \Leftrightarrow x = 50$, obtém-se o valor de minutos que torna indiferente escolher alguma das opções. Nesse caso, para uma quantidade de até 50 minutos é mais vantajosa a opção 2, sendo o contrário (opção 1 mais vantajosa) para quantidades que superam 50 minutos.



P22) Vamos resolver o problema de modo único, ou seja, com uma discussão apenas... Façamos inicialmente a construção das funções para cada uma das locadoras. Sejam $L_1(x)$, $L_2(x)$ e $L_3(x)$, as funções custo para as locadoras 1, 2 e 3 respectivamente. Pelas informações do problema, $L_1(x) = 60 + 0,50x$, $L_2(x) = 80 + 0,35x$ e $L_3(x) = 160$, em que x denota a quantidade de quilômetros percorridos em um dia (variável independente). Calculando para a quantidade de 80 km os valores de custo, tem-se:

$$L_1(80) = 60 + 0,50.80 = 60 + 40 = 100$$
$$L_2(80) = 80 + 0,35.80 = 80 + 28 = 108$$
$$L_3(80) = 160$$

A partir do cálculo anterior, constata-se ser mais vantajosa a locadora 1 (vantajosa = economia para o usuário do serviço). Façamos, usando o *software* GeoGebra, o esboço dos gráficos num mesmo sistema de eixos:



Com isso, é possível constatar que a locadora 3 fica mais vantajosa a partir de 228,57 km. Para tal, resolva a equação $L_1(x) = L_3(x)$. Ou seja:

$$80 + 0,35x = 160$$
$$0,35x = 160 - 80$$
$$x = \frac{80}{0,35} \approx 228,57$$

P23) Item (a) é uma resposta pessoal. Para os demais a discussão é unificada. Como a relação está definida como

$$N(x) = \frac{5x+28}{4}$$

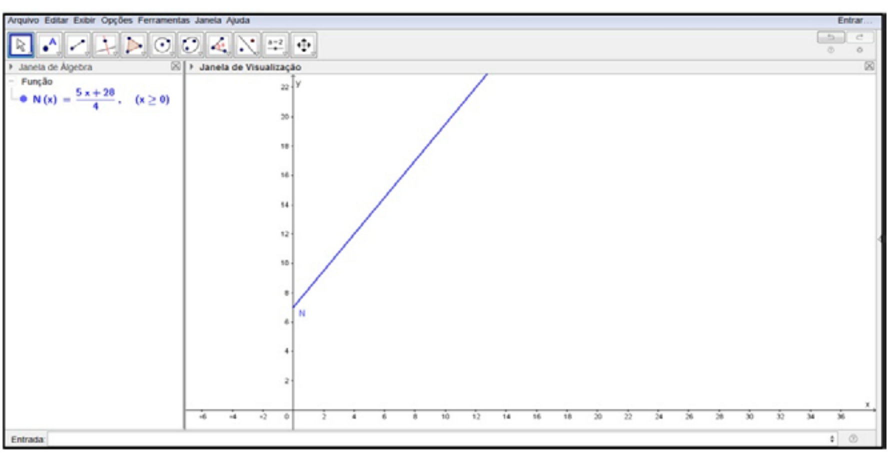
para $x \geq 0$, temos que um pé que tem medida 28 calça 42, pois

$$N(28) = \frac{5.(28)+28}{4} = 42$$

Por outro lado, um sapato 36 resulta numa medida de pé de aproximadamente 23,2 cm. Para saber tal valor de "x", precisamos resolver a equação $N(x) = 36$, ou seja,

$$\frac{5x+28}{4} = 36$$

que resulta $x = 23,2$. O esboço feito no *software* GeoGebra fica (imagem a seguir) e a interpretação para $N(0)$ é a de que talvez não faça sentido físico observar "pés" com medida nula ou pés com medidas pouco aceitáveis para recém-nascidos (por exemplo, 2 cm, 3 cm, ...).



P24)

a) $3x^2+6x+5=3.(x+1)^2+2$

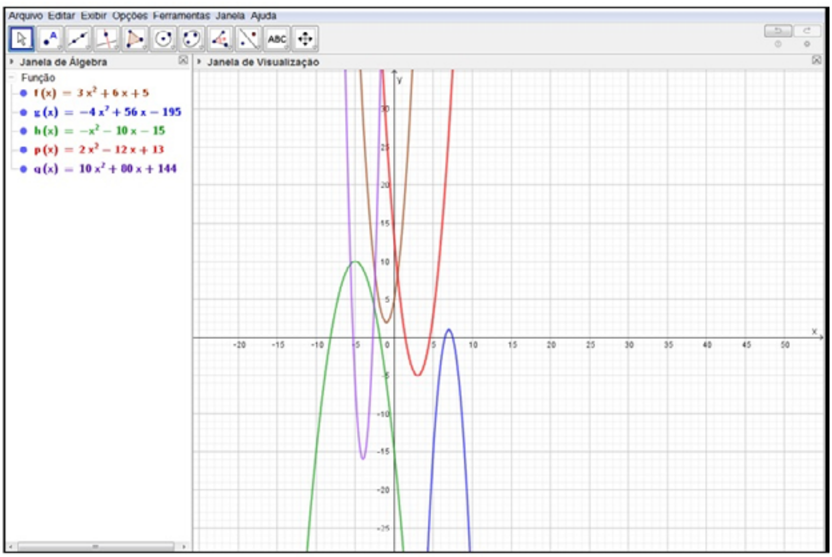
b) $-4x^2+56x-195=-4.(x-7)^2+1$

c) $-x^2-10x-15=-(x+5)^2+10$

d) $2x^2-12x+13=2.(x-3)^2-5$

e) $10x^2+80x+144=10.(x+4)^2-16$

P25)



P26)

a) Vértice é mínimo.

$$(x_v;y_v)=\left(-\frac{6}{2.(3)};-\frac{(6)^2-4.(3).(5)}{4.(3)}\right)=(-1;2)$$

Conjunto imagem: $[2;+\infty)$

b) Vértice é máximo.

$$(x_v; y_v) = \left(-\frac{56}{2.(-4)}; -\frac{(56)^2 - 4.(-4).(-195)}{4.(-4)}\right) = (7;1)$$

Conjunto imagem: $\left(-\infty;1\right]$

c) Vértice é máximo.

$$(x_v; y_v) = \left(-\frac{-10}{2.(-1)}; -\frac{(-10)^2 - 4.(-1).(-15)}{4.(-1)}\right) = (-5;10)$$

Conjunto imagem: $\left(-\infty;10\right]$

d) Vértice é mínimo.

$$(x_v; y_v) = \left(-\frac{-12}{2.(2)}; -\frac{(-12)^2 - 4.(2).(13)}{4.(2)}\right) = (3;-5)$$

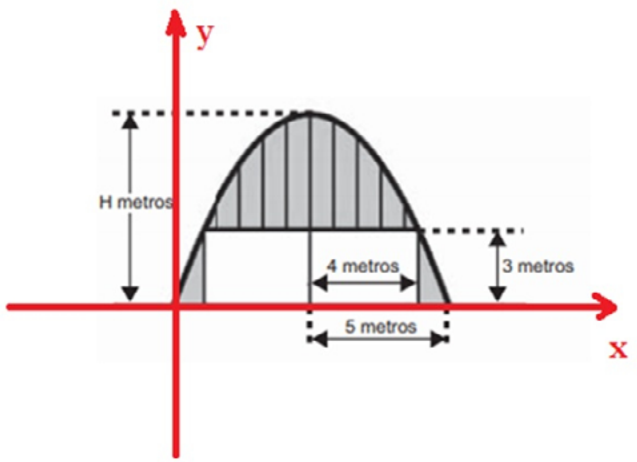
Conjunto imagem: $\left[-5;+\infty\right)$

e) Vértice é mínimo.

$$(x_v; y_v) = \left(-\frac{80}{2.(10)}; -\frac{(80)^2 - 4.(10).(144)}{4.(10)}\right) = (-4;-16)$$

Conjunto imagem: $\left[-16;+\infty\right)$

P27) Resposta D. Use a seguinte figura como suporte para a resolução do problema.



Note que os zeros da função pelo contexto são x = 0 e x = 10 (ambos são os interceptos no eixo horizontal). Com isso, usando a forma fatorada para a função, temos $f(x) = a.(x-0).(x-10) = a.x.(x-10)$.

No esboço, temos a informação de que $f(9) = 3$. Com isso, será possível calcular o valor de "a". Daí,

$$f(9) = a.9.(9-10) \Leftrightarrow 3 = a.9.(-1) \Leftrightarrow \frac{3}{-9} = a \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = a$$

Portanto, a lei para a função será

$$f(x) = -\frac{1}{3}.x.(x-10)$$

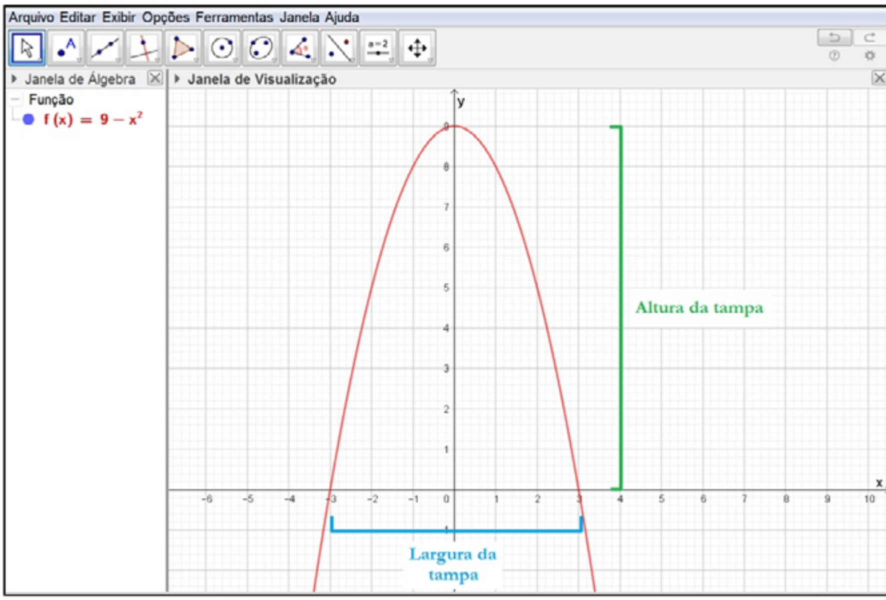
Logo, a ordenada do vértice será:

$$f(5) = -\frac{1}{3}.5.(5-10) = -\frac{5}{3}.(-5) = \frac{25}{3}$$

Note que a abscissa do vértice é 5.

P28) Resposta C. Fazendo-se o esboço da função mencionada no problema, é possível observar que a altura da tampa será igual a nove e a largura da tampa será seis. Com isso, a área da tampa será

$$A = \frac{2}{3}.6.9 = 36$$



P29) Resposta A. A função mencionada no problema pode ser uma função afim ou uma função quadrática. Porém, como as informações repassadas promovem três modificações nas notas das provas e tais modificações não produzem pontos "colineares", logo a função que altera as notas, de acordo com o problema, deve ser necessariamente quadrática (aqui está subjacente um resultado matemático que afirma: é única a função quadrática que "passa" por três pontos não colineares no plano cartesiano). Com isso, calculemos os coeficientes de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pelo problema, $f(0) = 0$, $f(10) = 10$ e $f(5) = 6$. Com isso:

$$\begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ a(10)^2 + b(10) + c = 10 \\ a(5)^2 + b(5) + c = 6 \end{cases}$$

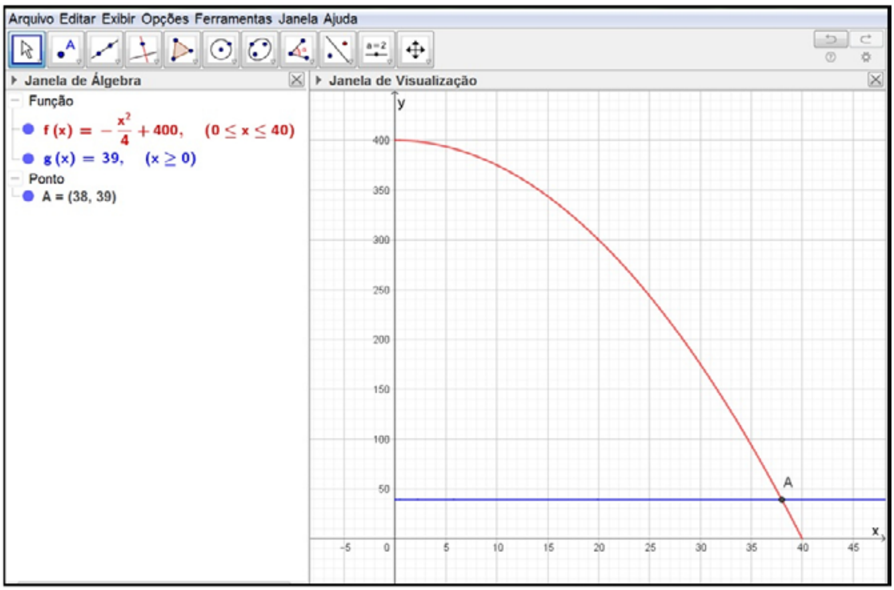
A resolução do sistema linear acima implica

$$a = -\frac{1}{25} \;,\; b = \frac{7}{5} \text{ e } c = 0$$

Portanto

$$f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$$

P30) Resposta D. O esboço da função temperatura no GeoGebra (aqui nomeamos a função temperatura por $f(x)$) é um pedaço de parábola para valores da variável independente que sejam positivos (ou nulo). Perceba que, se o tempo passa de 40 minutos, a temperatura se torna negativa, pois 40 é um "zero" para a função temperatura.

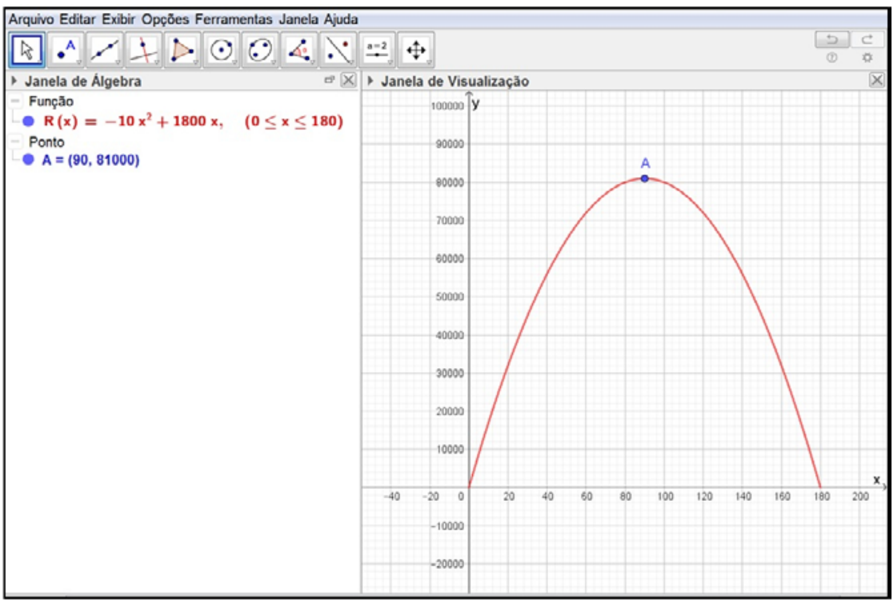


Pelo problema, o forno é aberto quando a temperatura atinge a marca de 39° (no esboço $g(x)$ é a função constante azul). O intercepto fornece a informação solicitada. Resolvendo

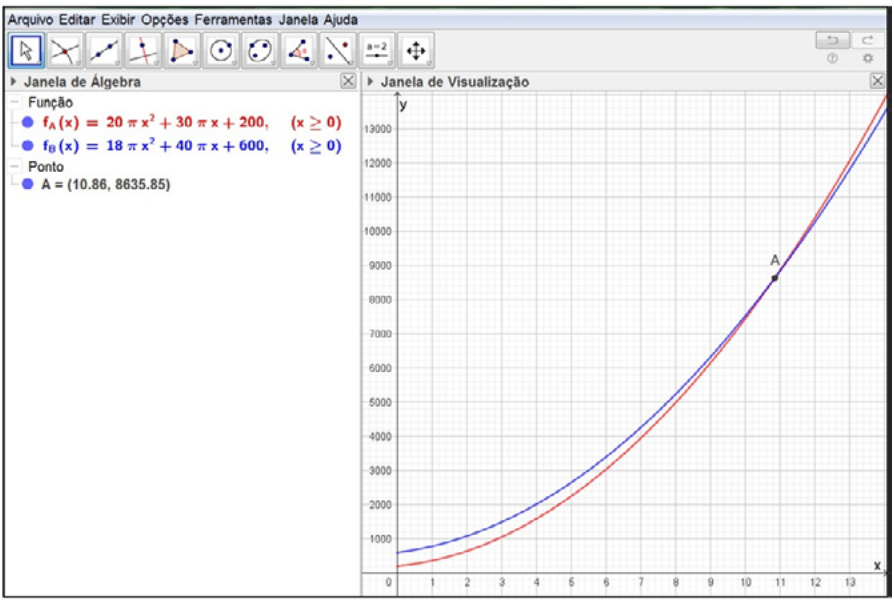
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} + 400 = 39$$

obtém-se $x = 38$ que é o tempo procurado.

P31) Seja x e y o número de lugares ocupados e vagos no avião respectivamente. Pelo problema, $x+y=100$. Cada um dos passageiros paga na viagem $800+10y$. Portanto, a receita (valor arrecadado) da companhia aérea é $R(x,y)=x.(800+10y)$. Com isso, temos que a receita, em função dos *lugares ocupados* no avião, será $R(x)=x.(800+10(100-x))=1800x-10x^2$. O esboço do gráfico permite concluir que o número de lugares ocupados que maximizam a receita é $x=90$.



P32) Para avançar nesse problema, é necessário lembrar as relações que calculam a área de um círculo e comprimento de circunferência. As relações são, respectivamente, $A(x) = \pi x^2$ e $C(x) = 2\pi x$ (para um círculo/circunferência de raio "x"). Nos dois casos, o custo para a firma A e firma B é construído da mesma forma, ou seja, $f_A(x) = 20\pi x^2 + 15.2.\pi.x + 200$ e $f_B(x) = 18\pi x^2 + 20.2.\pi.x + 600$. Em um mesmo sistema cartesiano de eixos, os esboços são:



Para obter a abscissa do ponto A, deve ser calculado um valor que torna verdade a igualdade $f_A(x) = f_B(x)$, ou seja, deve ser resolvida a equação do segundo grau $2\pi x^2 - 10.\pi.x - 400 = 0$. Com isso, obtém-se $x \approx 11{,}86$. Então a firma A torna-se mais vantajosa (no sentido econômico) para todos os valores de diâmetro que sejam até aproximadamente 23,72 metros. O problema análogo fica como desafio! Use as mesmas ideias que discutimos até aqui!

P33) Resposta E. Observe que a cada ano, a partir do primeiro de funcionamento, a empresa aumenta em 50% a produção. Isso significa que a cada ano, em relação ao anterior, o fator de aumento é 1+0,5 = 1,5. Portanto, a função que representa esse contexto é $P(t) = 8000.(1,5)^{t-1}$.

P34) Resposta B. Aqui é necessário lembrar as propriedades de potências discutidas no módulo. Se

$$A = k.m^{\frac{2}{3}}$$

então ao ter a massa multiplicada por 8 segue que a "nova" superfície corporal será

$$A^* = k.(8m)^{\frac{2}{3}} = k.8^{\frac{2}{3}}.m^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}.k.m^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}.(k.m^{\frac{2}{3}}) = \sqrt[3]{64}.A = 4.A$$

ou seja, em relação à superfície original, ela fica multiplicada pelo fator 4.

P35) Resposta D. Se Arthur tem o dinheiro para efetuar a operação na modalidade à vista, façamos as simulações de acordo com as opções apresentadas pelo problema. Arthur tem um capital de R$55000,00 para efetuar o negócio. Com isso:

Opção 1: pagou à vista e com isso não sobra dinheiro após o negócio.

Opção 2: pagou R$30000,00 de entrada, logo sobrou R$25000,00 para o investimento. Nesse caso, após meio ano de investimento, Arthur terá 25000 x (1,1) = 27500. Ao pagar a prestação de R$26000,00, sobrará R$1500,00.

Opção 3: pagou R$20000,00 de entrada, logo sobrou R$35000,00 para o investimento. Ao aplicar o dinheiro, Arthur terá ao final de 6 meses 35000 x (1,1) = 38500. Com o pagamento de R$20000,00 da prestação sobram R$18500,00. Novamente, com o investimento Arthur terá 18500 x (1,1) = 20350, o qual terá que desembolsar R$18000,00 na última prestação. Sobrará ao final R$2350,00.

Opção 4: pagou R$15000,00 de entrada, logo sobrou R$40000,00 para o investimento. Após um ano Arthur terá 40000 x (1,1) x (1,1) = 48400. A prestação consumirá R$39000,00 e ainda resta R$9400,00.

Opção 5: ao investir R$55000,00 Arthur terá após um ano 55000 x (1,1) x (1,1) = 66550. Ao pagar R$60000,00 pelo terreno sobrará ainda R$6550,00.

Portanto, mostra-se a opção 4 mais vantajosa para Arthur.

P36) Resposta E. Pela relação apresentada no enunciado, basta calcular $s(2)$. Portanto, $s(2) = 1800.(1,03)^2 = 1800.1,0609 = 1909,62$.

P37) Resposta B. Atente para o fato de que 20 minutos equivalem a 1/3 da hora (20/60 de uma hora). Logo, calculando-se

$$p\left(\frac{1}{3}\right)$$

chega-se a

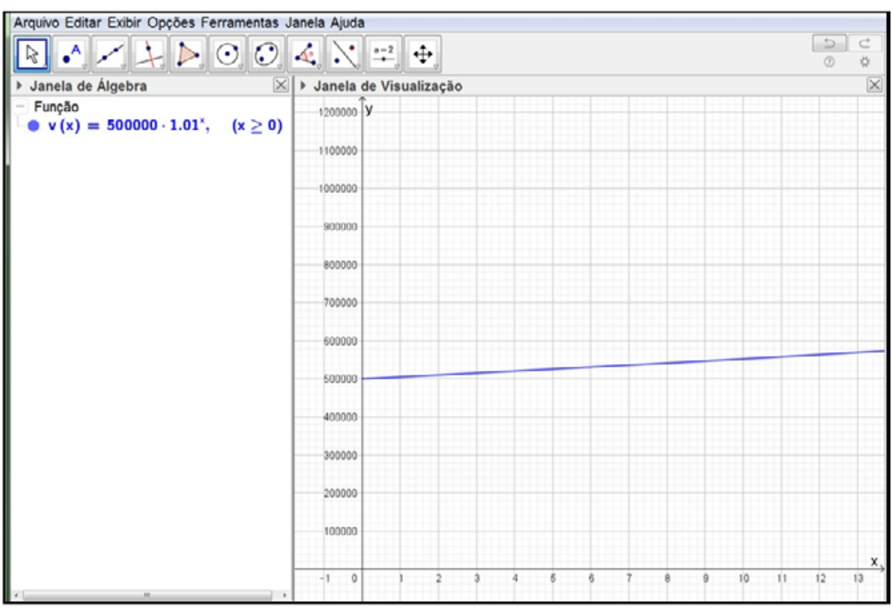
$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 40.(2)^{3.\frac{1}{3}} = 40.2^1 = 80$$

Portanto, a população de bactérias em relação ao início fica duplicada.

P38) A função que representa a valorização do imóvel ao longo do tempo é $v(x) = 500000.(1,01)^x$ com a variável independente x representando "semestres". Para que se obtenha um lucro de pelo menos 10% do valor investido na compra do imóvel na planta, o investidor terá que vender após o décimo semestre, pois

$$v(10) = 500000 \cdot (1{,}01)^{10} = 500000 \cdot 1{,}1046221254112 \approx 552311{,}07$$

sendo este valor superior a 10% do valor pago na planta. Observe no esboço abaixo que apesar de "parecer reto" o gráfico da função exponencial é uma curva, com comportamento crescente (pois a base é > 1). Não mencionarei a resposta para a segunda pergunta, porém fica o convite a fazer com a mesma estratégia usada antes, por meio de "palpites". No conteúdo do próximo módulo (VI), veremos uma maneira matemática "elegante" para se obter tal resposta, evitando-se o "palpitômetro". Ficou curioso?! Avance para os logaritmos!



P39) Resposta D. Pelo enunciado o cálculo da prestação é feito usando a relação

$$P = \frac{5000 \times 1,013^n \times 0,013}{\left(1,013^n - 1\right)}$$

Calculemos "n" quando a prestação comprometer a renda, ou seja, R$400,00. Daí:

$$\frac{5000 \times 1,013^n \times 0,013}{\left(1,013^n - 1\right)} = 400 \Leftrightarrow \frac{65 \times 1,013^n}{\left(1,013^n - 1\right)} = 400$$

Usando operações do produto de razões, temos $65 \times 1,013^n = 400 \times \left(1,013^n - 1\right)$. Com a distributividade fica $65 \times 1,013^n = 400 \times 1,013^n - 400$. Essa igualdade equivale a $335 \times 1,013^n = 400$. Usando o logaritmo de base 10 em ambos os lados da igualdade temos $\log\left(335 \times 1,013^n\right) = \log\left(400\right)$. Por meio das propriedades do logaritmo a última igualdade equivale a $\log\left(335\right) + n.\log\left(1,013\right) = \log\left(400\right)$, ou seja,

$$n = \frac{\log\left(400\right) - \log\left(335\right)}{\log\left(1,013\right)}$$

Pelas informações do exercício, temos

$$n = \frac{2,602 - 2,525}{0,005} = 15,4$$

Com isso, "n" deve ser pelo menos 16.

P40) Resposta C. Pelas informações do problema é possível calcular as energias liberadas no Japão e na China por meio da relação apresentada. Com a relação do enunciado e pela definição de logaritmo, temos:

$$9=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right)\Leftrightarrow 9\times\frac{3}{2}=\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right)\Leftrightarrow\frac{27}{2}=\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right)\Leftrightarrow 10^{\frac{27}{2}}=\frac{E_1}{E_0}$$

$$7=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right)\Leftrightarrow 7\times\frac{3}{2}=\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right)\Leftrightarrow\frac{21}{2}=\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right)\Leftrightarrow 10^{\frac{21}{2}}=\frac{E_2}{E_0}$$

Calculando a razão

$$\frac{E_1}{E_2}$$

temos:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{E_0.10^{\frac{27}{2}}}{E_0.10^{\frac{21}{2}}}=10^{\frac{27}{2}-\frac{21}{2}}=10^{\frac{6}{2}}=10^3$$

Portanto, $E_1=10^3.E_2$.

P41) Resposta E. Pela relação do enunciado $M(t)=A.(2,7)^{k.t}$. Também é informação do enunciado que a meia-vida do Césio-137 é 30 anos. Isso permite calcular a constante “k” que está na função M(t). Sabendo que em 30 anos a quantidade é a metade, então

$$\frac{A}{2}=A.(2,7)^{k.30}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=(2,7)^{k.30}\Leftrightarrow 2^{-1}=(2,7)^{k.30}$$

Pelo enunciado também sabemos que $2=10^{0,3}$, pois $\log_{10}(2)=0,3$. Substituindo temos $\left(10^{0,3}\right)^{-1}=(2,7)^{k.30}$. Usando o logaritmo de base 10 em cada lado da última igualdade, temos:

$$\log_{10}\left(10^{0,3}\right)^{-1} = \log_{10}\left(2,7\right)^{k.30} \Leftrightarrow$$

$$\log_{10}\left(10^{-0,3}\right) = \log_{10}\left(2,7\right)^{k.30} \Leftrightarrow$$

$$-0,3.\log_{10}\left(10\right) = 30k.\log_{10}\left(2,7\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{-0,3.\log_{10}\left(10\right)}{30.\log_{10}\left(2,7\right)} = k \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{100.\log_{10}\left(2,7\right)} = k$$

Com isso, a função pode ser reescrita como $M(t) = A.\left(2,7\right)^{\frac{-1}{100.\log_{10}(2,7)}.t}$. Deseja-se saber quanto tempo precisa para que a quantidade fique 10% da quantidade inicial, ou seja, "0,1.A". Para tal, vamos calcular "t", tal que $0,1.A = A.\left(2,7\right)^{\frac{-1}{100.\log_{10}(2,7)}.t}$. Cancelando a quantidade "A" e usando o logaritmo de base 10 em ambos os lados da igualdade ficamos com:

$$0,1.A = A.\left(2,7\right)^{\frac{-1}{100.\log_{10}(2,7)}.t} \Leftrightarrow$$

$$\log_{10}\left(0,1\right) = \log_{10}\left(\left(2,7\right)^{\frac{-1}{100.\log_{10}(2,7)}.t}\right) \Leftrightarrow$$

$$-1 = \frac{-1}{100.\log_{10}\left(2,7\right)}.t.\log_{10}(2,7) \Leftrightarrow$$

$$-1 = \frac{-1.t.\log_{10}(2,7)}{100.\log_{10}\left(2,7\right)} \Leftrightarrow$$

$$100 = t$$

Logo, em t = 100 teremos a quantidade de 10% da quantidade inicial.

P42) Resposta E. Pelo enunciado a magnitude foi de $M_W = 7,3$. Com isso, e usando a relação do problema, temos que calcular M_o. Daí:

$$M_W = -10,7 + \frac{2}{3}\log(M_0) \Rightarrow 7,3 = -10,7 + \frac{2}{3}\log(M_0) \Leftrightarrow$$

$$10,7 + 7,3 = \frac{2}{3}\log(M_0) \Leftrightarrow 18 = \frac{2}{3}\log(M_0) \Leftrightarrow 18.\frac{3}{2} = 18 = \frac{2}{3}\log(M_0) \Leftrightarrow$$

$$27 = \log(M_0) \Leftrightarrow 10^{27} = M_0$$

P43) Resposta D. Como a temperatura inicial é de 3000º e a cada trinta minutos diminui 1%, a função $T(t)$ que modela o problema é do tipo exponencial. Com as informações do problema, a lei da função é $T(t) = 3000.(0,99)^{\frac{t}{30}}$. A variável t nesse contexto é informada em minutos. Deseja-se saber qual o tempo necessário para que a liga metálica atinja a temperatura de 30º, ou seja, $T(t) = 30$. Para calcular o tempo, deve-se resolver a seguinte equação exponencial: $30 = 3000.(0,99)^{\frac{t}{30}}$. Com as técnicas operatórias dos números e propriedades dos logaritmos, temos:

$$30 = 3000.(0,99)^{\frac{t}{30}} \Leftrightarrow \frac{1}{100} = (0,99)^{\frac{t}{30}} \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{100}\right) = \log(0,99)^{\frac{t}{30}} \Leftrightarrow$$

$$-2 = \frac{t}{30}.(\log(0,99)) \Leftrightarrow -2 = \frac{t}{30}.\left(\log(0,11\times 3^2)\right) \Leftrightarrow$$

$$-2 = \frac{t}{30}.\left(\log(0,11) + \log(3^2)\right) \Leftrightarrow -2 = \frac{t}{30}.\left(\log(0,11) + 2\times\log(3)\right) \Leftrightarrow$$

$$-2 = \frac{t}{30}.\left(\log(11\times 10^{-2}) + 2\times\log(3)\right) \Leftrightarrow -2 = \frac{t}{30}.\left(\log(11) - 2\times\log(10) + 2\times\log(3)\right) \Leftrightarrow$$

$$-2 = \frac{t}{30}.(1,041 - 2 + 2\times 0,477) \Leftrightarrow -2 = \frac{t}{30}.(-0,005) \Leftrightarrow -60 = -0,005.t \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-60}{-0,005} = 12000$$

Esse tempo calculado é em minutos, o qual em horas fica: 12000/60 = 200 horas.

P44) Resposta E. O enunciado informa que a lei da função é $y(t) = a^{t-1}$. Pelo esboço gráfico apresentado, observa-se que $y(0) = 0,5$. Essa informação é útil para calcular a base da função exponencial do problema.

Temos

$$0,5 = a^{0-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = a^{0-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = a^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow 2 = a$$

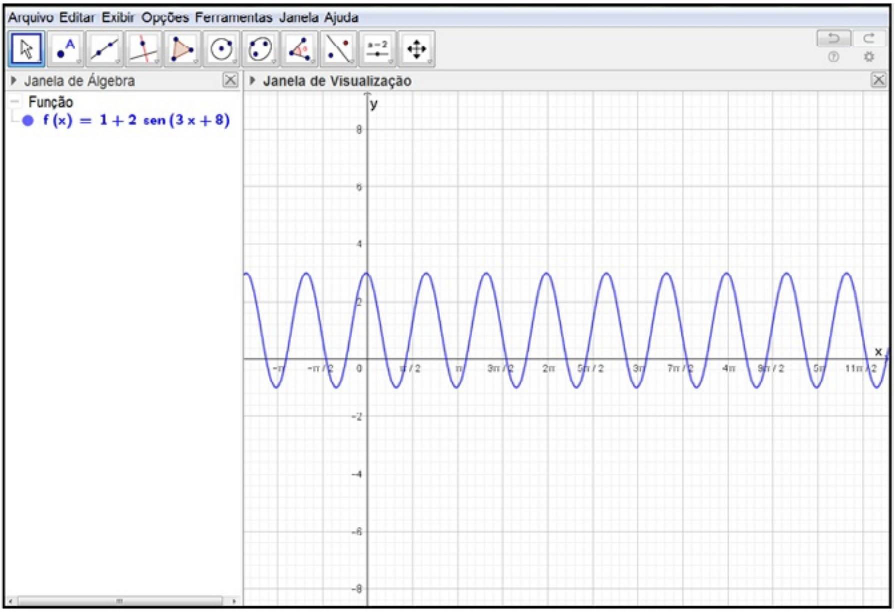
Portanto, a lei da função é $y(t) = 2^{t-1}$. A pergunta é sobre o tempo entre a plantação e o corte quando as mudas crescerem 7,5 metros, logo precisamos calcular o valor da variável independente, tal que $y(t) = 7,5$.

Daí:

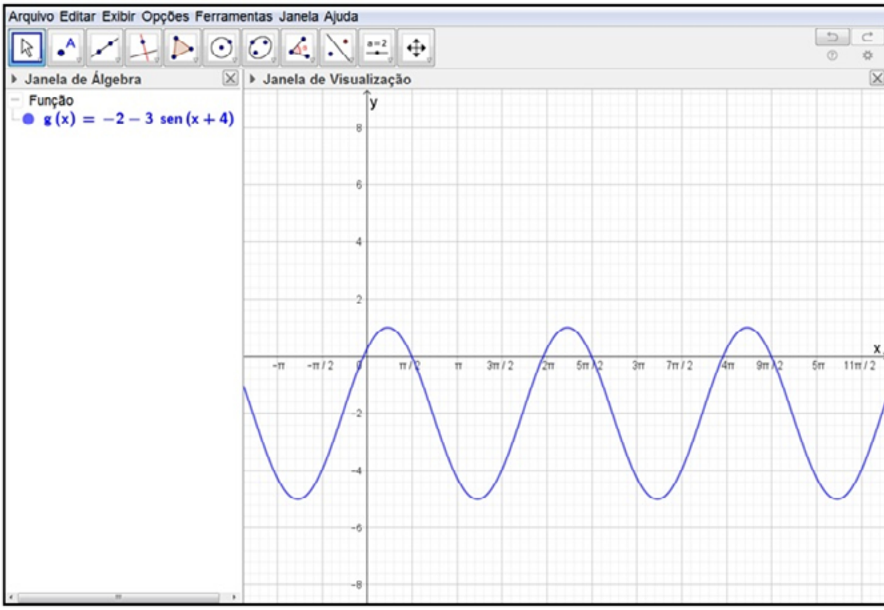
$$2^{t-1} = 7,5 \Leftrightarrow \frac{2^t}{2^1} = 7,5 \Leftrightarrow 2^t = 2 \times 7,5 \Leftrightarrow 2^t = 15 \Leftrightarrow t = \log_2 (15)$$

P45)

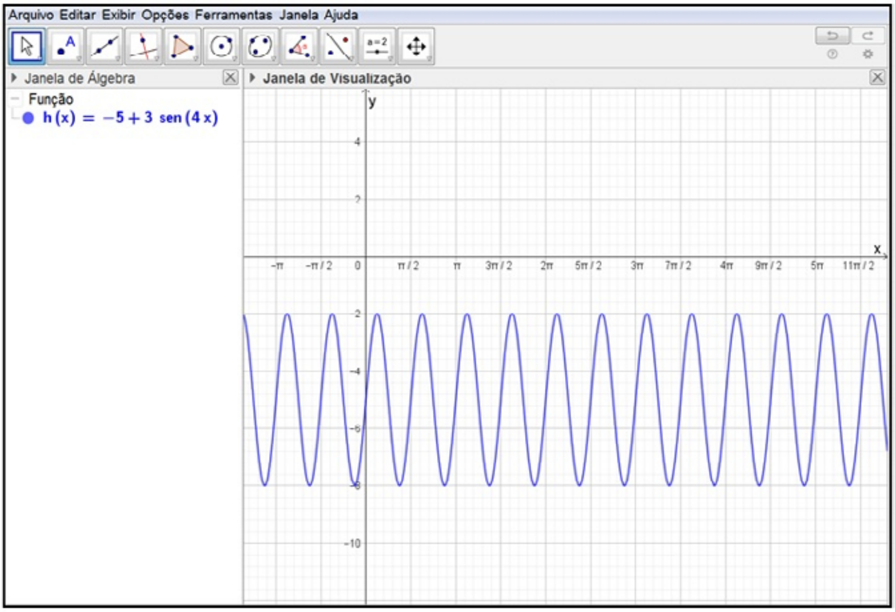
a) Período $p = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$ e conjunto imagem $[-1;3]$.



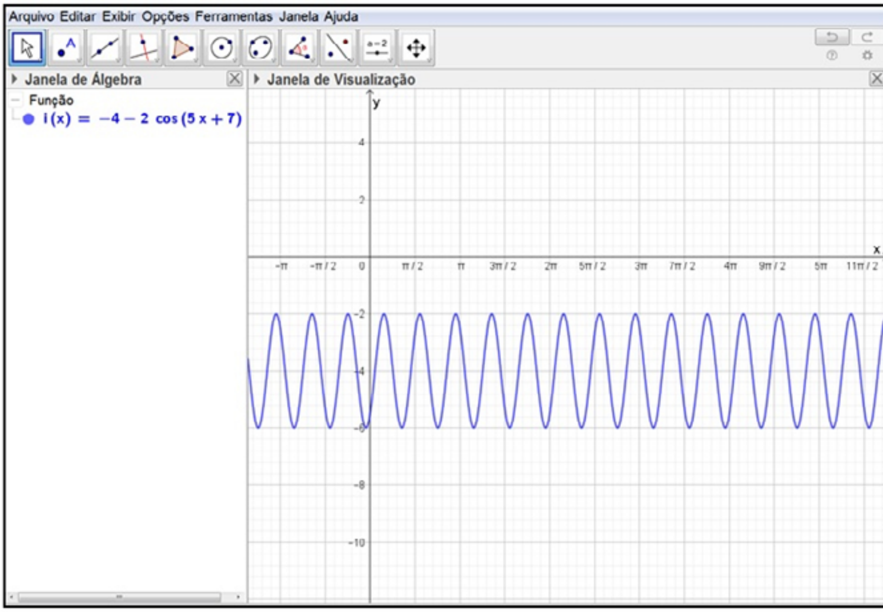
b) Período $p = \frac{2\pi}{|1|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ e conjunto imagem $[-5;1]$.



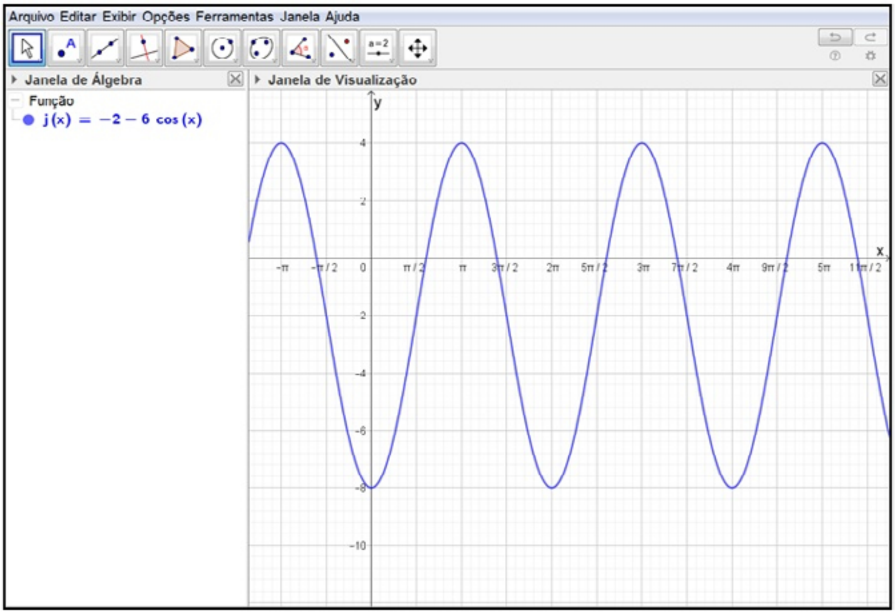
c) Período $p = \dfrac{2\pi}{|4|} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ e conjunto imagem $[-8;-2]$.



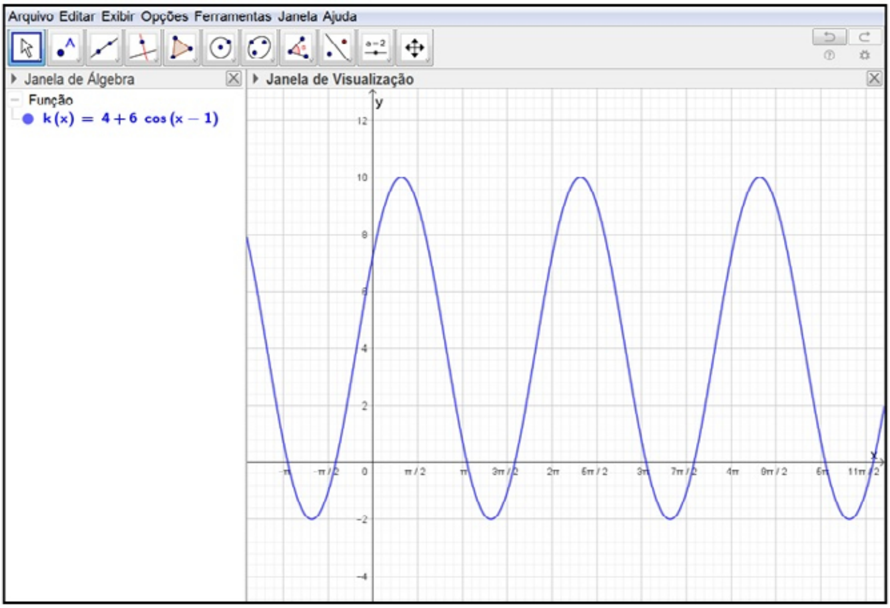
d) Período $p = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5}$ e conjunto imagem $[-6;-2]$.



e) Período $p=\dfrac{2\pi}{|1|}=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$ e conjunto imagem $[-8;4]$.



f) Período $p = \frac{2\pi}{|1|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ e conjunto imagem $[-2;10]$.



P46) É uma pesquisa, portanto, *pesquise*!

P47) Resposta A. Com as informações da função e pela tabela do enunciado, temos que nos tempos t' e t'' devem ocorrer os pontos de pressão máxima e pressão mínima, ou seja:

$$\begin{cases} A + B.\cos(k.t') = 120 \\ A + B.\cos(k.t'') = 78 \end{cases}$$

Isso produz $A = 99$ (resolvendo o sistema acima), uma vez que os valores máximos e mínimos são alcançados, respectivamente, quando $\cos(k.t') = 1$ e $\cos(k.t'') = -1$. Daí, na pressão máxima, $\cos(k.t') = 1$ e com isso vale: $99 + B.1 = 120 \Leftrightarrow B = 21$ (o mesmo poderia ser feito usando a pressão mínima). Agora precisamos calcular a constante "k".

Ela tem relação com o período. No problema é mencionado que em 60 segundos ocorrem 90 batimentos, logo um batimento ocorre em 60/90 = 2/3 de segundo. Como um batimento representa entre duas sucessivas pressões máximas, então o período é 2/3, portanto pela relação do período segue que:

$$p = \frac{2\pi}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{c} \Leftrightarrow c = 3\pi$$

Portanto, a lei da função é $P(t) = 99 + 21.\cos(3\pi.\mathrm{t})$.

P48) Resposta D. Observe que o *menor preço* significa a *maior safra*, no caso do problema proposto. Com isso, devemos ter

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$$

Isso ocorre quando x = 7, ou seja, quando o mês é julho.

P49) Resposta B. Usando a estratégia do problema 47, temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A + B.sen\left(\dfrac{\pi}{12}\left(h'-12\right)\right) = 26 \\ A + B.sen\left(\dfrac{\pi}{12}\left(h''-12\right)\right) = 18 \end{cases}$$

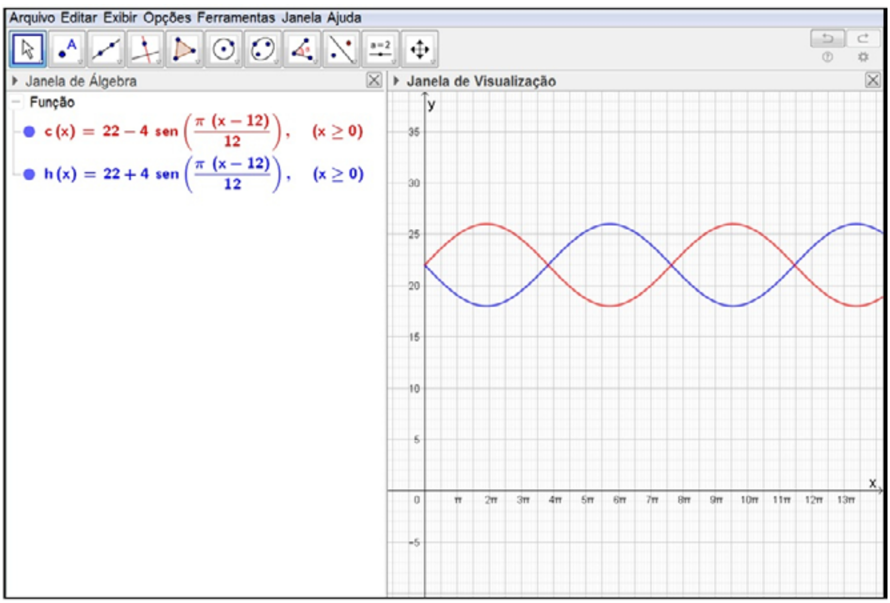
O valor máximo e mínimo ocorre, respectivamente, quando

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\left(h'-12\right)\right) = 1 \text{ e } sen\left(\frac{\pi}{12}\left(h''-12\right)\right) = -1$$

Com isso, A = 22 é solução para o sistema. Porém B = 4, apesar de ser uma solução para o sistema, não atende à qualidade "a temperatura pela tarde ser menor do que a temperatura da manhã". Com isso, B = -4 atende ao contexto. Observe que isso é fruto de uma reflexão do gráfico de

$$f(x) = 4sen\left(\frac{\pi}{12}(x-12)\right)$$

em torno do eixo horizontal. Para auxiliar a sua compreensão, observe a imagem abaixo.



P50) A função

$$h(t) = 4 + 4sen\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right)$$

tem conjunto imagem $\left[0;8\right]$. Portanto, a menor e a maior altura são respectivamente zero e oito centímetros. Logo, a variação de altura do pistão dentro do cilindro é de 8 centímetros (item a). O período da função $h(t)$ é (pelos métodos apresentados no módulo calculado):

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{0,05}\right|} = 2\pi.\frac{0,05}{2\pi} = 0,05$$

Isso significa que para realizar 1 ciclo completo (1 volta completa no virabrequim) leva 0,05 segundo. Portanto, após 1 minuto terá feito

$$\frac{60}{0,05} = 1200 \text{ ciclos.}$$

P51) É uma pesquisa, portanto, *pesquise*!

Apêndice – Questionários Avaliativos

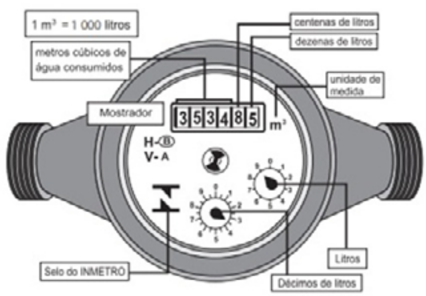
A sequência de questionários apresentada a seguir constituiu um instrumento de avaliação no curso de Fundamentos de Matemática (MAT01115) em 2018/1. Entende-se que tais problemas sejam úteis e possam ser usados em momentos de discussão e construção de conceitos matemáticos à luz dos assuntos debatidos ao longo dos módulos apresentados no material. Aqui as respostas serão apresentadas sem a resolução, porém caso o leitor tenha interesse pode me contatar. Será ótimo conversar sobre os problemas propostos!

QUESTIONÁRIO 1

Problema 1:

Problema retirado da prova do ENEM 2012:

Os hidrômetros são marcadores de consumo de água em residências e estabelecimentos comerciais. Existem vários modelos de mostradores de hidrômetros, sendo que alguns deles possuem uma combinação de um mostrador e dois relógios de ponteiro. O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em m³, e os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Um dos relógios de ponteiros indica a quantidade em litros, e o outro em décimos de litros, conforme ilustrados na figura a seguir.



Disponível em: www.aguasdearacoiaba.com.br (adaptado).

Considerando as informações indicadas na figura, o consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a

A 3 534,85.
B 3 544,20.
C 3 534 850,00.
D 3 534 859,35.
E 3 534 850,39.

[Resposta correta “D”]

Problema 2:

Numa festa ocorrida com a turma do nono ano de uma escola notou-se que a razão do número das meninas e dos meninos era

$$\frac{2}{3}$$

Sabe-se que a turma tem um total de 50 estudantes. Qual o número de meninas e meninos, respectivamente, da turma?

a) 20 e 30.

b) 30 e 20.

c) 40 e 10.

d) 15 e 25.

e) 39 e 11.

[Resposta correta “A”]

Problema 3:

Dados os intervalos numéricos definidos a partir dos conjuntos $A=\{x\in R/-1\le x\le 5\}$ e $B=\{x\in R/0\le x\le 10\}$, qual dos intervalos numéricos a seguir representa $A\cap B$?

a) $A\cap B=[0;5)$

b) $A\cap B=[0;5]$

c) $A\cap B=[-1;10]$

d) $A\cap B=(0;5]$

e) $A\cap B=[5;10]$

[Resposta correta “D”]

Problema 4:

Qual o resultado da seguinte expressão numérica

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{2}-\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{10}{3}\right)-\frac{7/6}{14/3}=?$$

a) $\frac{65}{17}$

b) $\frac{263}{60}$

c) $-\frac{65}{17}$

d) $-\frac{60}{263}$

e) $-\frac{263}{60}$

[Resposta correta “B”]

Problema 5:

Em um zoológico observa-se que a razão do número de elefantes para o número de macacos é

$$\frac{1}{10}$$

a razão do número de macacos para o número de leões é

$$\frac{10}{3}$$

e a razão do número de leões para o número de zebras é

$$\frac{3}{7}$$

Sabendo que o número total de elefantes, macacos, leões e zebras nesse zoológico é 105, qual a quantidade de **zebras** no zoológico?

a) 25

b) 30

c) 35

d) 40

e) 50

[Resposta correta “C”]

Problema 6:

Qual dos seguintes números é um **número não racional**?

a) $\frac{7}{6}$

b) 12

c) $-\frac{7}{5}$

d) $\sqrt{25}$

e) $\sqrt{7}$

[Resposta correta “E”]

Problema 7:

Observe o seguinte intervalo numérico.

Qual das alternativas representa o intervalo numérico da imagem anterior?

a) $\left[-2;3\right)$

b) $\left[-2;3\right]$

c) $\left(-2;3\right)$

d) $\left(-2;3\right]$

e) R

[Resposta correta “D”]

Problema 8:

Qual o resultado da seguinte expressão numérica
$0,67+0,0021-0,03+7,5101=?$

a) 8,1522

b) – 8,1522

c) 8,1822

d) – 8,1822

e) 8,001822

[Resposta correta “A”]

Problema 9:

Um suco da marca X vem acomodado em embalagens (latas) com a capacidade de armazenar 350 ml. Quantas latas são necessárias para se obter a quantidade de 17,5 litros de suco da marca X?

a) 10 latas.

b) 20 latas.

c) 30 latas.

d) 40 latas.

e) 50 latas.

[Resposta correta "E"]

Problema 10:

Em uma compra diária para a cozinha de um restaurante, durante uma visita à feira do bairro foram observadas as seguintes relações entre as massas (peso em quilogramas) dos alimentos:

i) razão "massa de cebola/massa de batata":

$$\frac{2}{5}$$

ii) razão "massa de tomate/massa de maçã":

$$\frac{4}{7}$$

iii) razão “massa de batata/massa de tomate”:

$$\frac{5}{4}$$

Sabendo que foram comprados 54 kg em produtos (cebola, batata, tomate, maçã), as quantidades em quilogramas de cebola, batata, tomate e maçã comprados são, respectivamente:

a) 6, 15, 12, 21.

b) 7, 14, 13, 20.

c) 10, 10, 10, 24.

d) 15, 12, 21, 6.

e) 3, 15, 15, 21.

[Resposta correta “A”]

QUESTIONÁRIO 2

Problema 1:

Problema retirado da prova da UFRGS 2018:

32. Para o Censo escolar realizado pelo INEP, cada escola é identificada por sua localização como urbana, rural e diferenciada. Entre as de localização diferenciada, são identificados os tipos de escolas que estão representados no gráfico a seguir.

Gráfico 4. Número de escolas de educação básica por localização diferenciada - Brasil 2016

Disponível em:
<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/notas_estatisticas/2017/notas_estatisticas_censo_escolar_da_educacao_basica_2016.pdf>.
Acesso em: 22 set. 2017.

Sobre o número de escolas de educação básica representadas no gráfico acima, é correto afirmar que

(A) o número de escolas em terras indígenas supera o número de escolas em áreas remanescentes de quilombos, em mais de 50%.

(B) o número total de escolas situadas em localização diferenciada no Brasil, em 2016, não ultrapassa 11000 escolas.

(C) o percentual de escolas em áreas remanescentes de quilombos está entre 15% e 25% do total de escolas situadas em localização diferenciada.

(D) apenas 4% do total de escolas estão localizadas em unidades de internação socioeducativa.

(E) a quantidade de escolas em unidades prisionais representa a décima parte da quantidade de escolas localizadas em áreas de assentamento.

Fonte: http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/baixar-provas/HISMAT.pdf. Acesso em: jul. 2018

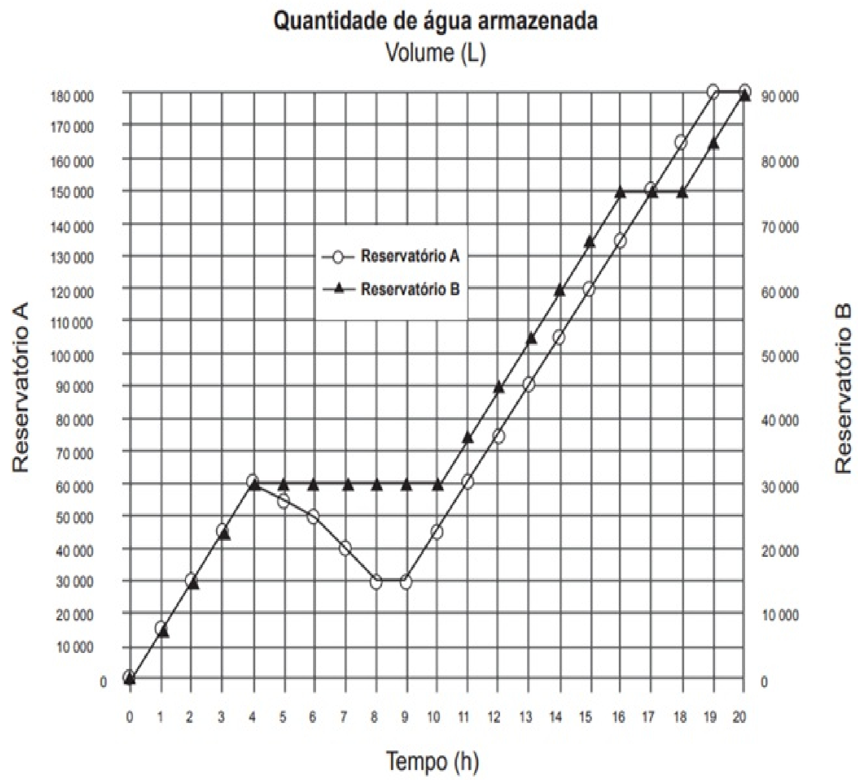
[Resposta correta “C”]

Problema 2:

Problema retirado da prova do ENEM 2017:

QUESTÃO 166

Dois reservatórios A e B são alimentados por bombas distintas por um período de 20 horas. A quantidade de água contida em cada reservatório nesse período pode ser visualizada na figura.



O número de horas em que os dois reservatórios contêm a mesma quantidade de água é

A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

[Resposta correta “A”]

Problema 3:

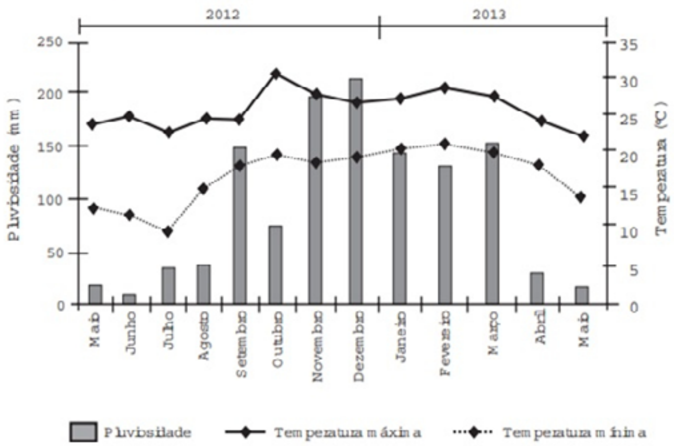
Problema retirado da prova do ENEM 2016:

QUESTÃO 162

O cultivo de uma flor rara só é viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

- a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;
- a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15 °C;
- ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5 °C na temperatura máxima.

Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.



Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara.

O mês escolhido para o plantio foi

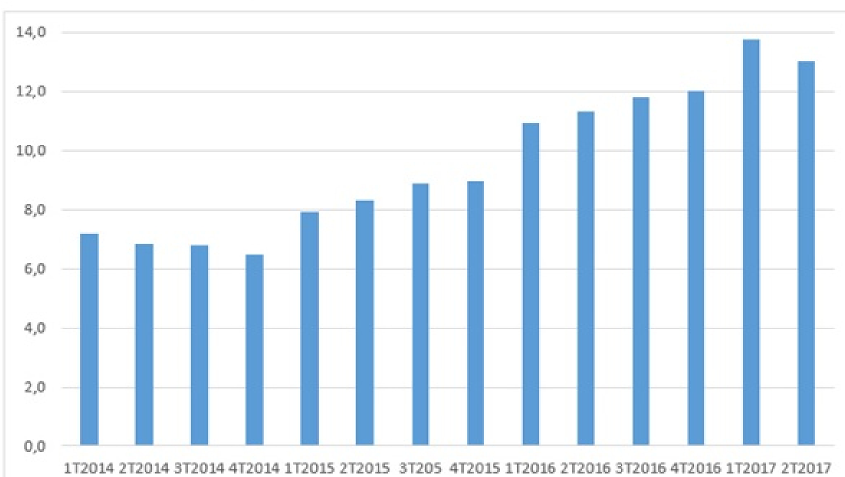
A) janeiro.
B) fevereiro.
C) agosto.
D) novembro.
E) dezembro.

[Resposta correta "A"]

Problema 4:

Observe o gráfico abaixo. Ele mostra a evolução da taxa de desemprego durante um período de tempo, mais especificamente do primeiro trimestre de 2014 até o segundo trimestre de 2017. Por observação das informações no gráfico mostradas é possível perceber, por exemplo, que as taxas de desemprego nos dois primeiros trimestres apresentados no gráfico tiveram uma queda de aproximadamente um ponto percentual. Com isso, a partir do gráfico apresentado a seguir, pode-se afirmar que em _____ períodos trimestrais (sequenciais) houve um *aumento* de aproximadamente 2 pontos percentuais na taxa de desemprego.

Gráfico 1: Evolução da taxa de desemprego



Fonte: Elaboração própria a partir da PNADC (Dados Agregados Mensais) do IBGE.

Fonte: https://blogdoibre.fgv.br/posts/avanco-da-subocupacao-reforca-projecao-de-retoma-da-lenta-do-mercado-de-trabalho. Acesso em: jul. 2018.

O número de períodos em que ocorreu o crescimento aproximado de dois pontos percentuais, que preenche corretamente a lacuna do parágrafo anterior, é:

a) 7

b) 6

c) 5

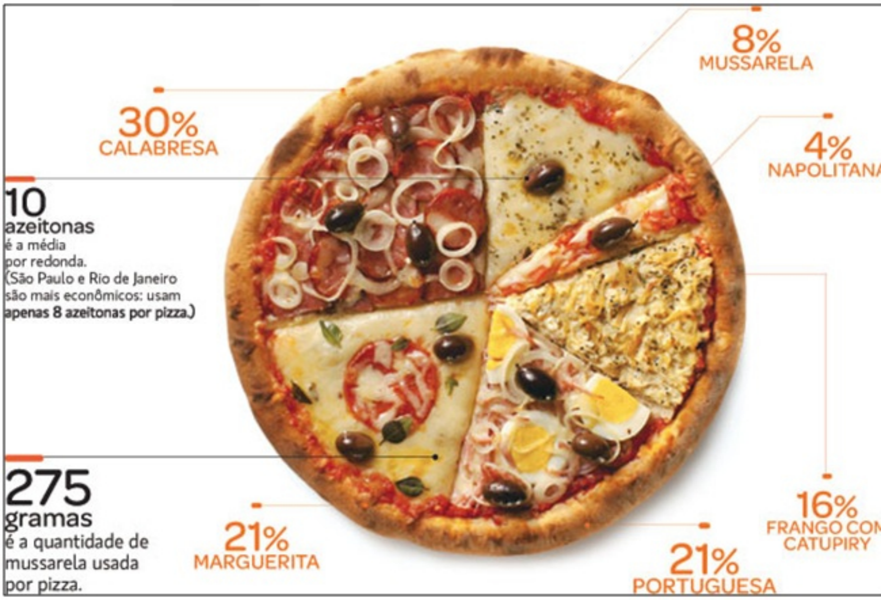
d) 4

e) 3

[Resposta correta “E”]

Problema 5:

Observe o seguinte gráfico (*literalmente falando...*) de pizza. No *site* em que esse gráfico foi obtido, consta que: “*Há 50 mil pizzarias no Brasil, entre estabelecimentos formais e informais. Metade delas fica em São Paulo, seguida por Rio de Janeiro, Rio Grande do Sul, Minas Gerais e Bahia. Cada cidade tem suas preferências, mas montamos a redonda ideal, definida a partir dos sabores mais pedidos nos restaurantes de todo o Brasil, neste gráfico de pizza de pizzas.*”



Fonte: https://blog.drall.com.br/grafico-de-pizza. Acesso em: jul. 2018.

Considere que o gráfico anterior mostra a média mensal de pizzas "pedidas" e que em cada uma das 50 mil pizzarias sejam elaboradas e consumidas 1000 pizzas por mês. Quantas azeitonas, em média, são utilizadas mensalmente na produção de pizzas de *calabresa*?

a) 130.000.000

b) 150.000.000

c) 170.000.000

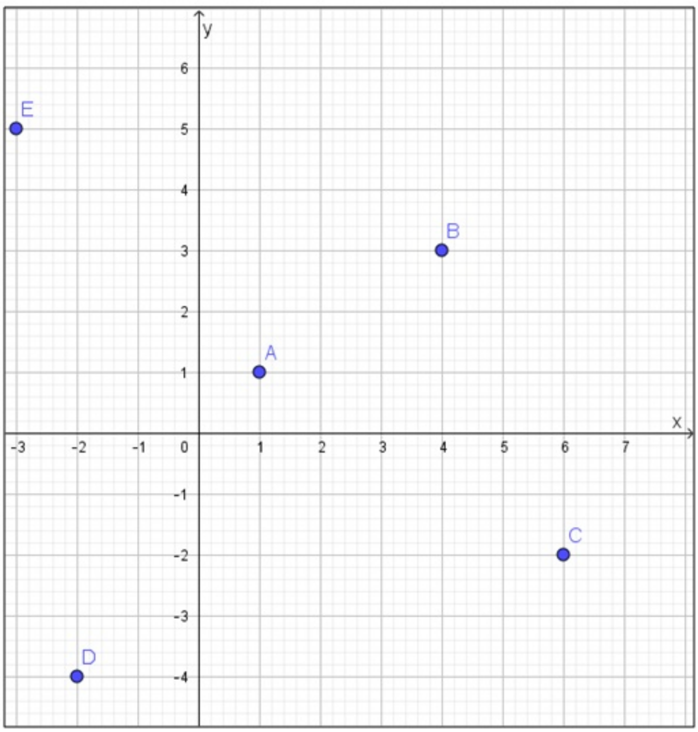
d) 190.000.000

e) 210.000.000

[Resposta correta "B"]

Problema 6:

Considere a figura a seguir que mostra a localização dos pontos A, B, C, D e E no plano cartesiano. Pode-se afirmar que as *abscissas* dos pontos A, B, C, D e E são respectivamente:



a) 1, 4, 6, -2 e -3.

b) 1, 3, -2, -4 e 5.

c) -3, -2, 1, 4 e 6.

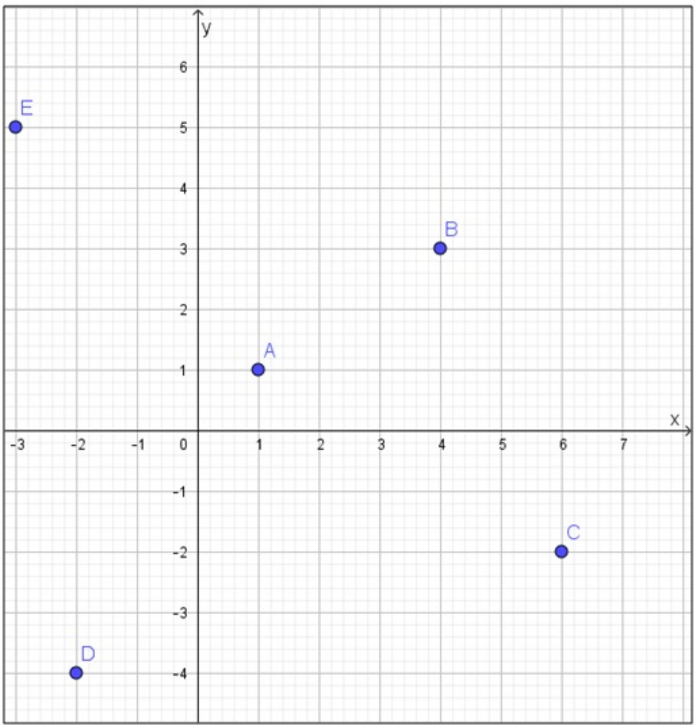
d) 1, -2, -3, 4 e 6

e) 7, 5, 3, 1 e 0.

[Resposta correta "A"]

Problema 7:

Considere a figura a seguir que mostra a localização dos pontos A, B, C, D e E no plano cartesiano (é a mesma figura do problema anterior). Pode-se afirmar que as *ordenadas* dos pontos A, B, C, D e E são respectivamente:



a) 1, 4, 6, -2 e -3.

b) -3, -2, -1, 0 e 1.

c) 1, 3, -2, -4 e 5.

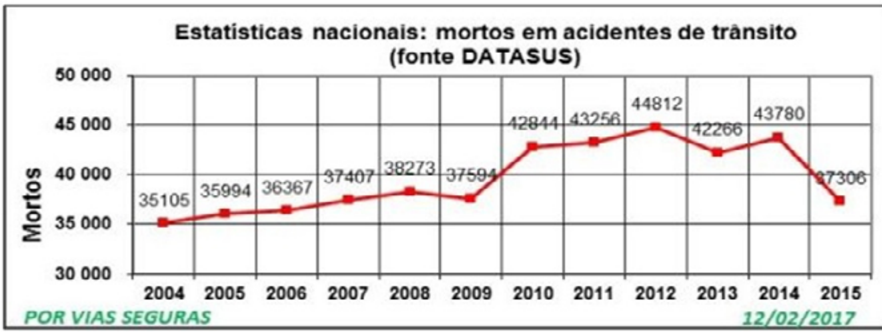
d) 5, -4, -2, 3 e 1.

e) 6, 5, 4, 3 e 2.

[Resposta correta “C”]

Problema 8:

O gráfico a seguir mostra as estatísticas nacionais para o número de mortos em acidentes de trânsito (no Brasil) no período compreendido entre 2004 e 2015.



Fonte: http://www.vias-seguras.com/os_acidentes/estatisticas/estatisticas_nacionais. Acesso em: jul. 2018.

A partir das informações mostradas, pode-se inferir que as variáveis *independente* e *dependente* são, respectivamente:

a) número de mortos e tempo (anos).

b) número de mortos e trânsito.

c) DATASUS e tempo (anos).

d) tempo (anos) e DATASUS.

e) tempo (anos) e número de mortos.

[Resposta correta “E”]

Problema 9:

O gráfico a seguir mostra as estatísticas nacionais para o número de mortos em acidentes de trânsito (no Brasil) no período compreendido entre 2004 e 2015. (É o mesmo gráfico do problema anterior.)

Fonte: http://www.vias-seguras.com/os_acidentes/estatisticas/estatisticas_nacionais. Acesso em: jul. 2018.

Dentre os períodos mostrados no gráfico anterior, aquele que teve um *maior aumento percentual* no número de mortos foi entre:

a) 2009 e 2010.

b) 2010 e 2011.

c) 2011 e 2012.

d) 2012 e 2013.

e) 2013 e 2014.

[Resposta correta “A”]

Problema 10:

A partir da lei de cada uma das funções a seguir, pode-se dizer que o conjunto domínio de cada uma delas é respectivamente:

$f(x)=\dfrac{2}{-x+12}$	$g(x)=\sqrt[3]{2x-4}$	$h(x)=\sqrt{\dfrac{7}{x-1}}$

a) $D(f)=\{x\in R \,/\, x=12\}$
$D(g)=\{x\in R \,/\, x>2\}$
$D(h)=\{x\in R \,/\, x=1\}$

b) $D(f)=\{x\in R \,/\, x<12\}$
$D(g)=\{x\in R \,/\, x=2\}$
$D(h)=\{x\in R \,/\, x<1\}$

c) $D(f)=\{x\in R \,/\, x=12\}$
$D(g)=\{x\in R \,/\, x>2\}$
$D(h)=\{x\in R \,/\, x=1\}$

d) $D(f)=\{x\in R \,/\, x\neq 12\}$
$D(g)=\{x\in R\}$
$D(h)=\{x\in R \,/\, x>1\}$

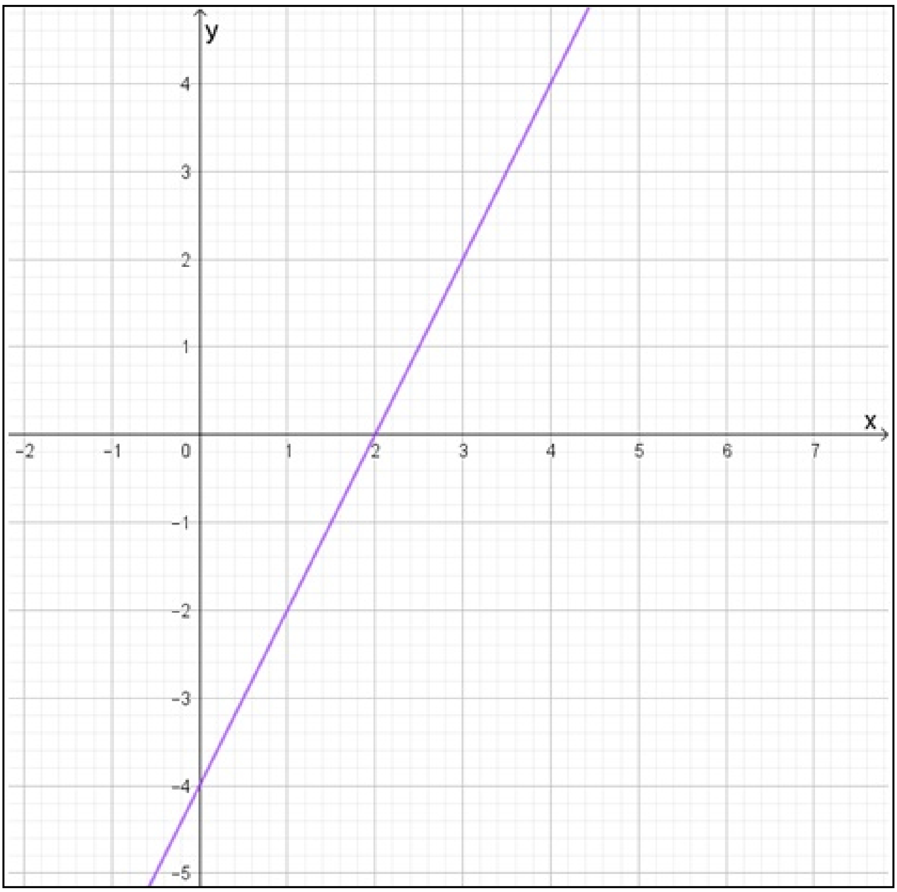
e) $D(f)=\{x\in R\}$
$D(g)=\{x\in R\}$
$D(h)=\{x\in R\}$

[Resposta correta “D”]

QUESTIONÁRIO 3

Problema 1:

O esboço do gráfico da função $f(x) = a.x + b$ está representado na figura a seguir. O sinal dos coeficientes "a" e "b" são, respectivamente:



a) positivo, positivo.

b) negativo, negativo.

c) positivo, negativo.

d) negativo, positivo.

e) impossível determinar sem conhecer especificamente a lei da função $f(x) = a.x + b$.

[Resposta correta “C”]

Problema 2:

O “zero” da função $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{6}{5}$ é:

a) $-\frac{2}{3}$

b) $\frac{6}{5}$

c) 0

d) $\frac{9}{5}$

e) $-\frac{9}{5}$

[Resposta correta “D”]

Problema 3:

No estudo do módulo III, em um dos exercícios propostos, foi mencionado que

$$N(x) = \frac{5x + 28}{4}$$

é uma relação que pode ser usada para determinar o "número do calçado" a partir do comprimento do pé (em centímetros). Uma pessoa que tem um calçado "tamanho 44", por meio da relação $N(x)$, tem o comprimento do pé com aproximadamente:

a) 29

b) 29,6

c) 30

d) 30,6

e) 31

[Resposta correta "B"]

Problema 4:

Problema retirado da prova da UFRGS 2018:

30. Para produzir determinado tipo de tecido, uma fábrica gasta R$ 2,20 por metro. Além disso, há uma despesa fixa de R$ 2.500,00, independente da quantidade de metros produzidos. Se cada metro do tecido é vendido por R$ 4,00, o número mínimo de metros no qual a fábrica passa a ter lucro com a venda é

(A) 1388.

(B) 1389.

(C) 1390.

(D) 1391.

(E) 1392.

[Resposta correta “B”]

Problema 5:

Problema retirado da prova do ENEM 2011:

QUESTÃO 159

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

A) $100n + 350 = 120n + 150$
B) $100n + 150 = 120n + 350$
C) $100(n + 350) = 120(n + 150)$
D) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$
E) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

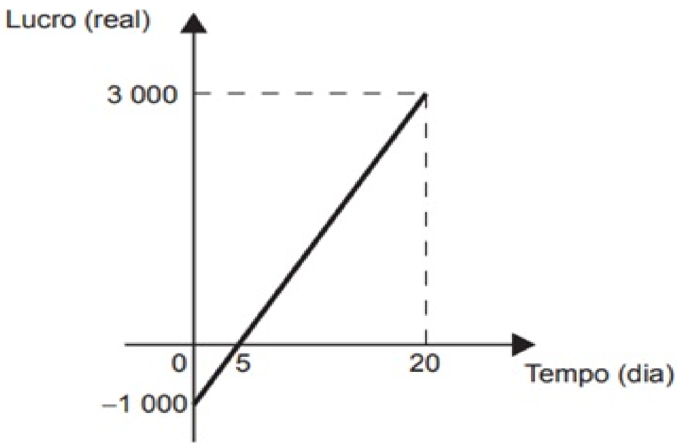
[Resposta correta “A”]

Problema 6:

Problema retirado da prova do ENEM 2017:

QUESTÃO 170

Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.



A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é

- **A** $L(t) = 20t + 3\,000$
- **B** $L(t) = 20t + 4\,000$
- **C** $L(t) = 200t$
- **D** $L(t) = 200t - 1\,000$
- **E** $L(t) = 200t + 3\,000$

[Resposta correta “D”]

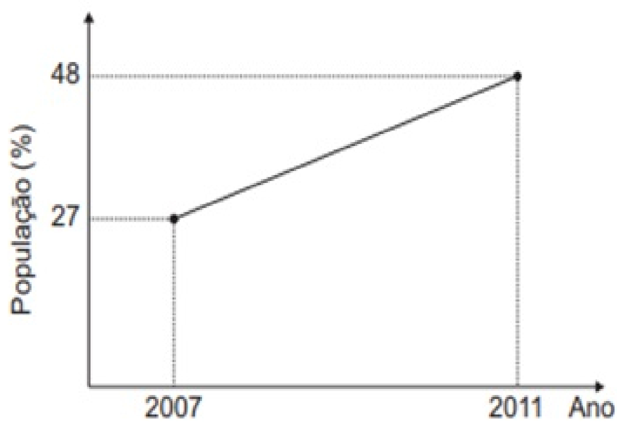
Problema 7:

Problema retirado da prova do ENEM 2016:

QUESTÃO 169

O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico.

Brasileiros conectados à internet



Suponha que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período 2007-2011.

A estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2013 era igual a

A 56,40%.
B 58,50%.
C 60,60%.
D 63,75%.
E 72,00%.

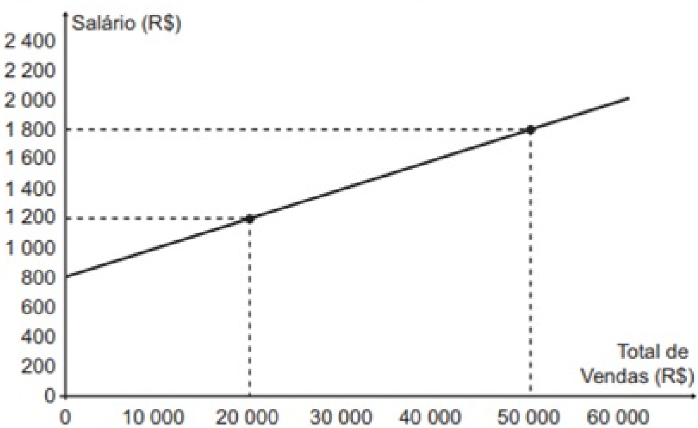
[Resposta correta “B”]

Problema 8:

Problema retirado da prova do ENEM 2015:

QUESTÃO 148

No comércio é comumente utilizado o salário mensal comissionado. Além de um valor fixo, o vendedor tem um incentivo, geralmente um percentual sobre as vendas. Considere um vendedor que tenha salário comissionado, sendo sua comissão dada pelo percentual do total de vendas que realizar no período. O gráfico expressa o valor total de seu salário, em reais, em função do total de vendas realizadas, também em reais.



Qual o valor percentual da sua comissão?

(A) 2,0%

(B) 5,0%

(C) 16,7%

(D) 27,7%

(E) 50,0%

[Resposta correta "A"]

Problema 9:

Em uma loja de produtos naturais, um vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte forma: ele ganha um valor fixo de R$1000,00 mais uma comissão de R$2,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 200 produtos, sua comissão passa a ser de R$5,00 para cada produto vendido, a partir do 201° produto vendido. Qual a lei/função que representa o salário desse vendedor em termos da quantidade *x* de produtos vendidos?

a) $f(x)=\begin{cases} 1400+5(x-200) & se \quad 0\le x\le 200 \\ 1000+2x & se \quad x>200 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2000+2x & se \quad 0\le x\le 200 \\ 2000+5x & se \quad x>200 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 1000+2x & se \quad 0\le x\le 200 \\ 1400+5(x-200) & se \quad x>200 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2000x & se \quad 0\le x\le 200 \\ 5000(x-200) & se \quad x>200 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 2x & se \quad 0\le x\le 200 \\ 5(x-200) & se \quad x>200 \end{cases}$

[Resposta correta “C”]

Problema 10:

Duas empresas de transporte tarifam seus preços para o aluguel de carros de acordo com a tabela a seguir:

Empresa	Valor (R$) fixo	R$ por Km percorrido
A	R$200,00	R$1,50
B	R$400,00	R$0,50

A partir de quantos quilômetros, no mínimo, "alugar um carro" na empresa B é mais vantajoso do que "alugar um carro" na empresa A?

a) 100 km

b) 200 km

c) 300 km

d) 400 km

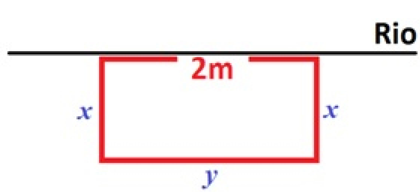
e) 500 km

[Resposta correta "B"]

QUESTIONÁRIO 4

Problema 1:

De modo a criar seus ovinos com segurança, um pastor precisa construir um cercado retangular conforme mostrado na figura abaixo. Para as ovelhas terem acesso ao rio que passa pela fazenda em um dos lados do cercado será deixada uma passagem com dois metros de largura. A imagem a seguir ilustra a situação.



Sabe-se que o pastor dispõe de 300 metros de cerca para construir o cercado para as ovelhas. Neste caso, qual a lei da função que representa a área do cercado?

a) $A(x) = 151x - x^2$

b) $A(x) = 150x - x^2$

c) $A(x) = x - x^2$

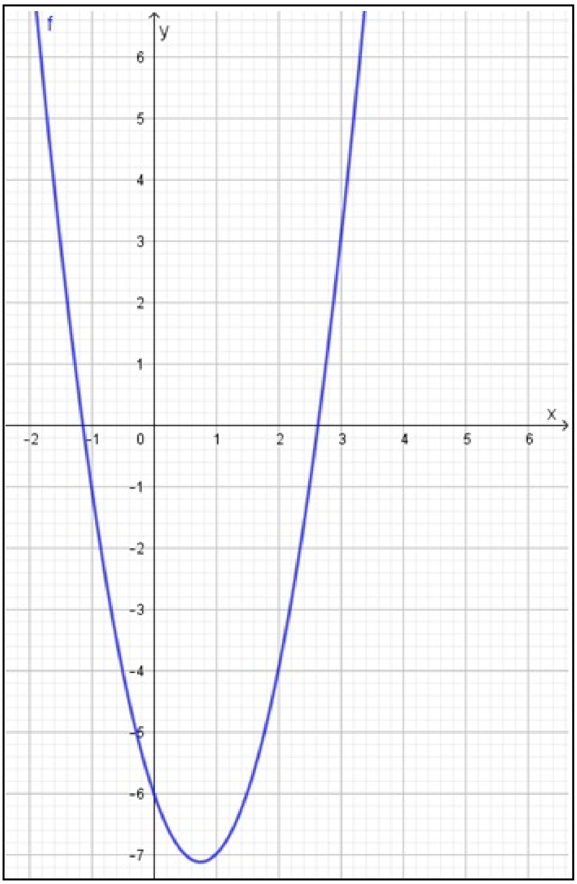
d) $A(x, y) = 2xy$

e) $A(x, y) = yx^2$

[Resposta correta "A"]

Problema 2:

O gráfico abaixo representa uma função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$. Neste caso, os sinais dos coeficientes "a", "b" e "c" são respectivamente:



a) positivo, positivo, negativo.

b) negativo, negativo, negativo.

c) positivo, positivo, positivo.

d) negativo, negativo, positivo.

e) positivo, negativo, negativo.

[Resposta correta "E"]

Problema 3:

A partir da técnica do "completamento de quadrados", a forma equivalente do trinômio $3x^2 - 6x + 5$ é:

a) $3(x+1)^2 + 2$

b) $3(x-1)^2 - 2$

c) $3(x-1)^2 + 2$

d) $3(x+1)^2 - 2$

e) $3(x-2)^2 + 1$

[Resposta correta "C"]

Problema 4:

Os zeros da função quadrática $f(x) = 4x^2 - 8x - 60$ são:

a) 5 e 3.

b) -5 e 3.

c) -5 e -3.

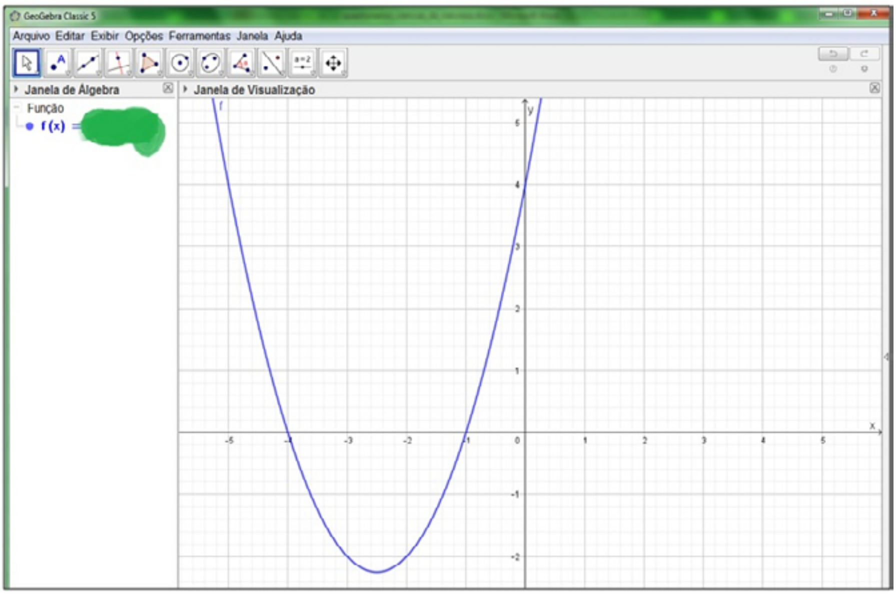
d) 5 e -3.

e) nenhuma das respostas anteriores.

[Resposta correta "D"]

Problema 5:

Ao construir no GeoGebra o esboço do gráfico de uma função quadrática, obteve-se o seguinte resultado:



Neste caso, a lei da função $f(x)$ é:

a) $f(x) = -x^2 - 5x - 4$

b) $f(x) = x^2 + 5x + 4$

c) $f(x) = -x^2 - 5x + 4$

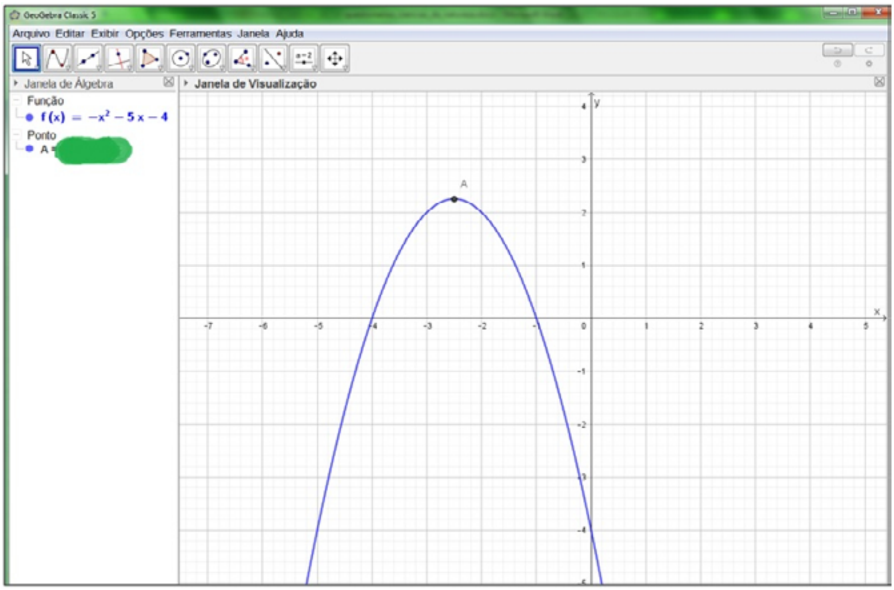
d) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

e) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

[Resposta correta “B”]

Problema 6:

Na imagem a seguir, o ponto A é o ponto de máximo do gráfico da função quadrática esboçada.



As coordenadas do ponto A são:

a) x = -2,5 e y = 2,25

b) x = 2,5 e y = 2,25

c) x = -2,5 e y = -2,25

d) x = 2,5 e y = -2,25

e) nenhuma das respostas anteriores.

[Resposta correta “A”]

Problema 7:

Após ser lançada ao ar, a altura em relação à horizontal de uma bola pode ser descrita pela função quadrática $h(t) = -15t^2 + 30t$. A variável "t" representa o instante de tempo (em segundos) em que o objeto está a uma altura $h(t)$ do chão. Neste caso, a altura máxima e o tempo no qual tal altura é alcançada são respectivamente:

a) 2 metros, 1 segundo.

b) 3 metros, 2 segundos.

c) 5 metros, 1 segundo.

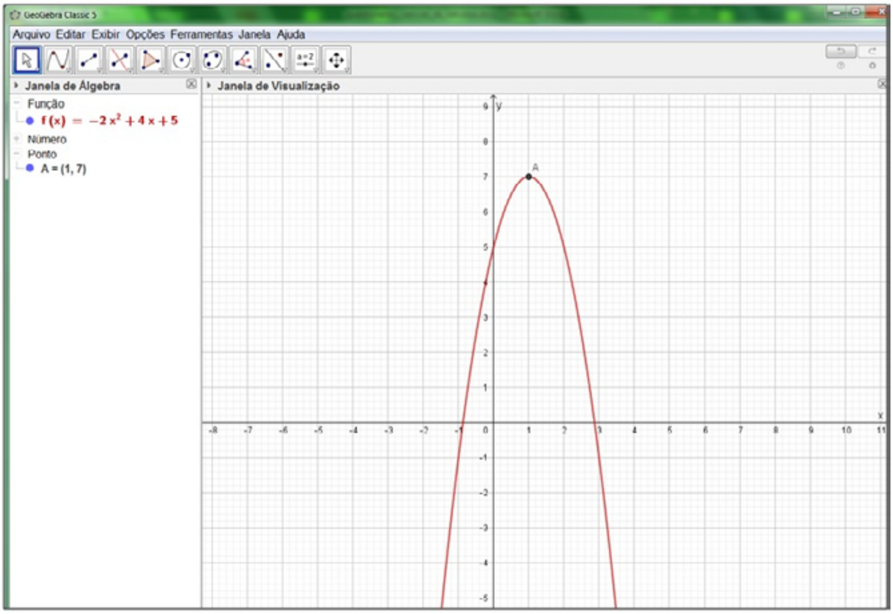
d) 10 metros, 2 segundos.

e) 15 metros, 1 segundo.

[Resposta correta "E"]

Problema 8:

Considere a função $f(x)$ cujo gráfico está esboçado a seguir.



O conjunto imagem da função $f(x)$ esboçada é:

a) $[7;+\infty)$

b) $(-\infty;1]$

c) $(-\infty;7]$

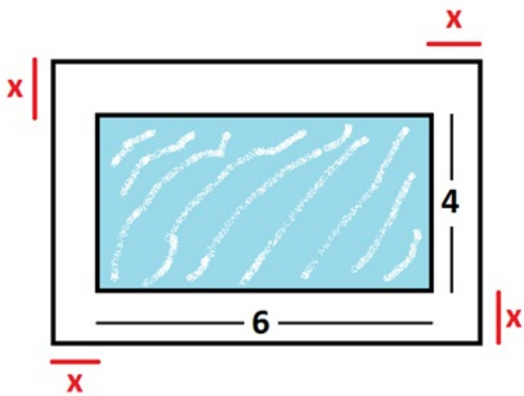
d) $[1;+\infty)$

e) nenhuma das respostas anteriores.

[Resposta correta "C"]

Problema 9:

A vista superior de uma piscina retangular é mostrada na imagem a seguir. Será construída uma calçada de largura constante “x” ao redor da piscina.



Qual deve ser a largura da calçada para que a área total da vista superior seja de $80m^2$?

a) 1 metro.

b) 2 metros.

c) 3 metros.

d) 4 metros.

e) 5 metros.

[Resposta correta “B”]

Problema 10:

"João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$20,00 cada. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía R$1,00 no preço da caixa, vendia quarenta caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?" (Fonte: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/ramon_abreu.pdf)

a) R$13,75

b) R$15,00

c) R$18,75

d) R$20,00

e) R$21,75

[Resposta correta "A"]

QUESTIONÁRIO 5

Problema 1:

Ao resolver a expressão numérica $\left(\dfrac{3^7 \times 9^2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{27}}\right)^3$ obtém-se como resultado:

a) 1

b) 3^{20}

c) 3^{21}

d) 3^{22}

e) 3^{23}

[Resposta correta "B"]

Problema 2:

De acordo com o vídeo “Power of Ten”, cujo link está no material de estudo, a quantidade de “10 anos luz” é equivalente a:

a) 10^{16} metros.

b) 10^{17} metros.

c) 10^{18} metros.

d) 10^{19} metros.

e) 10^{20} metros.

[Resposta correta “B”]

Problema 3:

Uma população inicial de 100 pulgas desenvolve-se e cresce na “Pulgolândia”. O número de pulgas da população sempre “dobra a cada final de mês”. A partir dessa informação, o número de habitantes de “Pulgolândia” pode ser obtido por meio da relação (considere a variável “t” em meses):

a) $P(t) = 100.(2)^t$

b) $P(t) = (2)^t$

c) $P(t) = (200)^t$

d) $P(t) = 2t$

e) $P(t) = 200t$

[Resposta correta “A”]

Problema 4:

A solução da equação exponencial $3^{x-1} = 81$ é:

a) $x = 1$

b) $x = 2$

c) $x = 3$

d) $x = 4$

e) $x = 5$

[Resposta correta "E"]

Problema 5:

A meia-vida de um medicamento ingerido pelo corpo humano obedece à lei $M_V(t) = 1000.(2)^{-t}$, em que a variável "t" indica o número de semanas contadas a partir da ingestão da medicação. A partir de quanto tempo a quantidade inicial de 1000 mg será reduzida a menos de 25% da quantidade inicial?

a) Até o final da primeira semana após a ingestão.

b) Entre o final da primeira semana e o final da segunda semana.

c) Entre o final da segunda semana e o final da terceira semana.

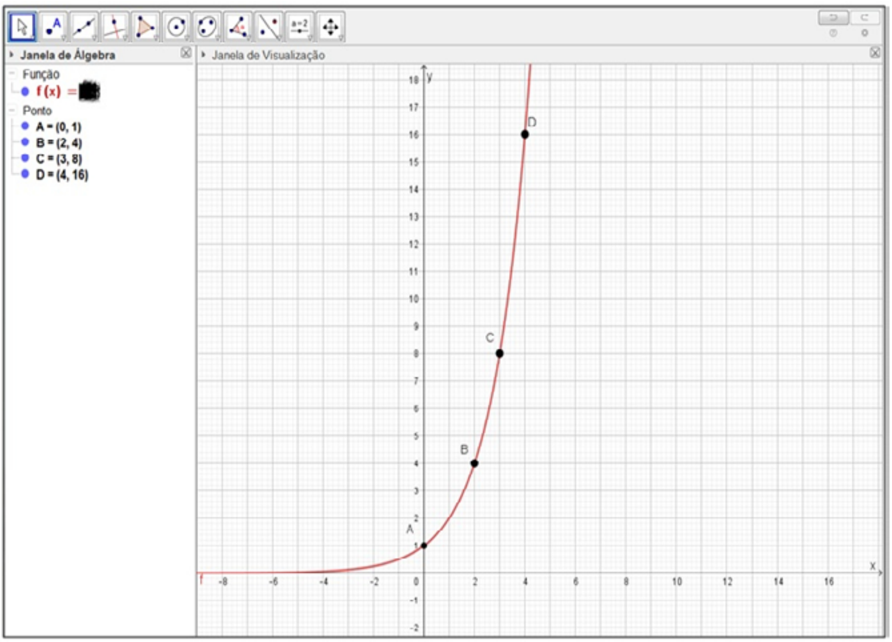
d) Entre o final da terceira semana e o final da quarta semana.

e) Após o início da quinta semana.

[Resposta correta "C"]

Problema 6:

Ao observar o esboço do gráfico da função exponencial abaixo e as coordenadas dos pontos mostrados no gráfico, pode-se afirmar que a lei da função $f(x)$ é:



a) $f(x) = -2^{x}$

b) $f(x) = 2^{-x}$

c) $f(x) = -2^{-x}$

d) $f(x) = 2^{x}$

e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

[Resposta correta “D”]

Problema 7:

Um automóvel adquirido "zero quilômetro", cujo valor pago foi de R$50000,00, deprecia-se 2% a cada semestre. Neste caso, o valor que este automóvel terá, a partir da data de compra, ao final de três anos será:

a) R$44000,00

b) R$44292,11

c) R$45000,00

d) R$45292,11

e) R$46367,89

[Resposta correta "B"]

Problema 8:

Um imóvel adquirido na planta valoriza 2% a cada ano. O preço do imóvel na planta é de R$400.000,00. Neste caso, a função $V(t)$ que expressa o valor corrente do imóvel ao longo do tempo ("t" em anos) é:

a) $V(t) = 400000.\left(\dfrac{2}{100}\right)^t$

b) $V(t) = 400000.(0,98)^t$

c) $V(t) = 400000.\left(1+\dfrac{2}{100}\right)^t$

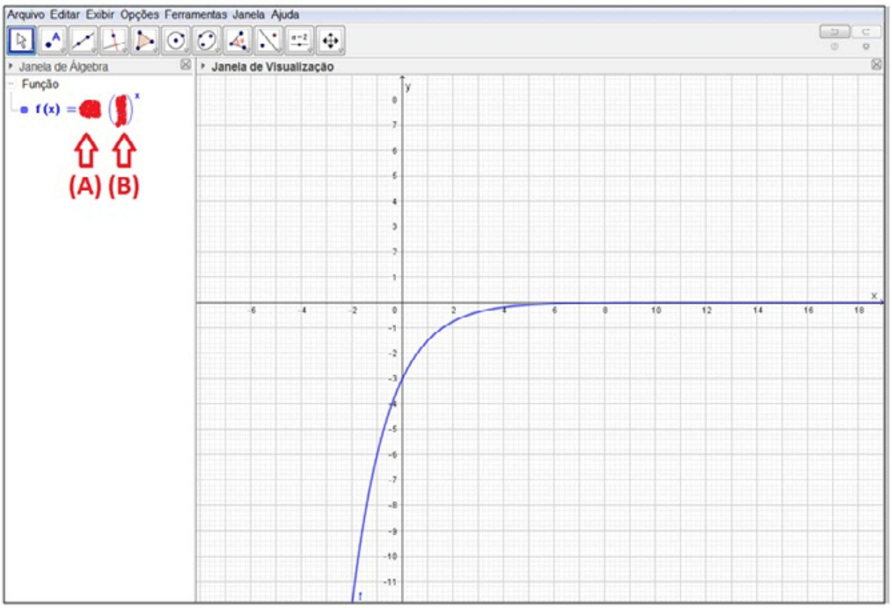
d) $V(t) = 400000.(2t)$

e) $V(t) = 400000.\left(\dfrac{2}{100}t\right)$

[Resposta correta "C"]

Problema 9:

A partir do esboço do gráfico da função $f(x)$ a seguir, pode-se afirmar que o "sinal" dos números indicados por (A) e (B) são, respectivamente:



a) negativo, positivo.

b) positivo, positivo.

c) negativo, negativo.

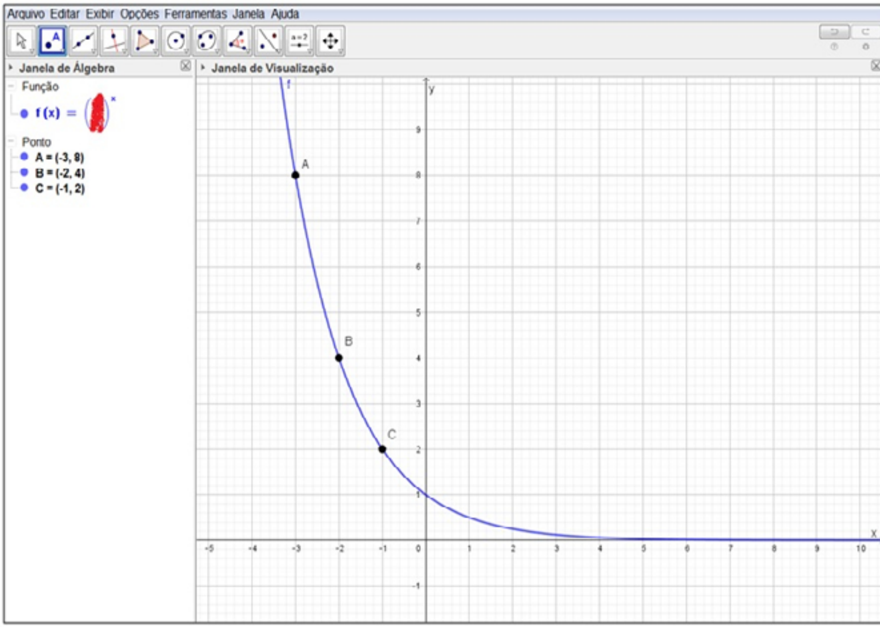
d) positivo, negativo.

e) impossível de determinar sem saber quais sejam os números.

[Resposta correta "A"]

Problema 10:

A partir do esboço do gráfico da função $f(x)$ a seguir, pode-se afirmar que o valor numérico de $f(100)$ seja:



a) 100^{-2}

b) 200

c) 100^{2}

d) 2^{100}

e) 2^{-100}

[Resposta correta "E"]

QUESTIONÁRIO 6

Problema 1:

O valor de $\log_3(59049)$ é:

a) 8

b) 9

c) 10

d) 11

e) 12

[Resposta correta "C"]

Problema 2:

Sabendo os valores aproximados de $\log(2) \approx 0,3$ e $\log(3) \approx 0,47$, a melhor aproximação para o valor de $\log(60)^3$ é:

a) 4,81

b) 4,91

c) 5,11

d) 5,21

e) 5,31

[Resposta correta "E"]

Problema 3:

Sabendo o valor aproximado $\log(2) \approx 0,3$, pode-se afirmar que a melhor aproximação para $\log(5)$ seja:

a) 0,7

b) 0,6

c) 0,5

d) 0,4

e) 0,3

[Resposta correta "A"]

Problema 4:

Problema retirado da prova da UFRGS 2018:

37. Leia o texto abaixo, sobre terremotos.

Magnitude é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto. Ela está relacionada com a energia sísmica liberada no foco e também com a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos. Para cobrir todos os tamanhos de terremotos, desde os microtremores de magnitudes negativas até os grandes terremotos com magnitudes superiores a 8.0, foi idealizada uma escala logarítmica, sem limites. No entanto, a própria natureza impõe um limite superior a esta escala, já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas da crosta terrestre. Magnitude e energia podem ser relacionadas pela fórmula descrita por Gutenberg e Richter em 1935: $\log(E) = 11,8 + 1,5M$ onde: $E =$ energia liberada em Erg ; M = magnitude do terremoto.

Disponível em: <http://www.iag.usp.br/siae98/terremoto/terremotos.htm>. Acesso em: 20 set. 2017.

Sabendo que o terremoto que atingiu o México em setembro de 2017 teve magnitude 8,2, assinale a alternativa que representa a melhor aproximação para a energia liberada por esse terremoto, em Erg.

(A) 13,3

(B) 20

(C) 24

(D) 10^{24}

(E) 10^{28}

[Resposta correta "D"]

Problema 5:

Um biólogo verificou que o crescimento de uma árvore nativa do Rio Grande do Sul ocorre de acordo com a função $c(t) = 1 + 0,3\log_3\left(t+1\right)$. Neste caso, $c(t)$ representa a altura da árvore em metros e a variável independente "t" representa o mês em que a árvore tenha sido observada. Considere que $c(0)$ seja janeiro de 2018 e também seja o mês em que a árvore tenha sido plantada. A partir desse contexto, qual a melhor aproximação para a altura da árvore em setembro de 2018?

a) 1,2 metros

b) 1,3 metros

c) 1,4 metros

d) 1,5 metros

e) 1,6 metros

[Resposta correta "E"]

Problema 6:

Considerando ainda as informações do problema anterior, qual a altura da árvore na época do seu plantio em janeiro de 2018?

a) 1 metro

b) 1,2 metros

c) 1,3 metros

d) 1,4 metros

e) 1,5 metros

[Resposta correta "A"]

Problema 7:

Ainda sobre o problema do crescimento da árvore, em que mês/ ano a árvore observada pelo biólogo estava com a altura de 1,9 metros?

a) Abril de 2018

b) Agosto de 2019

c) Dezembro de 2019

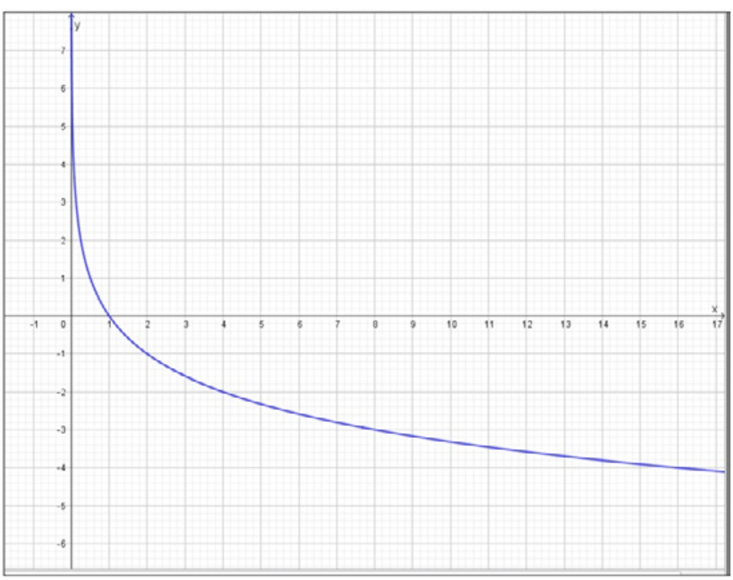
d) Janeiro de 2020

e) Março de 2020

[Resposta correta "E"]

Problema 8:

Ao observar o esboço do gráfico da função logarítmica $f(x) = -\log_a(x)$ abaixo, pode-se afirmar que a base "a" seja:



a) $a = 1$

b) $a > 1$

c) $0 < a < 1$

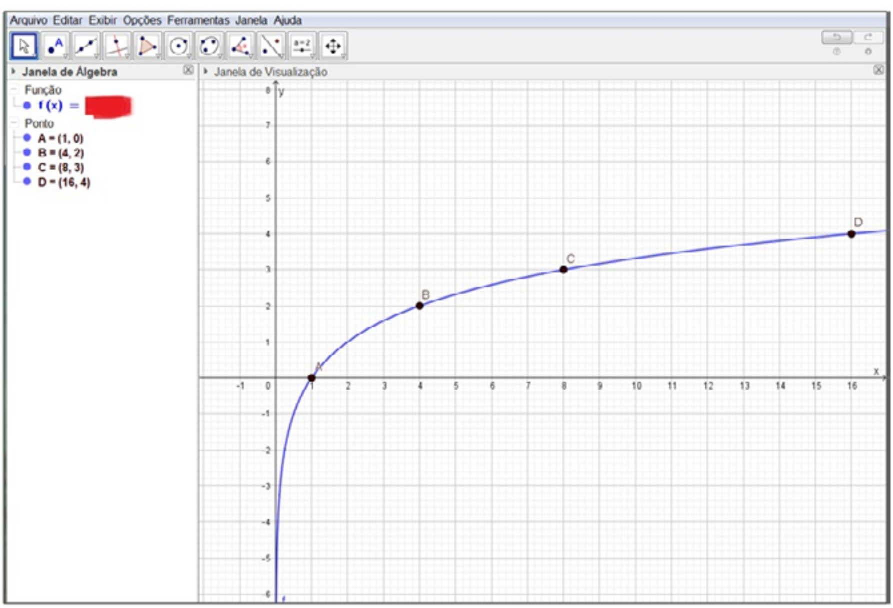
d) $a = 0$

e) impossível de determinar.

[Resposta correta “B”]

Problema 9:

Ao observar o esboço do gráfico da função logarítmica abaixo e as coordenadas dos pontos mostrados no gráfico, pode-se afirmar que a lei da função $f(x)$ é:



a) $f(x) = \log_5(x)$

b) $f(x) = \log_2(x)$

c) $f(x) = \log_3(x)$

d) $f(x) = \log_4(x)$

e) $f(x) = \log_{1/2}(x)$

[Resposta correta “B”]

Problema 10:

Uma barra de ferro sai do forno a uma temperatura de 5000ºC e diminui 5% de sua temperatura a cada 1 hora. Em aproximadamente quantas horas a barra estará com a temperatura de 500ºC?

a) 33,88 horas

b) 39,88 horas

c) 40,88 horas

d) 42,88 horas

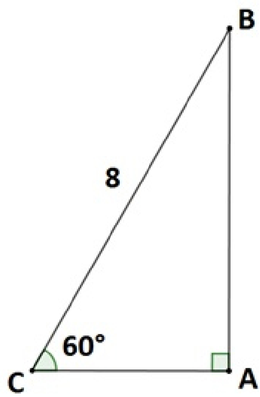
e) 44,88 horas

[Resposta correta “E”]

QUESTIONÁRIO 7

Problema 1:

No triângulo de vértices A, B e C mostrado a seguir, qual a medida do segmento $\overline{AB}$?



a) $3\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{3}$

d) $6\sqrt{3}$

e) $7\sqrt{3}$

[Resposta correta "B"]

Problema 2:

Em radianos, o ângulo de 54º pode ser escrito como:

a) $\frac{2\pi}{9}$

b) $\frac{4\pi}{7}$

c) $\frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{2\pi}{5}$

e) $\frac{3\pi}{10}$

[Resposta correta "E"]

Problema 3:

O intervalo numérico que representa o conjunto imagem da função real de variável real $f(x) = 70 - 20sen(x)$ é:

a) $[-1;1]$

b) $[20;70]$

c) $[50;90]$

d) $[70;140]$

e) R

[Resposta correta "C"]

Problema 4:

O período da função trigonométrica real de variável real $f(x) = 3 + 2\cos\left(4\pi - 5\right)$ é:

a) $\dfrac{\pi}{2}$

b) π

c) 2π

d) 5

e) $\dfrac{\pi}{4}$

[Resposta correta "A"]

Problema 5:

Considere que o avanço $h(t)$ da maré na praia de Torreslândia ocorra em função do tempo "t" (em horas) e seja dado por

$$h(t) = 3 + 2\cos\left(\frac{\pi . t}{4}\right)$$

Nesse contexto, os valores de "cheia" e "vazante" em Torreslândia são respectivamente:

a) 1 metro e 5 metros.

b) 2 metros e 4 metros.

c) 3 metros e 3 metros.

d) 4 metros e 2 metros.

e) 5 metros e 1 metro.

[Resposta correta “E”]

Problema 6:

No mesmo contexto da maré exposto no problema anterior, qual o tempo decorrido entre duas etapas de “cheia” sucessivas da maré?

a) 6 horas

b) 7 horas

c) 8 horas

d) 5 horas

e) 4 horas

[Resposta correta “C”]

Problema 7:

Em uma roda gigante, a altura $A(t)$ de um ponto em relação à horizontal é calculada pela relação

$$A(t) = 28 - 25\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

na qual a variável “t” é informada em minutos. As alturas “máxima” e “mínima” alcançadas por um ponto P na roda gigante são respectivamente:

a) 53 e 3 metros

b) 54 e 4 metros

c) 55 e 5 metros

d) 56 e 6 metros

e) 57 e 7 metros

[Resposta correta “A”]

Problema 8:

No mesmo contexto da roda gigante exposto no problema anterior, qual o tempo decorrido para o ponto P percorrer uma volta completa?

a) 2 minutos

b) 3 minutos

c) 4 minutos

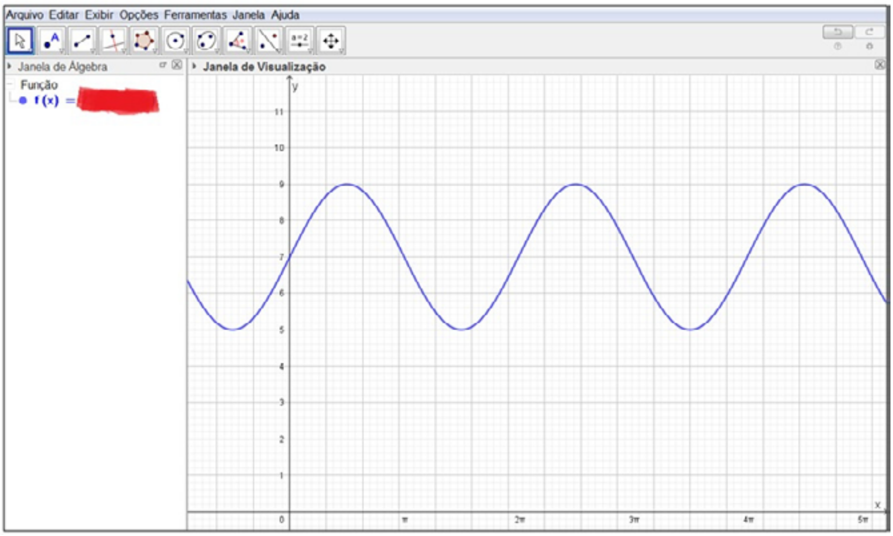
d) 1 minuto

e) 30 segundos

[Resposta correta “C”]

Problema 9:

Ao observar o esboço do gráfico da função trigonométrica abaixo, pode-se afirmar que a lei da função $f(x)$ é:



a) $f(x) = 7 - 2\,\text{sen}(x)$

b) $f(x) = 2 + 7\,\text{sen}(x)$

c) $f(x) = -2 - 7\,\text{sen}(x)$

d) $f(x) = 7 + 2\,\text{sen}(x)$

e) $f(x) = \text{sen}(x)$

[Resposta correta “D”]

Problema 10:

O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro. Considere que em um instante “t”, em segundos, a altura $h(t)$ do pistão, em centímetros, seja descrita por

$$h(t) = 10 + 10\cos\left(\frac{\pi.t}{0{,}012}\right)$$

Após funcionar durante um minuto, qual o número de ciclos completos realizado pelo pistão?

a) 20

b) 120

c) 10

d) 2000

e) 2500

[Resposta correta “E”]

Referências

CARMO, M. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Trigonometria e números complexos**. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2005.

DOERING, C. I.; DOERING, L. R.. **Pré-cálculo**. Porto Alegre: UFRGS, 2007/2008.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2016.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do Ensino Médio**. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2016.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.. **A matemática do Ensino Médio**. v. 2. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2016.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.. **A matemática do Ensino Médio**. v. 3. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2016.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.. **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2005/2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.. **Temas e problemas elementares**. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2005/2006.

Sobre o Autor

Rodrigo Sychocki da Silva é licenciado em Matemática (2007), mestre em Ensino de Matemática (2012) e doutor em Informática na Educação (2015) pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Atualmente é professor Adjunto-A do Departamento de Matemática Pura e Aplicada (DMPA) do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da UFRGS, com atuação em disciplinas do DMPA. É professor/orientador credenciado à Pós-Graduação em Ensino de Matemática (Profissional – conceito CAPES 5/2016 e Acadêmico – conceito CAPES 3/2016). Foi professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) – Campus Caxias do Sul de agosto/2011 até julho/2016 com atuação em cursos de nível básico e superior. As áreas de interesse e pesquisa são: tecnologia informática no ensino e aprendizagem da matemática, contribuições das teorias cognitivas para a aprendizagem da matemática, modelagem matemática com uso da tecnologia informática.

Contato: rodrigo.sychocki@ufrgs.br

Lattes: http://lattes.cnpq.br/3454823175359548