



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

ESTIMAÇÃO E PREVISÃO DE PROCESSOS

k-Factor GARMA

Monografia

Aishameriane Venes Schmidt

Porto Alegre, 04 de dezembro de 2009.

Monografia submetida por Aishameriane Venes Schmidt como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Estatística pelo Programa de Bacharelado em Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Cleber Bisognin

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann

Data da Defesa: 15 de dezembro de 2009.

ÍNDICE

Introdução	4
1 Processos Fracionários com Longa Dependência	6
1.1 Polinômios de Gegenbauer	8
1.2 Processos GARMA	9
1.3 Processos k -Factor GARMA	14
1.4 Causalidade e Invertibilidade	19
1.5 Ergodicidade	24
2 Estimação de parâmetros	26
2.1 Estimação das frequências de Gegenbauer	27
2.1.1 Especificação incorreta de k	28
2.2 Estimação	33
2.2.1 O estimador GPH	33
2.2.2 O estimador BA	35
2.2.3 O Estimador FT	36
2.2.4 O estimador de máxima verossimilhança exato	37
2.3 Tópicos de Regressão	38
3 Previsão	43
4 Simulação	49
4.1 Simulação do processo de Gegenbauer(u, λ)	49
4.2 Simulação de um processo k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) com $k = 5$ e a presença ou não dos termos AR e MA	51
4.3 Presença de Mínimos Locais na Função de Verossimilhança	62
4.4 Vício e variância dos estimadores semiparamétricos de acordo com os valores de α	63
5 Conclusões	67
Referências	69

Apêndice A	73
A.1 Convergência	73
A.2 Estimação da Função Densidade Espectral	74
A.3 Ordens de Aproximação \mathcal{O} e o	77
Apêndice B	79

LISTA DE FIGURAS

1.1	Função densidade espectral dos processos GARMA (p, u, λ, q) , com $\mu = 0$ e $\lambda = 0.2$: (a) $u = 1, p = 0 = q$ e $G = 0$; (b) $u = -1, p = 0 = q$ e $G = \pi$; (c) $u = 0.4, p = 0 = q$ e $G = 0.369\pi$; (d) $u = -0.4, p = 0 = q$ e $G = 0.63\pi$; (e) $u = 0.4, p = 1, q = 0$, com $\phi_1 = 0.8$ e $G = 0.369\pi$; (f) $u = 0.4, p = 1, q = 0$, com $\phi_1 = -0.8$ e $G = 0.369\pi$;	15
1.2	Função densidade espectral dos processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2)$, para $k = 2$ e $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2, 0.2)$, para $k = 3$: (a) $k = 2, \mathbf{u} = (-0.4, 0.8), G_1 = 0.631\pi, G_2 = 0.204\pi$ e $p = 0 = q$; (b) $k = 3, \mathbf{u} = (-0.7, 0.3, 0.9), G_1 = 0.747\pi, G_2 = 0.403\pi, G_3 = 0.143\pi$ e $p = 0 = q$; (c) $k = 2, \mathbf{u} = (-0.4, 0.8), G_1 = 0.631\pi, G_2 = 0.204\pi, p = 1 = q, \phi_1 = 0.8$ e $\theta_1 = 0.5$; (d) $k = 3, \mathbf{u} = (-0.7, 0.3, 0.9), G_1 = 0.747\pi, G_2 = 0.403\pi, G_3 = 0.143\pi, p = 1 = q, \phi_1 = 0.8$ e $\theta_1 = 0.5$	18
2.1	Função periodograma da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ gerada a partir de um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com $\boldsymbol{\lambda} = \{0.4, 0.15\}, \mathbf{u} = \{0.9, 0.2\}, p = 0 = q, n = 2000$	29
2.2	Resíduos da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ diferenciada pelo filtro $(1 - 2\hat{u}_1 B + B^2)^{-\hat{\lambda}_1}$, onde $\hat{\lambda}_1 = 0.3956$ e $\hat{u}_1 = 0.8994$, obtendo assim a série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$: (a) função periodograma; (b) função de autocorrelação amostral.	30
2.3	Resíduos da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ diferenciada pelo filtro $(1 - 2\hat{u}_2 B + B^2)^{-\hat{\lambda}_2}$, onde $\hat{\lambda}_2 = 0.1499$ e $\hat{u}_2 = 0.1990$, obtendo assim a série temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$: (a) função periodograma; (b) função de autocorrelação amostral.	31
2.4	Função periodograma da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ gerada a partir de um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com $\mathbf{u} = (0.9, 0.87), \boldsymbol{\lambda} = (0.45, 0.15), p = 0 = q, n = 2000$	31
2.5	Resíduos da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ diferenciada pelo filtro $(1 - 2\hat{u}_1 B + B^2)^{-\hat{\lambda}_1}$, onde $\hat{\lambda}_1 = 0.5893$ e $\hat{u}_1 = 0.8994$, obtendo assim a série temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$: (a) função periodograma; (b) função de autocorrelação amostral.	32

2.6	Resíduos da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ diferenciada pelo filtro $\prod_{j=1}^2 (1 - 2\hat{u}_j B + B^2)^{-\hat{\lambda}_j}$, onde $\mathbf{u} = (0.8994, 0.8699)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.4499, 0.1499)$, obtendo assim a série temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$: (a) função periodograma; (b) função de autocorrelação amostral.	33
4.1	Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação paramétrica dos parâmetros de um <i>k-Factor</i> GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 1 = q$, $\phi = 0.3$ e $\theta = 0.5$ para $n = 1000$	59
4.2	Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação paramétrica dos parâmetros na série de um <i>k-Factor</i> GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 1 = q$, $\phi = 0.3$, $\theta = 0.5$ e $n = 2000$	60
4.3	Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação paramétrica dos parâmetros na série de um <i>k-Factor</i> GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 0 = q$ e $n = 1000$	60
4.4	Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação paramétrica dos parâmetros na série de um <i>k-Factor</i> GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 0 = q$ e $n = 2000$	61
4.5	Gráfico da Função de Verossimilhança pelo estimador W para o processo <i>k-Factor</i> GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = 0.3$, $\mathbf{u} = 0.6$, $p = 0 = q$, $n = 1000$	62
4.6	Gráfico da Função de Verossimilhança calculada pelo estimador de máxima verossimilhança exato para o processo <i>k-Factor</i> GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = 0.3$, $\mathbf{u} = 0.6$, $p = 0 = q$, $n = 1000$	63
4.7	Gráfico do vício ao quadrado e variância de um <i>k-Factor</i> GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 1$, $\lambda = 0.3$, $u = 0.2$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	64
4.8	Gráfico do vício ao quadrado e variância de um <i>k-Factor</i> GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 1$, $\lambda = 0.3$, $u = 0.5$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	65
4.9	Gráfico do vício ao quadrado e variância de um <i>k-Factor</i> GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 1$, $\lambda = 0.3$, $u = 0.9$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	66

- B.1 Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\mu = 0, k = 5, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}, \mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}, p = 0 = q, n = 1000, \alpha = 0.85$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$; 80
- B.2 Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\mu = 0, k = 5, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}, \mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}, p = 0 = q, n = 2000, \alpha = 0.85$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$; 81
- B.3 Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\mu = 0, k = 5, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}, \mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}, p = 1 = q, \phi_1 = 0.3, \theta_1 = 0.5, n = 1000, \alpha = 0.85$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$; 82
- B.4 Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\mu = 0, k = 5, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}, \mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}, p = 1 = q, \phi_1 = 0.3, \theta_1 = 0.5, n = 2000, \alpha = 0.85$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$; 83
- B.5 Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\mu = 0, k = 5, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}, \mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}, p = 1 = q, \phi = 0.3, \theta = 0.5, n = 1000, \alpha = 0.89$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$; 84
- B.6 Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\mu = 0, k = 5, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}, \mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}, p = 1 = q, \phi = 0.3, \theta = 0.5, n = 2000, \alpha = 0.89$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$; 85
- B.7 Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\mu = 0, k = 5, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}, \mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}, p = 0 = q, n = 1000, \alpha = 0.89$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$; 86

B.8	Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0, k = 5, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}, \mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}, p = 0 = q, n = 2000, \alpha = 0.89$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$;	87
B.9	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_1 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0, k = 2, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}, \mathbf{u} = \{0.2, 0.3\}, p = 0 = q, n = 1000, \alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	88
B.10	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_2 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0, k = 2, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}, \mathbf{u} = \{0.2, 0.3\}, p = 0 = q, n = 1000, \alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	89
B.11	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_1 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0, k = 2, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}, \mathbf{u} = \{0.2, 0.5\}, p = 0 = q, n = 1000, \alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	90
B.12	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_2 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0, k = 2, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}, \mathbf{u} = \{0.2, 0.5\}, p = 0 = q, n = 1000, \alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	91
B.13	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_1 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0, k = 2, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}, \mathbf{u} = \{0.2, 0.9\}, p = 0 = q, n = 1000, \alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	92
B.14	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_2 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0, k = 2, \boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}, \mathbf{u} = \{0.2, 0.9\}, p = 0 = q, n = 1000, \alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	93
B.15	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_1 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0, k = 7, \boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}, \mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}, p = 0 = q, n = 1000, \alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	94

B.16	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_2 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	95
B.17	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_3 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	96
B.18	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_4 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	97
B.19	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_5 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	98
B.20	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_6 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	99
B.21	Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_7 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.	100

LISTA DE TABELAS

1.1	Função de Autocovariância Amostral $\gamma_X(h)$: calculada pela Transformada de Fourier (TF) e pela representação média móvel infinita para diferentes pontos de truncamento para o processo ARFIMA(0, d , 0), com $d = 0.3$	12
2.1	Comparação do tempo, em segundos, da inversão de matrizes no S-Plus utilizando as rotinas da decomposição de Choleski (Chol), Solve e a rotina Ginverse	38
4.1	Estimação paramétrica dos parâmetros do processo <i>GARMA</i> (0, u , λ , 0), para diferentes pares de valores de u e λ	50
4.2	Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo <i>GARMA</i> (0, u , λ , 0), quando $\lambda = 0.3$, $u = 0.8$, $n = 1000$ e $\alpha \in \{0.6, 0.65, \dots, 0.85, 0.89\}$	50
4.3	Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo <i>GARMA</i> (0, u , λ , 0), quando $\lambda = 0.4$, $u = 0.8$, $n = 1000$ e $\alpha \in \{0.60, 0.65, \dots, 0.85, 0.89\}$	52
4.4	Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo <i>k-Factor GARMA</i> (p , λ , \mathbf{u} , q), quando $\lambda = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 0 = q$, $n = 1000$ e $\alpha \in \{0.80, 0.85, 0.9\}$	53
4.5	Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo <i>k-Factor GARMA</i> (p , λ , \mathbf{u} , q), quando $\lambda = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 0 = q$, $n = 2000$ e $\alpha \in \{0.80, 0.85, 0.9\}$	54
4.6	Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo <i>k-Factor GARMA</i> (p , λ , \mathbf{u} , q), quando $\lambda = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 1 = q$, $n = 1000$, $\phi = 0.3$, $\theta = 0.5$ e $\alpha \in \{0.80, 0.85, 0.9\}$	55
4.7	Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo <i>k-Factor GARMA</i> (p , \mathbf{u} , λ , q), quando $\lambda = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 1 = q$, $n = 2000$, $\phi = 0.3$, $\theta = 0.5$ e $\alpha \in \{0.80, 0.85, 0.89\}$	57
4.8	Resultado do estimador W para um processo <i>k-Factor GARMA</i> (p , \mathbf{u} , λ , q), onde $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\lambda = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 0 = q$ e $n \in \{1000, 2000\}$	58

4.9 Resultado do estimador W para um processo k -Factor GARMA
($p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q$), onde $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3,$
 $0.4)$, $p = 1 = q$, $\phi = 0.3$, $\theta = 0.5$ e $n \in \{1000, 2000\}$ 58

Resumo

Este trabalho baseia-se nos chamados processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$). Foram estudadas as condições de estacionariedade e invertibilidade destes processos, suas representações autoregressiva e média móvel infinita, suas funções densidade espectral e de autocovariância. Realizamos um estudo sobre estimação utilizando estimadores semiparamétricos clássicos e suas versões robustas e também estimadores paramétricos baseados em simulações de Monte Carlo para diferentes valores de \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$, p e q . Comparamos a eficiência destes estimadores analisando seus erros quadráticos médios, vício e variância.

Palavras-Chave: *Processos com Longa Dependência, k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), Estimação Semiparamétrica, Estimação Paramétrica.*

Agradecimentos

“Todos somos anjos de uma só asa, para voar, precisamos nos abraçar uns aos outros”.

Mário Quintana

Agradeço ao Cleber, Sr. Orientador, que apostou em mim quando possivelmente eu já não apostava mais. Agradeço pelo esforço, dedicação, horas de orientação e conhecimento. Também agradeço a confiança em me passar um problema estatístico interessante acreditando na minha capacidade de resolvê-lo.

Agradeço ao Gilles por me incentivar a voltar a pesquisar. E por me apoiar nesta tarefa nem sempre fácil. Também agradeço a ele por suas significativas discussões que contribuíram para esta monografia. E também por querer ser meu noivo, acima de tudo.

Aos meus pais e meu irmão muito obrigada por aceitarem ir à minha defesa de monografia sem entender do que se trata. E obrigada pelo apoio para que eu continue estudando após a graduação. Agradeço ao Lilo, o gato, que não importa a situação, problema, tempestade ou confusão, se comporta dignamente como um gato, me fazendo companhia e pedindo comida quando eu esqueço de dar.

Agradeço à equipe do Laboratório de Medicina Genômica do HCPA de Porto Alegre pelos anos de bolsa. Em especial agradeço às professoras Patricia Ashton-Prolla e Suzi Camey pela oportunidade. Também agradeço aos outros locais de estágio ou trabalho: Scatter Consultoria, IMAMA, Núcleo Mama Porto Alegre, Hospital Moinhos de Vento, ABEPROSC, Fundação de Economia e Estatística do RS e aos meus alunos de aulas particulares.

Obrigada à Fundação Liberato Salzano que, através de seus professores, me inseriu e ensinou a fazer pesquisa.

Agradeço a alguns professores da graduação que me ensinaram bem. E a outros que além de ensinar ainda tiveram paciência comigo. Agradeço também aos colegas que apoiaram, de alguma forma, com alguma palavra de incentivo, algum olhar, algum silêncio em hora de silêncio e mesmo pelas discussões construtivas. Estivemos no mesmo barco segurando as mãos para que ninguém caísse na água.

Agradeço às pessoas que erraram comigo, para que eu possa aprender com elas e tentar não repetir seus erros.

Por fim, agradeço especialmente à Ariane e ao Leandro que tornaram isto possível, cada um dentro de sua especialidade, fazendo com que o que há de bom dentro de mim pudesse aflorar em paz.

Introdução

Uma série temporal é uma coleção de observações feitas sequencialmente ao longo do tempo. Existem exemplos de séries temporais em diversas áreas, desde a economia até a engenharia. Métodos de análise destas séries constituem uma importante área da estatística.¹

Existem muitos objetivos para que se analize uma série temporal, que vão desde descrevê-la, explicar fenômenos, até fazer previsões na tentativa de controlar ocorrências futuras.

Inicialmente, os primeiros modelos lineares a serem estudados, conhecidos como os modelos de Box e Jenkins, foram os modelos que são analisados no domínio do tempo, tais como os modelos AR, MA, ARMA, e ARIMA. Existem algumas séries temporais que podem apresentar dependência mesmo entre observações distantes entre si, mas esta característica não é considerada na modelagem de Box e Jenkins.

As séries que apresentem estrutura de longa dependência entre as observações tem um papel fundamental na área de macroeconomia, e dados financeiros, mas esta característica das séries também tem sido abordada em uma gama de artigos científicos em probabilidade teórica, estatística matemática e estudos empíricos de outras áreas.

O fenômeno da longa dependência foi abordado, inicialmente, por Hurst (1951) enquanto investigava a série temporal do nível mensal do rio Nilo. Posteriormente, Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981 e 1984) definiram os modelos ARFIMA(p, d, q), que são os chamados *modelos auto-regressivos fracionalmente integrados de média móvel*. Inicialmente, a característica da longa dependência pode ser caracterizada de diferentes formas, dentre as quais destacamos as seguintes: i) pelo decaimento hiperbólico da função de autocorrelação com o aumento dos lags; ii) pelo crescimento ilimitado da função densidade espectral quando a frequência tende a zero. Estes modelos de longa dependência têm sido extensivamente investigados desde a década de 80 e, em particular, diversos artigos publicados abordam a questão da estimação dos parâmetros.

Entretanto, alguns dados reais começaram a apresentar um comportamento periódico persistente que não era bem modelado pelo modelo ARFIMA. Gray et. al. (1988) propuseram os modelos de *Gegenbauer* e *auto-*

¹Adaptado de: Chatfield, C. "The Analysis of Time Series - An Introduction."

regressivo de média móvel Gegenbauer utilizando os polinômios de *Gegenbauer*. Este modelo passou a ser chamado de processo GARMA (p, u, λ, q) (*Gegenbauer autoregressive moving-average process*) e é uma generalização dos modelos ARFIMA. A diferença é que a função densidade espectral dos processos GARMA (p, u, λ, q) não necessariamente são ilimitadas na origem, sendo ilimitada em alguma frequência λ contida no intervalo $[0, \pi]$. Giraitis e Leipus (1995) e Woodward *et al.* (1998) propuseram uma extensão ao modelo GARMA, denotado *k-Factor* GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$. Neste modelo, a função densidade espectral torna-se ilimitada em um número k finito de frequências no intervalo $[0, \pi]$, denominadas frequências de Gegenbauer ou simplesmente frequências G.

Neste trabalho, abordaremos os processos *k-Factor* GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, suas propriedades, alguns métodos de estimação e de previsão. Dentre os métodos de estimação, destacamos o estimador exato de máxima verossimilhança, uma proposta original deste trabalho. Os demais estimadores são o estimador de máxima verossimilhança aproximado de Fox e Taqqu (1986) e os estimadores semiparamétricos de Geweke e Porter-Hudak e o estimador de Bartlett, ambos com sua versão clássica e duas versões robustas.

Esta monografia está dividida da seguinte forma: no capítulo 1 introduzimos os processos *k-Factor* GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ e suas propriedades. No capítulo 2 serão abordados os métodos de estimação das frequências de Gegenbauer e dos parâmetros dos modelos. No capítulo 3 abordaremos a previsão com estes processos. No capítulo 4 serão apresentados resultados obtidos a partir de simulações com os estimadores propostos e, por fim, as conclusões obtidas através deste estudo.

Capítulo 1

Processos Fracionários com Longa Dependência

A longa dependência entre as observações de dados de séries temporais tem sido o foco de muito estudos. Nas últimas décadas, têm-se proposto vários processos estocásticos que levam em consideração esta característica nos dados. Pode-se definir a longa dependência tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência. Em dados reais, a longa dependência no domínio do tempo pode ser observada pelo decaimento lento da função de autocorrelação amostral e no domínio da frequência é observada por picos locais com valores altos na função periodograma ¹. A Definição 1.1 apresenta formalmente a idéia da propriedade de *longa dependência*:

Definição 1.1. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário. No domínio do tempo, se existe um número real $u \in (0, 1)$ tal que

$$\rho_x(k) \sim C_1 k^{-u}, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

onde $C_1 \neq 0$ e $\rho_x(\cdot)$ é a função de autocorrelação do processo, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui *longa dependência*. Equivalentemente, no domínio da frequência, se existe um número real $b \in (0, 1)$ tal que

$$f_x(w) \sim C_2 |w|^{-b}, \text{ quando } w \rightarrow 0,$$

onde $C_2 > 0$ e $f_x(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui *longa dependência* (ver Beran, 1959).

Notação: Usaremos, neste trabalho, a notação $f(w) \sim g(w)$, quando $w \rightarrow 0$, significa $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(w)}{g(w)} = 1$.

Beran (1959) ressalta que as propriedades acima são assintóticas e, portanto, não dizem nada sobre um *lag* finito fixo. Além disto, determina apenas

¹Periodograma: estimador da função densidade espectral

a razão de convergência, não o valor absoluto. Cada correlação pode ser individualmente pequena, arbitrariamente. Apenas o decaimento da função como um todo que é lenta. Então, determinar se o decaimento da função de autocorrelação é lento o suficiente para que a série tenha longa dependência seja uma tarefa difícil.

Utilizando a definição de *longa dependência*, Granger e Joyeux (1980), Hosking (1981, 1984) e Geweke e Porter-Hudak (1983) propõe os *processos auto-regressivos fracionariamente integrados de média móvel* (denotados por ARFIMA(p, d, q)). A seguir definimos os processos ARFIMA(p, d, q).

Definição 1.2. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico satisfazendo a equação

$$\phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad (1.1)$$

onde μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco que segue uma distribuição com média zero e variância finita, \mathcal{B} é o operador de *defasagem*, isto é, $\mathcal{B}^j(X_t) = X_{t-j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios de ordem p e q , respectivamente, definidos por

$$\phi(z) = \sum_{\ell=0}^p (-\phi_\ell) z^\ell, \quad \theta(z) = \sum_{m=0}^q (-\theta_m) z^m, \quad (1.2)$$

onde ϕ_ℓ , $1 \leq \ell \leq p$, e θ_m , $1 \leq m \leq q$, são constantes reais e $\phi_0 = -1 = \theta_0$. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo fracionariamente integrado de média móvel de ordem (p, d, q) com média μ* , denotado por ARFIMA(p, d, q), onde d é o *grau de diferenciação*.

Observação 1.3. Na Definição 1.2, quando $0 < d < 0.5$, o processo ARFIMA(p, d, q) possui longa dependência. Quando $d = 0$ temos o chamado *processo auto-regressivo de média móvel* de ordem (p, q) , denotado por ARMA(p, q). A função de autocorrelação dos processos ARMA(p, q) possui decaimento exponencial, isto é,

$$|\rho_X(k)| \leq Cr^k, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

onde $C > 0$ e $r \in (0, 1)$.

Maiores detalhes sobre os processos ARFIMA(p, d, q) podem também ser encontrados em Fox e Taquq (1986), Brockwell e Davis (1991), Sowell (1992), Beran (1994), Robinson (1995a), Baillie (1996), Peiris e Singh (1996), Reisen e Lopes (1999), Lopes et al. (2004), Lopes (2007), entre outros.

Embora vários trabalhos utilizem os processos ARFIMA(p, d, q), nem sempre estes modelos são suficientes para resolver os problemas sobre longa dependência. Em algumas situações, faz-se necessária alguma generalização deste modelo.

Um exemplo de generalização do ARFIMA(p, d, q) sugerido por Hosking (1981), é o modelo

$$\phi(\mathcal{B})(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

Note que, quando $u = 1$, temos $d = 2\lambda$, isto é, um ARFIMA $(p, 2\lambda, q)$.

Devido a complexidade na inversão do fator $(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda$, o modelo não foi investigado na época que foi proposto por Hosking. Para resolver esta questão, Gray et al. (1988) utilizou as funções geradoras dos polinômios Gegenbauer (ver Definição 1.4) que tem propriedades que possibilitam a inversão da equação.

A seguir, definiremos os polinômios Gegenbauer utilizados para a definição dos processos GARMA(p, u, λ, q) e k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

Nos resultados apresentados nas seções a seguir utilizaremos as seguintes notações $\mathbb{Z}_{\geq} = \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 0\}$ e $\mathbb{Z}_{\leq} = \{k \in \mathbb{Z} | k \leq 0\}$.

1.1 Polinômios de Gegenbauer

Os polinômios de Gegenbauer são uma ferramenta matemática amplamente utilizada devido a sua ortogonalidade e suas propriedades recursivas (veja Gray et. al. 1988).

Definição 1.4. Os *polinômios Gegenbauer* $C_j^{(\lambda)}(u)$ são os coeficientes na expansão em série de potência da seguinte função

$$(1 - 2uZ + Z^2)^{-\lambda} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} C_j^{(\lambda)}(u)Z^j, \quad (1.4)$$

para $\lambda \neq 0$, $|u| \leq 1$ e $|Z| \leq 1$, onde

$$C_j^{(\lambda)}(u) = \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda - k + j)(2u)^{j-2k}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(k+1)\Gamma(j-2k+1)}, \quad (1.5)$$

para todo $j \geq 0$, com $\lfloor x \rfloor$ sendo a parte inteira de x .

Estes polinômios podem ser aproximados por

$$C_j^{(\lambda)}(u) \sim \frac{\cos[(j + \lambda)G - (\lambda\pi/2)]}{\Gamma(\lambda) \operatorname{sen}^\lambda(G)} \left(\frac{2}{j}\right)^{1-\lambda}, \quad \text{quando } j \rightarrow \infty,$$

onde a constante G é dada por $G = \cos^{-1}(u)$.

Assim, quando $\lambda < 1$, $C_j^{(\lambda)}(\cdot)$ decresce numa taxa hiperbólica, quando $j \rightarrow \infty$.

Computacionalmente, podemos calcular $C_j^{(\lambda)}(\cdot)$ usando a seguinte fórmula recursiva

$$C_j^{(\lambda)}(u) = 2u \left(\frac{\lambda - 1}{j} + 1 \right) C_{j-1}^{(\lambda)}(u) - \left(2 \frac{\lambda - 1}{j} + 1 \right) C_{j-2}^{(\lambda)}(u),$$

para todo $j > 2$, com $C_0^{(\lambda)}(u) = 1$, $C_1^{(\lambda)}(u) = 2\lambda u$, $C_2^{(\lambda)}(u) = 2\lambda(\lambda + 1)u^2 - \lambda$.

1.2 Processos GARMA

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico dado pela expressão

$$(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda (X_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad (1.6)$$

onde $|u| \leq 1$, μ é a média do processo e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco. Se o processo é inversível, podemos escrever formalmente

$$X_t = \mu + (1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{-\lambda} \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Utilizando-se a equação (1.4), o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser escrito na sua representação média-móvel infinita

$$X_t = \mu + \sum_{j \in \mathbb{Z}_{>}} C_j^{(\lambda)}(u) \varepsilon_{t-j}, \quad (1.7)$$

onde $(C_j^{(\lambda)}(\cdot))_{j \in \mathbb{Z}}$ são os polinômios Gegenbauer definidos na equação (1.5). Assim temos a seguinte definição.

Definição 1.5. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado pela equação (1.7), é chamado de *processo Gegenbauer* com parâmetros u e λ e pode ser escrito pela expressão dada em (1.6).

Podemos notar que se $u = 1$, em (1.6), temos

$$(1 - \mathcal{B})^{2\lambda} (X_t - \mu) = \varepsilon_t. \quad (1.8)$$

Neste caso, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é justamente o processo fracionalmente integrado de grau ou parâmetro de diferenciação 2λ , isto é, um processo ARFIMA(0, 2λ , 0) e suas propriedades podem ser encontradas em Hosking (1981).

Quando $u = -1$, a equação (1.6) torna-se

$$(1 + \mathcal{B})^{2\lambda} (X_t - \mu) = \varepsilon_t.$$

Observação 1.6. A Definição 1.1 pode ser estendida para um processo estacionário qualquer.

- i) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estacionário para o qual existe um número real $b \in (0, 1)$, uma constante $C_f > 0$ e uma frequência $G \in [0, \pi]$ (ou um número finito de frequências) tal que $f_x(w) \sim C_f |w - G|^{-b}$, quando $w \rightarrow G$.

Então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é chamado processo estacionário com *longa dependência*.

- ii) Quando $b \in (-1, 0)$, dizemos que o processo possui *dependência intermediária*.
- iii) No item i), quando $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processos ARFIMA(0, d , 0), temos que $b = 2d$ e $G = 0$. Assim, os processos ARFIMA(0, d , 0) possuem longa dependência quando $d \in (0, 0.5)$.

A seguir citamos algumas propriedades dos processos Gegenbauer cujas demonstrações podem ser encontradas em Gray et al. (1989) e Chung (1996).

Proposição 1.7. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo Gegenbauer dado na Definição 1.5. Então,*

- a) o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se
- i) $|u| < 1$ e $\lambda < 0.5$; ou
 - ii) $|u| = 1$ e $\lambda < 0.25$;
- b) o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível se
- i) $|u| < 1$ e $\lambda > -0.5$; ou
 - ii) $|u| = 1$ e $\lambda > -0.25$;
- c) um processo Gegenbauer estacionário possui a propriedade de longa dependência se $0 < \lambda < 0.5$ e $|u| < 1$ ou $0 < \lambda < 0.25$ e $|u| = 1$;
- d) a função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\begin{aligned} f_x(w) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |1 - 2ue^{iw} + e^{2iw}|^{-2\lambda} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2(\cos(w) - u)]^{-2\lambda}, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi], \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde $G = \cos^{-1}(u)$ é chamada frequência de Gegenbauer ou frequência G , isto é, a função densidade espectral torna-se ilimitada em G .

Quando $w \rightarrow G$,

$$f_x(w) \sim C_f |w - G|^{-2\lambda}, \quad (1.10)$$

onde $C_f = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2|\sin(G)|]^{-2\lambda} > 0$.

e) A função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, quando $|u| < 1$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq}$, é dada por

$$\gamma_x(k) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(1-2\lambda) [2 \operatorname{sen}(G)]^{1/2-2\lambda} [P_{k-1/2}^{2\lambda-1/2}(u) + (-1)^k P_{k-1/2}^{2\lambda-1/2}(-u)],$$

onde $P_a^b(\cdot)$ são funções de Legendre (ver Observação 1.8);

f) A função $\gamma_x(k)$ dada no item anterior pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} \gamma_x(k) &= \frac{2^{1-2\lambda} \sigma_\varepsilon^2}{\pi} \operatorname{sen}^{-2\lambda}(G) \operatorname{sen}(\lambda\pi) \Gamma(1-2\lambda) \cos(kG) \\ &\quad \times \frac{\Gamma(k+2\lambda)}{\Gamma(k+1)} [1 + O(k^{-1})]. \end{aligned}$$

;

g) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo Gegenbauer estacionário com longa dependência. Então,

i) quando $u = 1$ e $0 < \lambda < 0.25$, a função de autocorrelação do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\rho_x(k) = \frac{\Gamma(1-2\lambda)\Gamma(k+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(k-2\lambda+1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\rho_x(k) \sim k^{4\lambda-1}$.

ii) quando $u = -1$ e $0 < \lambda < 0.25$, a função de autocorrelação do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\rho_x(k) = (-1)^k \frac{\Gamma(1-2\lambda)\Gamma(k+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(k-2\lambda+1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\rho_x(k) \sim (-1)^k k^{4\lambda-1}$.

iii) quando $|u| < 1$ e $0 < \lambda < 0.5$,

$$\rho_x(k) \sim k^{2\lambda-1} \operatorname{sen}(\pi\lambda - kG),$$

quando $k \rightarrow \infty$, onde $G = \cos^{-1}(u)$. Esta expressão explica o comportamento senoidal da função de autocorrelação dos processos Gegenbauer.

Tabela 1.1: Função de Autocovariância Amostral $\gamma_X(h)$: calculada pela Transformada de Fourier (TF) e pela representação média móvel infinita para diferentes pontos de truncamento para o processo ARFIMA(0, d , 0), com $d = 0.3$.

h	TF	Truncamento								
		1000	2000	3000	4000	5000	10000	15000	20000	50000
0	1,5744	1,5618	1,5504	1,5540	1,5562	1,5578	1,5618	1,5637	1,5649	1,5649
1	0,8166	0,8066	0,7975	0,8004	0,8021	0,8034	0,8066	0,8081	0,8090	0,8090
2	0,2586	0,2550	0,2519	0,2529	0,2535	0,2539	0,2550	0,2556	0,2559	0,2559
3	-0,1997	-0,1952	-0,1912	-0,1925	-0,1933	-0,1938	-0,1952	-0,1959	-0,1963	-0,1963
4	-0,4796	-0,4690	-0,4594	-0,4625	-0,4643	-0,4656	-0,4690	-0,4706	-0,4716	-0,4716
5	-0,5343	-0,5217	-0,5104	-0,5140	-0,5162	-0,5177	-0,5217	-0,5236	-0,5248	-0,5248
6	-0,3829	-0,3735	-0,3649	-0,3676	-0,3693	-0,3704	-0,3735	-0,3749	-0,3758	-0,3758
7	-0,1069	-0,1043	-0,1020	-0,1027	-0,1032	-0,1035	-0,1043	-0,1047	-0,1050	-0,1050
8	0,1797	0,1744	0,1696	0,1711	0,1721	0,1727	0,1744	0,1752	0,1757	0,1757
9	0,3706	0,3595	0,3495	0,3526	0,3546	0,3559	0,3595	0,3611	0,3622	0,3622
10	0,4033	0,3908	0,3796	0,3832	0,3854	0,3869	0,3908	0,3927	0,3939	0,3939

Observação 1.8. As *funções de Legendre*, associadas a expressão exata da função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada no item e) da Proposição 1.7, podem ser calculadas utilizando a fórmula recursiva

$$P_a^b(x) = \frac{2a-1}{a-b} x P_{a-1}^b(x) - \frac{a+b-1}{a-b} P_{a-2}^b(x). \quad (1.11)$$

A fórmula recursiva (1.11) requer os seguintes termos iniciais

$$P_{-1/2}^{2\lambda-1/2}(u) = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\lambda-1/4} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}-2\lambda)} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - 2\lambda; \frac{1-u}{2}\right),$$

$$P_{1/2}^{2\lambda-1/2}(u) = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\lambda-1/4} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}-2\lambda)} \cdot F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2} - 2\lambda; \frac{1-u}{2}\right),$$

onde $F(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$ é a *função hipergeométrica* definida por

$$F(a, b; c; x) = \sum_{j \geq 1} \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+j)\Gamma(j+1)} \right] x^j.$$

Observação 1.9. Woodward et al. (1998), baseados na equação (1.7), apresentam a função de autocovariância dada por

$$\gamma_X(k) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} C_j^{(\lambda)}(u) C_{j+k}^{(\lambda)}(u), \quad \text{para todo } |u| \leq 1, \quad (1.12)$$

onde $k \in \mathbb{Z}_{\geq}$ e $C_j^{(\lambda)}(\cdot)$ é dado pela expressão (1.5).

A Tabela 1.1 acima apresenta uma comparação entre a autocovariância amostral calculada pela transformada de Fourier e pela representação média-móvel infinita (ver equação 1.12) para diferentes pontos de truncamento e

para diferentes *lags*. A taxa de convergência é bastante lenta. A diferença em módulo é relativamente pequena. A representação média móvel infinita é útil para o cálculo da $\gamma_X(h)$.

Da mesma forma que podemos incluir componentes auto-regressivas e médias móveis aos processos fracionalmente integrados puros obtendo então os processos ARFIMA(p, d, q), podemos estender os processos Gegenbauer combinando-os com os processos ARMA(p, q). Isto nos conduz a seguinte definição explicitada em 1.10

Definição 1.10. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico que satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B})(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad (1.13)$$

onde μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios de grau p e q , respectivamente, definidos por

$$\phi(z) = \sum_{\ell=0}^p (-\phi_\ell) z^\ell \quad \text{e} \quad \theta(z) = \sum_{m=0}^q (-\theta_m) z^m, \quad (1.14)$$

onde ϕ_ℓ , $1 \leq \ell \leq p$, e θ_m , $1 \leq m \leq q$, são constantes reais e $\phi_0 = -1 = \theta_0$. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo de média móvel Gegenbauer* de ordem (p, u, λ, q) , denotado por GARMA(p, u, λ, q).

As propriedades dos processos GARMA(p, u, λ, q), a seguir apresentadas, encontram-se demonstradas em Gray et al. (1989).

Proposição 1.11. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo GARMA(p, u, λ, q) ($\lambda \neq 0$), dado na Definição 1.10, com todas as raízes das equações $\phi(z) = 0$ e $\theta(z) = 0$ fora do círculo unitário. Então, valem as seguintes afirmações.*

- a) *O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se $\lambda < 0.5$, quando $|u| < 1$, ou $\lambda < 0.25$, quando $|u| = 1$.*
- b) *O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível se $\lambda > -0.5$, quando $|u| < 1$, ou $\lambda > -0.25$, quando $|u| = 1$.*
- c) *Se $0 < \lambda < 0.25$, quando $|u| = 1$ ou $0 < \lambda < 0.5$, quando $|u| < 1$, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo com longa dependência.*
- d) *A função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, denotada por $f_X(\cdot)$, é dada por*

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-iw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2} [2(\cos(w) - u)]^{-2\lambda}, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi], \quad (1.15)$$

onde $G = \cos^{-1}(u)$ é a frequência de Gegenbauer.

- i) Se $|u| < 1$, $\lim_{w \rightarrow G} (w - G)^{2\lambda} f_X(w)$ existe e é finito.
 - ii) Se $|u| = 1$, $\lim_{w \rightarrow G} w^{4\lambda} f_X(w)$ existe e é finito.
- e) Quando $k \rightarrow \infty$,
- i) $\rho_X(k) \sim k^{4\lambda-1}$, quando $u = 1$ e $0 < \lambda < 0.25$,
 - ii) $\rho_X(k) \sim (-1)^k k^{4\lambda-1}$, quando $u = -1$ e $0 < \lambda < 0.25$,
 - iii) $\rho_X(k) \sim k^{2\lambda-1} \text{sen}(\pi\lambda - kG)$, quando $|u| < 1$ e $0 < \lambda < 0.5$.

Observação 1.12.

- i) A função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q) não é necessariamente ilimitada na origem, como nos processos ARFIMA(p, d, q), mas para alguma frequência G no intervalo $(0, \pi]$.
- ii) A expressão assintótica da função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q) pode ser escrita como

$$f_X(w) \sim C_f |w - G|^{-2\lambda}, \quad (1.16)$$

quando $w \rightarrow G$, onde $G = \cos^{-1}(u)$ e

$$C_f = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2|\text{sen}(G)|]^{-2\lambda} \frac{|\theta(e^{-iG})|^2}{|\phi(e^{-iG})|^2}. \quad (1.17)$$

A Figura B.8 apresenta alguns exemplos da função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q), com $\lambda = 0.2$, $\mu = 0$ e diferentes valores para u, G . A expressão da função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q) (apresentada na Figura 21(a) com $\lambda = 0.2$, $u = 1$, $p = 0 = q$ e $G = 0$) coincide com a expressão da função densidade espectral dos processos ARFIMA(p, d, q) quando $d = 0.4$, $p = 0 = q$ e $\mu = 0$.

Para maiores detalhes sobre os processos GARMA(p, u, λ, q), ver Chung (1996) e Ferrara e Guégan (1999).

1.3 Processos k -Factor GARMA

Os processos ARFIMA(p, d, q), onde $d \in (-0.5, 0.5)$, podem ser tratados como uma generalização dos processos ARIMA(p, d, q), onde $d \in \mathbb{N}$, para modelar dados com a propriedade de longa dependência, isto é, quando a função densidade espectral é ilimitada na frequência zero. Similarmente, os processos GARMA(p, u, λ, q) são tratados como uma generalização dos processos ARFIMA(p, d, q), na qual a sua função densidade espectral torna-se

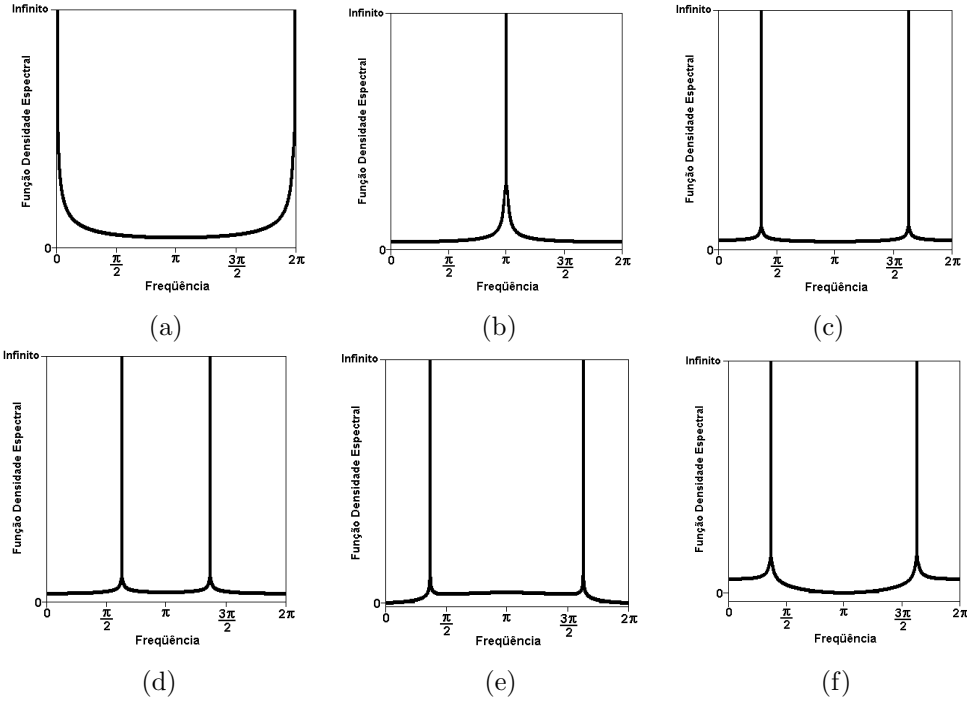


Figura 1.1: Função densidade espectral dos processos GARMA (p, u, λ, q) , com $\mu = 0$ e $\lambda = 0.2$: (a) $u = 1$, $p = 0 = q$ e $G = 0$; (b) $u = -1$, $p = 0 = q$ e $G = \pi$; (c) $u = 0.4$, $p = 0 = q$ e $G = 0.369\pi$; (d) $u = -0.4$, $p = 0 = q$ e $G = 0.63\pi$; (e) $u = 0.4$, $p = 1$, $q = 0$, com $\phi_1 = 0.8$ e $G = 0.369\pi$; (f) $u = 0.4$, $p = 1$, $q = 0$, com $\phi_1 = -0.8$ e $G = 0.369\pi$;

ilimitada em alguma frequência G no intervalo $(0, \pi]$, não necessariamente na frequência zero. Contudo, uma característica dos processos ARFIMA(p, d, q) e do processo mais geral GARMA(p, u, λ, q) é que as suas funções densidade espectral tornam-se ilimitadas em apenas uma frequência do intervalo $(0, \pi]$.

Gray et al. (1989), Giraitis e Leipus (1995) e, depois, Woodward et al. (1998) estendem os modelos Gegenbauer e GARMA, respectivamente, aos modelos k -Factor Gegenbauer e k -Factor GARMA, para os quais a função densidade espectral é ilimitada para um número finito k de frequências, chamadas de *frequências de Gegenbauer* (ou frequências G), no intervalo $(0, \pi]$.

Definição 1.13. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo estocástico que satisfaz a equação

$$\prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{\lambda_j} (X_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad (1.18)$$

onde k é um inteiro finito, $|u_j| \leq 1$ e λ_j é um número fracionário, para $j = 1, \dots, k$, μ é a média do processo e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo k -Factor Gegenbauer* $(0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 0)$, $\phi(B) = 1 = \theta(B)$, denotado por *k -Factor Gegenbauer* $(0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 0)$, onde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)'$ e $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)'$.

A seguir apresentamos algumas propriedades dos processos k -Factor Gegenbauer(0, \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$, 0). A demonstração destas propriedades pode ser encontrada em Woodward et al. (1998).

Proposição 1.14. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor Gegenbauer(0, \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$, 0) (ver Definição 1.13). Então,*

- i) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se u_j são distintos e $\lambda_j < 0.5$, quando $|u_j| < 1$ e $\lambda_j < 0.25$, quando $|u_j| = 1$, para $j = 1, \dots, k$;*
- ii) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência se o item i) é satisfeito e ainda $\lambda_j > 0$, para $j = 1, \dots, k$;*
- iii) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por*

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - u_j)]^{-2\lambda_j}, \quad \text{para } w \in (0, \pi] \quad (1.19)$$

onde $f_X(\cdot)$ é ilimitada nas frequências $G_j = \cos^{-1}(u_j)$, $j = 1, \dots, k$.

iv) *Seja*

$$|\lambda_j| < \begin{cases} 0.5, & \text{se } 0 < u_j < 1; \\ 0.25, & \text{se } |u_j| = 1, \end{cases} \quad (1.20)$$

com $\lambda_j \neq 1$, para $j = 1, \dots, k$. Então, existe uma única solução estacionária, X_t de (1.18) a qual é causal e inversível.

A expressão assintótica da função densidade espectral é dada por

$$f_X(w) \sim D(\ell) |w - G_\ell|^{-2\lambda_\ell}, \quad \text{quando } w \rightarrow G_\ell,$$

para $\ell = 1, \dots, k$, onde

$$D(\ell) = \begin{cases} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |2 \operatorname{sen}(G_\ell)|^{-2\lambda_\ell} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq \ell}}^k [2|\cos(G_\ell) - \cos(G_j)|]^{-2\lambda_j}, & \text{para } 0 < G_\ell < \pi, \\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq \ell}}^k [2|\cos(G_\ell) - \cos(G_j)|]^{-2\lambda_j}, & \text{para } G_\ell = 0 \text{ ou } G_\ell = \pi. \end{cases}$$

A seguir definimos os modelos k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

Definição 1.15. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico que satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B}) \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{\lambda_j} (X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B}) \varepsilon_t, \quad (1.21)$$

onde k é um inteiro finito, $|u_j| \leq 1$ e λ_j é um número fracionário, para $j = 1, \dots, k$, μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco e $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios de grau p e q , respectivamente, definidos em (1.14). Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo de média móvel k -Factor Gegenbauer* de ordem $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, denotado por k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), onde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)'$ e $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)'$.

Na proposição a seguir, apresentamos alguns resultados sobre k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) estabelecidos e provados em Giraitis e Leipus (1995) e Woodward et al. (1998).

Proposição 1.16. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) conforme a Definição 1.15. Então,*

- i) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se todas as raízes da equação $\phi(z) = 0$ estão fora do círculo unitário, e além disso, u_j e λ_j , para $1 \leq j \leq k$, satisfazem a condição do item i) da Proposição 1.14;*
- ii) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência se satisfaz as condições do item i) desta proposição e, além disso, $\lambda_j > 0$, para $1 \leq j \leq k$;*
- iii) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal se e somente se $\phi(z) \neq 0$, para $|z| \leq 1$;*
- vi) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível se e somente se $\theta(z) \neq 0$, para $|z| \leq 1$;*
- v) *a função densidade espectral do processo k -Factor GARMA, definido pela expressão (1.21), é dada por*

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2} \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - u_j)]^{-2\lambda_j}, \quad (1.22)$$

onde $0 < w \leq \pi$ e $G_j = \cos^{-1}(u_j)$ são as chamadas frequências de Gegenbauer.

A Figura 1.2 apresenta alguns exemplos da função densidade espectral dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2)$, para $k = 2$ e $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2, 0.2)$, para $k = 3$ e diferentes valores para \mathbf{u} e $p, q \in \{0, 1\}$.

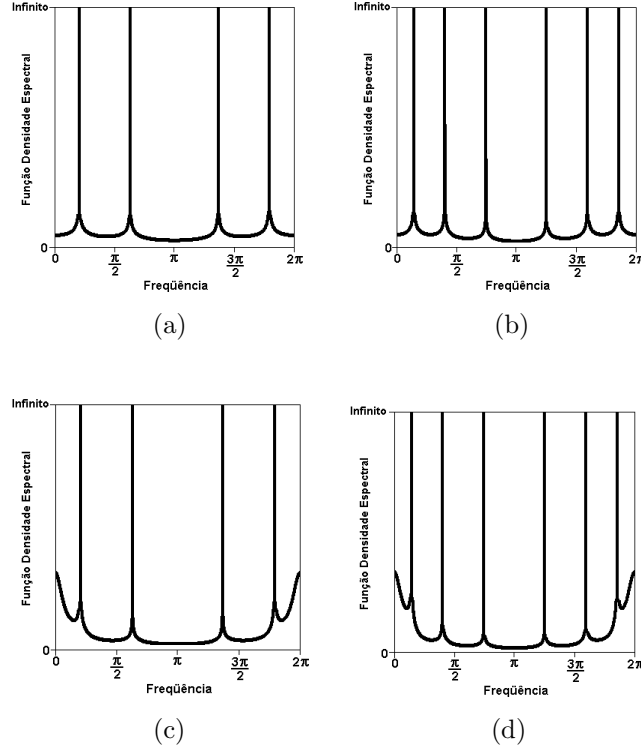


Figura 1.2: Função densidade espectral dos processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2)$, para $k = 2$ e $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2, 0.2)$, para $k = 3$: (a) $k = 2$, $\mathbf{u} = (-0.4, 0.8)$, $G_1 = 0.631\pi$, $G_2 = 0.204\pi$ e $p = 0 = q$; (b) $k = 3$, $\mathbf{u} = (-0.7, 0.3, 0.9)$, $G_1 = 0.747\pi$, $G_2 = 0.403\pi$, $G_3 = 0.143\pi$ e $p = 0 = q$; (c) $k = 2$, $\mathbf{u} = (-0.4, 0.8)$, $G_1 = 0.631\pi$, $G_2 = 0.204\pi$, $p = 1 = q$, $\phi_1 = 0.8$ e $\theta_1 = 0.5$; (d) $k = 3$, $\mathbf{u} = (-0.7, 0.3, 0.9)$, $G_1 = 0.747\pi$, $G_2 = 0.403\pi$, $G_3 = 0.143\pi$, $p = 1 = q$, $\phi_1 = 0.8$ e $\theta_1 = 0.5$.

Lema 1.17. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ dado pela Definição 1.15, causal e inversível cuja função densidade espectral $f_X(\cdot)$ é dada pela equação (1.22). Então,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln[f_X(w)] dw = 2\pi \ln\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\right), \quad (1.23)$$

onde $\sigma_\varepsilon^2/2\pi$ é a função densidade espectral do processo ruído branco, denotado por $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Demonstração: Ver Bisognin (2007).

Maiores detalhes sobre os processos k -Factor Gegenbauer $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ e k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ podem ser encontrados em Giraitis e Leipus (1995), Woodward et al. (1998) e Ferrara e Guégan (2001).

1.4 Causalidade e Invertibilidade

A seguir, apresentamos as representações auto-regressiva e média móvel infinitas para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) e nos lemas 1.20 e 1.22 demonstramos sua convergência.

Proposição 1.18. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) dado pela expressão (1.21). Suponha u_j distintos, $0 < \lambda_j < 0.5$ quando $|u_j| = 1$ e $0 < \lambda_j < 0.25$ quando $|u_j| < 1$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo causal se e somente se $\phi(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Os coeficientes de sua representação média móvel infinita são determinados pela relação*

$$\psi(z) = \sum_{\ell \geq 0} \psi_\ell z^\ell = \frac{\theta(z)}{\phi(z)} \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{-\lambda_j}, \text{ para todo } |z| \leq 1. \quad (1.24)$$

Proposição 1.19. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) dado pela expressão (1.21). Suponha u_j distintos, $0 < \lambda_j < 0.5$ quando $|u_j| = 1$ e $0 < \lambda_j < 0.25$ quando $|u_j| < 1$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo inversível se e somente se $\theta(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Os coeficientes de sua representação auto-regressiva infinita são determinados pela relação*

$$\pi(z) = \sum_{l \geq 0} \pi_l z^l = \frac{\phi(z)}{\theta(z)} \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{\lambda_j}, \text{ para todo } |z| \leq 1. \quad (1.25)$$

A seguir, demonstraremos a convergência da soma dos coeficientes ao quadrado da representação média móvel infinita dos processos k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$). Este resultado é muito importante para a obtenção da convergência em quadrado médio da soma destes coeficientes.

Lema 1.20. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) causal, dado pela expressão (1.21). Então, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j^2 < \infty$, onde $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação média móvel infinita do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dados na expressão (1.24).*

Demonstração: Por hipótese, como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal, quando $u_i < 0.5$, $\phi(z) = 0$ e $\theta(z) = 0$ não possuem raízes em comum e $\phi(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Então, existe uma seqüência $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ tal que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| < \infty$ e

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco e $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação média móvel infinita determinados pela relação (1.24).

Como $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| < \infty$, então $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j|^2 < \infty$. Logo, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j^2 < \infty$ e segue o resultado. \square

A Proposição 1.21 a seguir, fornece a convergência em quadrado e quase certamente (ou com probabilidade um) da soma dos coeficientes da representação média móvel infinita. Este resultado é importante para a obtenção da função de autocovariância dos processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

Proposição 1.21. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) causal e estacionário, dado pela expressão (1.21). Então, a série*

$$\psi(\mathcal{B})\varepsilon_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad (1.26)$$

converge absolutamente com probabilidade um (isto é, quase certamente) e em quadrado médio para o mesmo limite.

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) causal e estacionário. Queremos provar a convergência em quadrado médio da série

$$\psi(\mathcal{B})\varepsilon_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \mathcal{B}^j(\varepsilon_t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

onde os coeficientes $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são determinados pela relação (1.24).

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$ e defina $S_m = \sum_{j=0}^m \psi_j \varepsilon_{t-j}$. Então,

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|^2 &= \mathbb{E} \left| \sum_{\nu=0}^n \psi_\nu \varepsilon_{t-\nu} - \sum_{j=0}^m \psi_j \varepsilon_{t-j} \right|^2 = \mathbb{E} \left[\sum_{j=m+1}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right]^2 \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=m+1}^n \psi_j^2 \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{\substack{\nu, j=m+1 \\ \nu \neq j}}^n \psi_\nu \psi_j \varepsilon_{t-\nu} \varepsilon_{t-j} \right] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=m+1}^n \psi_j^2, \end{aligned}$$

pois $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco.

Então, é suficiente mostrar que $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_\nu^2 < \infty$. Contudo, como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal e estacionário, pelo Lema 1.20, temos que $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_\nu^2 < \infty$. Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N(\epsilon) > 0$, tal que $\sum_{j=m+1}^n \psi_j^2 < \epsilon$,

para todo $n > m > N(\epsilon)$ e pelo critério de Cauchy (ver Rudin, 1976, Teorema 3.22), temos que a série (1.26) converge em quadrado médio.

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}(|\varepsilon_t|^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t)^2 = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Assim, $\mathbb{E}(|\varepsilon_t|) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\sup_t \mathbb{E}(|\varepsilon_t|) < \infty$. Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| |\varepsilon_{t-j}| \right) &= \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\psi_j| |\varepsilon_{t-j}| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^n |\psi_j| |\varepsilon_{t-j}| \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\psi_j| \mathbb{E}(|\varepsilon_{t-j}|) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\psi_j| \sup_t \mathbb{E}(|\varepsilon_t|) \\ &= C < \infty, \end{aligned}$$

pois $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| < \infty$ e $\sup_t \mathbb{E}(|\varepsilon_t|) < \infty$. Assim, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| |\varepsilon_{t-j}|$ e $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ são ambas convergentes com probabilidade um (isto é, quase certamente).

Se \mathcal{S} denota o limite em quadrado médio, isto é, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que para todo $n \geq N$,

$$\left\| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right\|^2 = \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right|^2 \right) < \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right|^2 \right) = 0.$$

Portanto, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{S} - \psi(\mathcal{B})\varepsilon_t \right\|^2 &= \mathbb{E} (|\mathcal{S} - \psi(\mathcal{B})\varepsilon_t|^2) = \mathbb{E} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right|^2 \right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Assim, o limite \mathcal{S} e $\psi(\mathcal{B})\varepsilon_t$ são iguais com probabilidade um (isto é, quase certamente). □

A seguir, demonstraremos a convergência da soma dos coeficientes ao quadrado da representação auto-regressiva infinita dos processos k -Factor

GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$). Este resultado é muito importante para a obtenção da convergência em quadrado médio da soma destes coeficientes.

Lema 1.22. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) inversível, dado pela expressão (1.21). Então, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j^2 < \infty$, onde $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação auto-regressiva infinita do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dados pela expressão (1.25).*

Demonstração: Por hipótese, como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível, quando $u > -0.5$, $\phi(z) = 0$ e $\theta(z) = 0$ não possuem zeros em comum e $\theta(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Então, existe uma seqüência $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ tal que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| < \infty$ e

$$\varepsilon_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j X_{t-j}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco e $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação auto-regressiva infinita dados pela equação (1.25).

Pelo Teorema A.2, como $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| < \infty$, então $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j|^2 < \infty$. Logo, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j^2 < \infty$ e segue o resultado. \square

A Proposição 1.23 a seguir, fornece a convergência em quadrado e quase certamente (ou com probabilidade um) da soma dos coeficientes da representação auto-regressiva infinita. Este resultado é muito importante na previsão para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) (ver Capítulo 3).

Proposição 1.23. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) estacionário e inversível, dado pela expressão (1.21). Então, a série*

$$\pi(\mathcal{B})X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j \mathcal{B}^j(X_t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j X_{t-j}, \quad (1.27)$$

converge absolutamente com probabilidade um (isto é, quase certamente) e em quadrado médio para o mesmo limite.

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) causal e estacionário. Queremos provar a convergência em quadrado médio da série na equação (1.27).

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$ e defina $S_m = \sum_{j=0}^m \pi_j X_{t-j}$. Então,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \mathbb{E} \left(\left| \sum_{\nu=0}^n \pi_\nu X_{t-\nu} - \sum_{j=0}^m \pi_j X_{t-j} \right|^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left(\left[\sum_{\nu=0}^n \pi_\nu X_{t-\nu} - \sum_{j=0}^m \pi_j X_{t-j} \right]^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{\nu=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \pi_\nu \bar{\pi}_j X_{t-\nu} \bar{X}_{t-j} \right) \\
&= \sum_{\nu=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \pi_\nu \bar{\pi}_j \mathbb{E}(X_{t-\nu} \bar{X}_{t-j}).
\end{aligned}$$

Como $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário, $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\sup_t \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$. Logo,

$$\|S_n - S_m\|^2 \leq \sup_t \mathbb{E}(|X_t|^2) \sum_{j=m+1}^m |\pi_j|^2.$$

Como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível, temos que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j|^2 < \infty$. Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N(\epsilon) > 0$, tal que $\sum_{j=m+1}^n \pi_j^2 < \epsilon$, para todo $n > m > N(\epsilon)$ e pelo critério de Cauchy (ver Rudin, 1976, Teorema 3.22), temos que a série (1.27) converge em quadrado médio.

Pela estacionariedade, temos que $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Logo, $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\sup_t \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| |X_{t-j}| \right) &= \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\pi_j| |X_{t-j}| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^n |\pi_j| |X_{t-j}| \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\pi_j| \mathbb{E}(|X_{t-j}|) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\pi_j| \sup_t \mathbb{E}(|X_t|) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

pois $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| < \infty$ e $\sup_t \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$. Desta forma, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| |X_{t-j}|$ e $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j \bar{X}_{t-j}$ são ambas convergentes com probabilidade um (isto é, quase certamente).

Se \mathcal{S} denota o limite em quadrado médio, isto é, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que para todo $n \geq N$,

$$\left\| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \pi_j X_{t-j} \right\|^2 = \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \pi_j X_{t-j} \right|^2 \right) < \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \pi_j X_{t-j} \right|^2 \right) = 0.$$

Portanto, pelo Lema de Fatou, temos que

$$\begin{aligned} \| \mathcal{S} - \pi(\mathcal{B})X_t \|^2 &= \mathbb{E} (|\mathcal{S} - \pi(\mathcal{B})X_t|^2) = \mathbb{E} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \pi_j X_{t-j} \right|^2 \right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \pi_j X_{t-j} \right|^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Assim, o limite \mathcal{S} e $\pi(\mathcal{B})X_t$ são iguais com probabilidade um (isto é, quase certamente). □

Proposição 1.24. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) causal (ver proposição 1.18). Então a função de autocovariância $\gamma_x(h)$, $h \in \mathbb{Z}_{\leq}$ é dada por:*

$$\gamma_x(h) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_j \Psi_{j+h}, \quad (1.28)$$

onde $\{\Psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\leq}}$ são os coeficientes da representação média móvel infinita dados pela equação (1.24).

Demonstração: Ver Bisognin et al. (2010).

1.5 Ergodicidade

Nesta seção analisamos a ergodicidade dos processos fracionalmente integrados do tipo GARMA(p, u, λ, q) e k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$). Um processo estocástico ergódico tem a propriedade de que suas médias amostrais convergem com probabilidade um para a média do processo se esta for finita.

Teorema 1.25. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo fracionalmente integrado, como na Definição 1.2, com média $\mu = 0$, onde $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco. Se $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estacionário e causal então, é ergódico.*

Demonstração: Ver Bisognin (2007), teorema 3.6.

Como consequência do Teorema 1.25, temos os Corolários 1.26 e 1.27 abaixo, os quais apresentam, respectivamente, a ergodicidade dos processos k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) e GARMA (p, u, λ, q).

Corolário 1.26. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo GARMA(p, u, λ, q) (ver Definição 1.10), estacionário e causal. Então, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é ergódico.*

Corolário 1.27. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) (ver Definição 1.21), estacionário e causal. Então, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é ergódico.*

Capítulo 2

Estimação de parâmetros

Uma *série temporal*, denotada por $\{X_t\}_{t=1}^n$, é uma sequência de n observações de um fenômeno aleatório, medido ao longo do tempo ou gerada a partir de um processo estocástico. Na análise de série temporais um objetivo é prever valores futuros. Para isto, necessitamos de modelos que sejam capazes de descrever e prever adequadamente esta série temporal.

A metodologia do estudo dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) consiste em estimar os parâmetros utilizando alguns dos estimadores propostos na literatura de séries temporais que apresentam longa dependência. Em seguida, verificamos se o modelo ajustado é o mais adequado para a série temporal em estudo. Para isto, utilizamos alguns critérios de seleção de modelo. E, finalmente, fazer previsões da série (para o caso dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), veja o capítulo 3).

Nesta seção, apresentamos diversos métodos de estimação para os parâmetros dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

Dentre os estimadores paramétricos, os quais estimam todos parâmetros do modelo, citamos o estimador proposto por Fox e Taquq (1986) o qual utiliza uma aproximação, proposta por Whittle (1951), para a matriz de autocovariância do processo e o estimador de máxima verossimilhança exato, uma proposta deste trabalho.

No caso dos estimadores semiparamétricos, apenas os parâmetros de longa dependência são estimados, pois, da forma como são definidos, necessitam da localização das frequências de Gegenbauer para a estimação dos demais parâmetros.

No caso dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), para estimar as frequências de Gegenbauer e os parâmetros de longa dependência, teríamos que expandir, em série de potência, o termo $\ln[2(\cos(w) - u_j)]^2$, para cada $j = 1, \dots, k$, que aparece na expressão (2.1) a seguir. Teríamos que truncar cada série em um certo valor m_j , para $j = 1, \dots, k$. Em seguida, aplicaríamos o método dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros, o que seria extremamente complicado e inviável.

Tendo em mente esta dificuldade, Yajima (1996) propõe um estimador

gráfico para as frequências de Gegenbauer (ver Seção 2.1 a seguir).

2.1 Estimação das frequências de Gegenbauer

A seguir, apresentamos um estimador para as frequências de Gegenbauer para um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ dado pela expressão (1.21) cuja função densidade espectral possui k singularidades, nas frequências $G_j = \cos^{-1}(u_j)$, para $j = 1, \dots, k$ as quais são chamadas de frequências de Gegenbauer. A função densidade espectral possui a seguinte expressão

$$f_X(w) = f_U(w) \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - u_j)]^{-2\lambda_j}, \quad (2.1)$$

onde

$$f_U(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2}, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi]. \quad (2.2)$$

Os parâmetros u_j e λ_j , para todo $j = 1, \dots, k$, satisfazem as condições da Proposição 1.16.

Seja $\{V_\nu\}_{\nu=1}^k$ uma sequência de intervalos definidos como segue: para todo $\epsilon > 0$ fixado e para todo $\nu = 1, \dots, k$,

$$V_\nu = (G_\nu - a_\nu, G_\nu - \epsilon) \cup (G_\nu + \epsilon, G_\nu + b_\nu),$$

onde $\{a_\nu\}_{\nu=1}^k$ e $\{b_\nu\}_{\nu=1}^k$ são sequências reais, tais que $\{V_\nu\}_{\nu=1}^k$ é uma cobertura do intervalo $(0, \pi]$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, isto é,

$$\bigcup_{\nu=1}^k V_\nu = (0, \pi] \setminus \{G_1, \dots, G_k\}.$$

Definição 2.1. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ dado pela expressão (1.21). O estimador para as frequências de Gegenbauer G_j , denotado por \widehat{G}_j , para $j = 1, \dots, k$ é definido por:

$$\widehat{G}_j = \frac{2\pi}{n} \operatorname{argmax}_{w \in V_j} I(w). \quad (2.3)$$

onde $I(w)$ é a função periodograma dada por A.5.

Suposição 2.2. As funções $f_X(\cdot)$ e $f_U(\cdot)$ satisfazem as seguintes afirmações:

- i) $f_X(\cdot)$ é uma função par;
- ii) $f_U(\cdot)$ é uma função positiva no intervalo $[0, \pi]$;

iii) para todo $\nu = 1, \dots, k$ e $w \in V_\nu$, $f_\nu(\cdot)$ satisfaz

$$\left| \frac{f'_\nu(w)}{f_\nu(w)} \right| = \mathcal{O}(|w - G_\nu|^{-1}),$$

para todo $w \in (0, \pi]$. Para a definição de $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ ver no anexo A.

O seguinte teorema foi estabelecido por Yajima (1996).

Teorema 2.3. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) com média $\mu = 0$, cuja função densidade espectral satisfaz a equação (2.1). Sob a Suposição 2.2, para todo $\alpha \in (0, 1)$, quando $n \rightarrow \infty$, temos que*

$$n^\alpha(\widehat{G}_j - G_j) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{para cada } j = 1, \dots, k.$$

2.1.1 Especificação incorreta de k

Na estimação das frequências de Gegenbauer e do parâmetro de longa dependência, Collet et al. (2003) analisa dois casos particulares.

Assumindo que existam duas frequências a serem estimadas, mas no gráfico da função periodograma de uma série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$, observa-se apenas um pico, o que leva a uma incorreta especificação do modelo. Collet et al. (2003) considera um primeiro caso quando as frequências estão distantes uma da outra, isto é, $|G_1 - G_2| > 0$ e um segundo caso quando as frequências estão próximos um do outro, isto é, $|G_1 - G_2| \sim 0$.

Observação 2.4. Para a situação quando $|G_1 - G_2| \sim 0$, Collet et al. (2003), analisa o vício do estimador proposto por Fox e Taquq (1986), como pode ser visto nos itens a seguir.

i) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) definido através da expressão (1.21). Considere a situação do Caso II e seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal gerada a partir do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Assumimos que ajustamos um processo $(k-1)$ -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) à série temporal. Seja $\widehat{\lambda}_j$ o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro λ_j , para $j = 1, \dots, p, p+1, \dots, k$. Então, o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro de longa dependência λ_p é tal que $\mathbb{E}(\widehat{\lambda}_p) > \lambda_p$.

ii) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com frequências de Gegenbauer λ_j , $j = 1, \dots, k$. Assumimos que este processo é um $(k+1)$ -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com λ_j , $j = 1, \dots, k$ e λ_{k+1} frequências de Gegenbauer, tais que $\lambda_{k+1} \neq \lambda_j$, para todo $j = 1, \dots, k$. Então, o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro de longa dependência λ_j , denotado por $\widehat{\lambda}_j$, para $j = 1, \dots, k+1$, é tal que $\mathbb{E}(\widehat{\lambda}_j) = \lambda_j$, para $j = 1, \dots, k$ e $\mathbb{E}(\widehat{\lambda}_{k+1}) = 0$.

Collet et al. (2003) utilizou o estimador de Whittle para estimar \mathbf{u} e $\boldsymbol{\lambda}$. Neste trabalho, utilizamos todos os estimadores propostos de forma a ilustrar as duas situações.

Situação I: $|G_1 - G_2| > 0$

Considere uma série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ gerada a partir de um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, onde $p = 0 = q$, $\mathbf{u} = (0.9, 0.2)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.4, 0.15)$ e tamanho amostral $n = 2000$. A Figura 2.1 apresenta a função periodograma da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$.

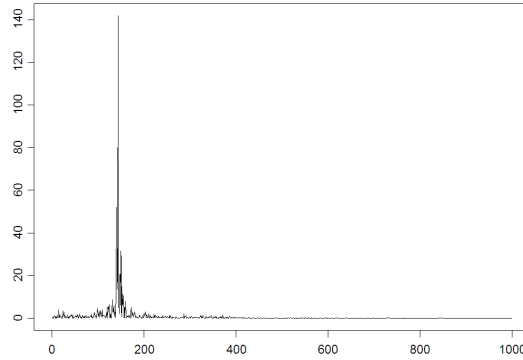


Figura 2.1: Função periodograma da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ gerada a partir de um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com $\boldsymbol{\lambda} = \{0.4, 0.15\}$, $\mathbf{u} = \{0.9, 0.2\}$, $p = 0 = q$, $n = 2000$.

Observe que embora a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ seja gerada de um processo com dois fatores, visualmente, a função periodograma apresenta apenas um pico que se destaca ($\operatorname{argmax}_{w \in V} I(w) = 144$, onde $V = (1, \dots, 1000)$). Utilizando o estimador das frequências de Gegenbauer proposto na Definição 2.1, estimamos $\widehat{G}_1 = 1.101354$, isto é, $\widehat{u}_1 = 0.8994053$. Dessa forma, baseado na teoria de processos k -Factor GARMA, devemos ajustar um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com $k = 1$. Usando o estimador de Whittle (ver Seção 2.2.3), obtemos as seguintes estimativas para os parâmetros $\widehat{\lambda}_1 = 0.3956$ e $\widehat{u}_1 = 0.8994$ os quais são bem próximos dos valores reais $\lambda_1 = 0.4$ e $u_1 = 0.9$.

Diferenciando a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ utilizando o filtro $(1 - 2\widehat{u}_1 B + B^2)^{-\widehat{\lambda}_1}$, onde $\widehat{\lambda}_1 = 0.3956$ e $\widehat{u}_1 = 0.8994$, obtemos a série temporal diferenciada $\{Y_t\}_{t=1}^n$, isto é,

$$(1 - 2\widehat{u}_1 B + B^2)^{\widehat{\lambda}_1} X_t = Y_t, \quad \text{para todo } t = 1, \dots, n.$$

As funções periodograma e autocorrelação amostral da série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$ são apresentadas, respectivamente, pelas Figuras 2.2(a) e 2.2(b).

Observando a função de autocorrelação da série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$ (ver Figura 2.2(b)), vemos que não se trata de um ruído branco. Analisando a função periodograma (ver Figura 2.2(a)) percebe-se que a mesma ainda apresenta um

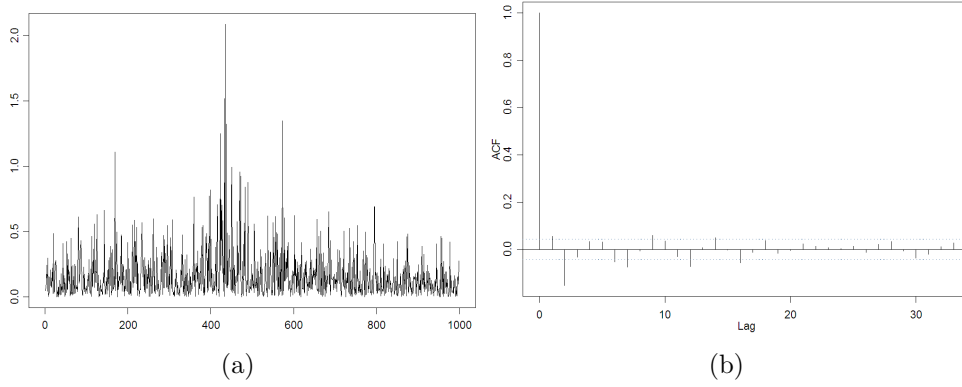


Figura 2.2: Resíduos da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ diferenciada pelo filtro $(1 - 2\hat{u}_1B + B^2)^{-\hat{\lambda}_1}$, onde $\hat{\lambda}_1 = 0.3956$ e $\hat{u}_1 = 0.8994$, obtendo assim a série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$: (a) função periodograma; (b) função de autocorrelação amostral.

pico que se destaca ($\operatorname{argmax}_{w \in V} I(w) = 436$, onde $V = (1, \dots, 1000)$). Utilizando o estimador das frequências de Gegenbauer, estimamos $\hat{G}_2 = 1.369734$, isto é, $\hat{u}_2 = 0.19971$. Baseado na teoria de processos k -Factor GARMA, novamente devemos ajustar um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com $k = 1$ na série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$. Usando o estimador de Whittle, obtemos as seguintes estimativas para os parâmetros $\hat{\lambda}_2 = 0.1499$ e $\hat{u}_2 = 0.1990$ os quais são bem próximos dos valores reais $\lambda_1 = 0.15$ e $u_1 = 0.2$.

Diferenciando a série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$ utilizando o filtro $(1 - 2\hat{u}_2B + B^2)^{-\hat{\lambda}_2}$, onde $\hat{\lambda}_2 = 0.1499$ e $\hat{u}_2 = 0.1990$, obtemos a série temporal diferenciada $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$, isto é,

$$(1 - 2\hat{u}_2B + B^2)^{\hat{\lambda}_2} X_t = \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t = 1, \dots, n.$$

As funções periodograma e autocorrelação amostral da série temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$ são apresentadas, respectivamente, pelas Figuras 2.3(a) e 2.3(b).

Analisando as funções periodograma e autocorrelação amostral da série temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$, nota-se que se trata de um resíduo. Portanto o processo ajustado a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ é um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, onde $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (0.3956, 0.1499)$, $\hat{\mathbf{u}} = (0.8994, 0.1990)$ e $p = 0 = q$.

Situação II: $|G_1 - G_2| \sim 0$

Considere uma série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ gerada a partir de um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, onde $p = 0 = q$, $\mathbf{u} = (0.9, 0.87)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.45, 0.15)$ e tamanho amostral $n = 2000$. A Figura 2.4 apresenta a função periodograma da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$.

Da mesma forma que no caso anterior, observa-se que embora a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ seja gerada de um processo com dois fatores, visualmente, a função periodograma apresenta apenas um pico que se destaca

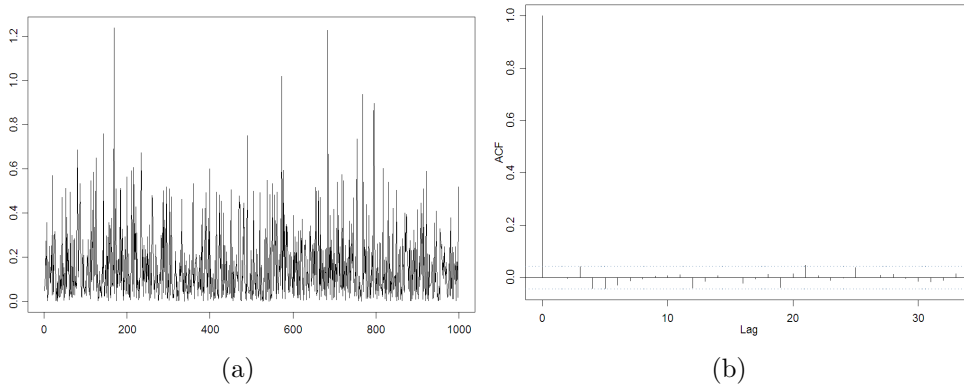


Figura 2.3: Resíduos da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ diferenciada pelo filtro $(1 - 2\hat{u}_2B + B^2)^{-\hat{\lambda}_2}$, onde $\hat{\lambda}_2 = 0.1499$ e $\hat{u}_2 = 0.1990$, obtendo assim a série temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$: (a) função periodograma; (b) função de autocorrelação amostral.

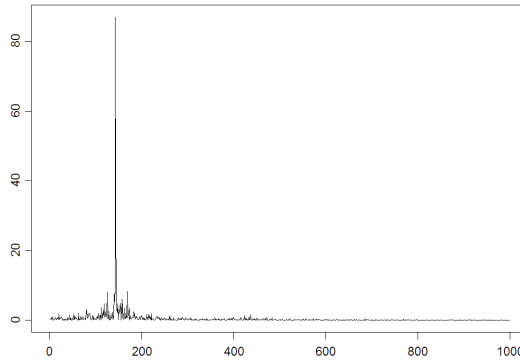


Figura 2.4: Função periodograma da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ gerada a partir de um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com $\mathbf{u} = (0.9, 0.87)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.45, 0.15)$, $p = 0 = q$, $n = 2000$.

($\operatorname{argmax}_{w \in V} I(w) = 144$, onde $V = (1, \dots, 1000)$). Utilizando o estimador das frequências de Gegenbauer proposto na Definição 2.1, estimamos $\hat{G}_1 = 1.101354$, isto é, $\hat{u}_1 = 0.8994053$. Dessa forma, baseado na teoria de processos k -Factor GARMA, devemos ajustar um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com $k = 1$. Usando o estimador de Whittle (ver Seção 2.2.3), obtemos as seguintes estimativas para os parâmetros $\hat{\lambda}_1 = 0.5893$ e $\hat{u}_1 = 0.8994$. Este resultado de estimação indica que a série temporal é não estacionária (ver Proposição 1.16).

Diferenciando a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ utilizando o filtro $(1 - 2\hat{u}_1B + B^2)^{-\hat{\lambda}_1}$, onde $\hat{\lambda}_1 = 0.5893$ e $\hat{u}_1 = 0.8994$, obtemos a série temporal diferenciada $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$, isto é,

$$(1 - 2\hat{u}_1B + B^2)^{\hat{\lambda}_1} X_t = \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t = 1, \dots, n.$$

Analisando as funções periodograma e autocorrelação amostral da série

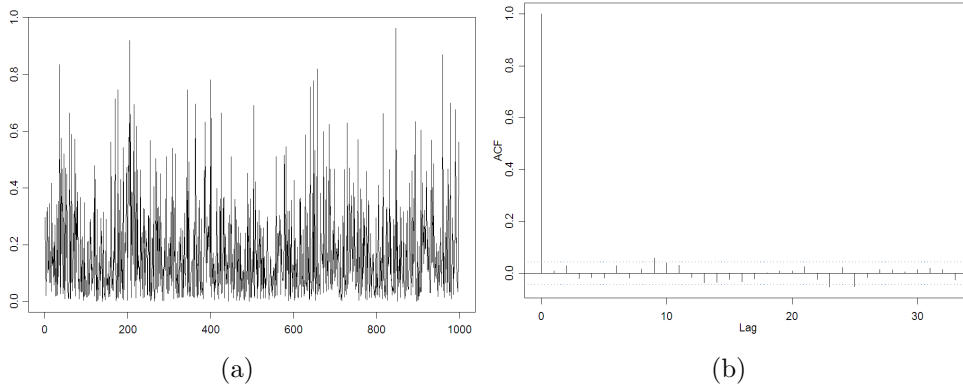


Figura 2.5: Resíduos da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ diferenciada pelo filtro $(1 - 2\hat{u}_1B + B^2)^{-\hat{\lambda}_1}$, onde $\hat{\lambda}_1 = 0.5893$ e $\hat{u}_1 = 0.8994$, obtendo assim a série temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$: (a) função periodograma; (b) função de autocorrelação amostral.

temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$, nota-se que se trata de um resíduo. Portanto o processo ajustado a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ é um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, onde $\hat{\lambda}_1 = 0.5893$, $\hat{u}_1 = 0.8994$ e $p = 0 = q$.

Supondo que devemos ajustar um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com dois fatores e com $p = 0 = q$, obtemos as estimativas $\mathbf{u} = (0.8994, 0.8699)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.4499, 0.1499)$.

Diferenciando a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ utilizando o filtro $\prod_{j=1}^2 (1 - 2\hat{u}_jB + B^2)^{-\hat{\lambda}_j}$, onde $\mathbf{u} = (0.8994, 0.8699)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.4499, 0.1499)$, obtemos a série temporal diferenciada $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$, isto é,

$$\prod_{j=1}^2 (1 - 2\hat{u}_jB + B^2)^{\hat{\lambda}_j} X_t = \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t = 1, \dots, n.$$

Analisando as funções periodograma e autocorrelação amostral da série temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$ (ver Figuras 2.6(a) e 2.6(b)), nota-se que se trata de um resíduo.

Observamos que neste caso a estimação passo a passo, como na Situação I, não funciona.

Observação 2.5. Collet et al. (2003) propõem um procedimento para detectar o número k de picos na função densidade espectral de um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$. Neste mesmo artigo, os autores definem um critério de parada para o procedimento de estimação de k , fornecem o teste de Kolmogorov e Smirnov (ver Brockwell e Davis, 1991).

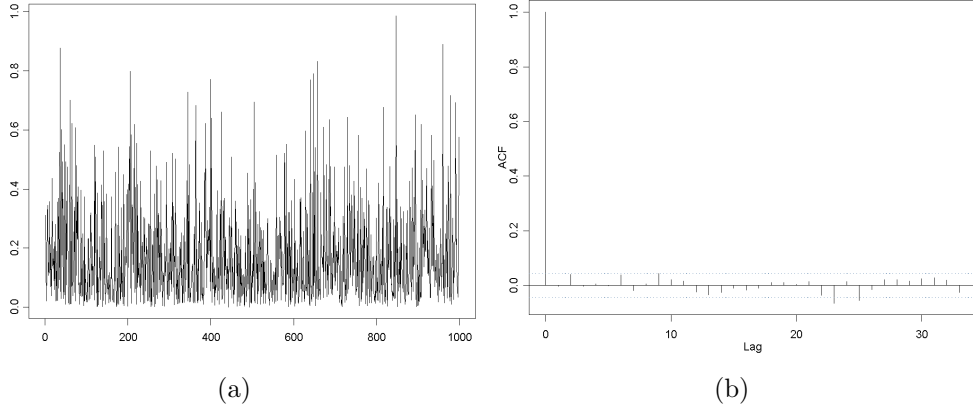


Figura 2.6: Resíduos da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ diferenciada pelo filtro $\prod_{j=1}^2 (1 - 2\hat{u}_j B + B^2)^{-\hat{\lambda}_j}$, onde $\mathbf{u} = (0.8994, 0.8699)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.4499, 0.1499)$, obtendo assim a série temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$: (a) função periodograma; (b) função de autocorrelação amostral.

2.2 Estimação

A seguir, apresentamos os estimadores para os parâmetros dos processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$.

2.2.1 O estimador *GPH*

Nesta seção, apresentamos o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), o qual baseia-se no método de regressão utilizando a função periodograma. A seguir, descrevemos o procedimento.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com média $\mu = 0$, cuja função densidade espectral é dada pela expressão (2.1).

Os parâmetros $u_j = \cos(G_j)$, para $j = 1, \dots, k$, são previamente estimados por $\hat{u}_j = \cos(\hat{G}_j)$, onde \hat{G}_j , $j = 1, \dots, k$, são dados pela expressão (2.3). Uma vez estimados os parâmetros u_j , a função densidade espectral para este processo pode ser escrita como

$$f_X(w) = f_U(w) \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - \hat{u}_j)]^{-2\lambda_j}. \quad (2.4)$$

Aplicando a função logarítmica a ambos os lados da equação (2.4) temos

$$\ln(f_X(w)) = \ln(f_U(w)) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln[2(\cos(w) - \hat{u}_j)]^2. \quad (2.5)$$

Adicionando $\ln(f_U(0))$ e $\ln(I(w))$, a ambos os lados da equação (2.5), onde $I(\cdot)$ é a função periodograma dada pela expressão (A.5), obtemos

$$\begin{aligned}\ln(I(w)) &= \ln(f_U(0)) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln[2(\cos(w) - \hat{u}_j)]^2 + \ln \left[\frac{f_U(w)}{f_U(0)} \right] \\ &\quad + \ln \left[\frac{I(w)}{f_X(w)} \right].\end{aligned}\quad (2.6)$$

Seja $B = \{0, 1, \dots, g(n) \mid \nu \neq v_j = \operatorname{argmax}_{w \in V_j} I(w), j = 1, \dots, k\}$, onde $g(n)$ é tal que $g(n) \rightarrow \infty$ e $\frac{g(n)}{n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Substituindo a frequência w pelas frequências de Fourier $w_\nu = \frac{2\pi\nu}{n}$, $\nu \in B$, obtemos uma forma aproximada para a equação (2.6), dada por

$$\ln(I(w_\nu)) \sim \ln(f_U(0)) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln[2(\cos(w_\nu) - \hat{u}_j)]^2 + \ln \left[\frac{I(w_\nu)}{f_X(w_\nu)} \right]. \quad (2.7)$$

O termo $\ln \left[\frac{f_U(w)}{f_U(0)} \right]$, que aparece na equação (2.6), é desprezível se comparado com os outros termos daquela equação, sendo então desconsiderado (ver Geweke e Porter-Hudak, 1983). Desta forma, podemos observar que a equação (2.7) é uma forma aproximada de uma equação de regressão linear múltipla dada por

$$y_\nu \sim \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{\nu j} + \epsilon_\nu, \quad \text{para todo } \nu \in B, \quad (2.8)$$

onde

$$y_\nu = \ln(I(w_\nu)), \quad x_{\nu j} = \ln[2(\cos(w_\nu) - \hat{u}_j)]^2, \quad (2.9)$$

$$\epsilon_\nu = \ln \left[\frac{I(w_\nu)}{f_X(w_\nu)} \right] + c, \quad \beta_0 = \ln f_\varepsilon(0) - c, \quad c = \mathbb{E} \left(\ln \left[\frac{I(w_\nu)}{f_X(w_\nu)} \right] \right), \quad (2.10)$$

$$\beta_j = -\lambda_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, k,$$

com ϵ_ν variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância constante.

Geweke e Porter-Hudak (1983) propõe o estimador semiparamétrico dos mínimos quadrados para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, os quais minimizam a função perda dada pela expressão (2.20) (ver Seção 2.3) com $l = k$ onde as variáveis aleatórias são dadas por (2.9) e (2.10).

Dessa forma, os estimadores do vetor de parâmetro $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ estimados pelo método dos mínimos quadrados serão denotados, respectivamente, por $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{GPH.MQ} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k)_{GPH.MQ}$.

Os estimadores de $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ baseados na regressão dada por (2.8) e no procedimento de estimação robusta são denotados, respectivamente, por $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{GPH.MPQ} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_k)_{GPH.MPQ}$ e $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{GPH.MM} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_k)_{GPH.MM}$.

Para a obtenção do estimador robusto MPQ , utilizamos a função perda $\mathfrak{L}_2(g(n))$, dada pela expressão (2.23), enquanto que para os estimadores MM utilizamos a função perda $\mathfrak{L}_3(g(n))$ dada pela equação (2.24).

2.2.2 O estimador BA

Este estimador é baseado no uso da função periodograma suavizado de covariâncias (ver expressão (A.6)) em vez da função periodograma no estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Essa alteração decorre do fato de que a função periodograma é um estimador não viciado, mas não consistente para a função densidade espectral de um processo. No entanto, a função periodograma suavizado de covariâncias é um estimador não viciado e consistente para ela, cuja expressão é dada por

$$I_s(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq m} \Lambda\left(\frac{k}{m}\right) \widehat{\gamma}_x(k) e^{-ikw}, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi], \quad (2.11)$$

onde $\widehat{\gamma}_x(\cdot)$ denota a função de autocovariância amostral dada pela expressão (A.4). A função $\Lambda(\cdot)$ é a função peso ou núcleo, a qual satisfaz as condições A.i)-A.iii), onde m é o *ponto de truncamento*, que é definido por $m = n\beta$, com $0 < \beta < 1$ e n é o tamanho amostral. Neste trabalho consideramos $\beta = 0.9$.

O estimador BA é obtido substituindo-se a função periodograma pela função periodograma suavizado de covariâncias, dado em (2.11). Assim, obtemos

$$\ln(I_s(w_\nu)) \sim \ln(f_U(0)) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln[2(\cos(w_\nu) - \widehat{u}_j)]^2 + \ln \left[\frac{I_s(w_\nu)}{f_x(w_\nu)} \right]. \quad (2.12)$$

onde $w_\nu = \frac{2\pi\nu}{n}$, $j \in B$ são as frequências de Fourier e $f_U(\cdot)$ é dada pela equação (2.2).

Neste trabalho, utilizamos a função janela de Bartlett, cuja expressão é dada por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Maiores detalhes sobre a função periodograma suavizado de covariâncias e janelas espectrais podem ser encontrados em Brockwell e Davis (1991), Morettin e Toloi (2004) e Koopmans (1974).

A equação (2.12) pode ser vista como uma equação de regressão linear múltipla. Assim, podemos compará-la com a equação (2.7), apenas substituindo a função periodograma pela função periodograma suavizado de covariâncias nas equações (2.9)-(2.10).

O estimador para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ pelo método dos mínimos quadrados, utilizando a função periodograma suavizado de covariâncias, é denotado por $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{BA.MQ} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_k)_{BA.MQ}$. Este estimadores são não viciados. Da mesma forma que o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), aplicando as metodologias robustas *MQP* e *MM* à equação de regressão (2.12), obtemos os estimadores, baseados nas metodologia robustas, para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ denotados, respectivamente, por $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{BA.MPQ} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_k)_{BA.MPQ}$ e $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{GPH.MM} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_k)_{BA.MM}$.

2.2.3 O Estimador *FT*

O estimador de máxima verossimilhança, proposto por Fox e Taqqu (1986), utiliza uma aproximação para a matriz de autocovariância sugerida por Whittle (1951). Fox e Taqqu (1986) apresentam condições que permitem que este estimador, para uma sequência com longa dependência, seja consistente e tenha distribuição assintoticamente normal. Sowell (1992) propõe o estimador de máxima verossimilhança exata para os processos ARFIMA(p, d, q). As condições necessárias para a consistência e normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança exato foram apresentadas por Dahlhaus (1989). Ooms (1995) apresenta alguns resultados para modelos com longa dependência sazonais onde compara os estimadores de máxima verossimilhança exata, proposto por Sowell (1992), com os de máxima verossimilhança aproximada, proposto por Fox e Taqqu (1986) e ainda com o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983).

A seguir, apresentamos uma breve explicação sobre os estimadores de máxima verossimilhança.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) com média $\mu = 0$, cuja função densidade espectral é dada pela expressão (2.1).

Seja $Q(\boldsymbol{\eta})$ a função dada por

$$Q(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(w)}{f_X(w; \boldsymbol{\eta})} dw, \quad (2.13)$$

onde $f_X(\cdot; \boldsymbol{\eta})$ é a função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada em (2.4), $\boldsymbol{\eta}$ é o vetor de parâmetros desconhecidos que desejamos estimar e $I(\cdot)$ é a função periodograma dada pela expressão (A.5). No caso dos

processos k-Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, o vetor de parâmetros é dado por $\boldsymbol{\eta} = (\phi_1, \dots, \phi_p, u_1, \dots, u_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2)$. Então, o estimador de máxima verossimilhança aproximado, denotado por W , é o valor de $\boldsymbol{\eta}$ que minimiza a função $Q(\cdot)$ (ver Whittle, 1951).

Computacionalmente, o estimador de máxima verossimilhança aproximado é obtido minimizando a seguinte função (na forma discreta)

$$\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2n} \sum_{j \in B_1} \left(\ln f_X(w_j, \boldsymbol{\eta}) + \frac{I(w_j)}{f_X(w_j, \boldsymbol{\eta})} \right), \quad (2.14)$$

a qual é uma aproximação da função $Q(\cdot)$, onde $w_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j \in B_1 = \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \mid \nu \neq \nu_\ell = \operatorname{argmax}_{w \in V_\ell} I(w), \ell = 1, \dots, k\}$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x .

Temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln[f_X(w)] dw = 2\pi \ln \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \right),$$

onde $f_X(\cdot)$ é a função densidade espectral dos processos k-Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ dada pela equação (1.22) (ver Lema 1.17).

Portanto, o estimador de máxima verossimilhança aproximado consiste em encontrar o valor de $\boldsymbol{\eta}$ que minimiza a função

$$\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2n} \sum_{j \in B_1} \frac{I(w_j)}{f_X(w_j, \boldsymbol{\eta})}. \quad (2.15)$$

Um estudo mais completo sobre este estimador pode ser encontrado Fox e Taqqu(1986) para os processos ARFIMA(p, d, q) e em Bisognin(2007) para os processos SARFIMA(p, d, q)x(P, D, Q)_s.

2.2.4 O estimador de máxima verossimilhança exato

O estimador de máxima verossimilhança exato é obtido maximizando-se a função de verossimilhança, isto é, maximizar a seguinte expressão em relação ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta}$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\mathcal{Q}_n(\boldsymbol{\eta})| - \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathcal{Q}_n^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{x} \quad (2.16)$$

onde $\mathcal{Q}_n(\boldsymbol{\eta})$ é a matriz de Toeplitz contendo os valores da função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ cujos elementos são dados por $\{\mathcal{Q}_n(\boldsymbol{\eta})\}_{ij} = \gamma_X(|i-j|)$, $1 \leq i, j \leq n$ e $\boldsymbol{\eta} = (\phi_1, \dots, \phi_p, u_1, \dots, u_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2)$.

Observação 2.6. Dahlhaus (1989) provou que, para um processo gaussiano com longa dependência, o limite de Cramer-Rao é obtido pelo EMVE. Este fato está intrinsicamente ligado à eficiência deste estimador.

Tabela 2.1: Comparação do tempo, em segundos, da inversão de matrizes no S-Plus utilizando as rotinas da decomposição de Choleski (Chol), Solve e a rotina Ginverse

Tamanho e tipo da matriz	Rotina		
	Chol	Solve	Ginverse
1000 (0.5)	8.985	18.519	23.687
2000 (0.6)	87.687	174.688	167.844
1500 (0.4)	40.125	73.875	76.784
500 (0.4)	1.344	3.187	1.266
800 (0.4)	4.906	7.734	11.922
800 (0.5)	4.578	7.078	11.766

É fácil notar que tanto o estimador de verossimilhança exato como o estimador proposto por Fox e Taqqu estimam todos os parâmetros do processo $X_{tt \in \mathbb{Z}}$.

Na inversão da matriz $\mathcal{Q}_n(\boldsymbol{\eta})$ utilizamos a decomposição de Choleski pois a mesma é simétrica e positiva definida. Este procedimento se mostrou mais rápido em alguns testes de inversão de matrizes comparado ao método da inversa generalizada e a inversa comum de uma matriz (todas rotinas disponíveis no software S-Plus). Os resultados obtidos em segundos estão na tabela (2.1) a seguir. Observou-se que a decomposição de Choleski é o método mais rápido para obter a matriz inversa de $\mathcal{Q}_n(\boldsymbol{\eta})$.

Para a tabela (2.1) considere: o a_{ij} da matriz será $a_{ij} = (.)^{|i-j|}$, onde $(.)$ é dado pelo número entre parênteses dado na primeira coluna da matriz; o tamanho da coluna é o número de linhas e colunas (i.e. a matriz utilizada é quadrada); a rotina Chol calcula uma matriz triangular que é a decomposição de Choleski de uma matriz simétrica e positiva definida e, após utilizá-la, foi calculada a inversa de uma matriz triangular utilizando um algoritmo próprio; a rotina Solve calcula a inversa de uma matriz dada a representação de uma matriz quadrada não-singular como argumento; a rotina Ginverse calcula a matriz inversa generalizada de Moore-Penrose dada uma matriz qualquer.

2.3 Tópicos de Regressão

A seguir, descrevemos os procedimentos de estimação através do método dos mínimos quadrados e da metodologia robusta. Inicialmente, definimos o modelo de regressão linear geral com l variáveis independentes X_k , $1 \leq k \leq l$, e uma variável aleatória Y dependente, o qual possui a seguinte forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_l X_l + \epsilon. \quad (2.17)$$

Assumindo $g(n)$ independentes observações de Y associadas aos valores x_k , para $k \in \{1, \dots, l\}$, o modelo (2.17) apresenta-se como

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \dots + \beta_l X_{1l} + \epsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \dots + \beta_l X_{2l} + \epsilon_2 \\ &\vdots \\ Y_{g(n)} &= \beta_0 + \beta_1 X_{g(n)1} + \dots + \beta_l X_{g(n)l} + \epsilon_{g(n)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde os erros ϵ_j , satisfazem as seguintes suposições, para todo $j \in \{1, \dots, g(n)\}$,

- i) $\mathbb{E}(\epsilon_j) = 0$,
- ii) $\text{Var}(\epsilon_j) = \sigma_\epsilon^2$,
- iii) $\text{Cov}(\epsilon_\iota, \epsilon_k) = 0$, se $\iota \neq k$.

Em notação matricial, o sistema (2.18) é dado por

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{g(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1l} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{g(n)1} & X_{g(n)2} & \dots & X_{g(n)l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{g(n)} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

ou seja,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

onde \mathbf{Y} é uma matriz $g(n) \times 1$, \mathbf{X} é uma matriz $g(n) \times (l + 1)$, $\boldsymbol{\beta}$ é uma matriz $(l + 1) \times 1$ e $\boldsymbol{\epsilon}$ é uma matriz $g(n) \times 1$.

O estimador de $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)'$ pelo método dos mínimos quadrados, denotado neste trabalho por MQ , é o valor $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \dots, \widehat{\beta}_l)' \in \mathbb{R}^{l+1}$ que minimiza a função perda

$$\mathfrak{L}_1(g(n)) = \sum_{j=1}^{g(n)} r_j^2, \quad (2.20)$$

onde os resíduos r_j são dados por

$$r_j = y_j - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_{j1} - \dots - \widehat{\beta}_l x_{jl}. \quad (2.21)$$

Pela teoria de regressão linear, se a matriz \mathbf{X} possui posto completo, isto é, quando $(l + 1) \leq g(n)$, o estimador dos mínimos quadrados de $\boldsymbol{\beta}$, é dado por

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}, \quad (2.22)$$

cuja esperança e variância são dadas por

$$\mathbb{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} \quad \text{e} \quad \text{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma_\epsilon^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

Portanto, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é um estimador não viciado.

Para maiores detalhes sobre regressão linear múltipla referenciamos o leitor a Draper e Smith (1981).

Os estimadores obtidos através do procedimento *MQ*, sob a hipótese de normalidade dos erros, são consistentes e tem mínima variância entre todos os estimadores não viciados. A presença de *outliers* e pontos de alavanca, ou mesmo a perda da hipótese de normalidade dos erros são responsáveis por um considerável vício e ineficiência dos estimadores *MQ* (ver Huber, 1981 e Rousseeuw e Leroy, 2003).

Outro procedimento utilizado para estimar o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)$ são os procedimentos de estimação robusta, os quais apresentam estimadores que não são fortemente afetados por *outliers*.

Os procedimentos de estimação robusta são indicados quando os dados contém uma certa porcentagem de *outliers*. Por isso, definimos o *ponto de ruptura* destes estimadores. Esta definição é um versão finita do conceito de ponto de ruptura, introduzido por Donaho e Huber (1983).

Seja \mathbf{Z} uma amostra de tamanho $g(n)$, dada por

$$\mathbf{Z} = \{(1, x_{11}, \dots, x_{1l}, y_1), \dots, (1, x_{g(n)1}, \dots, x_{g(n)l}, y_{g(n)})\},$$

e \mathbf{T} um estimador dos coeficientes de regressão $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)$, isto é, $\mathbf{T}(\mathbf{Z}) = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$.

Supomos que \tilde{m} valores arbitrários (aberrantes ou *outliers*) substituam \tilde{m} observações originais de \mathbf{Z} , produzindo uma amostra contaminada \mathbf{Z}' .

Denotamos por $\text{vício}(\tilde{m}; \mathbf{T}, \mathbf{Z})$ o vício máximo causado por tal contaminação, isto é,

$$\text{vício}(\tilde{m}; \mathbf{T}, \mathbf{Z}) = \sup_{\mathbf{Z}'} \|\mathbf{T}(\mathbf{Z}') - \mathbf{T}(\mathbf{Z})\|,$$

onde o supremo é sobre todas as possíveis amostras \mathbf{Z}' e $\|\cdot\|$ representa a norma Euclideana. Se o $\text{vício}(\tilde{m}; \mathbf{T}, \mathbf{Z})$ é infinito, isto significa que os \tilde{m} *outliers* podem ter um efeito arbitrariamente grande sobre \mathbf{T} .

Assim, para amostras de tamanho $g(n)$ finitas, o *ponto de ruptura* do estimador \mathbf{T} , utilizando a amostra \mathbf{Z} , é definido como

$$\epsilon^* := \epsilon^*(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = \min \left\{ \frac{m}{g(n)}; \text{vício}(\tilde{m}; \mathbf{T}, \mathbf{Z}) \text{ é infinito} \right\}.$$

Em outras palavras, o *ponto de ruptura* é a menor porcentagem de dados contaminados que pode fazer com que o estimador tome um valor alto e arbitrariamente anormal (ver Hampel, 1974). No caso dos estimadores MQ , Rousseeuw e Leroy (2003) observaram que um *outlier* é suficiente para que o estimador tenha um alto vício. Portanto, seu *ponto de ruptura* é igual a

$$\epsilon^* = \frac{1}{g(n)},$$

o qual converge a zero, quando o tamanho da amostra cresce. Assim, podemos dizer que os estimadores obtidos pelo método MQ possuem ponto de ruptura de 0%. Isto novamente reflete a extrema sensibilidade destes estimadores na presença de algum ponto atípico.

Em vista deste problema, apresentamos os procedimentos de estimação robusta.

No procedimento de estimação robusta para $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)$, ao invés de minimizarmos a soma dos quadrados dos resíduos (ver equação (2.20)), minimizamos uma versão robusta da dispersão dos resíduos. Um estimador pode ser considerado robusto se

- (i) ele é altamente eficiente sob a verdadeira distribuição dos dados e razoavelmente eficiente numa vizinhança da mesma;
- (ii) se possui alto (0.5) ponto de ruptura e portanto não fornece estimativas distorcidas sob a presença de alguns pontos atípicos;
- (iii) se ele possui uma função de influência contínua e limitada.

Um procedimento de estimação robusta é o dos *mínimos quadrados podados* (denotados aqui por MQP), proposto por Rousseeuw (1984). Os estimadores baseados na regressão (2.19) e obtidos através do procedimento MQP são os valores $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_l) \in \mathbb{R}^{l+1}$ que minimizam a função perda

$$\mathfrak{L}_2(g(n)) = \sum_{j=1}^{m^*} (r^2)_{j:m}, \quad (2.23)$$

onde $(r^2)_{1:m} \leq \dots \leq (r^2)_{m^*:m}$ são os resíduos ao quadrado ordenados e m^* é o número de pontos usados no procedimento de otimização. A equação (2.23) é muito similar à equação (2.20), a diferença é que os resíduos são ao quadrado. A constante m^* é responsável pelo ponto de ruptura e eficiência. O estimador MQP foi utilizado por Taqqu et al. (1995) e por Lopes e Mendes (2006) para a estimação do parâmetro de longa dependência dos processos ARFIMA(p, d, q). Segundo Lopes e Mendes (2006), quando $m^* = \lfloor g(n)/2 \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x , o ponto de ruptura é de aproximadamente 50%. Rousseeuw (1984) afirma que o ponto de ruptura é $(\lfloor g(n)/2 \rfloor - (l+1) +$

$2)/g(n)$, quando $m^* = \lfloor g(n)/2 \rfloor + 1$ e $(\lfloor (g(n) - (l+1))/2 \rfloor + 1)/g(n)$, quando $m^* = \lfloor g(n)/2 \rfloor + \lfloor ((l+1)+1)/2 \rfloor$, ambos para $l+1 > 1$, onde $l+1$ é a dimensão do vetor de parâmetros a serem estimados, a saber, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)$.

Yohai (1987) introduziu outra classe de estimadores robustos baseados na regressão (2.19). Os estimadores baseados nesse procedimento serão denotados aqui por MM , e possuem as seguintes propriedades

- (i) são altamente eficientes quando os erros possuem distribuição normal;
- (ii) são qualitativamente robustos;
- (iii) possuem alto ponto de ruptura.

Os estimadores MM são definidos por um procedimento de três estágios e podem ser descritos da seguinte forma. No primeiro estágio, um estimador inicial é calculado o qual é qualitativamente robusto e tem alto ponto de ruptura mas não é necessariamente eficiente. No segundo estágio, um estimador M da escala de erros é calculado utilizando os resíduos baseados na estimação inicial. Finalmente, no terceiro estágio, um estimador M dos parâmetros de regressão é calculado baseado em uma função apropriada.

Os estimadores baseados na regressão dada por (2.19) e no procedimento MM são definidos como a solução $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_l) \in \mathbb{R}^{l+1}$ a qual minimiza a função perda

$$\mathfrak{L}_3(g(n)) = \sum_{j=1}^{g(n)} \rho_2 \left(\frac{r_j}{\kappa} \right)^2, \quad (2.24)$$

sujeita à restrição

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{g(n)} \rho_1 \left(\frac{r_j}{\kappa} \right) \leq b, \quad (2.25)$$

onde $\rho_1(\cdot)$ e $\rho_2(\cdot)$ são funções simétricas, limitadas e não decrescentes em $[0, \infty)$, com $\rho_v(0) = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \rho_v(u) = 1$, para $v = 1, 2$, κ é um parâmetro de escala, b é definido por $\mathbb{E}_\phi(\rho_1(u)) = b$, onde ϕ denota a função de distribuição acumulada da normal padrão e r_j são os resíduos dados pela equação (2.21), para todo $j = 1, \dots, g(n)$. O ponto de ruptura dos estimadores MM depende somente da função $\rho_1(\cdot)$ e é dado por $\min\{b, 1-b\}$. Os estimadores baseados no procedimento MM são consistentes e assintoticamente normais.

Capítulo 3

Previsão

O principal objetivo em se estudar uma série temporal com longa dependência, é encontrar um modelo matemático que nos possibilite prever os futuros valores desta série.

Nesta seção, apresentamos alguns resultados de previsão utilizando os processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ causal e inversível (ver Definição 1.13), com média igual a zero. Assumimos, inicialmente, que os parâmetros do processo são conhecidos.

Segundo Priestley(1981), para um processo linear, a *previsão de erro quadrático médio mínimo* é dada por

$$\widehat{X}_t(h) := \mathbb{E}(X_{t+h} | X_\ell, \ell \leq t), \quad (3.1)$$

supondo conhecidas as observações $\{X_\ell, \ell \leq t\}$, até o instante t , que é chamado origem da previsão. A notação $\widehat{X}_t(h)$ indica a previsão de origem t e horizonte $h \geq 1$. Este valor minimiza o erro quadrático médio de previsão dado por $\mathbb{E}(X_{t+h} - \widehat{X}_t(h))^2$. Neste caso, o *erro de previsão* é dado por

$$e_t(h) = X_{t+h} - \widehat{X}_t(h). \quad (3.2)$$

Para calcularmos as previsões usamos os seguintes fatos

$$\text{a) } \mathbb{E}(X_{t+h} | X_\ell, \ell \leq t) = \begin{cases} X_{t+h}, & \text{se } h \leq 0, \\ \widehat{X}_t(h), & \text{se } h > 0, \end{cases}$$

$$\text{b) } \mathbb{E}(\varepsilon_{t+h} | X_\ell, \ell \leq t) = \begin{cases} \varepsilon_{t+h}, & \text{se } h \leq 0, \\ 0, & \text{se } h > 0. \end{cases}$$

Assim, para calcularmos as previsões, temos que

a) substituir esperanças passadas (quando $h \leq 0$) por valores conhecidos, X_{t+h} e ε_{t+h} ;

b) substituir esperanças futuras (quando $h > 0$) por previsões $\widehat{X}_t(h)$ e 0.

O teorema a seguir, apresenta alguns resultados para previsão em processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, dado pela expressão (1.21).

Teorema 3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ causal e inversível dado na equação (1.21), com média igual a zero. Então, para todo $h \geq 1$, valem as seguintes afirmações.*

i) *A previsão de erro quadrático médio mínimo é dada por*

$$\widehat{X}_n(h) = - \sum_{k \in \mathbb{N}} \pi_k \widehat{X}_n(h-k), \quad (3.3)$$

onde os coeficientes $\{\pi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_>}$ são determinados pela relação (1.25).

ii) *O erro de previsão é dado por*

$$e_n(h) = \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k}, \quad (3.4)$$

onde os coeficientes $\{\psi_k\}_{k=0}^{h-1}$ são determinados pela relação (1.24).

iii) *As variâncias teórica e amostral do erro de previsão são dadas, respectivamente, por*

$$\text{Var}(e_n(h)) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2, \quad \widehat{\text{Var}}(e_n(h)) = \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \widehat{\psi}_k^2,$$

onde os coeficientes $\{\psi_k\}_{k=0}^{h-1}$ são determinados pela relação (1.24), os coeficientes $\{\widehat{\psi}_k\}_{k=0}^{h-1}$ são obtidos quando substituimos os parâmetros teóricos no modelo pelos seus respectivos valores estimados e σ_ε^2 e $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ são, respectivamente, a variância e a variância estimada do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

iv) *O vício e o percentual de vício, denotado por pervício, ao estimar a variância teórica do erro de previsão, são dados, respectivamente, por*

$$\text{vício}(h) = \widehat{\text{Var}}(e_n(h)) - \text{Var}(e_n(h)),$$

$$\text{pervício}(h) = \frac{|\widehat{\text{Var}}(e_n(h)) - \text{Var}(e_n(h))|}{\text{Var}(e_n(h))} \times 100 \text{ \%}.$$

v) O erro quadrático médio de previsão é dado por

$$eqmp_n = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h e_n^2(k),$$

onde o erro de previsão $e_n(\cdot)$ é dado na expressão (3.4).

vi) Suponha que o processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seja Gaussiano com $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ e $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_k) = 0$, para todo $t \neq k$. O intervalo de previsão a $100(1-\gamma)\%$ de confiança para X_{n+h} é dado por

$$\widehat{X}_n(h) - z_{\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{h-1} \widehat{\psi}_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq X_{n+h} \leq \widehat{X}_n(h) + z_{\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{h-1} \widehat{\psi}_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $z_{\frac{\gamma}{2}}$ é o valor tal que $\mathbb{P}(Z \geq z_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}$, com $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, e $\{\widehat{\psi}_k\}_{k=0}^{h-1}$ e $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ são dados no item iii) deste teorema.

Demonstração: Segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.7 de Bisognin (2007).

Observação 3.2. Vamos verificar algumas propriedades do erro de previsão $e_n(\cdot)$ dado no item ii) do Teorema 3.1.

a) Podemos observar que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e_n(h) | X_\ell, \ell \leq n) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} | X_\ell, \ell \leq n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \mathbb{E}(\varepsilon_{n+h-k} | X_\ell, \ell \leq n) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e_n^2(h) | X_\ell, \ell \leq n) &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} \right)^2 | X_\ell, \ell \leq n \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2 \varepsilon_{n+h-k}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\substack{k,j=0 \\ k \neq j}}^{h-1} \psi_k \psi_j \varepsilon_{n+h-k} \varepsilon_{n+h-j} \right) | X_\ell, \ell \leq n \right] \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2.
\end{aligned}$$

ii) Pela definição de previsão de erro quadrático médio mínimo (ver equação (3.6)) e como

$$X_{t+h} = \varepsilon_{t+h} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k \varepsilon_{t+h-k}, \quad (3.5)$$

temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_n(h) &\equiv \mathbb{E}(X_{n+h} | X_\ell, \ell \leq n) = \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_\geq} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} | X_\ell, \ell \leq n \right) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}_\geq} \psi_k \mathbb{E}(\varepsilon_{n+h-k} | X_\ell, \ell \leq n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_\geq} \psi_k \widehat{\varepsilon}_n(h-k) \\
&= \sum_{k \geq h} \psi_k \varepsilon_{n+h-k}, \quad \text{para } h \geq 1, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

onde $\widehat{\varepsilon}_n(j) = 0$ para $j \in \mathbb{N}$ e $\widehat{\varepsilon}_n(j)$ para $j \in \mathbb{Z}_\leq$.

Logo o erro de previsão a um passo é dado por:

$$e_n(1) = X_{n+1} - \widehat{X}_n(1) \quad (3.7)$$

$$= \varepsilon_{n+1} + \sum_{k \geq 1} \psi_k \varepsilon_{n+1-k} - \sum_{k \geq 1} \psi_k \varepsilon_{n+1-k} \quad (3.8)$$

$$= \varepsilon_{n+1}, \quad (3.9)$$

o que nos indica que os erros de previsão à um passo são não-correlacionados. Isto implica que $\widehat{X}_n(1)$ é realmente o melhor preditor de X_{n+1} .

iii) Pela equação (3.4), para $\nu > 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(e_n(h), e_n(h + \nu)) &= \text{Cov}\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k}, \sum_{\ell=0}^{h+\nu-1} \psi_\ell \varepsilon_{n+h+\nu-\ell}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} \times \sum_{\ell=0}^{h+\nu-1} \psi_\ell \varepsilon_{n+h+\nu-\ell}\right) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \psi_{\nu+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, para $\nu > 1$, os erros de previsão são correlacionados.

iv) Pela equação (3.4), para $j \in \mathbb{Z}_{\geq}$, temos que

$$e_{n-j}(h) = \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n-j+h-k}. \quad (3.10)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(e_n(h), e_{n-j}(h)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} \times \sum_{\ell=0}^{h-1} \psi_\ell \varepsilon_{n-j+h-\ell}\right) \\
&= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=j}^{h-1} \psi_k \psi_{k-j}, & \text{se } 0 \leq j < h \\ 0, & \text{se } j \geq h. \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto, os erros de previsão para o mesmo passo h , mas diferentes origens n e $n - j$ são não-correlacionados se $j \geq h$ e são correlacionados se $0 \leq j < h$.

Na Observação 3.3 a seguir, apresentamos alguns critérios de seleção de modelos baseados no erro de previsão.

Observação 3.3 (Seleção de Modelos Baseada no Erro de Previsão). Na análise de séries temporais, é bastante comum que existam vários modelos que podem ser utilizados para representar um conjunto de dados. Escolher o melhor modelo nem sempre é fácil. O principal objetivo em ajustar um modelo à uma serie temporal é podermos prever os seus futuros valores.

Com isso, foram criados critérios de seleção de modelos baseados no erro de previsão.

O erro de previsão é dado por

$$e_t(h) = X_{n+h} - \widehat{X}_n(h),$$

onde $h \geq 1$ é o número de passos à frente que queremos encontrar e n é a origem da previsão.

A seleção do modelo é baseada nas seguintes estatísticas:

1) Percentual médio de erro, o qual também pode ser referenciado como vício já que ele mede o vício de previsão,

$$MPE = \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \frac{e_n(k)}{X_{n+k}} \right) \times 100\%.$$

2) Erro médio absoluto de previsão

$$MAE = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h |e_n(k)|.$$

3) Percentual médio absoluto de erro

$$MAPE = \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \left| \frac{e_n(k)}{X_{n+k}} \right| \right) \times 100\%.$$

Além dos critérios acima mencionados, pode-se utilizar o erro quadrático médio de previsão (ver item v) do Teorema (3.1) e também a raiz quadrada do erro quadrático médio de previsão.

Capítulo 4

Simulação

Neste capítulo, apresentamos resultados de simulação de Monte Carlo para os processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$. Os resultados estão divididos em seções de acordo com o objetivo da simulação, ou seja, foram criadas séries e cenários diferenciados para diferentes valores dos vetores de parâmetros do processo e diferentes tamanhos de amostra a fim de obter algumas respostas diferenciadas para cada cenário. As tabelas excedentes estão inclusas nos anexos da monografia, de acordo com o especificado nos resultados de cada seção. As siglas das tabelas estão descritas no capítulo 2 nas seções 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4. Ressaltamos que os estimadores de Fox e Taqqu e o estimador de máxima verossimilhança exato (W e EMLE, respectivamente) estimam todos os parâmetros do processo e os estimadores semiparamétricos denotados por GPH.MQ e BA.MQ, bem como suas versões robustas (GPH.MM, GPH.MQP, BA.MM e BA.MQP) estimam apenas o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda}$. A parte de geração, simulação e estimação foi feita no software S-Plus versão 8.0.

4.1 Simulação do processo de Gegenbauer(u, λ)

Foram geradas 1000 replicações de séries de tamanho 1000 de processos de Gegenbauer(u, λ), isto é, processos GARMA $(0, u, \lambda, 0)$, e estimados seus parâmetros utilizando os dois estimadores semiparamétricos e os dois estimadores paramétricos abordados neste trabalho. Para os estimadores semiparamétricos, consideramos $g(n) = n^\alpha$, com $\alpha \in \{0.60, 0.65, 0.70, \dots, 0.85, 0.89\}$. Os resultados obtidos estão apresentados nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3.

O EMLE em comparação com o estimador W (tabela 4.1) apresentou um vício, variância e EQM maior para a série onde $\lambda = 0.3$ e $u = 0.6$, e o contrário foi observado na série onde $\lambda = 0.4$ e $u = 0.6$, embora estas diferenças não pareçam ser marcantes a ponto de diferenciar os dois estimadores. Os valores iniciais para a estimativa foram os verdadeiros valores do parâmetro.

Para os estimadores da classe semiparamétrica (tabelas 4.2 e 4.3), observa-

Tabela 4.1: Estimacão paramétrica dos parâmetros do processo *GARMA* $(0, u, \lambda, 0)$, para diferentes pares de valores de u e λ .

Estimadores	$\lambda = 0.3$ e $u = 0.6$				$\lambda = 0.4$ e $u = 0.6$			
	W		EMLE		W		EMLE	
Parâmetros	λ	u	λ	u	λ	u	λ	u
Média	0,2947	0,6005	0,3089	0,5973	0,3928	0,6001	0,4019	0,6005
Vício	-0,0053	0,0005	0,0089	-0,0027	-0,0072	0,0001	0,0019	0,0005
EQM	0,0007	0,0002	0,0059	0,0011	0,0007	0,0001	0,0005	0,0000
Var	0,0007	0,0002	0,0058	0,0011	0,0007	0,0001	0,0005	0,0000

Tabela 4.2: Estimacão semiparamétrica dos parâmetros do processo *GARMA* $(0, u, \lambda, 0)$, quando $\lambda = 0.3$, $u = 0.8$, $n = 1000$ e $\alpha \in \{0.6, 0.65, \dots, 0.85, 0.89\}$.

Estimador	GPH.MQ	GPH.MM	GPH.MQP	BA.MQ	BA.MM	BA.MQP
$\alpha = 0.60$						
Média	0.3345	0.3172	0.2999	0.3441	0.3286	0.3308
Vício	0.0345	0.0172	-0.0001	0.0441	0.0286	0.0308
EQM	0.3347	0.3391	0.3508	0.1819	0.2314	0.2389
Var	0.3338	0.3392	0.3511	0.1801	0.2308	0.2382
$\alpha = 0.65$						
Média	0.3147	0.2885	0.3012	0.3191	0.3105	0.3130
Vício	0.0147	-0.0115	0.0012	0.0191	0.0105	0.0130
EQM	0.0320	0.0490	0.0353	0.0185	0.0265	0.0248
Var	0.0318	0.0490	0.0353	0.0182	0.0264	0.0247
$\alpha = 0.70$						
Mdia	0.3122	0.3050	0.3114	0.3200	0.3180	0.3187
Vcio	0.0122	0.0050	0.0114	0.0200	0.0180	0.0187
EQM	0.0045	0.0066	0.0044	0.0031	0.0042	0.0039
Var	0.0043	0.0066	0.0042	0.0027	0.0039	0.0035
$\alpha = 0.75$						
Mdia	0.3108	0.3026	0.3097	0.3169	0.3161	0.3164
Vcio	0.0108	0.0026	0.0097	0.0169	0.0161	0.0164
EQM	0.0033	0.0061	0.0031	0.0022	0.0033	0.0029
Var	0.0032	0.0061	0.0030	0.0020	0.0030	0.0026
$\alpha = 0.80$						
Mdia	0.3066	0.3048	0.3071	0.3108	0.3122	0.3112
Vcio	0.0066	0.0048	0.0071	0.0108	0.0122	0.0112
EQM	0.0017	0.0029	0.0018	0.0012	0.0018	0.0015
Var	0.0016	0.0029	0.0017	0.0011	0.0016	0.0014
$\alpha = 0.85$						
Mdia	0.3047	0.3037	0.3048	0.3072	0.3071	0.3071
Vício	0.0047	0.0037	0.0048	0.0072	0.0071	0.0071
EQM	0.0009	0.0018	0.0010	0.0006	0.0009	0.0007
Var	0.0008	0.0018	0.0009	0.0005	0.0008	0.0007
$\alpha = 0.89$						
Média	0.3030	0.3032	0.3032	0.3051	0.3056	0.3048
Vício	0.0030	0.0032	0.0032	0.0051	0.0056	0.0048
EQM	0.0006	0.0013	0.0006	0.0004	0.0006	0.0005
Var	0.0006	0.0013	0.0006	0.0004	0.0006	0.0005

se que o aumento de α reduz consideravelmente o Vício, EQM e Variância das estimativas, além das mesmas melhorarem, em média. Na estimação semiparamétrica, observa-se que o estimador GPH apresenta menor vício do que o BA em todas as séries, isto é, independente do valor de α e da série, e, em especial, a versão de mínimos quadrados podados do GPH (GPH.MQP) apresentou melhores resultados quanto ao vício menor, embora, para grandes valores de α esta diferença seja considerada pequena em comparação ao valor do parâmetro. Utilizando $\alpha = 0.89$, isto é, considerando quase todas as frequências de Fourier na estimação semiparamétrica, não se observa uma forte diferença entre os dois estimadores nos valores de erro quadrático médio e variância, mas entre as versões robustas e a versão de mínimos quadrados simples sim. Tanto o BA como o GPH são superiores em ter menor EQM e menor variância com as versões robustas para estes casos analisados.

4.2 Simulação de um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com $k = 5$ e a presença ou não dos termos AR e MA

Nesta seção apresentamos os resultados de simulação de Monte Carlo para os processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ (ver Definição 1.13) com média $\mu = 0$, diferentes valores para $p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$ e tamanho amostral $\mathbf{n} = \{1000, 2000\}$. A variância do processo ruído branco é considerada $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ em todas simulações. Comparamos o desempenho dos estimadores semiparamétricos GPH e BA segundo a metodologia MQ e suas versões robustas MM e MQP com os estimadores paramétricos W proposto por Fox e Taqqu (1986) e o estimador de máxima verossimilhança exato. Para esta comparação utilizamos o vício, a variância e o erro quadrático médio.

Para a geração dos processos e cálculo da função de autocovariância dos mesmos, utilizamos sua representação média móvel infinita. Como ponto de truncamento desta representação utilizamos o valor de 10000 em todas as rotinas. Os resultados são baseados em 5000 replicações.

Para os estimadores semiparamétricos consideramos $g(n) = n^\alpha$, com $\alpha \in \{0.80, 0.85, 0.89\}$. Consideramos o valor $\alpha = 0.89$ nas análises de resultados pois neste caso se leva em consideração quase todas as frequências de Fourier na estimação semiparamétrica.

No caso em estudo, utilizamos um processo k -Factor GARMA $(1, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 1)$, uando $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $n = (1000, 2000)$, $\phi = (0, 0.3)$, $\theta = (0, 0.5)$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \{0.80, 0.85, 0.9\}$.

Observando primeiramente as estimativas de cada método por separadamente, nas figuras 4.1 e 4.2 com os intervalos de confiança (Error Bars Plots) observamos pequenas variâncias, o que é uma boa característica para os estimadores.

Tabela 4.3: Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo *GARMA* $(0, u, \lambda, 0)$, quando $\lambda = 0.4$, $u = 0.8$, $n = 1000$ e $\alpha \in \{0.60, 0.65, \dots, 0.85, 0.89\}$.

Estimador	GPH.MQ	GPH.MM	GPH.MQP	BA.MQ	BA.MM	BA.MQP
$\alpha = 0.60$						
Média	0.4272	0.4063	0.4224	0.4619	0.4495	0.4503
Vício	0.0272	0.0063	0.0224	0.0619	0.0495	0.0503
EQM	0.3142	0.3698	0.3643	0.1889	0.2476	0.2475
Var	0.3138	0.3701	0.3641	0.1852	0.2454	0.2452
$\alpha = 0.65$						
Média	0.4030	0.3865	0.3990	0.4224	0.4133	0.4153
Vício	0.0030	-0.0135	-0.0010	0.0224	0.0133	0.0153
EQM	0.0326	0.0447	0.0321	0.0181	0.0279	0.0238
Var	0.0326	0.0446	0.0321	0.0176	0.0277	0.0235
$\alpha = 0.70$						
Média	0.4250	0.4135	0.4201	0.4391	0.4360	0.4366
Vício	0.0250	0.0135	0.0201	0.0391	0.0360	0.0366
EQM	0.0053	0.0075	0.0055	0.0048	0.0058	0.0053
Var	0.0047	0.0074	0.0051	0.0033	0.0045	0.0040
$\alpha = 0.75$						
Média	0.4209	0.4096	0.4173	0.4319	0.4277	0.4297
Vício	0.0209	0.0096	0.0173	0.0319	0.0277	0.0297
EQM	0.0039	0.0066	0.0040	0.0033	0.0041	0.0039
Var	0.0034	0.0065	0.0037	0.0023	0.0033	0.0030
$\alpha = 0.80$						
Média	0.4136	0.4076	0.4115	0.4202	0.4182	0.4191
Vício	0.0136	0.0076	0.0115	0.0202	0.0182	0.0191
EQM	0.0018	0.0033	0.0019	0.0015	0.0020	0.0018
Var	0.0017	0.0032	0.0018	0.0011	0.0017	0.0015
$\alpha = 0.85$						
Média	0.4090	0.4048	0.4069	0.4134	0.4109	0.4118
Vício	0.0090	0.0048	0.0069	0.0134	0.0109	0.0118
EQM	0.0009	0.0018	0.0009	0.0008	0.0010	0.0009
Var	0.0009	0.0018	0.0009	0.0006	0.0009	0.0008
$\alpha = 0.89$						
Média	0.4069	0.4049	0.4061	0.4109	0.4088	0.4098
Vício	0.0069	0.0049	0.0061	0.0109	0.0088	0.0098
EQM	0.0006	0.0014	0.0007	0.0005	0.0007	0.0006
Var	0.0006	0.0014	0.0006	0.0004	0.0006	0.0005

Tabela 4.4: Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo k -Factor GARMA $(p, \lambda, \mathbf{u}, q)$, quando $\lambda = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 0 = q$, $n = 1000$ e $\alpha \in \{0.80, 0.85, 0.9\}$.

$\alpha = 0.8$															
GPH.MQ					GPH.MM					GPH.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1187	0,1860	0,2583	0,3022	0,4163	0,1093	0,1870	0,2544	0,2967	0,4125	0,1172	0,1867	0,2564	0,3020	0,4160
Vício	0,0187	-0,0140	0,0083	0,0022	0,0163	0,0093	-0,0130	0,0044	-0,0033	0,0125	-0,0133	0,0064	0,0020	0,0160	
EQM	0,0003	0,0002	0,0001	0,0000	0,0003	0,0001	0,0002	0,0000	0,0000	0,0002	0,0003	0,0002	0,0000	0,0003	
VAR	0,0047	0,0039	0,0041	0,0043	0,0035	0,0089	0,0085	0,0076	0,0080	0,0058	0,0061	0,0056	0,0053	0,0044	
BA.MQ					BA.MM					BA.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1291	0,1753	0,2578	0,2995	0,4228	0,1181	0,1919	0,2567	0,2981	0,4244	0,1173	0,1941	0,2565	0,2989	
Vício	0,0291	-0,0247	0,0078	-0,0005	0,0228	0,0181	-0,0081	0,0067	-0,0019	0,0244	0,0173	-0,0059	0,0065	-0,0011	
EQM	0,0008	0,0006	0,0001	0,0000	0,0005	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0006	0,0003	0,0000	0,0000	0,0006	
VAR	0,0025	0,0021	0,0025	0,0027	0,0024	0,0045	0,0049	0,0040	0,0044	0,0034	0,0044	0,0037	0,0041	0,0032	
BA.MQ					BA.MM					BA.MPQ					
$\alpha = 0.85$															
GPH.MQ					GPH.MM					GPH.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1116	0,1819	0,2538	0,2993	0,4039	0,1062	0,1822	0,2499	0,2921	0,4060	0,1105	0,1819	0,2542	0,2966	
Vício	0,0116	-0,0181	0,0038	-0,0007	0,0039	0,0062	-0,0178	-0,0001	-0,0079	0,0060	0,0105	-0,0181	0,0042	-0,0034	
EQM	0,0001	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0003	0,0000	0,0000	
VAR	0,0041	0,0036	0,0039	0,0043	0,0017	0,0094	0,0095	0,0092	0,0101	0,0034	0,0055	0,0056	0,0054	0,0060	
BA.MQ					BA.MM					BA.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1169	0,1684	0,2500	0,2946	0,4015	0,1075	0,1816	0,2490	0,2933	0,4013	0,1058	0,1839	0,2480	0,2944	
Vício	0,0169	-0,0316	0,0000	-0,0054	0,0015	0,0075	-0,0184	-0,0010	-0,0067	0,0013	0,0058	-0,0161	-0,0020	-0,0056	
EQM	0,0003	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,0000	
VAR	0,0021	0,0020	0,0023	0,0027	0,0012	0,0043	0,0048	0,0040	0,0046	0,0018	0,0040	0,0045	0,0037	0,0043	
BA.MQ					BA.MM					BA.MPQ					
$\alpha = 0.9$															
GPH.MQ					GPH.MM					GPH.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1072	0,1814	0,2527	0,2985	0,4003	0,1081	0,1765	0,2497	0,2903	0,4044	0,1086	0,1808	0,2504	0,2990	
Vício	0,0072	-0,0186	0,0027	-0,0015	0,0003	0,0081	-0,0235	-0,0003	-0,0097	0,0044	0,0086	-0,0192	0,0004	-0,0010	
EQM	0,0001	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0004	0,0000	0,0000	
VAR	0,0038	0,0036	0,0038	0,0043	0,0014	0,0094	0,0108	0,0103	0,0115	0,0031	0,0056	0,0061	0,0060	0,0066	
BA.MQ					BA.MM					BA.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1079	0,1674	0,2478	0,2930	0,3941	0,0983	0,1803	0,2469	0,2921	0,3944	0,0979	0,1822	0,2465	0,2928	
Vício	0,0079	-0,0326	-0,0022	-0,0070	-0,0059	-0,0017	-0,0197	-0,0031	-0,0079	-0,0056	-0,0021	-0,0178	-0,0035	-0,0052	
EQM	0,0001	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,0000	
VAR	0,0019	0,0020	0,0023	0,0027	0,0010	0,0039	0,0046	0,0041	0,0049	0,0015	0,0039	0,0048	0,0039	0,0045	

Tabela 4.5: Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo k -Factor GARMA $(p, \lambda, \mathbf{u}, q)$, quando $\lambda = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 0 = q$, $n = 2000$ e $\alpha \in \{0.80, 0.85, 0.9\}$.

$\alpha = 0.8$															
GPH.MQ					GPH.MM					GPH.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1259	0,1859	0,2514	0,3003	0,4067	0,2131	0,1218	0,2441	0,2972	0,4029	0,1386	0,1771	0,2509	0,2994	0,4064
Vício	0,0259	-0,0141	0,0014	0,0003	0,0067	0,1131	-0,0782	-0,0059	-0,0028	0,0029	0,0386	-0,0229	0,0009	-0,0006	0,0064
EQM	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0128	0,0061	0,0000	0,0000	0,0000	0,0015	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
VAR	0,0446	0,0125	0,0024	0,0021	0,0015	0,2371	0,0910	0,0059	0,0041	0,0029	0,0835	0,0260	0,0037	0,0028	0,0021
BA.MQ					BA.MM					BA.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1700	0,11609	0,2476	0,3042	0,4114	0,1258	0,2516	0,3024	0,4159	0,1230	0,1916	0,2523	0,3028	0,4165	
Vício	0,0700	-0,0391	-0,0024	0,0042	0,0114	0,0258	-0,0099	0,0016	0,0024	0,0159	-0,0084	0,0023	0,0028	0,0165	
EQM	0,0049	0,0015	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0003	
VAR	0,0231	0,0065	0,0015	0,0014	0,0012	0,1123	0,0429	0,0026	0,0020	0,0016	0,0679	0,0217	0,0024	0,0019	
BA.MQ					BA.MM					BA.MPQ					
$\alpha = 0.85$															
GPH.MQ					GPH.MM					GPH.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1041	0,11948	0,2517	0,2994	0,4022	0,1013	0,2518	0,2952	0,4020	0,1046	0,1934	0,2523	0,2983	0,4025	
Vício	-0,0106	-0,0268	0,0359	-0,0244	-0,0053	0,0090	0,0155	-0,0293	0,0594	-0,0057	0,0117	-0,0105	0,0150	0,0218	
EQM	0,0001	0,0007	0,0013	0,0006	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009	0,0035	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0005	
VAR	0,0021	0,0019	0,0018	0,0020	0,0009	0,0053	0,0053	0,0045	0,0048	0,0019	0,0032	0,0031	0,0029	0,0012	
BA.MQ					BA.MM					BA.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1081	0,1870	0,2500	0,3021	0,4012	0,1054	0,1923	0,2494	0,4041	0,1054	0,1922	0,2497	0,2998	0,4042	
Vício	-0,0387	-0,0033	-0,0078	0,0117	-0,0071	-0,0322	-0,0057	-0,0207	-0,0042	-0,0112	0,0071	-0,0429	0,0340	0,0064	
EQM	0,0015	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0010	0,0000	0,0004	0,0000	0,0001	0,0000	0,0018	0,0012	0,0000	
VAR	0,0012	0,0012	0,0013	0,0006	0,0006	0,0021	0,0022	0,0020	0,0021	0,0019	0,0021	0,0018	0,0020	0,0008	
BA.MQ					BA.MM					BA.MPQ					
$\alpha = 0.9$															
GPH.MQ					GPH.MM					GPH.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1018	0,1943	0,2511	0,2988	0,4001	0,1014	0,1905	0,2514	0,2939	0,4016	0,1023	0,1936	0,2510	0,2986	
Vício	0,0018	-0,0057	0,0011	-0,0012	0,0001	0,0014	-0,0095	0,0014	-0,0061	0,0016	0,0023	-0,0064	0,0010	-0,0014	
EQM	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
VAR	0,0019	0,0019	0,0018	0,0020	0,0006	0,0047	0,0055	0,0049	0,0052	0,0014	0,0033	0,0035	0,0033	0,0034	
BA.MQ					BA.MM					BA.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1019	0,1856	0,2480	0,3006	0,3952	0,0994	0,1907	0,2474	0,2983	0,3982	0,0986	0,1915	0,2477	0,2987	
Vício	0,0019	-0,0144	-0,0020	0,0006	-0,0048	-0,0006	-0,0093	-0,0026	-0,0017	-0,0018	-0,0014	-0,0085	-0,0023	-0,0013	
EQM	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	
VAR	0,0010	0,0012	0,0012	0,0013	0,0004	0,0020	0,0023	0,0020	0,0021	0,0007	0,0019	0,0021	0,0019	0,0021	

Tabela 4.6: Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo k -Factor GARMA $(p, \lambda, \mathbf{u}, q)$, quando $\lambda = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 1 = q$, $n = 1000$, $\phi = 0.3$, $\theta = 0.5$ e $\alpha \in \{0.80, 0.85, 0.9\}$.

$\alpha = 0.8$																
GPH.MQ				GPH.MM				GPH.MPQ								
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0.2072	0.2217	0.3273	0.4300	0.1939	0.2304	0.2984	0.3228	0.4263	0.2021	0.2277	0.2991	0.3273	0.4291	0.4291	
Vício	0.1072	0.0217	0.0508	0.0300	0.0939	0.0304	0.0484	0.0228	0.0263	0.1021	0.0277	0.0491	0.0273	0.0291	0.0291	
EQM	0.0115	0.0005	0.0026	0.0009	0.0088	0.0009	0.0023	0.0005	0.0007	0.0104	0.0008	0.0024	0.0007	0.0008	0.0008	
VAR	0.0047	0.0039	0.0040	0.0045	0.0033	0.0091	0.0089	0.0077	0.0060	0.0065	0.0063	0.0051	0.0056	0.0044	0.0044	
	BA.MQ				BA.MM				BA.MPQ							
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0.2150	0.2096	0.2986	0.3240	0.4351	0.2417	0.2978	0.3241	0.4413	0.2004	0.2436	0.2971	0.3245	0.4428	0.4428	
Vício	0.1150	0.0096	0.0486	0.0240	0.0351	0.0417	0.0478	0.0241	0.0413	0.1004	0.0436	0.0471	0.0245	0.0428	0.0428	
EQM	0.0132	0.0001	0.0024	0.0006	0.0012	0.0103	0.0017	0.0023	0.0006	0.0101	0.0019	0.0022	0.0006	0.0018	0.0018	
VAR	0.0024	0.0021	0.0024	0.0028	0.0022	0.0063	0.0064	0.0042	0.0032	0.0061	0.0062	0.0038	0.0040	0.0030	0.0030	
	BA.MQ				BA.MM				BA.MPQ							
$\alpha = 0.85$																
GPH.MQ				GPH.MM				GPH.MPQ								
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0.1522	0.1847	0.2611	0.3023	0.3235	0.1461	0.1862	0.2609	0.2989	0.1488	0.1857	0.2603	0.3040	0.3197	0.3197	
Vício	0.0522	-0.0153	0.0111	0.0023	-0.0765	0.0461	-0.0138	0.0109	-0.0011	0.0488	-0.0143	0.0103	0.0040	-0.0803	-0.0803	
EQM	0.0027	0.0002	0.0001	0.0000	0.0059	0.0021	0.0002	0.0001	0.0000	0.0024	0.0002	0.0001	0.0000	0.0065	0.0065	
VAR	0.0041	0.0036	0.0038	0.0044	0.0017	0.0086	0.0088	0.0088	0.0108	0.0057	0.0054	0.0054	0.0063	0.0027	0.0027	
	BA.MQ				BA.MM				BA.MPQ							
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0.1580	0.1717	0.2579	0.2984	0.3256	0.1436	0.1855	0.2543	0.3071	0.1388	0.1883	0.2531	0.3084	0.3070	0.3070	
Vício	0.0580	-0.0283	0.0079	-0.0016	-0.0744	0.0436	-0.0145	0.0043	0.0071	0.0388	-0.0117	0.0031	0.0084	-0.0930	-0.0930	
EQM	0.0034	0.0008	0.0001	0.0000	0.0055	0.0019	0.0002	0.0000	0.0001	0.0089	0.0015	0.0000	0.0001	0.0087	0.0087	
VAR	0.0021	0.0020	0.0023	0.0027	0.0011	0.0057	0.0054	0.0067	0.0087	0.0043	0.0045	0.0035	0.0043	0.0024	0.0024	
	BA.MQ				BA.MM				BA.MPQ							
$\alpha = 0.80$																
GPH.MQ				GPH.MM				GPH.MPQ								
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0.1292	0.1821	0.2553	0.2982	0.3045	0.1276	0.1798	0.2552	0.2941	0.1273	0.1825	0.2547	0.3016	0.2995	0.2995	
Vício	0.0292	-0.0179	0.0053	-0.0018	-0.0955	0.0276	-0.0202	0.0052	-0.0059	0.0273	-0.0175	0.0047	0.0016	-0.1005	-0.1005	
EQM	0.0009	0.0003	0.0000	0.0000	0.0091	0.0008	0.0004	0.0000	0.0000	0.0007	0.0003	0.0000	0.0000	0.0101	0.0101	
VAR	0.0037	0.0036	0.0038	0.0044	0.0014	0.0084	0.0097	0.0109	0.0135	0.0054	0.0058	0.0059	0.0068	0.0024	0.0024	
	BA.MQ				BA.MM				BA.MPQ							
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0.1327	0.1689	0.2515	0.2938	0.3047	0.1191	0.1840	0.2474	0.3037	0.1166	0.1848	0.2485	0.3089	0.2838	0.2838	
Vício	0.0327	-0.0311	0.0015	-0.0062	-0.0953	0.0191	-0.0160	-0.0026	0.0037	0.0166	-0.0152	-0.0015	0.0089	-0.1162	-0.1162	
EQM	0.0011	0.0010	0.0000	0.0000	0.0091	0.0004	0.0003	0.0000	0.0000	0.0029	0.0003	0.0002	0.0001	0.0135	0.0135	
VAR	0.0019	0.0020	0.0023	0.0027	0.0010	0.0043	0.0107	0.0419	0.0268	0.0036	0.0044	0.0036	0.0046	0.0023	0.0023	

Para as tabelas 4.4 a 4.7, ressaltamos as estimativas pobres para valores de α abaixo de 0.8. Para outros modelos, como o modelo ARFIMA(p, d, q), valores mais baixos de α são utilizados sem perdas grandes nas estimativas. Isto sugere, portanto, que o processo k -Factor GARMA ($1, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 1$) necessita de um vetor amostral na regressão para os estimadores semiparamétricos maior do que o modelo ARFIMA, possivelmente devido ao seu grau de complexidade maior.

As tabelas apresentam valores melhores para cada aumento de α , conforme esperado, e as tabelas com os termos autoregressivo e média móvel tem prejuízo na estimação de $\boldsymbol{\lambda}$ tanto para a estimação semiparamétrica como para a estimação paramétrica.

O tamanho amostral não parece ser um determinante para as estimativas, mas um estudo mais detalhado da convergência dos estimadores seria necessário para confirmar esta hipótese.

As estimativas para λ_5 foram as que apresentaram variância menor na estimação semiparamétrica, independente do tamanho amostral e da inclusão ou não dos termos AR e MA. Considerando $\alpha = 0.89$, os estimadores são muito semelhantes quando ao EQM e não se observa nenhum comportamento regular quanto à variância e vício nas quatro tabelas apresentadas.

Os gráficos com intervalos de confiança para os estimadores quando a série inclui a parte *ARMA* (Figuras 4.3 e 4.4) mostra que se perde um pouco em média nas estimativas, embora a variância se mantenha, ou que leva à conclusão de que a inclusão destes termos desloca as estimativas mas não tem influência na variabilidade delas. Embora para as nas tabelas 4.6 e 4.7, esta mudança não pareça ser muito grande. Também não se observa diferenças regulares entre as duas tabelas quanto ao vício, EQM e variância. Nota-se que o vício, EQM e variância para ϕ_1 e θ_1 são muito maiores em grandeza do que para as demais estimativas de $\boldsymbol{\lambda}$ e \mathbf{u} .

No anexo B, encontram-se os gráficos das estimativas semiparamétricas para os valores do parâmetro de longa dependência desta série. Chamamos atenção para o fato de que para $\lambda_3 = 0.25$ que está associado com $u = 0.5$, o estimador BA fica bem diferenciado do GPH, o que fica bem evidenciado no gráfico.

Tabela 4.7: Estimação semiparamétrica dos parâmetros do processo *k-Factor* GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, quando $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 1 = q$, $n = 2000$, $\phi = 0.3$, $\theta = 0.5$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \{0.80, 0.85, 0.89\}$.

$\alpha = 0.8$																				
GPH.MQ			GPH.MM			GPH.MPQ			GPH.MQ			GPH.MM			GPH.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,4039	0,1384	0,2762	0,3299	0,4362	0,5406	0,0430	0,2661	0,3265	0,4318	0,4283	0,1218	0,2732	0,3297	0,4346	0,4346	0,4346	0,4346	0,4346	0,4346
Vício	0,3039	-0,0616	0,0262	0,0299	0,0362	0,4406	-0,1570	0,0161	0,0265	0,0318	0,3283	-0,0782	0,0232	0,0297	0,0346	0,0346	0,0346	0,0346	0,0346	0,0346
EQM	0,0923	0,0038	0,0007	0,0009	0,0013	0,1942	0,0246	0,0003	0,0007	0,0010	0,1078	0,0061	0,0005	0,0009	0,0012	0,0012	0,0012	0,0012	0,0012	0,0012
VAR	0,0461	0,0131	0,0025	0,0020	0,0015	0,2970	0,0058	0,0037	0,0037	0,0029	0,0898	0,0285	0,0036	0,0026	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020
BA.MQ			BA.MM			BA.MPQ			BA.MQ			BA.MM			BA.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,4407	0,1149	0,2720	0,3328	0,4391	0,4674	0,1003	0,2726	0,3310	0,4462	0,4483	0,1133	0,2731	0,3315	0,4463	0,4463	0,4463	0,4463	0,4463	0,4463
Vício	0,3407	-0,0851	0,0220	0,0328	0,0391	0,3674	-0,0997	0,0226	0,0310	0,0462	0,3483	-0,0867	0,0231	0,0315	0,0463	0,0463	0,0463	0,0463	0,0463	0,0463
EQM	0,1161	0,0072	0,0005	0,0011	0,0015	0,1350	0,0099	0,0005	0,0010	0,0021	0,1213	0,0075	0,0005	0,0010	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021
VAR	0,0234	0,0065	0,0016	0,0013	0,0012	0,1329	0,0565	0,0025	0,0018	0,0016	0,0701	0,0236	0,0024	0,0018	0,0015	0,0015	0,0015	0,0015	0,0015	0,0015
BA.MQ			BA.MM			BA.MPQ			BA.MQ			BA.MM			BA.MPQ					
$\alpha = 0.85$																				
GPH.MQ			GPH.MM			GPH.MPQ			GPH.MQ			GPH.MM			GPH.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1595	0,2041	0,2637	0,3067	0,3413	0,1565	0,2033	0,2634	0,3075	0,3342	0,1582	0,2031	0,2636	0,3074	0,3390	0,3390	0,3390	0,3390	0,3390	0,3390
Vício	0,0595	0,0041	0,0137	0,0067	-0,0587	0,0565	0,0033	0,0134	0,0075	-0,0658	0,0582	0,0031	0,0136	0,0074	-0,0610	-0,0610	-0,0610	-0,0610	-0,0610	-0,0610
EQM	0,0035	0,0000	0,0002	0,0000	0,0035	0,0032	0,0000	0,0002	0,0001	0,0043	0,0000	0,0000	0,0002	0,0001	0,0037	0,0037	0,0037	0,0037	0,0037	0,0037
VAR	0,0020	0,0019	0,0019	0,0019	0,0008	0,0044	0,0044	0,0044	0,0046	0,0029	0,0033	0,0031	0,0028	0,0029	0,0015	0,0015	0,0015	0,0015	0,0015	0,0015
BA.MQ			BA.MM			BA.MPQ			BA.MQ			BA.MM			BA.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1622	0,1972	0,2621	0,3093	0,3417	0,1627	0,1985	0,2602	0,3133	0,3333	0,1578	0,2005	0,2602	0,3127	0,3345	0,3345	0,3345	0,3345	0,3345	0,3345
Vício	0,0622	-0,0028	0,0121	0,0093	-0,0583	0,0627	-0,0015	0,0102	0,0133	-0,0667	0,0578	0,0005	0,0102	0,0127	-0,0655	-0,0655	-0,0655	-0,0655	-0,0655	-0,0655
EQM	0,0039	0,0000	0,0001	0,0001	0,0034	0,0039	0,0000	0,0001	0,0002	0,0044	0,0033	0,0000	0,0001	0,0002	0,0043	0,0043	0,0043	0,0043	0,0043	0,0043
VAR	0,0012	0,0011	0,0012	0,0013	0,0006	0,0042	0,0026	0,0019	0,0021	0,0019	0,0025	0,0021	0,0017	0,0018	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013
BA.MQ			BA.MM			BA.MPQ			BA.MQ			BA.MM			BA.MPQ					
$\alpha = 0.89$																				
GPH.MQ			GPH.MM			GPH.MPQ			GPH.MQ			GPH.MM			GPH.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1267	0,1957	0,2530	0,2980	0,3084	0,1244	0,1948	0,2529	0,3011	0,2967	0,1255	0,1953	0,2527	0,3006	0,3046	0,3046	0,3046	0,3046	0,3046	0,3046
Vício	0,0267	-0,0043	0,0030	-0,0020	-0,0916	0,0244	-0,0052	0,0029	0,0011	-0,1033	0,0255	-0,0047	0,0027	0,0006	-0,0954	-0,0954	-0,0954	-0,0954	-0,0954	-0,0954
EQM	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0084	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0107	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0091	0,0091	0,0091	0,0091	0,0091	0,0091
VAR	0,0018	0,0019	0,0018	0,0019	0,0006	0,0040	0,0048	0,0048	0,0056	0,0023	0,0032	0,0036	0,0032	0,0033	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013
BA.MQ			BA.MM			BA.MPQ			BA.MQ			BA.MM			BA.MPQ					
$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	
Média	0,1274	0,1883	0,2507	0,3002	0,3069	0,1202	0,1930	0,2493	0,3106	0,2896	0,1187	0,1939	0,2491	0,3100	0,2919	0,2919	0,2919	0,2919	0,2919	0,2919
Vício	0,0274	-0,0117	0,0007	0,0002	-0,0931	0,0202	-0,0070	-0,0007	0,0106	-0,1104	0,0187	-0,0061	-0,0009	0,0100	-0,1081	-0,1081	-0,1081	-0,1081	-0,1081	-0,1081
EQM	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0087	0,0004	0,0000	0,0000	0,0001	0,0122	0,0004	0,0000	0,0000	0,0001	0,0117	0,0117	0,0117	0,0117	0,0117	0,0117
VAR	0,0010	0,0011	0,0012	0,0013	0,0005	0,0019	0,0020	0,0019	0,0023	0,0016	0,0018	0,0020	0,0018	0,0021	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011

Tabela 4.8: Resultado do estimador W para um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, onde $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 0 = q$ e $n \in \{1000, 2000\}$.

n=1000										
	$\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$					$\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$				
	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	\hat{u}_1	\hat{u}_2	\hat{u}_3	\hat{u}_4	\hat{u}_5
Média	0.0970	0.1954	0.2459	0.2973	0.3996	0.0993	0.1959	0.4970	0.5978	0.7984
Vício	-0.0030	-0.0046	-0.0041	-0.0027	-0.0004	-0.0007	-0.0041	-0.0030	-0.0022	-0.0016
eqm	0.0003	0.0005	0.0006	0.0006	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
var	0.0003	0.0004	0.0006	0.0006	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
n=2000										
	$\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$					$\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$				
	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	\hat{u}_1	\hat{u}_2	\hat{u}_3	\hat{u}_4	\hat{u}_5
Média	0.0990	0.1982	0.2487	0.2986	0.3996	0.0996	0.1984	0.4990	0.5996	0.7994
Vício	-0.0010	-0.0018	-0.0013	-0.0014	-0.0004	-0.0004	-0.0016	-0.0010	-0.0004	-0.0006
eqm	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
var	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 4.9: Resultado do estimador W para um processo k -Factor GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$, onde $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 1 = q$, $\phi = 0.3$, $\theta = 0.5$ e $n \in \{1000, 2000\}$.

n=1000												
	$\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$					$\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$					$\phi_1 = 0.3$	$\theta_1 = 0.5$
	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	\hat{u}_1	\hat{u}_2	\hat{u}_3	\hat{u}_4	\hat{u}_5	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
Média	0.0976	0.1951	0.2462	0.2971	0.3945	0.0990	0.1958	0.4971	0.5978	0.7985	0.3369	0.5252
Vício	-0.0024	-0.0049	-0.0038	-0.0029	-0.0055	-0.0010	-0.0042	-0.0029	-0.0022	-0.0015	0.0369	0.0252
EQM	0.0003	0.0005	0.0006	0.0006	0.0005	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0136	0.0076
Var	0.0003	0.0005	0.0006	0.0006	0.0005	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0123	0.0070
n=2000												
	$\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$					$\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$					$\phi_1 = 0.3$	$\theta_1 = 0.5$
	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	\hat{u}_1	\hat{u}_2	\hat{u}_3	\hat{u}_4	\hat{u}_5	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
Média	0.0989	0.1980	0.2489	0.2978	0.3970	0.0995	0.1985	0.4988	0.5996	0.7993	0.3216	0.5153
Vício	-0.0011	-0.0020	-0.0011	-0.0022	-0.0030	-0.0005	-0.0015	-0.0012	-0.0004	-0.0007	0.0216	0.0153
EQM	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0069	0.0038
Var	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0064	0.0036

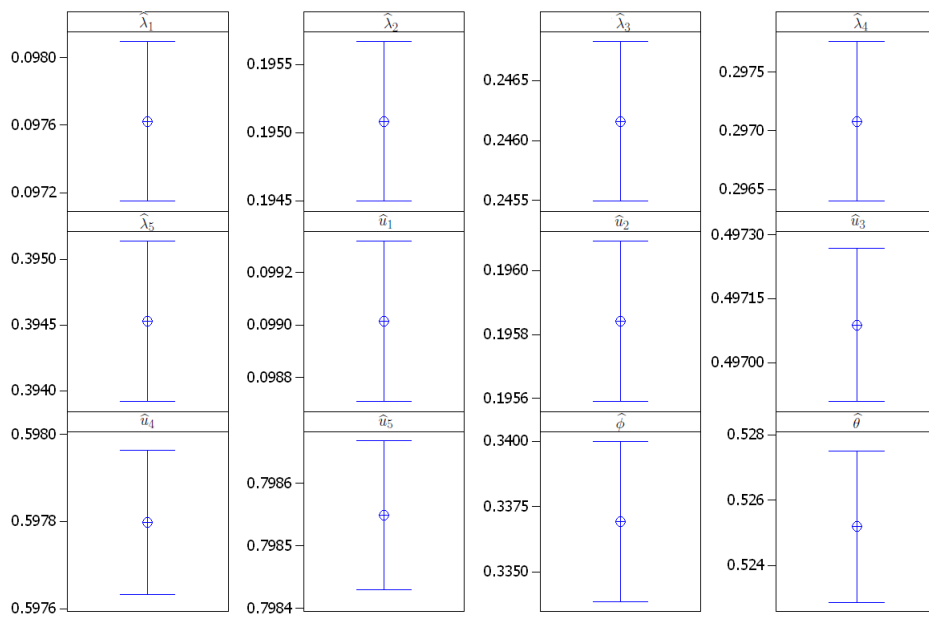


Figura 4.1: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação paramétrica dos parâmetros de um k -Factor GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 1 = q$, $\phi = 0.3$ e $\theta = 0.5$ para $n = 1000$.

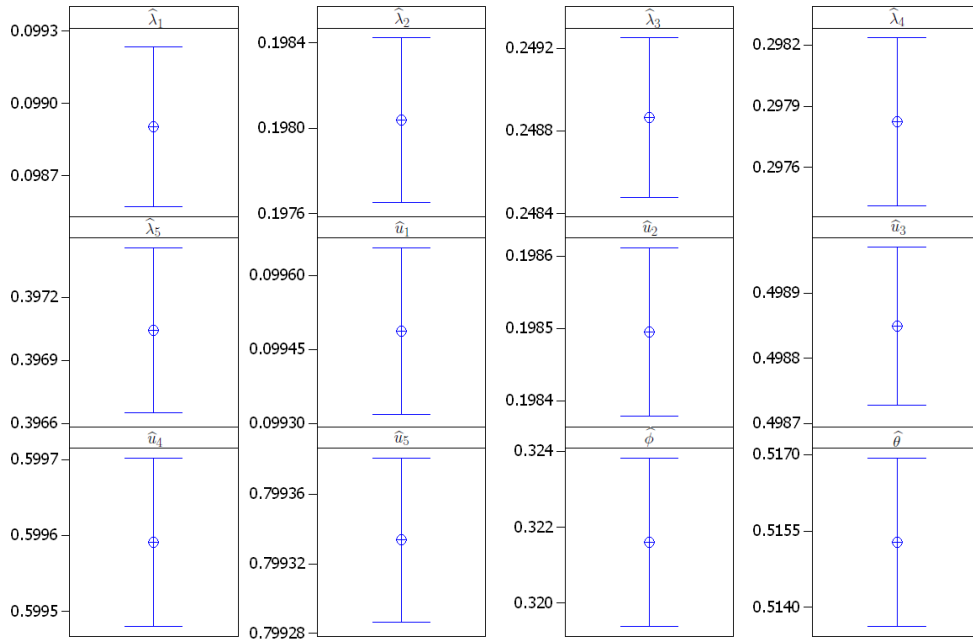


Figura 4.2: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação paramétrica dos parâmetros na série de um k -Factor GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 1 = q$, $\phi = 0.3$, $\theta = 0.5$ e $n = 2000$.

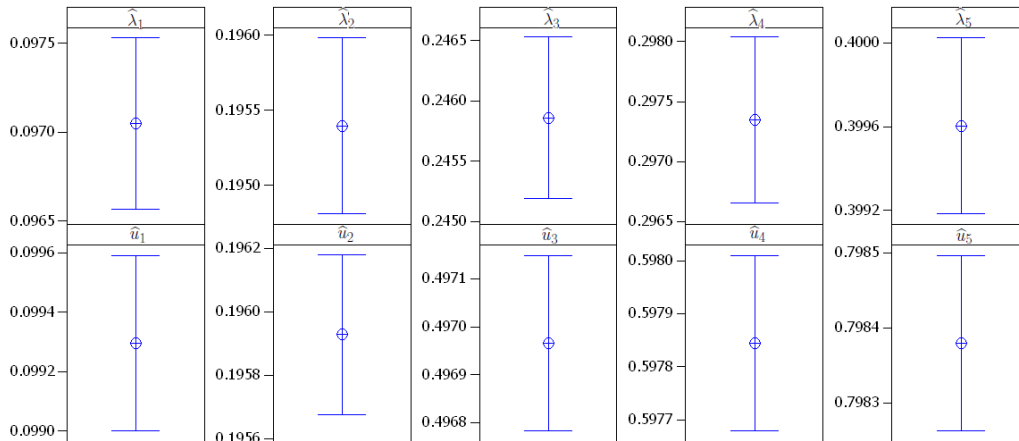


Figura 4.3: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação paramétrica dos parâmetros na série de um k -Factor GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 0 = q$ e $n = 1000$.

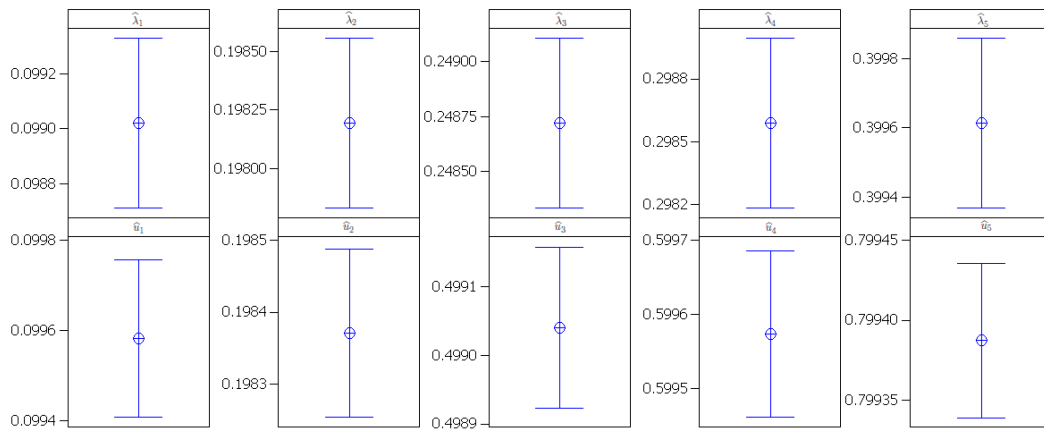


Figura 4.4: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação paramétrica dos parâmetros na série de um k -Factor GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8)$, $\mathbf{u} = (0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4)$, $p = 0 = q$ e $n = 2000$.

4.3 Presença de Mínimos Locais na Função de Verossimilhança

Para valores distintos de u e λ , a função estimada de verossimilhança apresenta mínimos locais em λ , o que induz à conclusão de que é necessária uma boa estimativa inicial para chegar à convergência do mínimo global da função. Fox e Taquq (1986) ressaltam que o número de interações para o algoritmo dos estimadores paramétricos onde a estimativa inicial não é boa é muito maior do que quando a estimativa inicial é próxima do verdadeiro valor.

A figura 4.5 apresenta o gráfico da função de verossimilhança estimada pelo estimador W para o processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \lambda, q)$ quando o processo gerado teve como parâmetros $\lambda = 0.3$ e $u = 0.6$.

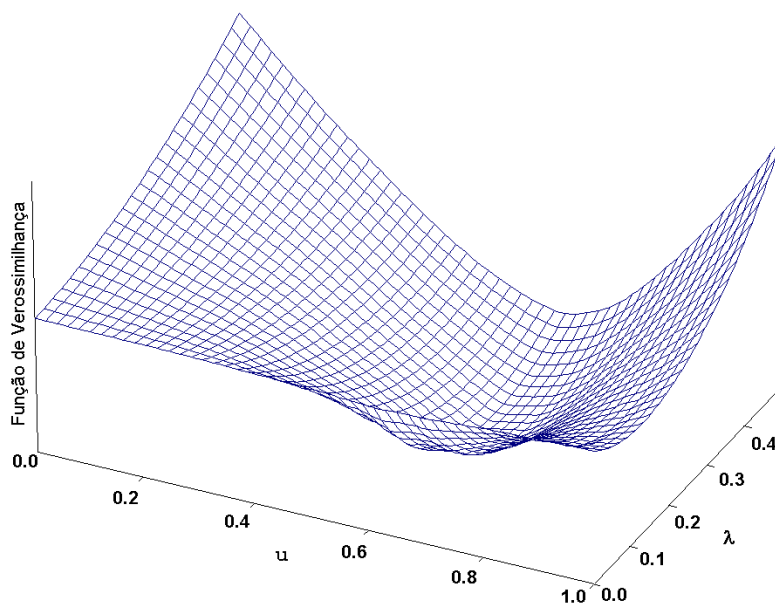


Figura 4.5: Gráfico da Função de Verossimilhança pelo estimador W para o processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \lambda, q)$, onde $\lambda = 0.3$, $\mathbf{u} = 0.6$, $p = 0 = q$, $n = 1000$.

De forma análoga, a figura 4.6 apresenta o gráfico da função de verossimilhança calculada pelo estimador de máxima verossimilhança exato para o processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \lambda, q)$ para $\lambda = 0.3$ e $\mathbf{u} = 0.6$ e percebe-se a presença de um mínimo global.

Com base nos resultados obtidos desta simulação, pode-se sugerir a utilização dos resultados dos estimadores semiparamétricos para obter melhores estimativas iniciais para o estimador W, já para o EMLE encontrou-se um mínimo global não aparecendo mínimos locais, embora o uso de uma estimativa semiparamétrica auxilie para que os cálculos de minimização deste

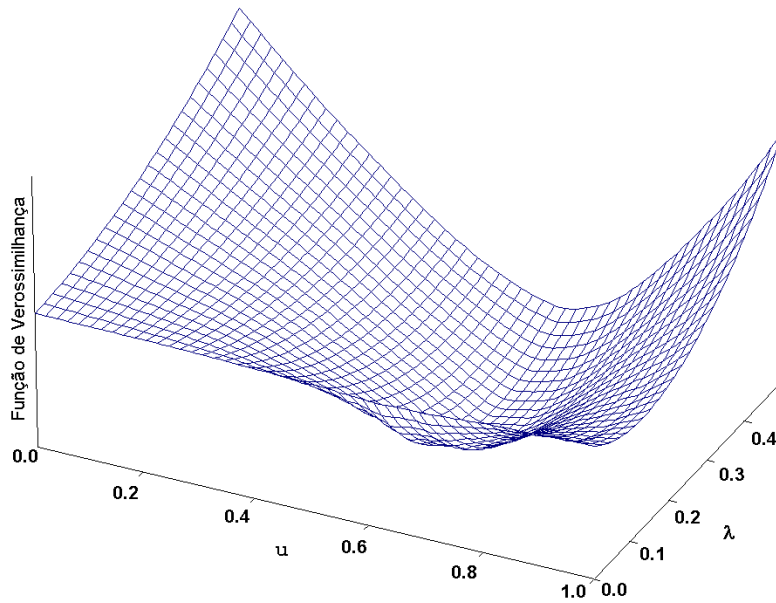


Figura 4.6: Gráfico da Função de Verossimilhança calculada pelo estimador de máxima verossimilhança exato para o processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, onde $\boldsymbol{\lambda} = 0.3$, $\mathbf{u} = 0.6$, $p = 0 = q$, $n = 1000$.

estimador sejam diminuídos e com isso seu tempo computacional diminua também.

4.4 Víci e variância dos estimadores semiparamétricos de acordo com os valores de α

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados obtidos para os processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com base em amostras de tamanho $n = 1000$ e calculadas para as três versões do estimador BA, respectivamente denotados por BA.MQ, BA.MM e BA.MQP, sendo as duas últimas as versões robustas do estimador (veja a seção 2.3 para mais detalhes sobre regressão robusta). Consideramos, para $k = 1$ e $k = 2$, $g(n) = n^\alpha$, com $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e para $k = 7$, consideramos $\alpha \in \{0.80, 0.82, \dots, 0.88\}$. O objetivo desta análise é avaliar o comportamento do vício ao quadrado e variância dos estimadores para os diferentes valores de $g(n) = n^\alpha$.

As figuras 4.7, 4.8 e 4.9 mostram os resultados para os processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com $k = 1$ para diferentes valores de u .

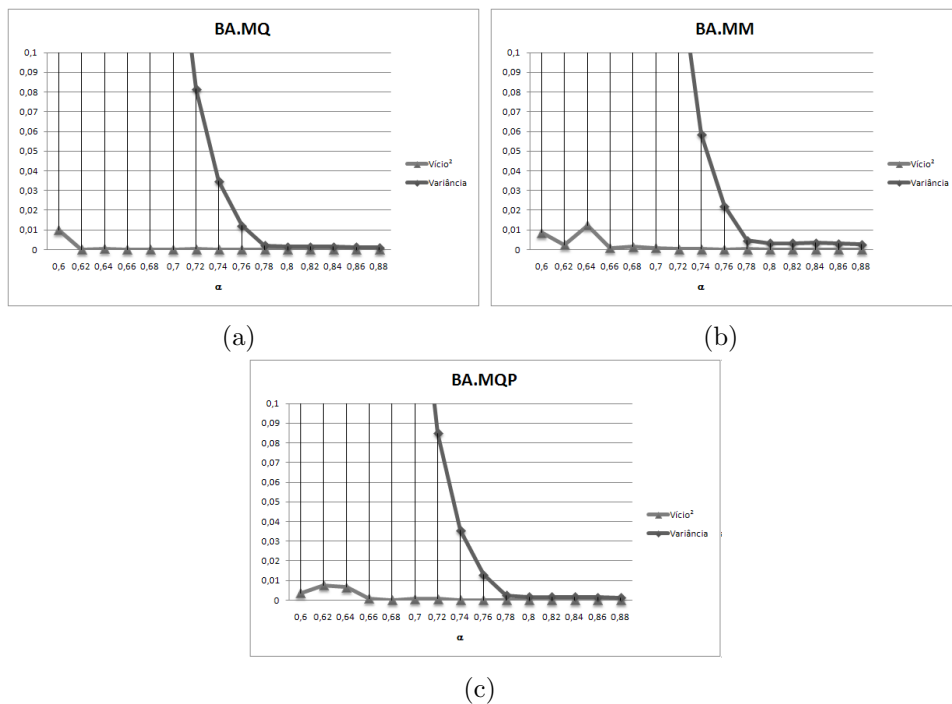


Figura 4.7: Gráfico do vício ao quadrado e variância de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 1$, $\lambda = 0.3$, $u = 0.2$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.

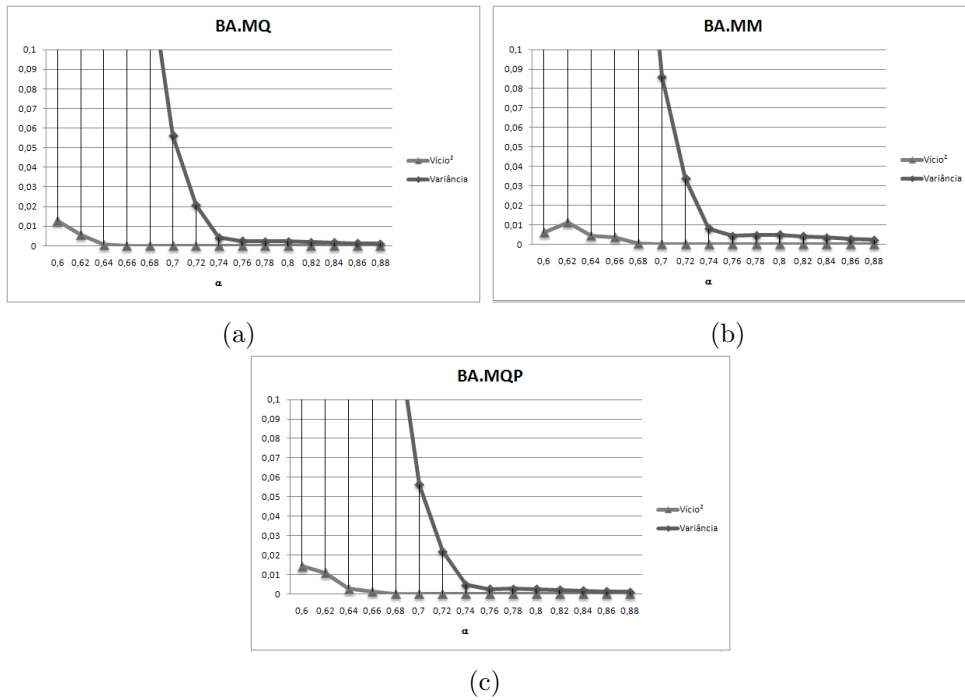


Figura 4.8: Gráfico do vício ao quadrado e variância de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 1$, $\lambda = 0.3$, $u = 0.5$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.

Para $k = 1$, não se observa diferença entre a estimação robusta da clássica, em nenhuma das séries. Já para o caso $k = 2$, nas séries com os valores de \mathbf{u} iguais a $\{0.2, 0.3\}$ e $\{0.2, 0.5\}$, para valores altos de α (acima de 0.8), as três estimativas se mantiveram boas quanto à vício ao quadrado e variância. Já para a série onde $\mathbf{u} = \{0.2, 0.9\}$, o estimador de mínimos quadrados ficou alternante quanto ao vício e os estimadores robustos se mantiveram suaves para valores de α próximos de 0.7.

Na série com $k = 4$, não se nota nenhum comportamento distinto entre os estimadores, mas chama atenção o fato de que vício ao quadrado e variância atingem um ponto de mínimo para depois crescerem novamente.

As figuras para as séries com $k = 2$ e $k = 4$ estão no anexo B (Figuras B.9 a B.21).

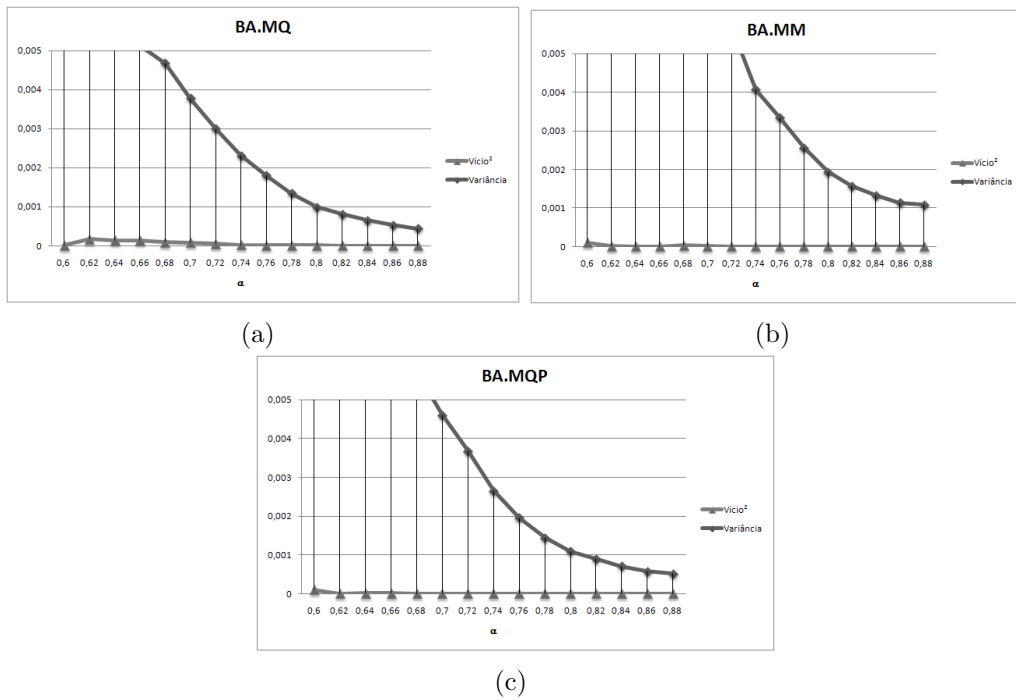


Figura 4.9: Gráfico do vício ao quadrado e variância de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 1$, $\lambda = 0.3$, $u = 0.9$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho, demonstramos alguns resultados teóricos para os processos *k-Factor* GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$. Podemos citar a convergência em quadrado médio e quase certamente das representações média móvel e auto-regressiva infinitas. Na parte de previsão, estendemos os resultados obtidos por Bisognin (2007) para os processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ agora para os processos *k-Factor* GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$. Também apresentamos uma expressão para a função de autocovariância destes processos baseada na representação média móvel infinita.

Na estimação dos processos *k-Factor* GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ apresentamos dois estimadores da classe semiparamétrica e dois na classe paramétrica. Adicionalmente, propomos novas metodologia robustas para a estimação do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, os chamados estimadores robustos. Utilizamos diversas simulações de Monte Carlo variando os parâmetros $p, q, \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k), \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e tamanho amostral $n \in \{1000, 2000\}$. Para os valores de α , onde $g(n) = n^\alpha$ é o número de frequências de Fourier utilizadas na classe dos estimadores semiparamétricos, utilizamos os valores $\alpha \in \{0.60, 0.65, 0.7, 0.72, 0.74, \dots, 0.88, 0.89\}$.

Na estimação semiparamétrica, os estimadores robustos, em especial o estimador de mínimos quadrados podados, apresenta melhores características que os demais estimadores. Não foi feito um estudo de inclusão de ruídos ou outliers, mas mesmo assim estes estimadores se destacaram por sua estabilidade nos casos estudados.

A modelagem utilizando os estimadores semiparamétricos de forma a obter estimativas iniciais para os estimadores paramétricos parece ser uma alternativa interessante para contornar o problema de vários mínimos locais na função de verossimilhança do processo e, de fato, é recomendada na literatura.

O estudo realizado sobre o vício ao quadrado e variância do estimador semiparamétrico aponta para a robustez dos estimadores MM e MPQ, que se mantiveram mais estáveis para os casos de frequências mais altas na série. Não se observa grande diferença quando o processo é um processo com 7

fatores.

As estimativas dos termos AR e MA são mais pobres em vício, EQM e variância do que os demais parâmetros na série, o que chamou a atenção por não estar ainda muito claro o motivo deste fenômeno ter acontecido. Mais simulações de séries e um estudo teórico mais aprofundado podem trazer algumas respostas para esta questão.

Referências

- [1] Baillie, R.T. (1996). “Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics”. *Journal of Econometrics*, Vol. **73**, pp. 5-59.
- [2] Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. New York: Chapman & Hall.
- [3] Bisognin, C. (2007). *Estimação e Previsão em Processos SARFIMA(p, d, q) × (P, D, Q)_s na presença de Outliers*. Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [4] Bisognin, C. e S.R.C. Lopes (2005). “Processos Fracionários Generalizados”. *Anais da 11ª Escola de Séries Temporais e Econometria*, Vol **1**, pp. 111-111.
- [5] Bisognin, C. e S.R.C. Lopes (2007). “Estimating and Forecasting the Long Memory Parameter in the Presence of Periodicity”. *Journal of Forecasting*, Vol. **26**(6), pp. 405-427.
- [6] Bisognin, C., S.R.C. Lopes e A.V. Schmidt (2010) “Estimation and Forecasting in k-Factor Gamma Processes - New Approaches and Reviews”. *Em preparação*.
- [7] Box, G.E.P., G.M. Jenkins e G.C. Reinsel (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. New Jersey: Prentice Hall.
- [8] Brietzke, E.H.M., S.R.C. Lopes e C. Bisognin (2005). “A Closed Formula for the Durbin-Levinson’s Algorithm in Seasonal Fractionally Integrated Processes”. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. **42**(11-12), pp. 1191-1206.
- [9] Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- [10] Chung, C-F. (1996). “Estimating a Generalized Long Memory Process”. *Journal of Econometrics*, Vol. **73**, pp. 237-259.

- [11] Collet, J., D. Guégan e P. Valdes-Sosa (2003). “How Shall We Determine the Number and the Location of the Gegenbauer Frequencies? An Empirical Approach”. Note de Recherche IDHE-MORA n° 2003-09.
- [12] Dahlhaus, R. (1989). “Efficient Parameter Estimation for Self-Similar Processes”. *Annals of Statistics*, Vol. **17**, pp. 1749-1766.
- [13] Denby, L. e R.D. Martin (1979). “Robust Estimation of the First-Order Autoregressive Parameter”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **74**, pp. 140-146.
- [14] Draper, N. e H. Smith (1981). *Applied Regression Analysis*. New York: John Wiley.
- [15] Ferrara, L. e D. Guégan (1999). “Estimation and Applications of Gegenbauer Processes”. Preprint INSEE n° 9927.
- [16] Ferrara, L. e D. Guégan (2001). “Forecasting with k-factor Gegenbauer processes: Theory and Applications”. *Journal of Forecasting*, Vol. **20**, pp. 581-601.
- [17] Fox, R. e M.S. Taqqu (1986). “Large-sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series”. *The Annals of Statistics*, Vol. **14**, pp. 517-532.
- [18] Geweke, J. e S. Porter-Hudak (1983). “The Estimation and Application of Long Memory Time Series Model”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **4**(4), pp. 221-238.
- [19] Giraitis, L. e R. Leipus (1995). “A Generalized Fractionally Differencing Approach in Long Memory Modelling”. *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **35**(1), pp. 53-65.
- [20] Granger, C.W.J. e R. Joyeux (1980). “An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **1**(1), pp. 15-29.
- [21] Gray, H. L., N-F. Zhang e W.A. Woodward (1989). “On Generalized Fractional Processes”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **10**(3), pp. 233-257.
- [22] Hosking, J.R.M. (1981). “Fractional Differencing”. *Biometrika*, Vol. **68**(1), pp. 165-176.
- [23] Hosking, J.R.M. (1984). “Modelling Persistence in Hydrological Time Series Using Fractional Differencing”. *Water Resources Research*, Vol. **20**(12), pp. 1898-1908.

- [24] Huber, P.J. (1981). *Robust Statistics*. New York: Wiley.
- [25] Hurst, H.E. (1951). “Long-term Storage Capacity of Reservoirs”. *Transactions of American Society in Civil Engineers*, Vol. **116**, pp. 165-167.
- [26] Lopes, S.R.C. (2007). “Long-range Dependence in Mean and Volatility: Models, Estimation and Forecasting”. In: Vares M.E. e V. Sidarovicus eds. *EBP*. Rio de Janeiro: Birkhäuser.
- [27] Lopes, S.R.C. e B.V.M. Mendes (2006). “Bandwidth Selection in Classical and Robust Estimation of Long Memory”. *International Journal of Statistics and Systems*, Vol. **1**(2), pp. 167-190.
- [28] Lopes, S.R.C., B.P. Olbermann e V.A. Reisen (2004). “A Comparison of Estimation in Non-Stationary ARFIMA Processes”. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. **74**(5), pp. 339-347.
- [29] Reisen V.A., S.R.C. Lopes e M.R. Sena (2002). “Error and Model Misspecification in ARFIMA Processes”. *Brazilian Review Of Econometrics*, Vol. **abf 21**(1), pp. 101-135.
- [30] Mandelbrot, B.B. e J.R. Wallis (1969). “Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part One, Averages and Variances”. *Water Resources Research*, Vol. **5**(1), pp. 228-241.
- [31] Morettin P.A. e C.M.C. Toloi (2004). *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Edgard Blücher.
- [32] Olbermann, B.P. (2002). “Estimação em Classes de Processos Estocásticos com Decaimento Hiperbólico da Função de Autocorrelação”. Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- [33] Ooms, M (1995). “Flexible Seasonal Long Memory and Economic Time Series”. *Preprint of the Econometric Institute*, Erasmus University, Rotterdam.
- [34] Porter-Hudak, S. (1990). “An Application of the Seasonal Fractionally Differenced Model to the Monetary Aggregates”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **85**(410), pp. 338-344.
- [35] Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis in Time Series*. New York: Academic Press.
- [36] Ray, B.K. (1993). “Long-Range Forecasting of IBM Product Revenues Using a Seasonal Fractionally Differenced ARMA Model”. *International Journal of Forecasting*, Vol. **9**, pp. 255-269.

- [37] Reisen, V.A. (1994). "Estimation of the Fractional Difference Parameter in the ARIMA(p,d,q) Model using the Smoothed Periodogram". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **15**(3), pp. 335-350.
- [38] Reisen, V.A. e S.R.C. Lopes (1999). "Some Simulations and Applications of Forecasting Long-Memory Time Series Models". *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. **80**(2), pp. 269-287.
- [39] Robinson, P.M. (1995). "Log-Periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence". *Annals of Statistics*, Vol. **23**(3), pp. 1048-1072.
- [40] Rousseeuw, P.J. (1984). "Least Median of Square Regression". *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **79**, pp. 871-880.
- [41] Rousseeuw, P.J. e B.C. Zomeren (1990). "Unmasking Multivariate Outliers and Leverage Points". *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **85**, pp. 633-651.
- [42] Rousseeuw, P.J. e A.M. Leroy (2003). *Rubust Regression and Outlier Detection*. New Jersey: John Wiley.
- [43] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. Auckland: Mcgraw-Hill.
- [44] Sowell, F. (1992). "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models". *Journal of Econometrics*, Vol. **53**, pp. 165-188.
- [45] Tukey, J.W. (1949). "The Sampling Theory of Power Spectrum Estimates". *Symp. Appl. Autocorrelation Anal. Phys. Problems, Woods Hole, Massachusetts*, pp. 735.
- [46] Wei, W. (2005). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. New York: Addison Wesley.
- [47] Whittle, P. (1951). *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. New York: Hafner.
- [48] Woodward, W.A., Q.C. Cheng e H.L. Gray (1998). "A k -Factor GARMA Long-Memory Model". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **19**(4), pp. 485-504.
- [49] Yohai, V. J. (1987). "High breakdown point and high efficiency robust estimates for regression". *Annals of Statistics*, Vol. **15**, pp. 642-656.

Apêndice A

A.1 Convergência

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre convergência de funções e séries os quais são muito úteis nas demonstrações dos teoremas na Seção 3.3, onde tratamos da causalidade e inversibilidade dos processos k-Factor GARMA(p, \mathbf{u}), $\boldsymbol{\lambda}, q$).

O teorema a seguir, fornece as condições para a convergência quase certa de uma seqüência de funções integráveis. Sua demonstração pode ser encontrada em Halmos (1969).

Teorema A.1. *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ uma seqüência de funções integráveis tal que*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} \int |f_n| d\mu < \infty.$$

Então, a série $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} |f_n|$ e, conseqüentemente, $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} f_n$, convergem quase certamente (a.e.) para uma função integrável f e

$$\int f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} \int f_n d\mu.$$

O Teorema A.2 fornece um importante resultado sobre convergência de séries útil para a demonstração da convergência em quadrado médio das representações média móvel e auto-regressiva infinitas dos processos k-Factor GARMA(p, \mathbf{u}), $\boldsymbol{\lambda}, q$) dadas na xx do Capítulo x - vou arrumar isso quando tudo estiver pronto.

Teorema A.2. *Seja $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} a_n$ uma série de termos positivos convergente. Então, a série $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} a_n^2$ converge.*

Demonstração: Por hipótese, temos que $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} a_n$ converge. Logo $a_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $a_n^2 < a_n$, para todo $n \geq n_0$.

Desta forma,

$$\sum_{n \geq n_0} a_n^2 \leq \sum_{n \geq n_0} a_n < \infty,$$

ou seja,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} a_n^2 = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n^2 + \sum_{n \geq n_0} a_n^2 < \infty,$$

Portanto, a série $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} a_n^2$ converge. □

A.2 Estimação da Função Densidade Espectral

Nesta seção, apresentamos os estimadores para a função densidade espectral de um processo estocástico. Estes resultados são muito úteis no Capítulo 5, onde descrevemos alguns métodos de estimação para estimar os parâmetros do processo k-Factor GARMA(p, \mathbf{u}), $\boldsymbol{\lambda}, q$).

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário com média μ e função de autocovariância, denotada por $\gamma_X(\cdot)$, absolutamente convergente. Sob estas condições, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por

$$f_X(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_X(k) e^{-ikw}, \text{ para } w \in (0, \pi]. \quad (\text{A.1})$$

Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal gerada a partir de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, com função de autocovariância não necessariamente absolutamente convergente. Então, a função periodograma da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ é definida por

$$I_p(w) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-itw} \right|^2, \text{ para todo } w \in (0, \pi]. \quad (\text{A.2})$$

Brockwell e Davis (1991) demonstram que a equação (A.2) é equivalente a

$$I_n(w) = \begin{cases} n|\bar{X}|^2, & \text{se } w = 0 \\ \sum_{|k| < n} \hat{\gamma}_X(k) e^{-itw}, & \text{se } w \in (0, \pi], \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

onde $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$ é a média da série temporal e $\hat{\gamma}_x(\cdot)$ é a função de autocovariância amostral dada por

$$\hat{\gamma}_x(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|k|} (X_t - \bar{X})(X_{t+|k|} - \bar{X}). \quad (\text{A.4})$$

Pela equação (A.3), um estimador natural para $f_x(w)$, para $w \in (0, \pi]$ é $I(w)/2\pi$, isto é

$$I(w) := \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-itw} \right|^2, \quad (\text{A.5})$$

Na prática, a função periodograma só poderá ser calculada para um número finito de frequências $w \in (0, \pi]$. Pode-se demonstrar que (A.2) fica completamente determinada por seus valores nas frequências de Fourier $w_j = \frac{2\pi j}{n}$, para $j \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

Pela expressão (A.2) temos que $I_n(\cdot)/2\pi$ é assintoticamente não-viciado para a função densidade espectral, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{I_n(\cdot)}{2\pi} \right) = f_x(w).$$

Apesar da função periodograma ser um estimador assintoticamente não-viciado, ela é inconsistente para a função densidade espectral, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\frac{I_n(\cdot)}{2\pi} \right) \neq 0.$$

Em vista disso, Tukey (1949) propõe um estimador para a função densidade espectral baseado na função de autocovariância ponderada ou suavizada o qual é não-viciado e consistente. Neste caso, o processo de suavização ocorre no domínio do tempo e para a obtenção do estimador passa-se para o domínio da frequência.

Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal gerada a partir de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Então, o estimador da função densidade espectral, chamado *estimador suavizado de covariâncias*, denotado por $I_{smooth}(\cdot)$, é dado por

$$I_{smooth}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq m} \Lambda \left(\frac{k}{m} \right) \hat{\gamma}_x(k) e^{-ikw}, \quad \text{para } w \in (0, \pi], \quad (\text{A.6})$$

onde $\hat{\gamma}_x(\cdot)$ é a função de autocovariância amostral dada pela expressão (A.4), $m = n^\beta$, para $0 \leq \beta \leq 1$ e $\Lambda(x)$ é uma função par, contínua por intervalos de x satisfazendo as condições

A.i) $0 \leq \Lambda(x) \leq \Lambda(0) = 1$,

A.ii) $\Lambda(-x) = \Lambda(x)$, para todo x ,

A.iii) $\Lambda(x) = 0$, para $|x| > 1$.

A função $\Lambda(\cdot)$ é chamada de *função de ponderação*, *função peso* ou *núcleo*.

Note que, pela propriedade A.iii) da função de ponderação, o produto $\Lambda(\frac{k}{m}) \widehat{\gamma}_x(k) = 0$, para $|k| > m$.

Um processo de suavização alternativo ao anterior é aplicar o procedimento de suavização no próprio domínio das freqüências. Neste caso, obtemos o chamado *estimador suavizado de periodogramas*.

A transformada de Fourier da função de ponderação ou núcleo, denotada por $\Lambda_q(\cdot)$, é chamada *janela espectral*, e é dada por

$$\Lambda_q(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-iwk} \Lambda(k), \text{ para } w \in (0, \pi], \quad (\text{A.7})$$

onde $q < n$ é um inteiro que depende do tamanho da amostra n .

A janela espectral $\Lambda_q(\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\Lambda_q(-w) = \Lambda_q(w)$, para todo w ;

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_q(w) dw = \Lambda(0) = 1$.

Note que (A.6) é a transformada de Fourier do produto $\Lambda_q(\cdot) \widehat{\gamma}_x(\cdot)$ e essa transformada é a convolução das transformadas de Fourier de $\Lambda_q(\cdot)$ e de $\widehat{\gamma}_x(\cdot)$. Desta forma, a expressão do estimador suavizado de covariância, dado pela equação (A.6), é equivalente a

$$I_{smooth}(w) = \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_q(w - \lambda) I(\lambda) d\lambda. \quad (\text{A.8})$$

Aproximando a integral em (A.8) pela sua soma de Riemann, temos

$$I_{smooth}(w) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Lambda_q(w - w_j) I(w_j), \quad (\text{A.9})$$

onde $w_j = \frac{2\pi j}{n}$ e $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x .

Pela soma de Riemann, decorre que

$$\frac{2\pi}{n} \sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Lambda_q(w_j) \cong \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_q(w) dw = 1. \quad (\text{A.10})$$

Logo, (A.10) é assintoticamente equivalente ao estimador da forma

$$I_{smooth}(w) = \sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} K(w - w_j)I(w_j), \text{ para } w \in (0, \pi], \quad (\text{A.11})$$

onde $K(\cdot)$ é uma *função de ponderação* real, simétrica e periódica, tal que

$$\sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} K(w_j) = 1, \quad (\text{A.12})$$

com $w_j = \frac{2\pi j}{n}$, com $j \in \{-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

O estimador dado pela expressão (A.11) é denominado *estimador suavizado de periodogramas* ou somente *função periodograma suavizado*.

Segundo Koopmans (1974), em ambos os casos, obtemos estimadores que são assintoticamente não-viciados e consistentes para a função densidade espectral de um processo estocástico estacionário.

A.3 Ordens de Aproximação \mathcal{O} e o

Nesta seção, apresentamos as definições das ordens de aproximação \mathcal{O} e o e também algumas propriedades das mesmas.

Definição A.3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais quaisquer. Então, dizemos que $f(\cdot)$ é *de ordem menor ou igual a* $g(\cdot)$, denotada por $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, quando $x \rightarrow \infty$, se e somente se, existem $A > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, tais que $|f(x)| \leq A|g(x)|$, para todo $x > x_0$. Em outras palavras, $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, quando $x \rightarrow \infty$, significa que $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ é limitada para x suficientemente grande.

Definição A.4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais quaisquer. Então, dizemos que $f(\cdot)$ é *de ordem (estritamente) menor a* $g(\cdot)$, denotada por $f(x) = o(g(x))$, quando $x \rightarrow \infty$, se e somente se, para todo $A > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $|f(x)| < A|g(x)|$, para todo $x > x_0$. Em outras palavras, $f(x) = o(g(x))$, quando $x \rightarrow \infty$, significa que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Definição A.5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais quaisquer. Então, dizemos que $f(\cdot)$ é *assintoticamente igual a* $cg(\cdot)$ e denotamos por $f(x) \sim cg(x)$, quando $x \rightarrow x_0$, se e somente se, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, onde c é uma constante finita.

Observação A.6. Nos Capítulos 2 ao 5, em algumas definições e teoremas, utilizamos a Definição A.5 com $c = 1$.

A seguir, apresentamos algumas propriedades, operações elementares e relações dos símbolos apresentados nas Definições A.3-A.5.

Propriedades:

- i) A relação da Definição A.5 é uma relação de equivalência, isto é, ela é reflexiva, simétrica e transitiva.
- ii) Multiplicação por uma constante: $\mathcal{O}(kf(x)) = k\mathcal{O}(f(x)) = \mathcal{O}(f(x))$, para todo $k \neq 0$.
- iii) Adição de uma constante: $\mathcal{O}(k + f(x)) = k + \mathcal{O}(f(x)) = \mathcal{O}(f(x))$.
- iv) Composição: $\mathcal{O}(\mathcal{O}(f(x))) = \mathcal{O}(f(x))$.
- v) $\mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(f(x)) = \mathcal{O}(f(x))$.

As propriedades acima citadas, também são válidas para o símbolo o .

- vi) $o(g(x)) = \mathcal{O}(g(x))$, mas $\mathcal{O}(g(x)) \neq o(g(x))$.
- vii) Se $f(x) \sim g(x)$, então $f(x) = g(x)(1 + o(1))$.
- viii) $f(x) = o(1)$, quando $x \rightarrow \infty$, significa que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- ix) $f(x) = \mathcal{O}(1)$, quando $x \rightarrow \infty$, significa que $|f(x)|$ é limitada, quando x tende ao ∞ .

Apêndice B

Neste anexo apresentamos algumas gráficos do intervalo de confiança a 95% para a média referentes às simulações do Capítulo 4. Para a estimação dos parâmetros dos processos *k-Factor* GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ nestes gráficos (ver Definição 1.13) utilizamos dois estimadores semiparamétricos e suas versões robustas e dois estimadores paramétricos (para mais detalhes sobre estimação, ver capítulo 2).

Para os gráficos de vício ao quadrado e média do estimador BA para os processos *k-Factor* GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ foi utilizado tamanho amostral $n = 1000$ e diferentes valores de α .

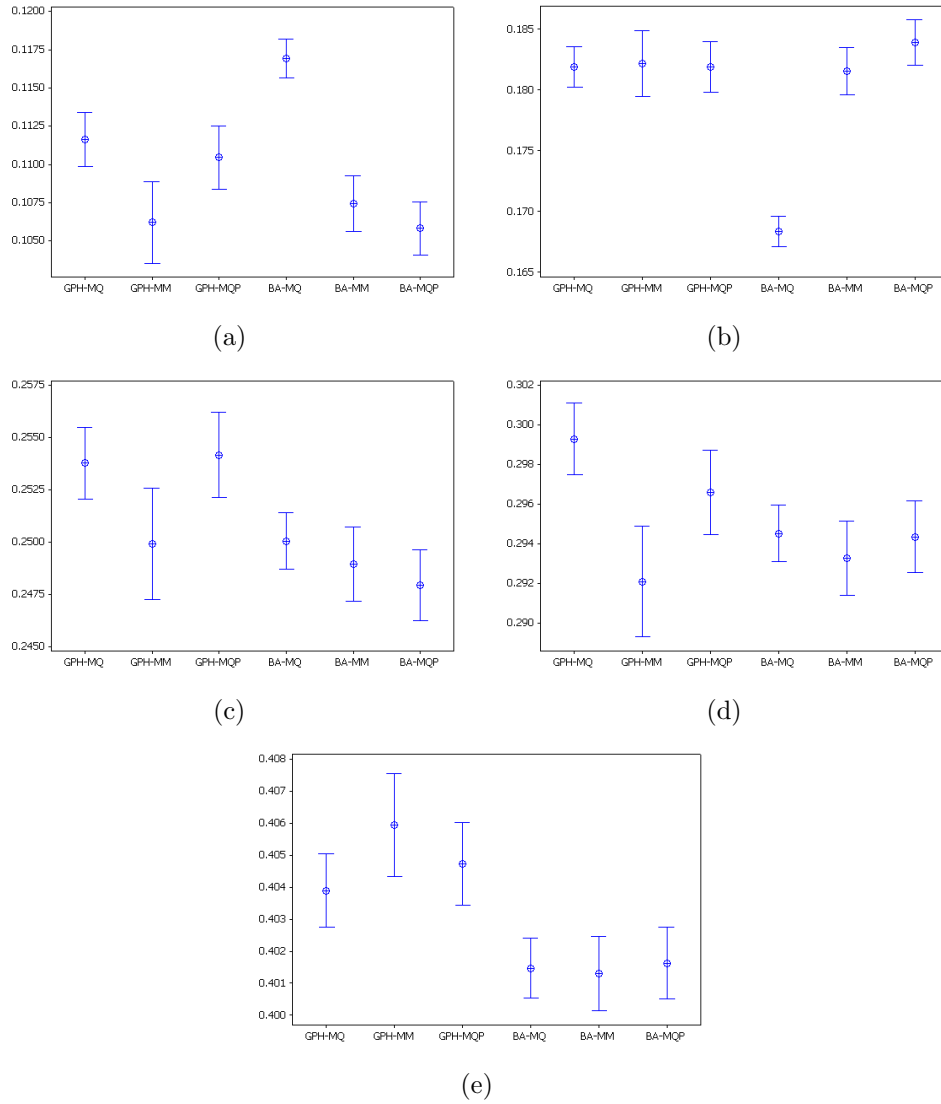


Figura B.1: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\mu = 0$, $k = 5$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}$, $\mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha = 0.85$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$;

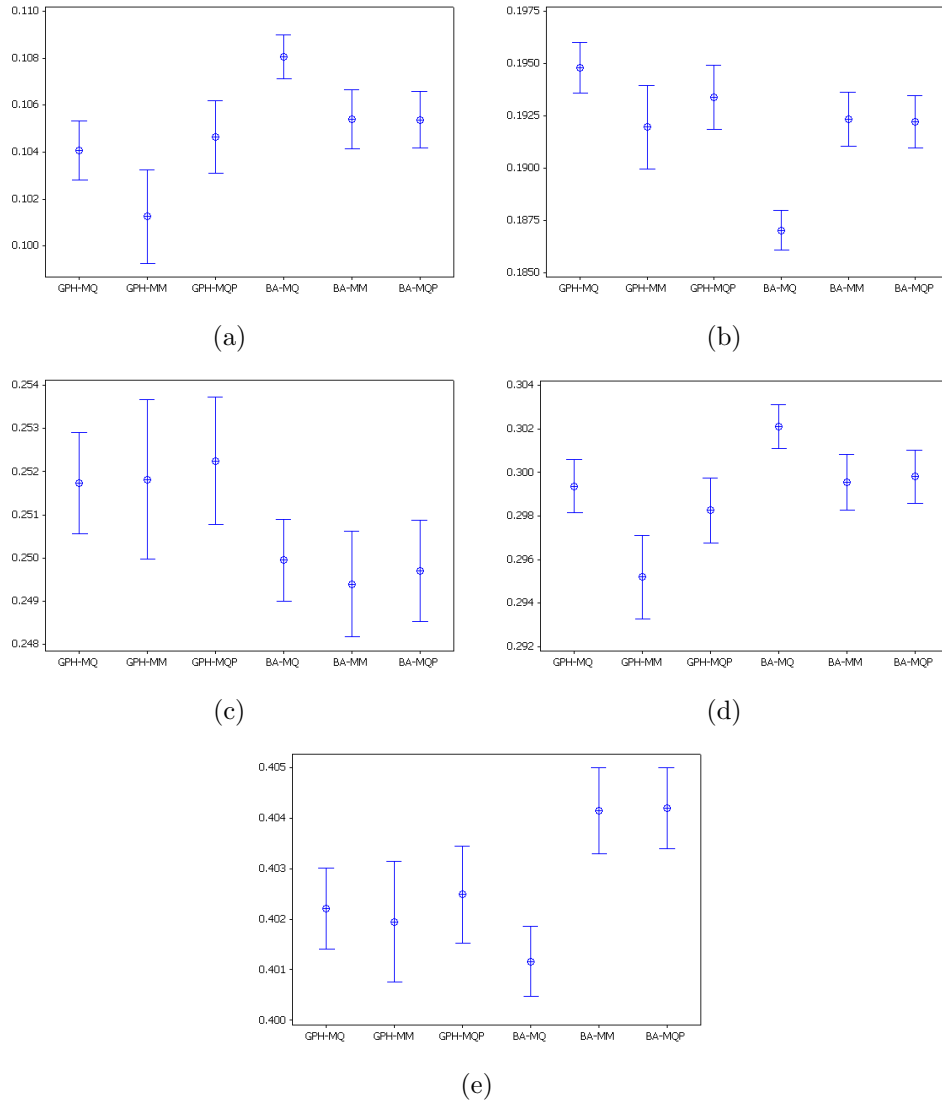


Figura B.2: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\mu = 0$, $k = 5$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}$, $\mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}$, $p = 0 = q$, $n = 2000$, $\alpha = 0.85$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$;

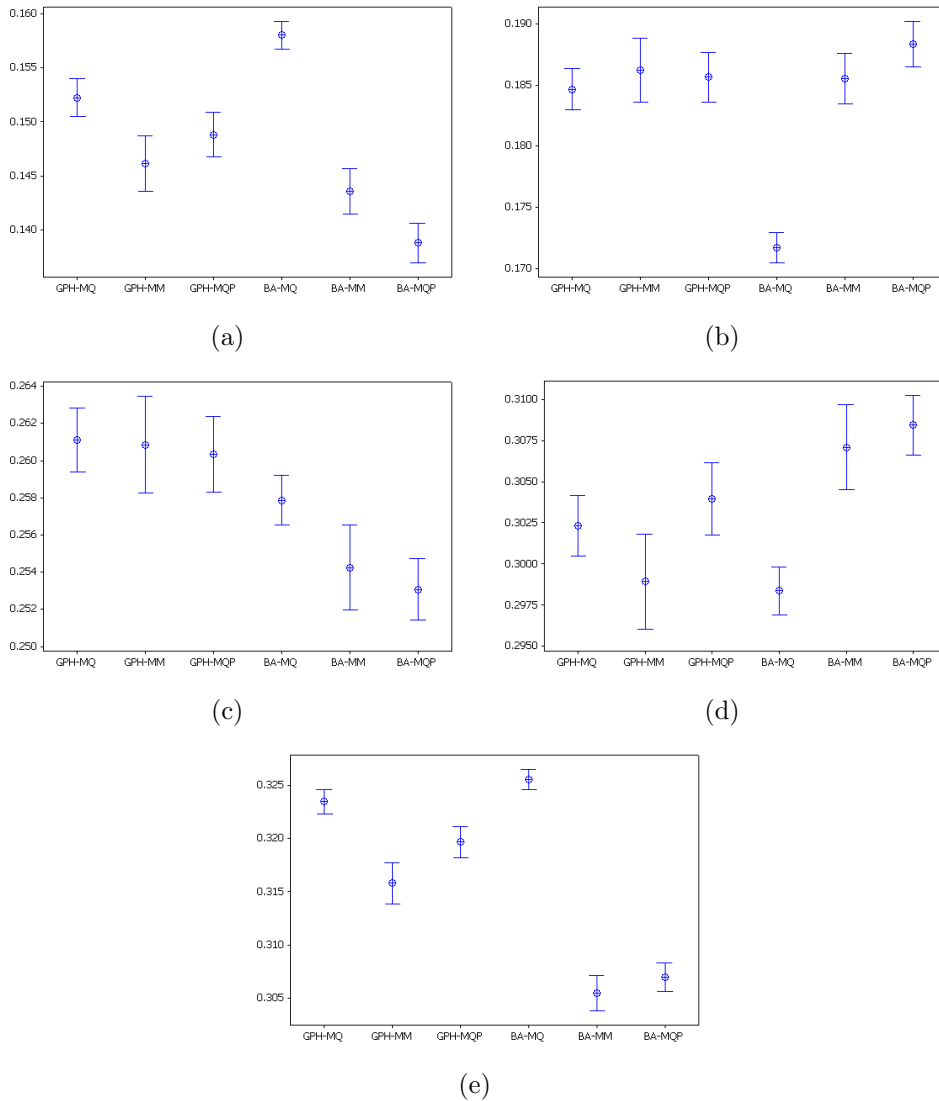


Figura B.3: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\mu = 0$, $k = 5$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}$, $\mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}$, $p = 1 = q$, $\phi_1 = 0.3$, $\theta_1 = 0.5$, $n = 1000$, $\alpha = 0.85$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$;

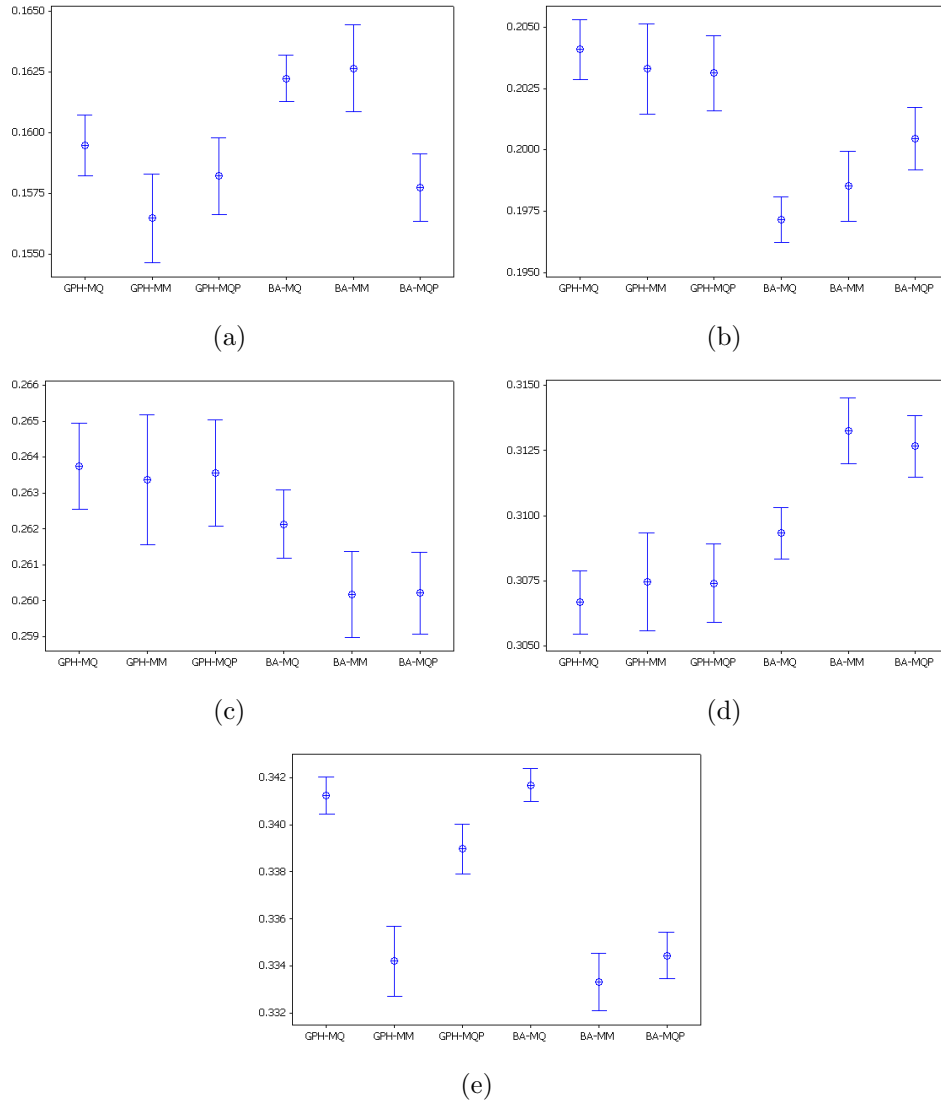
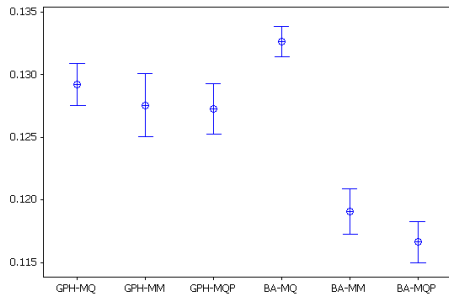
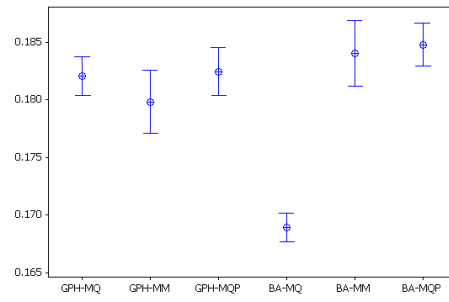


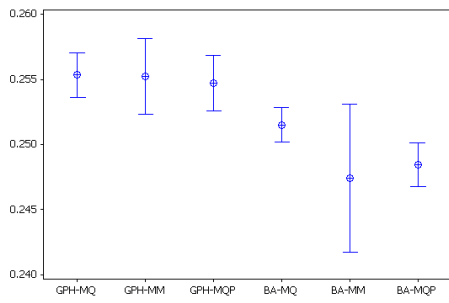
Figura B.4: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 5$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}$, $\mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}$, $p = 1 = q$, $\phi_1 = 0.3$, $\theta_1 = 0.5$, $n = 2000$, $\alpha = 0.85$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$;



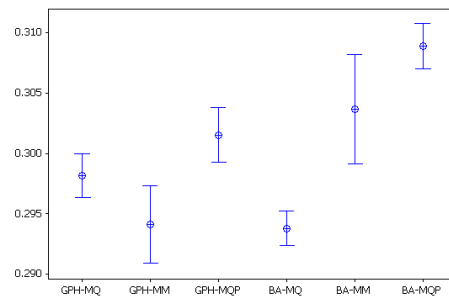
(a)



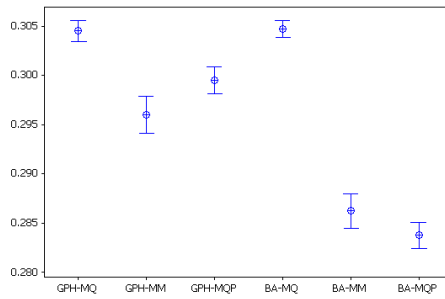
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura B.5: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 5$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}$, $\mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}$, $p = 1 = q$, $\phi = 0.3$, $\theta = 0.5$, $n = 1000$, $\alpha = 0.89$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$;

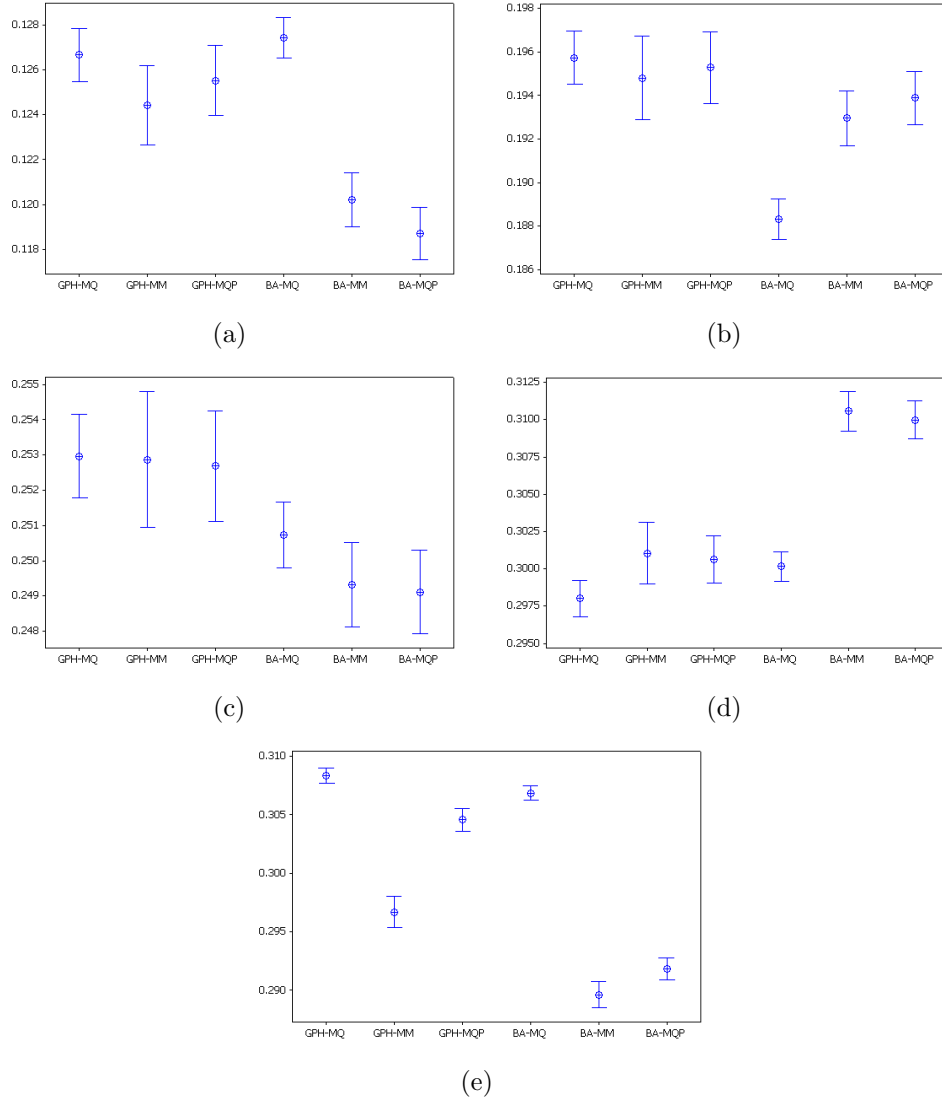
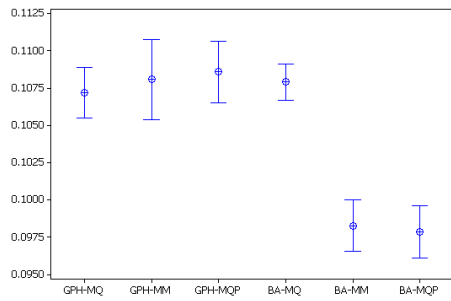
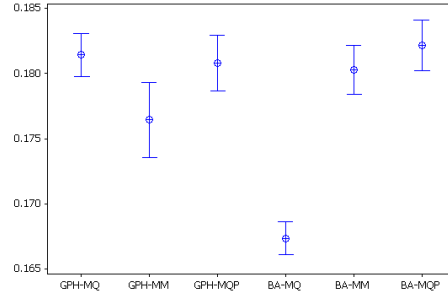


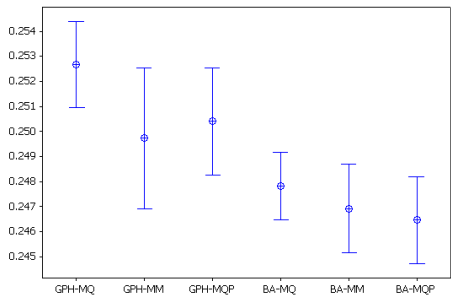
Figura B.6: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 5$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}$, $\mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}$, $p = 1 = q$, $\phi = 0.3$, $\theta = 0.5$, $n = 2000$, $\alpha = 0.89$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$;



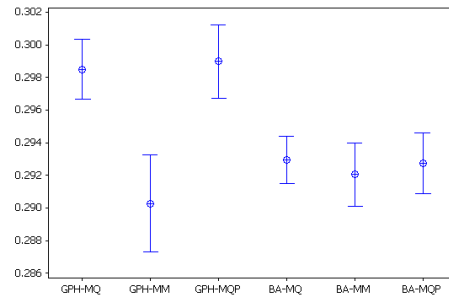
(a)



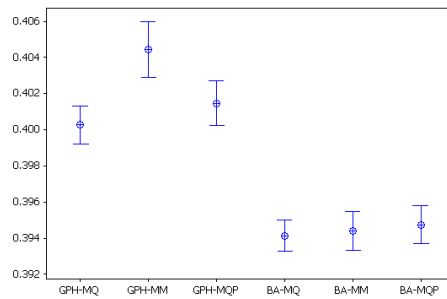
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura B.7: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 5$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}$, $\mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}$, $\hat{p} = 0 = \hat{q}$, $n = 1000$, $\alpha = 0.89$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$;

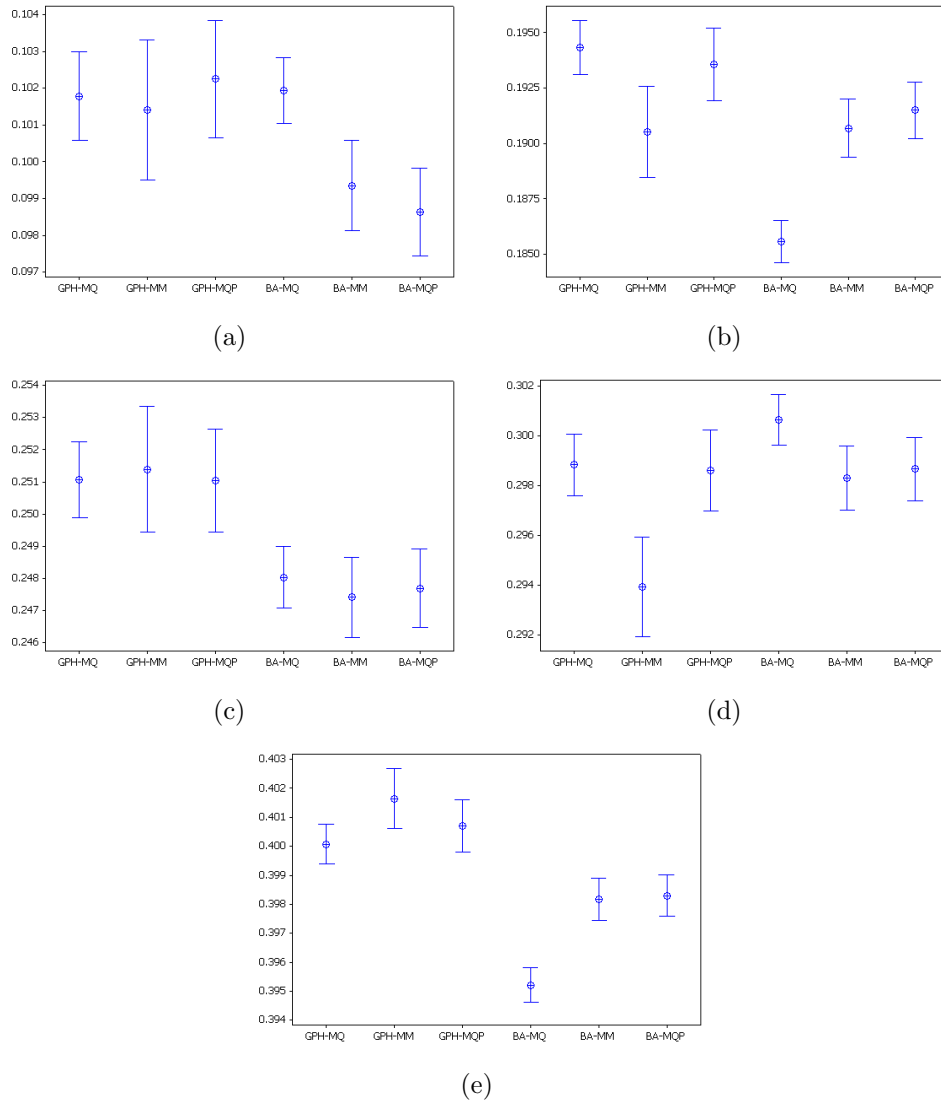
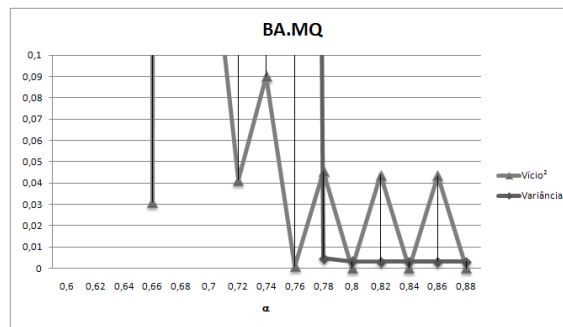
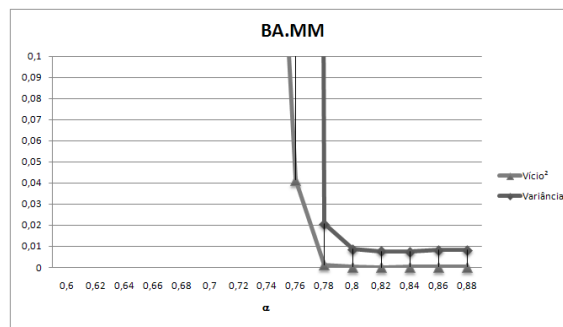


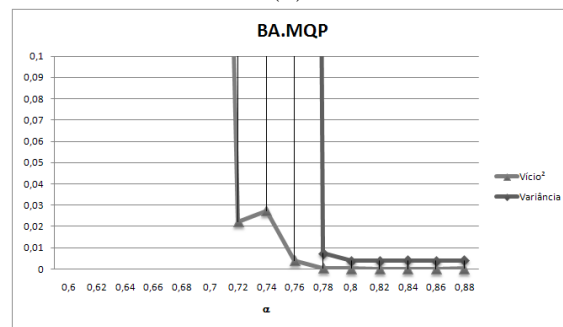
Figura B.8: Gráfico do intervalo de confiança a 95% para a média da estimação semiparamétrica (clássica e robusta) de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 5$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4\}$, $\mathbf{u} = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}$, $p = 0 = q$, $n = 2000$, $\alpha = 0.89$ e $re = 5000$: (a) $\hat{\lambda}_1$; (b) $\hat{\lambda}_2$; (c) $\hat{\lambda}_3$; (d) $\hat{\lambda}_4$; (e) $\hat{\lambda}_5$;



(a)

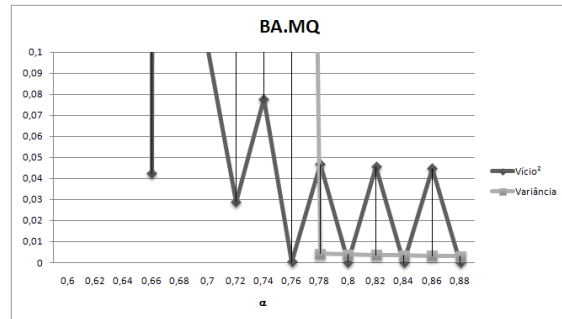


(b)

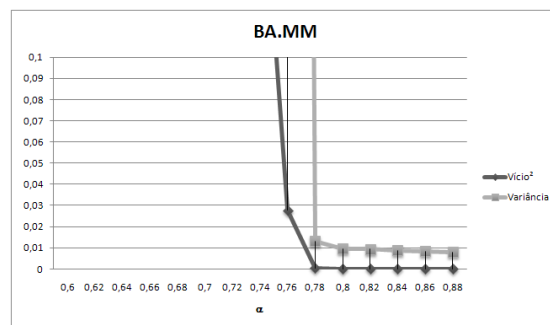


(c)

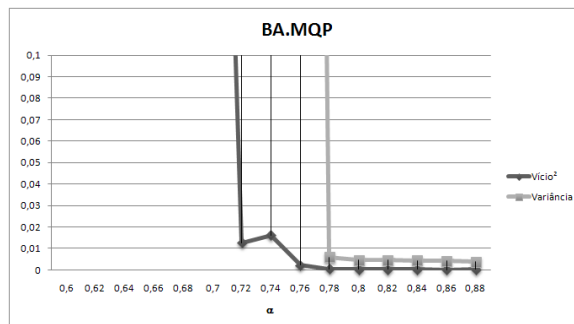
Figura B.9: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_1 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}$, $\mathbf{u} = \{0.2, 0.3\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)

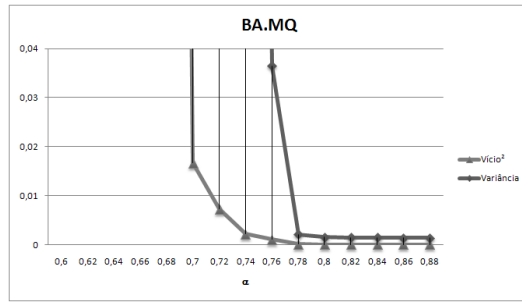


(b)

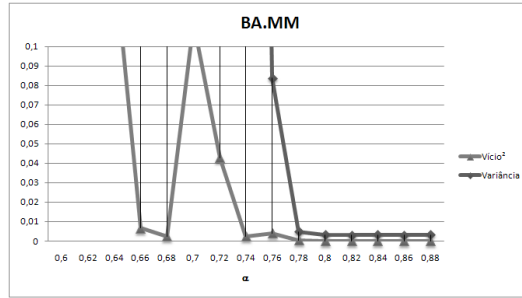


(c)

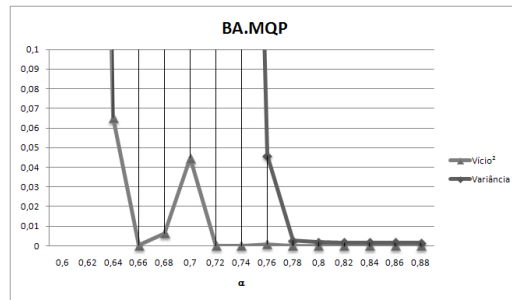
Figura B.10: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_2 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}$, $\mathbf{u} = \{0.2, 0.3\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)



(b)



(c)

Figura B.11: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_1 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}$, $\mathbf{u} = \{0.2, 0.5\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.

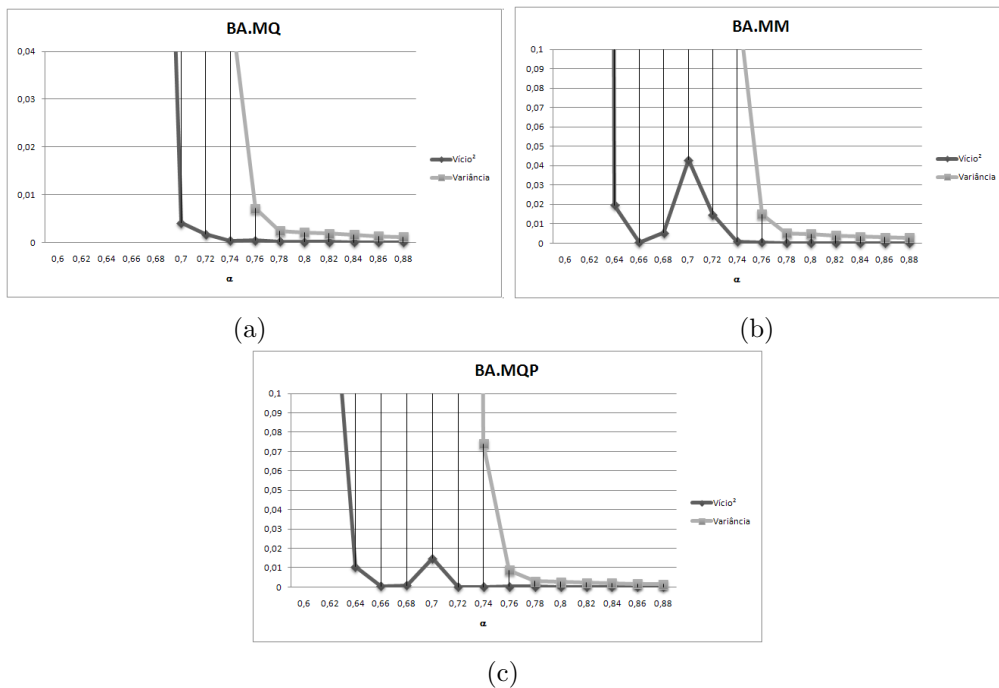
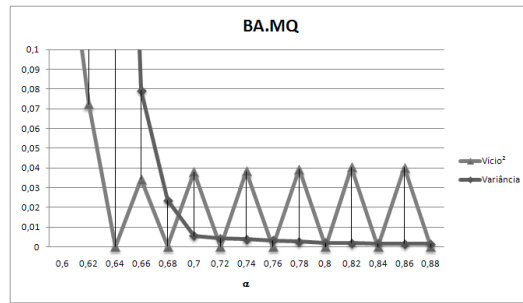
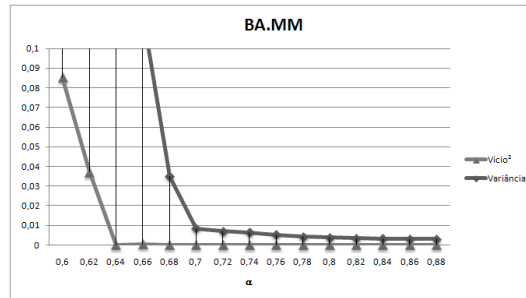


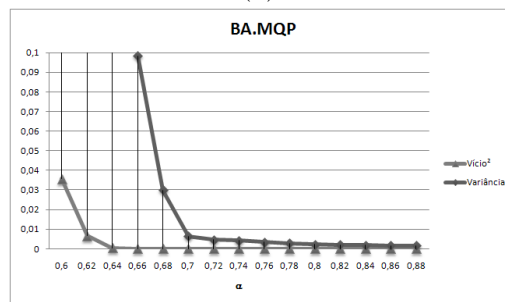
Figura B.12: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_2 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}$, $\mathbf{u} = \{0.2, 0.5\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)

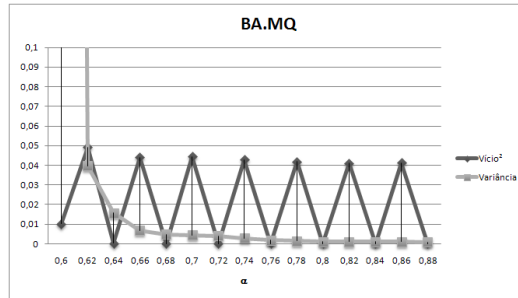


(b)

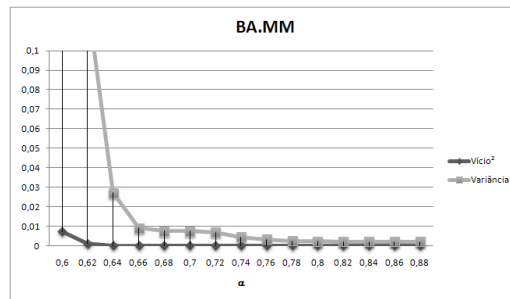


(c)

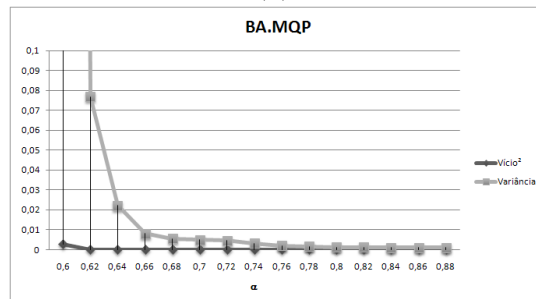
Figura B.13: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_1 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}$, $\mathbf{u} = \{0.2, 0.9\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)

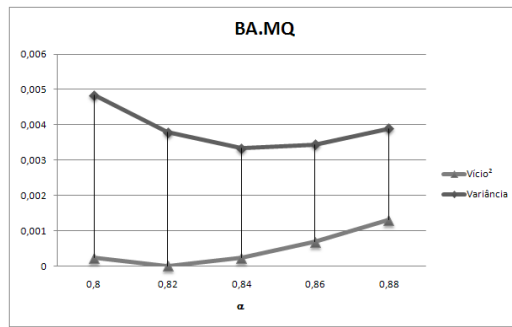


(b)

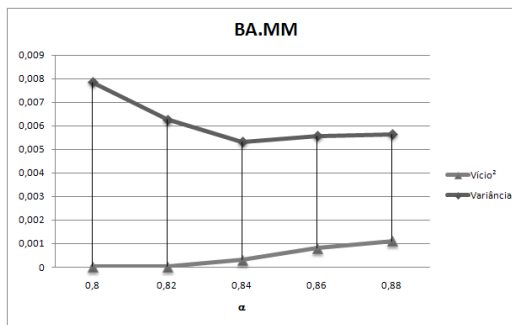


(c)

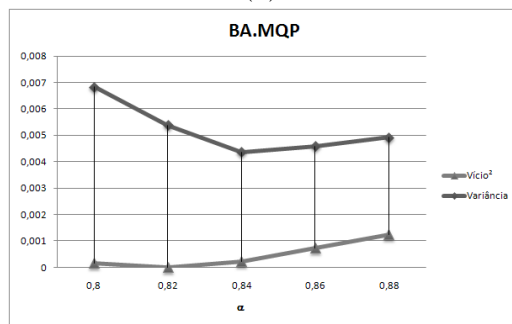
Figura B.14: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_2 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.1, 0.3\}$, $\mathbf{u} = \{0.2, 0.9\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)

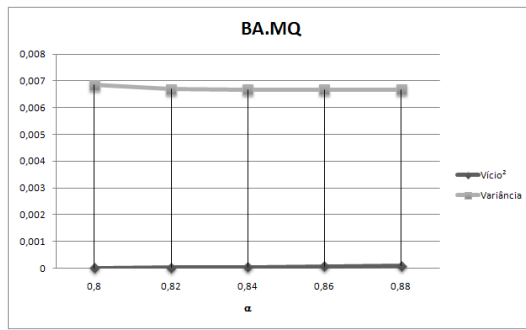


(b)

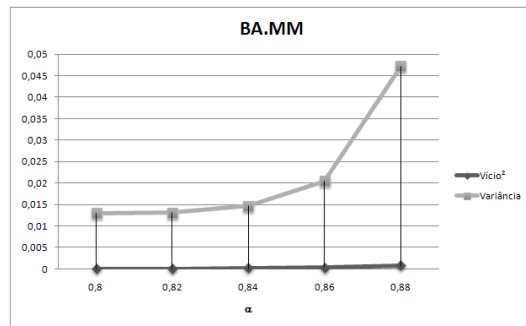


(c)

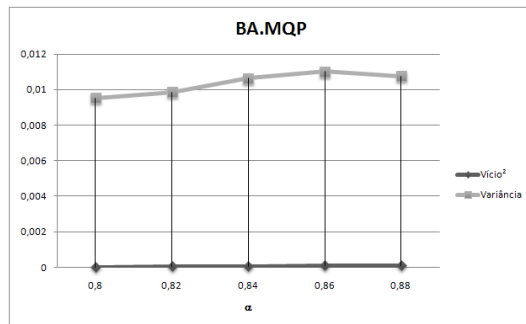
Figura B.15: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_1 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)

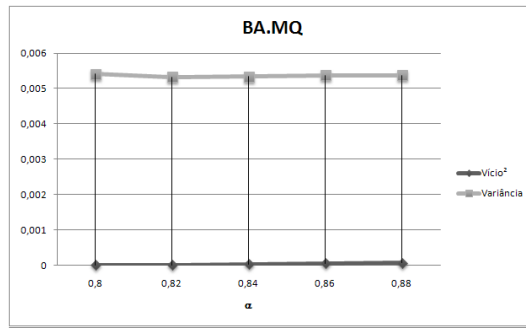


(b)

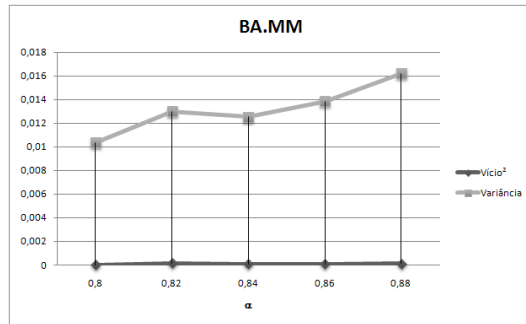


(c)

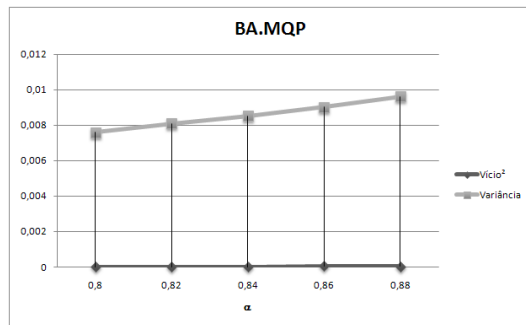
Figura B.16: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_2 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)

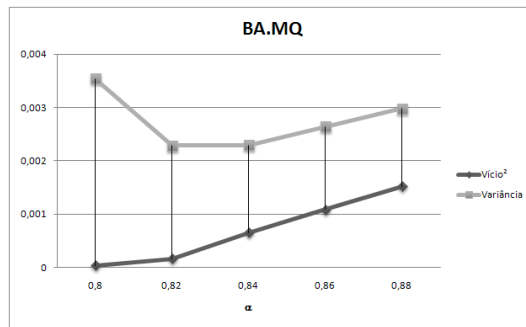


(b)

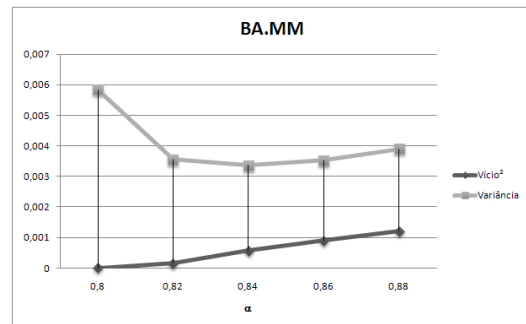


(c)

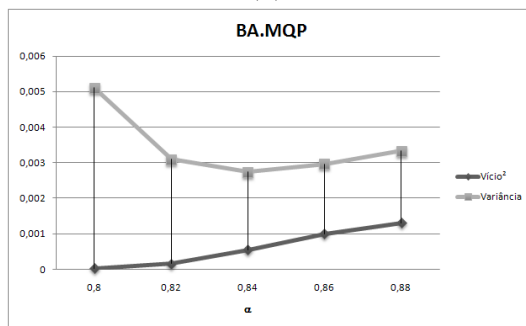
Figura B.17: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_3 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)

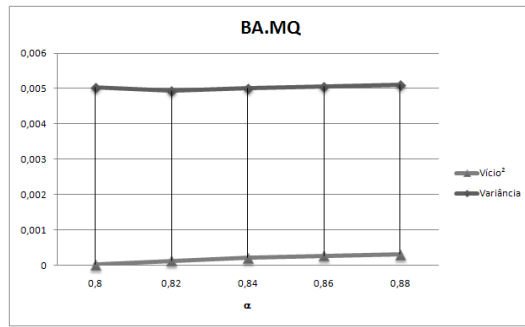


(b)

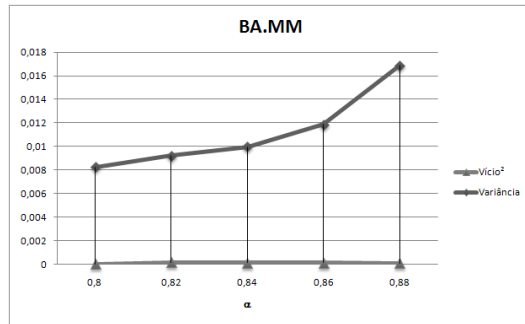


(c)

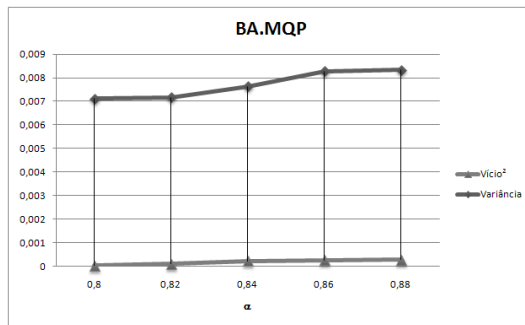
Figura B.18: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_4 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)

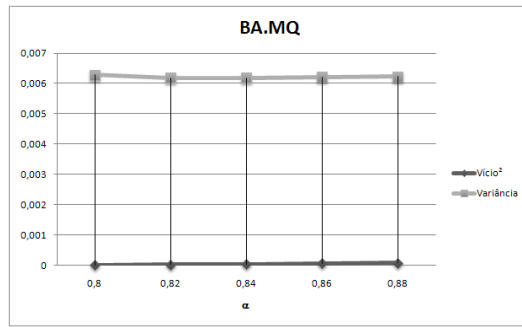


(b)

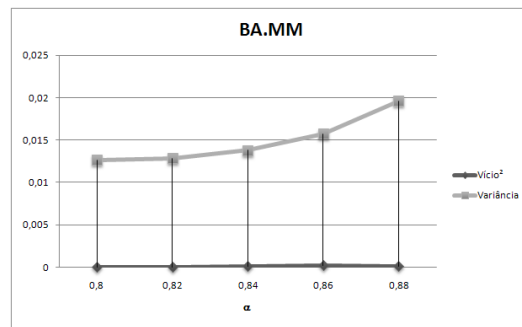


(c)

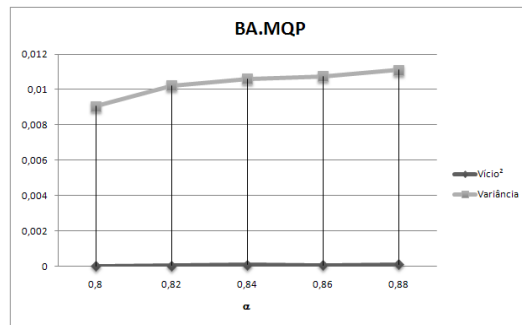
Figura B.19: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_5 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)

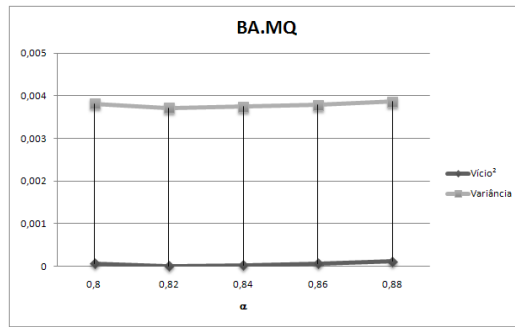


(b)

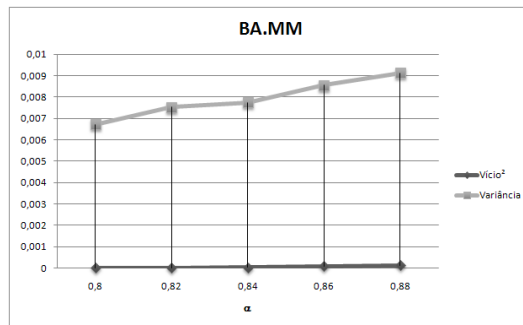


(c)

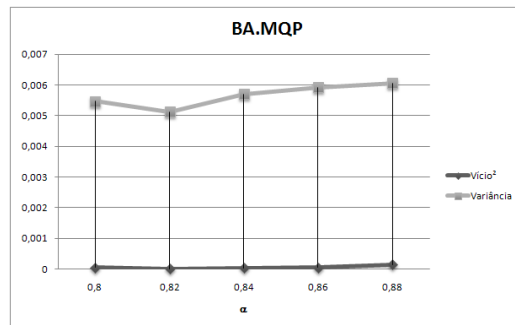
Figura B.20: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_6 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.



(a)



(b)



(c)

Figura B.21: Gráfico do vício ao quadrado e variância de λ_7 de um k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com $\mu = 0$, $k = 7$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$, $\mathbf{u} = \{0.10, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.90\}$, $p = 0 = q$, $n = 1000$, $\alpha \in \{0.60, 0.62, 0.64, \dots, 0.88, 0.89\}$ e $re = 5000$ para o estimador BA em suas três versões: (a) BA.MQ; (b) BA.MM; (c) BA.MQP.