

Análise de perfis aerodinâmicos Joukowski

David Kliewer

Orientador: Prof^a. *Adriane Prisco Petry*

Área de Concentração: *Térmica*

Resumo:

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um programa computacional que emprega a metodologia da transformação de Joukowski e a análise de escoamentos potenciais para transformar um círculo em um aerofólio e calcular os coeficientes de desempenho do perfil. Variando-se a posição do centro deste círculo em relação à origem do sistema de coordenadas xy , serão geradas, para cada posição, um aerofólio diferente. Isso permite obter uma infinidade de geometrias, tanto simétricas quanto não simétricas.

O programa desenvolvido é capaz de representar graficamente qualquer aerofólio desejado (dentro das possibilidades da transformação) e fornecer dados de seu desempenho aerodinâmico e uma listagem dos pontos do perfil, que pode então ser usada em outros programas para comparação de resultados.

Abstract

"Joukowski aerodynamic profiles analysis"

This paper presents the development of a computer program that employs the Joukowski transformation methodology and potential flow analysis to turn a circle into an airfoil and to calculate the performance coefficients of the profile. By varying the position of the circles center to the origin of the xy coordinate system, for each position a different airfoil will be generated. This allows the design of a large range of geometries, symmetrical as well as cambered.

The program is able to plot any desired airfoil (within the transformations possibilities) and calculate its aerodynamic performance data and a list of the profiles coordinates that can then be compared with the results of other programs.

PALAVRAS CHAVE:

Transformação conforme, Joukowski, aerofólios, escoamento potencial, aerodinâmica.

Índice:

Pág.

1. Introdução	3
2. Análise do Escoamento potencial sobre um cilindro com circulação	4
2.1. Escoamento Potencial	4
2.1.2. Circulação	5
2.2. O Cilindro	6
2.2.1. O Escoamento Potencial sobre um Cilindro	7
2.2.2. Funções de Corrente (ψ) e Potencial de Velocidade (Φ)	7
2.2.3. Função Potencial	9
2.2.4. Velocidades	10
3. A transformação de Joukowski	10
3.1. Preparação	11
3.1.1. Equações da transformação	11
3.1.2. Transformação da velocidade	11
3.1.3. Ângulo de ataque e curvatura	12
3.1.4 Determinação da circulação	13
3.2. A transformação	14
3.3. Equacionamento do programa Joukowski DCS	16
4. Resultados	18
4.1. Joukowski DCS versus XFOIL	18
4.2. Joukowski DCS versus Manzanares Filho	21
4.3. Joukowski DCS versus Pope	22
4.4. Coeficiente de Momento à um quarto da corda ($C_{m1/4}$)	23
5. Conclusões	23
Referências Bibliográficas	25
Anexo I: Interface visual do programa Joukowski DCS	26

1. INTRODUÇÃO

Um interesse em aviação e aeromodelismo levou à procura de programas de computador que calculassem o desempenho aerodinâmico de aerofólios. Foram encontrados apenas programas do tipo biblioteca de aerofólios e dados de desempenho e do tipo análise numérica, empregando elementos finitos, volumes finitos ou método dos painéis, que partiam de uma lista dos pontos que descrevem o aerofólio para executar a análise. O primeiro tipo apresenta os dados de desempenho para um grande número (centenas) de aerofólios conhecidos, frustrando assim o espírito criativo do aeromodelista mais engajado no projeto aerodinâmico do seu modelo. O segundo tipo pode analisar praticamente qualquer aerofólio, mas o processo de obtenção dos pontos de um aerofólio de criação própria, normalmente desenhado no papel, é bastante trabalhoso e impreciso. Outro problema dos programas de análise numérica é o alto custo de aquisição do software em si e do equipamento computacional necessário para a utilização dos mesmos. A possibilidade de um processo alternativo foi primeiramente vislumbrado em uma revista de aeromodelismo (*Aviation Modeller International*, 1998) onde era apresentado um programa simples, em linguagem BASIC, para a representação gráfica dos perfis aerodinâmicos Joukowski. Mais tarde, uma busca por literatura sobre aerofólios levou ao livro *Basic Wing and Airfoil Theory* (Pope, 1951) onde, em dois de seus capítulos, a transformação de Joukowski era explicada e analisada. Por ser um livro antigo, é comentada a dificuldade e o tempo necessário para a representação gráfica do aerofólio e sua distribuição de pressão, além do cálculo de valores de seu desempenho. Atualmente, o uso de métodos computacionais tornou a solução desta transformação extremamente simples, possibilitando a programação de um sistema que representa graficamente, calcule dados sobre o desempenho aerodinâmico e que gere um arquivo de pontos destes aerofólios para uso em outros programas de análise.

A transformação de Joukowski é um caso particular de transformação conforme (Pope, 1951). A transformação conforme é um método que emprega variáveis complexas para transformar figuras geométricas em um plano complexo em figuras com totalmente diferente em outro plano. No caso deste trabalho, transforma-se um círculo em um aerofólio. Esta técnica, que poderia ser considerada ultrapassada pelos métodos numéricos computacionais hoje disponíveis para uso em mecânica dos fluidos, ainda é válida em áreas avançadas de pesquisa, como a solução de problemas de otimização de formas aerodinâmicas (Jameson, A, 1988).

Nas referências encontradas, a transformação e os aerofólios Joukowski são abordados de duas formas: até a década de 1960, vários autores como (Pope, 1951; Belotserkovskii, 1967; Kuethe e Schetzer, 1969) trataram de formular e aperfeiçoar as teorias e equações para obtenção de resultados do desempenho dos aerofólios; a partir da década de 1960, com o advento dos

métodos computacionais permitindo a análise de geometrias de construção matemática mais complexas, os aerofólios Joukowski passaram a ser usados como parâmetros de comparação ou como plataforma de testes para teorias de escoamentos mais complexos (Huang e Chow, 1982; Chow et alli, 1985; Manzanares Filho, 1994; Hwang, 2000).

Com a programação das equações da transformação no sistema computacional HPVee, o aeromodelista tem supervisão direta na criação da geometria do aerofólio, controlando parâmetros geométricos até chegar ao compromisso adequado entre geometria e desempenho aerodinâmico. Ao final, os resultados obtidos com o programa desenvolvido no presente trabalho, a partir de agora chamado **Joukowski DCS**, são comparados com os resultados obtidos usando o programa XFOIL (Drela, 2000), que usa o método dos painéis para analisar qualquer geometria de aerofólio, com os resultados do (Pope, 1951) e com resultados obtidos por Nelson Manzanares Filho em sua Tese de doutorado (Manzanares, 1994).

2. ANÁLISE DO ESCOAMENTO POTENCIAL SOBRE UM CILINDRO COM CIRCULAÇÃO:

2.1. ESCOAMENTO POTENCIAL:

Para que se faça possível uma análise matemática de um escoamento, muitas vezes é necessário ou conveniente fazer simplificações para que as complexas equações que regem os escoamentos possam ser resolvidas analiticamente. O escoamento irrotacional incompressível permanente bidimensional, ou escoamento potencial bidimensional, é uma importante simplificação. Ela é uma abordagem que permite obter resultados sem muito esforço, se comparada com uma análise mais completa do escoamento. O escoamento potencial analisado difere da realidade nos seguintes aspectos (Shames, 1973):

- a) Bidimensionalidade: Todas as características e propriedades do escoamento independem de uma das coordenadas espaciais;
- b) Incompressibilidade: A densidade e o peso específico são considerados constantes;
- c) Irrotacionalidade: Isso implica um fluido invíscido cujas partículas movem-se inicialmente sem rotação;
- d) Escoamento permanente: Todas as características e propriedades do escoamento independem do tempo.

Desta forma simplificado, o escoamento pode então ser representado por duas funções que descrevem seu comportamento: a função de corrente (ψ) e a função potencial de velocidade

(Φ). A função de corrente está sujeita as condições de bidimensionalidade e incompressibilidade, enquanto que a função potencial de velocidade está sujeita também a condição de irrotacionalidade. A função de corrente é representada por uma linha (de corrente), tangente ao vetor velocidade de uma partícula qualquer que se move com o escoamento, enquanto que a função potencial é representada por uma linha ortogonal ao vetor de velocidade da partícula.

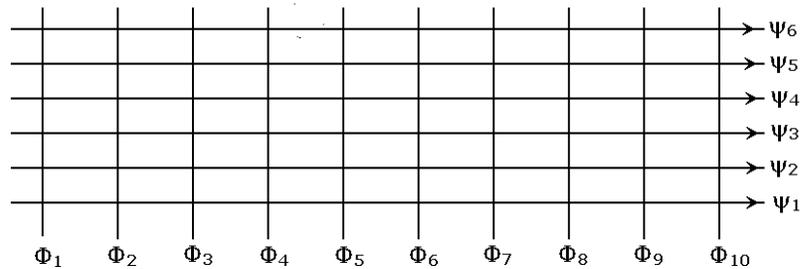


Figura 2.1 – Representação gráfica de um escoamento potencial paralelo uniforme.

O fato de as funções serem ortogonais entre si (devido à irrotacionalidade do escoamento) não importando a configuração do escoamento, será de grande importância mais adiante.

Cada linha de corrente tem um valor ψ constante. A diferença entre duas linhas de corrente quaisquer é o valor da vazão de fluido entre essas linhas. Esta vazão permanecerá constante, não importando a configuração do escoamento. As equações destas funções serão abordadas no capítulo 2.2.2.

2.1.1. A CIRCULAÇÃO (Pope, 1951, Fox, 1998):

Antes de discutir a transformação de Joukowski, é necessário apresentar a base que permite o tratamento analítico direto empregado para o cálculo da sustentação desta família de aerofólios: a circulação representada pela letra Γ .

A circulação, relacionada com uma vazão de fluido circulando ao redor de um corpo, movendo-se tangencialmente a superfície, pode ser definida como a intensidade da rotação do fluido que atua sobre o corpo. Quando combinada com o escoamento no qual o corpo está imerso, irá modificar o campo de velocidades e de pressões do escoamento ao redor do corpo, obtendo-se então uma força resultante. Para que seja encontrada esta força sobre o corpo, é necessário conhecer o valor da circulação. A circulação é a condição fundamental para que se possa determinar a força de sustentação do cilindro, e, conseqüentemente, do aerofólio transformado. Ela é definida como a integral de linha da velocidade tangencial em uma curva fechada fixa no escoamento:

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (1)$$

onde Γ é a circulação, \vec{V} é o vetor velocidade de uma partícula qualquer no escoamento e $d\vec{s}$ é um comprimento infinitesimal da linha de corrente onde a partícula se move.

Num aerofólio, é necessário que o ponto de estagnação (pontos no contorno do aerofólio em que a velocidade do fluido é zero. Normalmente são dois) traseiro fique localizado no bordo de fuga. Testes mostram que para um corpo com bordo de fuga afilado, o ponto de estagnação traseiro se move para o bordo de fuga logo que o corpo tenha atingido uma velocidade estável e que estas condições se mantenham. O valor da circulação é fixado por esta condição, conhecida como Condição de Kutta, que diz:

“Um corpo com bordo de fuga afilado que se move em um fluido deverá criar sobre si mesmo circulação com força suficiente para manter o ponto de estagnação traseiro no bordo de fuga” (Kuethe e Schwitzer, 1959).

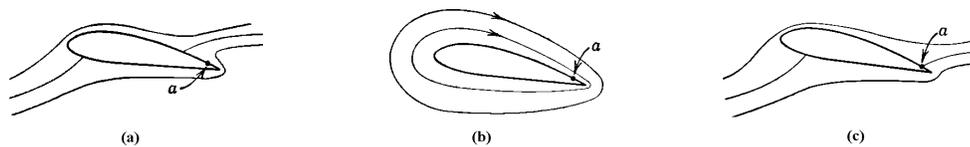


Figura 2.2 – Translação do ponto de estagnação traseiro devido à aplicação de circulação.

A figura 2.2a mostra um aerofólio sem circulação com o ponto de estagnação traseiro em sua superfície superior, e o ponto (a) para onde se quer move-lo. A figura 2.2b mostra apenas a circulação necessária para realizar a translação. A figura 2.2c mostra o aerofólio com circulação e o ponto de estagnação no local desejado.

Portanto, para deslocar o ponto de estagnação traseiro até o bordo de fuga, torna-se necessário determinar uma relação entre o valor da circulação, o escoamento, a geometria e a configuração do aerofólio. Esta determinação será desenvolvida nos capítulos 3.1.3 e 3.1.4.

2.2. O CILINDRO:

A transformação de Joukowski propõe um aproveitamento da conhecida solução analítica para um escoamento potencial ao redor de um círculo com circulação ao transformar uma circunferência no plano complexo z em um aerofólio no plano complexo ζ .

Em 1906, N. E. Joukowski foi o primeiro a formular uma explicação para o mecanismo de formação da sustentação, ao mostrar que a sustentação em um cilindro em um escoamento plano-

paralelo era devida à circulação da velocidade em um contorno fechado contendo o cilindro. Esta formulação é conhecida como *Teorema de Kutta-Joukowski (Belotserkovskii, 1967)*:

$$Y = \rho VT \quad (2)$$

Onde Y é a reação no eixo y , ρ é a densidade do fluido em escoamento, V é a velocidade do fluido e Γ é a circulação, cuja magnitude será diferente para cada geometria ou configuração do corpo, gerando maior ou menor sustentação.

2.2.1. O ESCOAMENTO POTENCIAL SOBRE UM CILINDRO:

A solução para o escoamento potencial sobre um cilindro deriva da sobreposição de um escoamento uniforme sobre um dipolo (uma fonte e um sumidouro de igual intensidade dispostos a uma distância infinitesimal).

2.2.2. FUNÇÕES DE CORRENTE (ψ) E POTENCIAL DE VELOCIDADE (Φ):

A Função de Corrente e o Potencial de Velocidade tem uma relação relativamente simples com o campo de velocidade do escoamento. As equações (3) a (6) expressam esta relação, em coordenadas cartesianas (Shames, 1973):

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

onde u e v são as componentes da velocidade do escoamento nos eixos x e y , respectivamente.

Aplicando a condição de irrotacionalidade, que é uma das simplificações desta análise, tem-se a relação entre a Função de Corrente e o Potencial de velocidade:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (6)$$

O uso destas relações permite descrever vários tipos de escoamentos e a sua combinação, o que é feito a seguir, para que se chegue à configuração desejada.

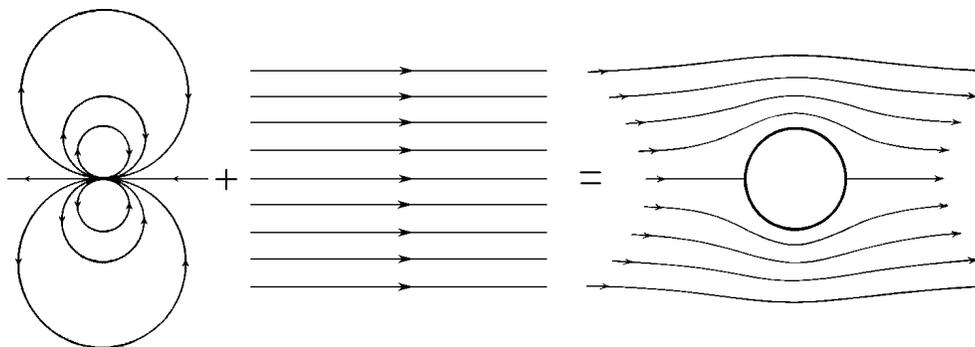


Figura 2.3 – As linhas de corrente sobre um cilindro, resultado da soma de um dipolo e um fluxo uniforme.

Para o dipolo as funções linhas de corrente e potencial de velocidade ficam,

$$\Psi = -\frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{\sin\theta}{r} \quad (7)$$

onde ψ é o valor de uma linha de corrente; μ é a intensidade do dipolo; θ é o ângulo do raio r ; r é distância da origem até o ponto e π é a razão entre o arco de uma circunferência e seu raio.

$$\Phi = -\frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r} \quad (8)$$

onde Φ é o valor da função potencial de velocidade.

E para um escoamento uniforme,

$$\Psi = V \cdot r \cdot \sin\theta \quad (9)$$

$$\Phi = -V \cdot r \cdot \cos\theta \quad (10)$$

onde V é a velocidade do escoamento no infinito.

Combinando as duas funções com as condições de contorno adequadas, as funções para um cilindro de raio “ a ” em um escoamento uniforme ficam:

$$\Psi = V \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin\theta \quad (11)$$

$$\Phi = -V \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos\theta \quad (12)$$

onde “ a ” é o raio do cilindro.

Através da sobreposição do escoamento plano vórtice irrotacional chega-se aplicação de circulação (Γ) no cilindro levando a um deslocamento das linhas de corrente sobre o mesmo, aproximando-as no lado superior e afastando-as no lado inferior do cilindro.

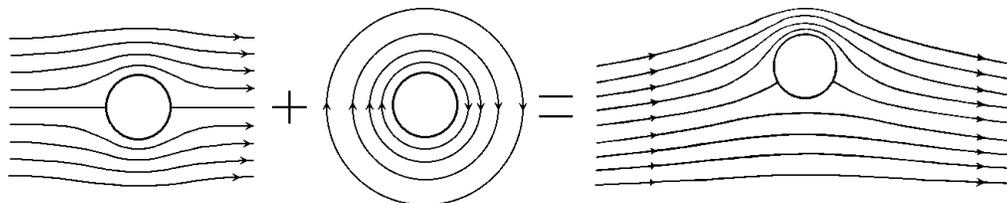


Figura 2.4 – Cilindro com circulação em um fluxo uniforme.

Para o cilindro de raio “a” com circulação, as funções de linhas de corrente e potencial de velocidade ficam:

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \ln \frac{r}{a} \quad (13)$$

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \theta \quad (14)$$

Finalmente, para um cilindro com circulação em um escoamento uniforme temos:

$$\Psi = V \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \ln \frac{r}{a} \quad (15)$$

$$\Phi = -V \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \theta \quad (16)$$

2.2.3. FUNÇÃO POTENCIAL:

Obtidas as funções de linhas de corrente e potencial de velocidade, e sabendo que em representação gráfica elas são ortogonais entre si, pode-se unir as duas em uma única variável complexa que também descreve o escoamento e tem as características matemáticas das variáveis complexas que em muitos casos simplificam a análise. Esta nova variável complexa é chamada Função Potencial (Pope, 1951). Ela é dada por:

$$\omega = \Phi - i\Psi \quad (17)$$

onde ω é a variável complexa função potencial.

Para calcular as características aerodinâmicas do aerofólio, é usada a função potencial com circulação do escoamento sobre o cilindro. Esta função é conseguida substituindo as equações (15) e (16) na equação (17):

$$\omega = V \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \ln \frac{z}{a} \quad (18)$$

onde ω é a função potencial do escoamento, V é a velocidade do escoamento livre, z é a variável complexa do círculo, a é o raio do círculo, i é o número imaginário $\sqrt{-1}$, π é a razão entre o arco do círculo e seu raio, \ln é o logaritmo natural e Γ é a circulação.

2.2.4. VELOCIDADES:

Para o escoamento potencial ao redor de um cilindro com circulação as velocidades radial (q_r) e tangencial (q_θ) são expressas como:

$$q_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta\Psi}{\delta\theta} = -V \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos\theta \quad (19)$$

$$q_\theta = \frac{\delta\Psi}{\delta r} = V \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (29)$$

Então, na superfície do cilindro ($r = a$) temos que:

$$q_r = 0 \quad (21)$$

$$q_\theta = 2V \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (22)$$

onde q_r e q_θ são as velocidade radial e tangencial de um ponto no escoamento.

3. A TRANSFORMAÇÃO DE JOUKOWSKI:

A seguir, os passos da transformação, do mapeamento do círculo no plano x,y em aerofólio no plano η,ξ .

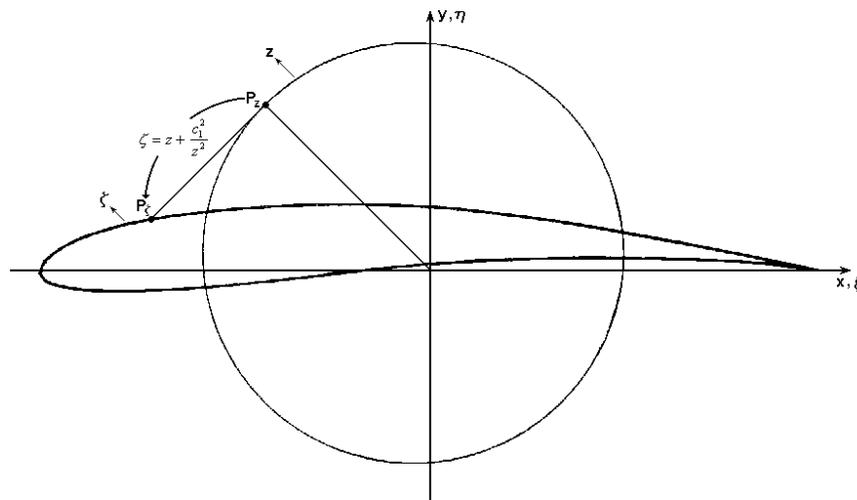


Figura 3.1 – Aerofólio ζ , resultado da transformação do círculo z .

3.1. PREPARAÇÃO:

Para que se possa obter as equações de desempenho do aerofólio, é necessário expandir a equação complexa da transformação para a obtenção dos pares coordenados para sua representação gráfica, e também um ajuste no posicionamento do círculo para que seja considerada a configuração do escoamento.

3.1.1. EQUAÇÕES DA TRANSFORMAÇÃO:

O princípio da transformação é dado pelas equações:

$$\zeta = z + \frac{c_1^2}{z} \quad (23)$$

e

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{c_1^2}{z^2} \quad (24)$$

onde z e ζ são as variáveis complexas:

$$z = x + iy \quad (25)$$

$$\zeta = \xi + i\eta \quad (26)$$

e c_1 é uma constante geométrica proveniente da circunferência no plano z e η e ξ corresponde a x e y no plano ζ . Resolvendo as equações e separando Reais e Imaginários chega-se as equações:

$$\xi = \left(r + \frac{c_1^2}{r} \right) \cos \theta \quad (27)$$

$$\eta = \left(1 - \frac{c_1^2}{r} \right) \sin \theta \quad (28)$$

3.1.2. TRANSFORMAÇÃO DA VELOCIDADE:

Se, no plano z , uma certa quantidade de fluido passa entre os pontos arbitrários A e B , a mesma quantidade passará entre os pontos transformados A' e B' no plano ζ . Então as velocidades são inversamente proporcionais à distância entre os dois pontos, ou seja:

$$|q_\zeta| = \frac{|q_z|}{\left| \frac{A'B'}{AB} \right|} = \frac{|q_z|}{\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|} \quad (29)$$

onde q_z é a velocidade num dado ponto do plano z e q_ζ é a velocidade q_z transformada no plano ζ . Para encontrar o valor de $|d\zeta/dz|$, separa-se a equação (29) nas suas partes real e imaginária, efetua-se a raiz quadrada da soma de seus quadrados (anexo 1), resultando:

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \sqrt{\left(1 - \frac{c_1^2}{r^2} \cos 2\theta \right)^2 + \left(\frac{c_1^2}{r^2} \sin 2\theta \right)^2} \quad (30)$$

3.1.3. ÂNGULO DE ATAQUE E CURVATURA:

Para determinar a circulação, é preciso introduzir no processo de obtenção das equações do aerofólio o ângulo de ataque e a curvatura do aerofólio. O caminho é indicado pela Condição de Kutta, que, para uso neste trabalho pode ser “traduzida” como:

“Circulação suficiente deverá ser desenvolvida para que o escoamento deixe o bordo de fuga suavemente” (Pope, 1951).

Sabendo que se $d\zeta/dz$ (taxa de variação da variável complexa do aerofólio no plano ζ em relação à variável complexa do círculo no plano z) for igual a zero para um ponto do cilindro que será transformado em um ponto do aerofólio, a velocidade no plano transformado será infinita a não ser que a velocidade original seja zero. Torna-se então necessário fazer com que o ponto que será transformado no bordo de fuga seja um ponto de estagnação ($q = 0$). Da equação (29) tem-se que pontos no plano z situados no eixo x estarão no eixo ξ no plano ζ . Como o bordo de fuga do aerofólio estará situado no eixo ξ , torna-se claro que para fazer com que o bordo de fuga corresponda a um ponto de estagnação no cilindro, este deverá ser movido para cima antes da transformação para que os pontos de estagnação, deslocados para baixo pela circulação, estejam sobre o eixo x . Sem este procedimento, o ponto de estagnação traseiro não se transformará no bordo de fuga do aerofólio.

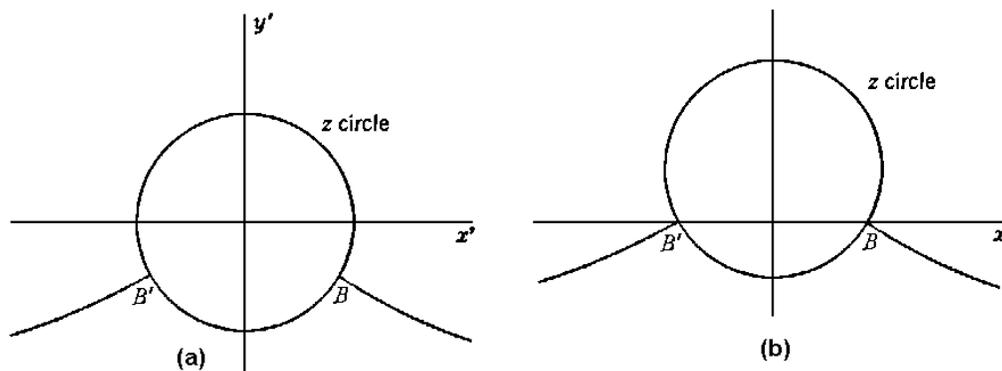


Figura 3.2 - Translação do círculo para coincidência dos pontos de estagnação sobre o eixo x' .

Outra condição para o círculo que será transformado é de que seu centro esteja à esquerda da origem (esta condição controla a espessura) para que se obtenha um aerofólio razoável.

O círculo z da figura 3.2b, com os pontos de estagnação B e B' sobre o eixo x' , será transformado em um aerofólio com ângulo de ataque zero. Para introduzir o conceito de ângulo de ataque, é necessário aplicar uma inclinação dos eixos, de um ângulo α , o que resulta no círculo z com raio a nos eixos $x''y''$. Esta ação faz com que o vetor V do escoamento gire, no sentido horário, deste valor α , induzindo o ângulo de ataque no cilindro antes da transformação. Na figura 3.3 o escoamento se move ao longo do eixo x'' .

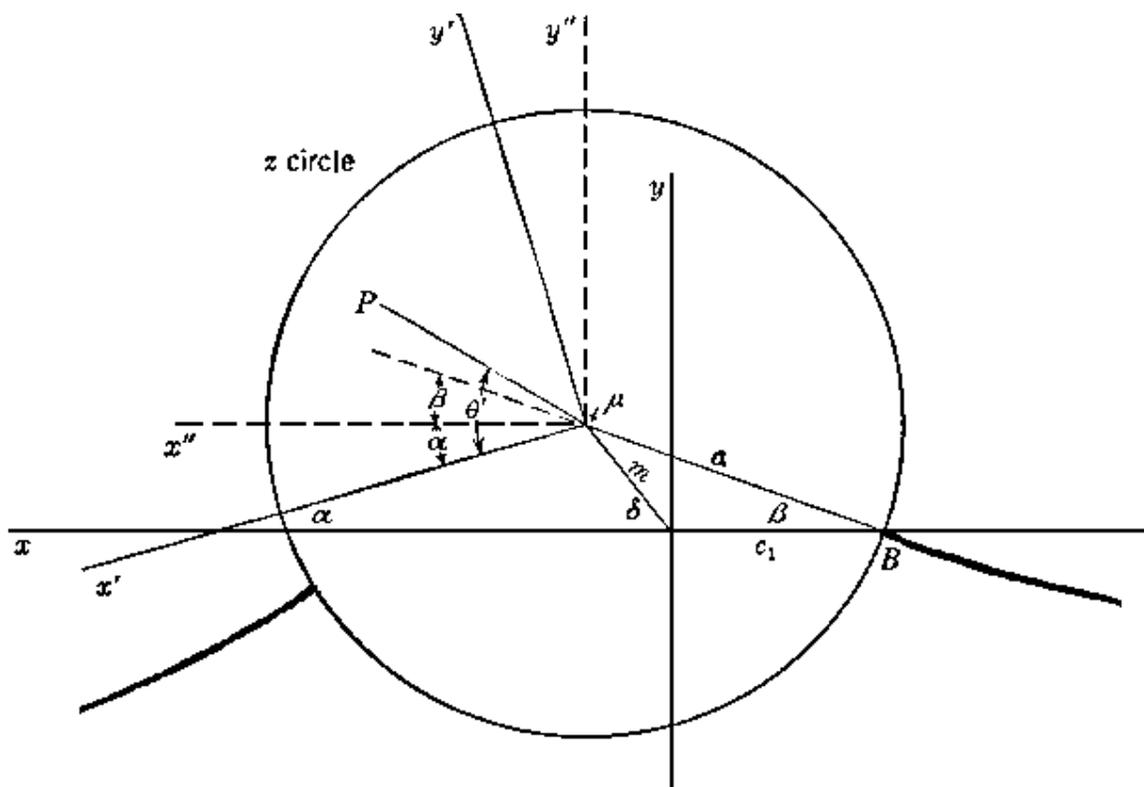


Figura 3.3 - Círculo z transladado e inclinado.

3.1.4. DETERMINAÇÃO DA CIRCULAÇÃO:

A equação potencial do escoamento sobre um cilindro com circulação (equação 18) já é conhecida, mas em relação aos eixos x e y , quando o escoamento era ao longo do eixo x . Nesta nova configuração o escoamento é paralelo ao eixo x' e a equação (18) está agora no plano $z' = x' + iy'$. Daí,

$$\omega = -V \left(z' + \frac{a^2}{z'} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z'}{a} \quad (31)$$

e:

$$\frac{d\omega}{dz'} = -V \left(1 - \frac{a^2}{z'^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z'} \quad (32)$$

Como mencionado anteriormente, o ponto no cilindro que virá a ser o bordo de fuga deve ser um ponto de estagnação. Para isso, o valor de Γ (que é o mesmo para o cilindro e para o aerofólio) deve ser tal que a velocidade seja:

$$|q| = \left| \frac{d\omega}{dz'} \right| = 0 \quad (33)$$

no ponto de estagnação B, onde:

$$z'_B = -ae^{i(\alpha+\beta)} \quad (34)$$

onde “e” é o número de Euler, α é o ângulo de ataque e β é o ângulo de curvatura. Então:

$$\frac{d\omega}{dz'} = -V \left(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{2i(\alpha+\beta)}} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi(-ae^{i(\alpha+\beta)})} = 0 \quad (35)$$

E, simplificando:

$$\Gamma = 4\pi a V \sin(\alpha + \beta) \quad (36)$$

Esta relação expressa a relação entre a circulação, o ângulo de ataque e a curvatura - controlado por β - do aerofólio para que a Condição de Kutta seja satisfeita.

3.2. A TRANSFORMAÇÃO:

Para transpor as forças e momentos do plano z para o plano ζ , é preciso encontrar $d\omega/d\zeta$ ao invés de $d\omega/dz$. Para um ponto qualquer P localizado no plano $x'y'$,

$$z_p' = r' e^{i\theta} \quad (37)$$

ou

$$z_p'' = z_p' e^{i\alpha} \quad (38)$$

mas

$$z_p = z_p'' + m e^{i\delta} = z_p' e^{-i\alpha} + m e^{i\delta} \quad (39)$$

onde “m” é a distancia entre o centro do círculo e a origem do sistema coordenado e δ é o ângulo entre “m” e o eixo x. de modo que, omitindo o subscrito,

$$z' = (z - me^{i\delta})e^{i\alpha} \quad (40)$$

e

$$\frac{dz'}{dz} = e^{i\alpha} \quad (41)$$

agora podemos avaliar $d\omega/d\zeta$ através da relação

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{d\omega}{dz'} \cdot \frac{dz'}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \quad (42)$$

Substituindo z' da equação (40), multiplicando por $e^{i\alpha}$ e expandindo os termos no denominador pelo teorema binomial, temos:

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = -Ve^{i\alpha} + \frac{Va^2e^{-i\alpha}}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z} - \frac{i\Gamma me^{i\delta}}{\pi z^2} - \frac{Ve^{i\alpha}c_1^2}{z^2} \quad (43)$$

Para o cálculo da forças, é usado $\left(\frac{d\omega}{d\zeta}\right)^2$ então,

$$\left(\frac{d\omega}{d\zeta}\right)^2 = V^2e^{2i\alpha} + \frac{iV\Gamma e^{i\alpha}}{\pi z} - \frac{2a^2V^2}{z^2} + \frac{iV\Gamma e^{i\alpha}me^{i\delta}}{\pi z^2} + \frac{2V^2c_1^2e^{2i\alpha}}{z^2} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2z^2} \quad (44)$$

A equação geral da força é:

$$X - iY = \frac{1}{2} \rho i \oint \left(\frac{d\omega}{d\zeta}\right)^2 \frac{d\zeta}{dz} dz \quad (45)$$

Substituindo-se as equações (29) e (44), e separando Reais e Imaginários resultam:

$$X = \rho V \Gamma \sin \alpha \quad (46)$$

$$Y = \rho V \Gamma \cos \alpha \quad (47)$$

X e Y são forças que estão ao longo dos eixos x e y e portanto, não representam arrasto e sustentação. ρ é a massa específica e α é o ângulo entre o escoamento e o eixo x, igual a zero, pois escoamento e o eixo x são paralelos. Elas representam, quando somadas perpendicular e paralelamente à direção do escoamento, a força $\rho V \Gamma$ perpendicular ao escoamento e força zero paralelo a ele. Portanto, em escoamento potencial bidimensional não há força de arrasto. O ângulo de ataque influenciará a sustentação através da circulação.

Substituindo a equação (36) na equação (47), e chamando Y de L (lift), temos:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 4a.2\pi.\sin(\alpha + \beta) \quad (48)$$

que dá a força de sustentação em N/m de envergadura. Da equação geral da força de sustentação:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_l \quad (49)$$

onde S é a área da asa, e C_l é o coeficiente de sustentação, obtêm-se o coeficiente de sustentação:

$$C_l \cong 2\pi \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad (50)$$

A partir da equação do Momento em relação a origem,

$$M_0 = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \text{Re} \cdot \int_c \left(\frac{d\omega}{d\zeta} \right)^2 \zeta d\zeta \quad (51)$$

substituindo a equação (44), escrevendo $d\zeta = (d\zeta/dz)dz$ e deslocando o momento da origem para o centro do círculo, obtêm-se o momento em relação ao centro do aerofólio:

$$M_\mu = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot 4 \cdot a \cdot \pi \cdot c_1^2 \cdot \sin 2\alpha \quad (52)$$

Da relação geral do momento,

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 S \cdot c \cdot C_m \quad (53)$$

e do fato de o interesse está no momento em relação ao Centro de Pressão (ponto em que o vetor resultante das forças sobre o aerofólio intercepta a linha da corda), que, para os aerofólios gerados pela transformação de Joukowski, se encontra nas proximidades de $1/4$ da corda, a partir do bordo de ataque, chega-se a seguinte relação:

$$C_{m1/4} = -\frac{\pi}{2} \cdot \beta \quad (54)$$

onde β deve ser dado em radianos.

O coeficiente de pressão, que representa graficamente a distribuição da pressão sobre o aerofólio, é calculado usando a seguinte expressão:

$$C_p = 1 - \left(\frac{q_\zeta}{V} \right)^2 \quad (55)$$

onde C_p é o coeficiente de pressão, q_ζ é a velocidade do escoamento em um ponto qualquer e V é a velocidade do escoamento no infinito.

3.3. EQUACIONAMENTO DO PROGRAMA JOUKOWSKI DCS:

No programa computacional são empregadas as seguintes equações:

- Representação gráfica do aerofólio:

- Raio do círculo (a):

$$a = \sqrt{q^2 + (c_1 - p)^2} \quad (56)$$

onde p e q são as coordenadas do centro do círculo.

- Pontos do círculo:

$$x = a \cdot \cos \theta + p \quad (57)$$

$$y = a \cdot \sin \theta + q \quad (58)$$

onde θ varia de 0 a 360°.

- Pontos do aerofólio:

$$X_J = x + \frac{x \cdot c_1^2}{x^2 + y^2} \quad (59)$$

$$Y_J = y - \frac{y \cdot c_1^2}{x^2 + y^2} \quad (60)$$

- Coeficiente de sustentação (C_l):

$$C_l = 2\pi \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad (61)$$

O fator $(1 + \varepsilon)/(1 + \varepsilon^2)$ é introduzido na equação (50) para que a influência que a espessura tem sobre o C_l passe a ser detectada. β é dado por:

$$\beta = \tan^{-1} \frac{q}{c_1 - p} \quad (62)$$

e ε é o coeficiente de excentricidade do aerofólio, dado por

$$\varepsilon = \frac{m}{c_1} \quad (63)$$

onde m é a distância entre a origem do plano z até o centro do círculo original. Para fins de simplificação dos cálculos, m é considerado igual à coordenada x do centro do círculo.

- Força de sustentação (L):

$$L = \frac{\rho}{2} \cdot V^2 \cdot \frac{4 \cdot c_1 \cdot (1 + \varepsilon)}{(1 + \varepsilon^2)} \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad (64)$$

- Ângulo de sustentação zero (α_{z1}):

$$\alpha_{z1} = -\beta \quad (65)$$

- Curvatura (% c):

$$curvatura = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 100 \quad (66)$$

- Espessura (t) (% c):

$$t = 1,3 \cdot \varepsilon \cdot 100 \quad (67)$$

- Corda do aerofólio:

Apesar de poder ser calculada através dos dados de entrada, foi empregada uma função do software HPVee para reter os valores máximo e mínimo no eixo x e então efetuar a soma.

- Coeficiente de Momento ($C_{m1/4}$):

$$C_{m1/4} = -\frac{\pi}{2} \cdot \beta \quad (68)$$

- Coeficiente de pressão (C_p):

Para a representação gráfica do C_p foram agrupadas as equações (22), (29), (30), (36) e (53), e ainda uma equação para o cálculo do ângulo entre a direção do escoamento e o vetor posição dos pontos do círculo (θ').

$$C_p = 1 - 4 \cdot \frac{(\sin \theta' - \sin(\alpha + \beta))^2}{\left(1 - \frac{c_1}{r^2} \cdot \cos 2\theta\right)^2 + \left(\frac{c_1}{r^2} \cdot \sin 2\theta\right)^2} \quad (69)$$

4. RESULTADOS:

Os resultados da metodologia computacional apresentada neste trabalho foram comparados com os resultados obtidos utilizando o software XFOIL (Drela, 2000) (por ter ampla aceitação entre aeromodelistas), resultados obtidos por Pope (1951) e resultados obtidos por Manzanares Filho (1994). A seguir os resultados de cada comparação.

4.1. Joukowski DCS versus XFOIL

O software XFOIL foi escrito em 1986 por Mark Drela, do M.I.T., com o objetivo de combinar a velocidade e precisão dos métodos de painéis de alta ordem com o novo método de interação viscoso/inviscido usado no código desenvolvido por Drela e Giles. Uma interface totalmente interativa foi empregada para tornar seu uso mais fácil do que os códigos tipo CFD usuais. Os problemas do XFOIL 1.0 foram sendo resolvidos à medida que apareciam e vários aprimoramentos incluídos, como uma melhor interface gráfica. Ao chegar na versão 6.94, o

programa foi considerado completo. Este programa foi escolhido como base de comparação por ser largamente difundido entre aeromodelistas, ser de fácil utilização e por utilizar um método de análise diferente do empregado neste trabalho.

Para esta comparação foram criados 3 aerofólios no Joukowski DCS: um simétrico, um levemente curvo e um fortemente curvo, e para cada caso, aplicou-se três espessuras (aproximadamente 9, 12 e 15% de espessura), totalizando 9 exemplos.

As tabelas 1 a 3 e figuras 4.1 a 4.6 mostram os resultados da comparação do coeficiente de sustentação (C_l) para 3 destes exemplos. A nomenclatura utilizada para os aerofólios vem dos valores das coordenadas do centro (p,q)do círculo e do c_1 . Ex.: Para $p=0,007$; $q=0,000$ e $c_1=0,074$ chega-se à designação Jouk 070074.

Tabela 1: Aerofólio Jouk 070074 ($c = 0,29823m$; $t = 12,3\%$; curvatura = 0).

α	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Jouk	0.0000	0.1190	0.2379	0.3568	0.4755	0.5941	0.7125	0.8307	0.9487
XFOIL	0.0000	0.1190	0.2381	0.3570	0.4759	0.5946	0.7132	0.8315	0.9496
α	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Jouk	1.0663	1.1837	1.3007	1.4172	1.5334	1.6491	1.7643	1.8789	1.9930
XFOIL	1.0674	1.1649	1.3020	1.4187	1.5350	1.6508	1.7661	1.8808	1.9950

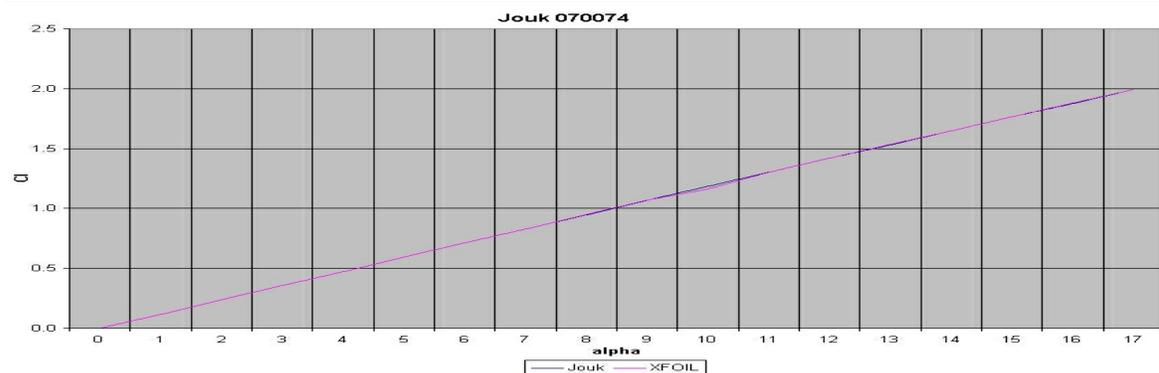


Figura 4.1 – Gráfico de C_l x α para o aerofólio Jouk 070074.

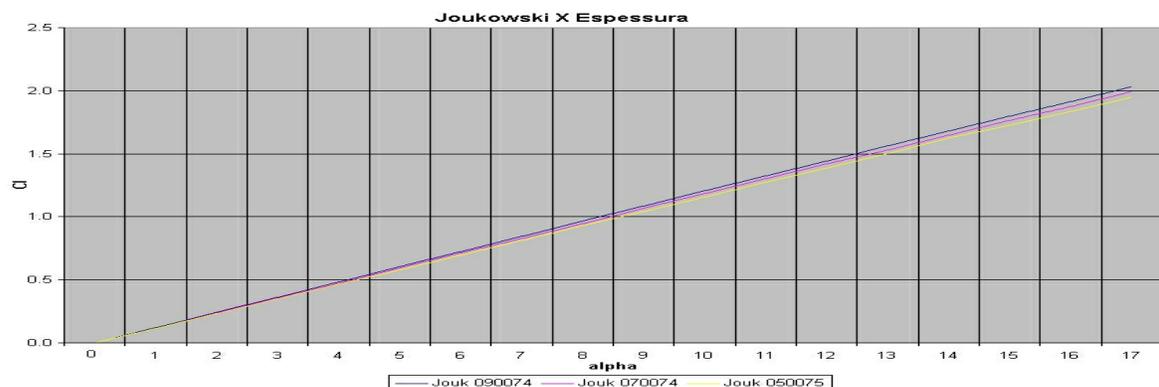
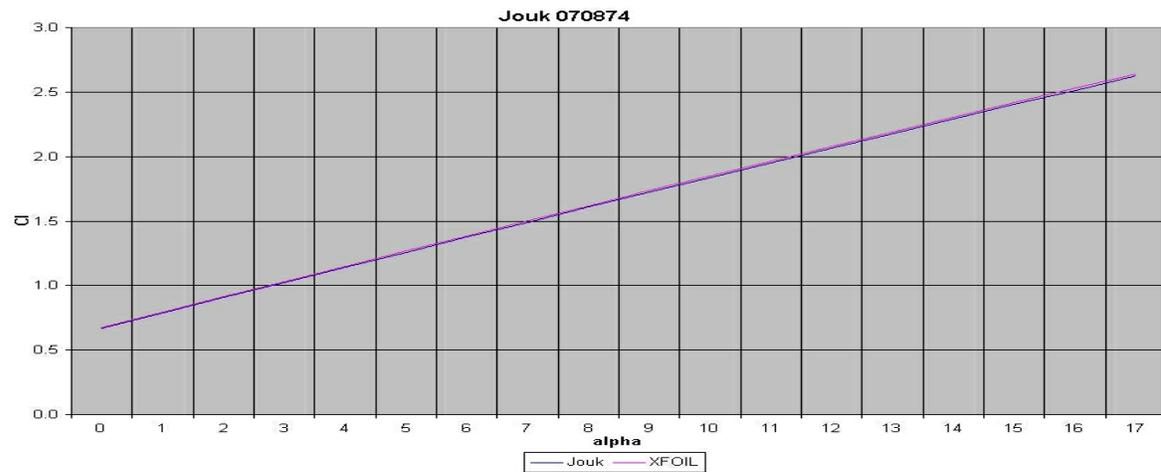
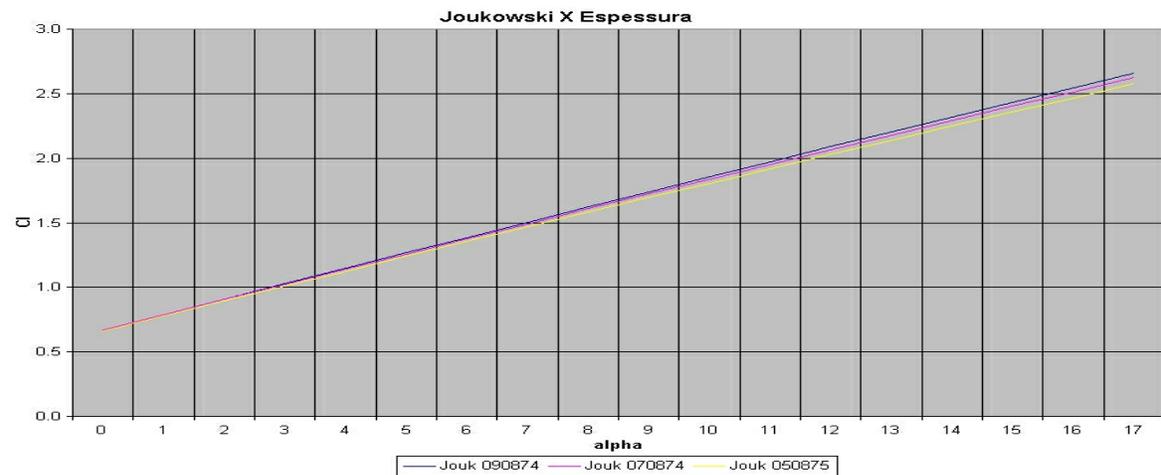


Figura 4.2 – Gráfico de C_l x α gerado pelo Joukowski DCS para 3 aerofólios simétricos, com influência da espessura.

Tabela 2: Aerofólio Jouk 070874 ($c = 0,29823m$; $t = 12,3\%$; curvatura = $4,9\%$).

α	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Jouk	0.6700	0.7883	0.9063	1.0241	1.1415	1.2587	1.3754	1.4917	1.6075
XFOIL	0.6759	0.7949	0.9136	1.0321	1.1502	1.2680	1.3854	1.5023	1.6189
α	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Jouk	1.7229	1.8377	1.9520	2.0657	2.1788	2.2912	2.4029	2.5138	2.6240
XFOIL	1.7349	1.8504	1.9653	2.0796	2.1933	2.3064	2.4187	2.5303	2.6411

Figura 4.3 – Gráfico de C_l x α para o aerofólio Jouk 070074.Figura 4.4 – Gráfico de C_l x α gerado pelo Joukowski DCS para 3 aerofólios curvos, com influência da espessura.Tabela 3: Aerofólio Jouk 071274 ($c = 0,29815m$; $t = 12,3\%$; curvaruta = $7,3\%$).

α	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Jouk	0.9990	1.1165	1.2337	1.3505	1.4669	1.5828	1.6983	1.8133	1.9277
XFOIL	1.0060	1.1250	1.2436	1.3618	1.4797	1.5970	1.7139	1.8303	1.9461
α	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Jouk	2.0415	2.1547	2.2672	2.3791	2.4902	2.6005	2.7101	2.8189	2.9268
XFOIL	2.0613	2.1759	2.2898	2.4031	2.5156	2.6273	2.7382	2.8483	2.9575

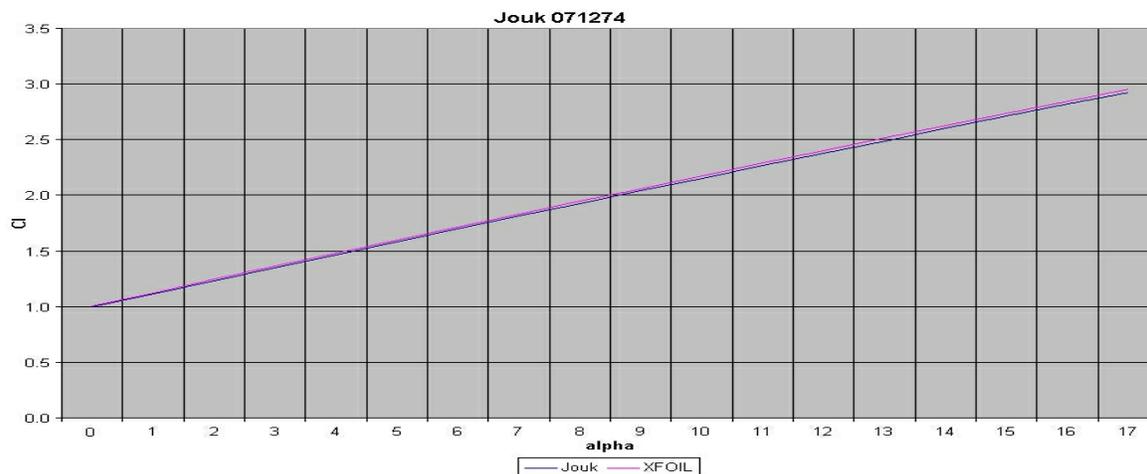


Figura 4.5 – Gráfico de C_l x α para o aerofólio Jouk 071274.

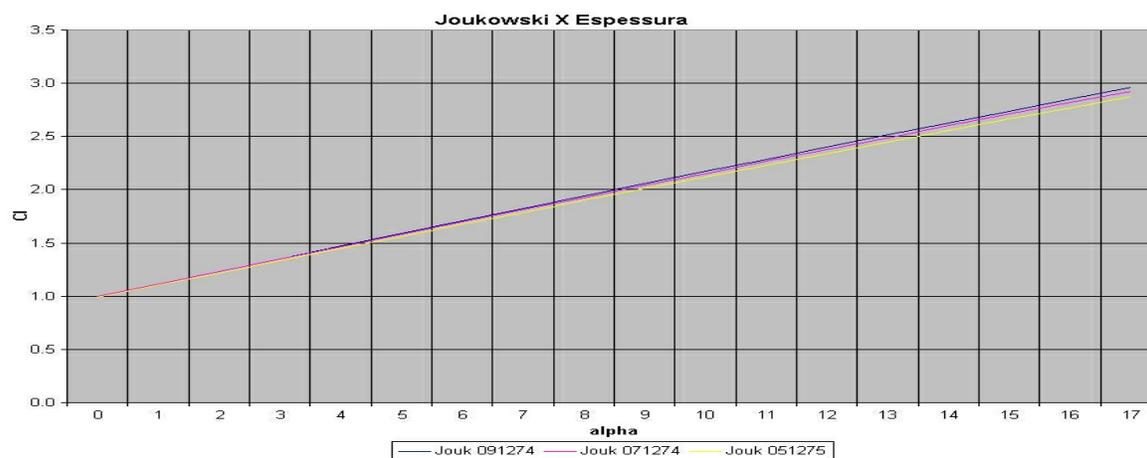


Figura 4.6 – Gráfico de C_l x α gerado pelo Joukowski DCS para 3 aerofólios bem curvos, com influência da espessura.

A comparação das figuras 4.1, 4.3 e 4.5 demonstra que o programa Joukowski DCS calcula valores de C_l com erro menor que 1% em relação programa comparado. Também foi comprovada a importância da incorporação do coeficiente de excentricidade (ϵ) na equação (50), pois sem ele as 3 curvas ficariam sobrepostas, apesar da variação da espessura.

4.2. Joukowski DCS versus Manzanares Filho (1994).

Em sua tese de doutorado (Manzanares Filho, N., 1994), o autor apresenta um método numérico (painéis), para analisar os componentes aerodinâmicos de máquinas de fluxo axial. Os

exemplos de perfis Joukowski apresentados na tese, utilizando escoamento viscoso, foram refeitos no Joukowski DCS, obtendo-se os seguintes resultados comparativos na tabela 4:

Tabela 4 – Resultados da tese de Manzanares Filho e do Joukowski DCS.

α	a=0,25; m=0,02; beta=0		a=0,155; m=0,02; beta=6°		a=0,09; m=0,02; beta=12°	
	CI		CI		CI	
	MZNR	Jouk	MZNR	Jouk	MZNR	Jouk
0	-	-	-	-	1.4561	1.4447
1	-	-	0.8363	0.8156	-	-
4	-	-	-	-	1.9206	1.9078
5	0.5902	0.5908	1.2991	1.2820	-	-
10	1.1759	1.1770	-	-	-	-

Observa-se que na tabela 4 que a diferença entre os resultados fica em menos de 1%, apesar de a metodologia do Manzanares considerar o escoamento viscoso, visando conseguir resultados mais precisos.

4.3. Joukowski DCS X Pope.

Nesta comparação verificou-se a semelhança entre as curvas do coeficiente de pressão apresentadas em exemplos do livro Basic Wing and Airfoil Theory (Pope, A., 1951), resolvidos analiticamente, e as curvas para o mesmo aerofólio conseguidas pelo Joukowski DCS.

A figura 4.7 mostra as curvas do C_p para um aerofólio simétrico com corda igual a 3,048 metros e 11% de espessura, com ângulo de ataque de 4°.

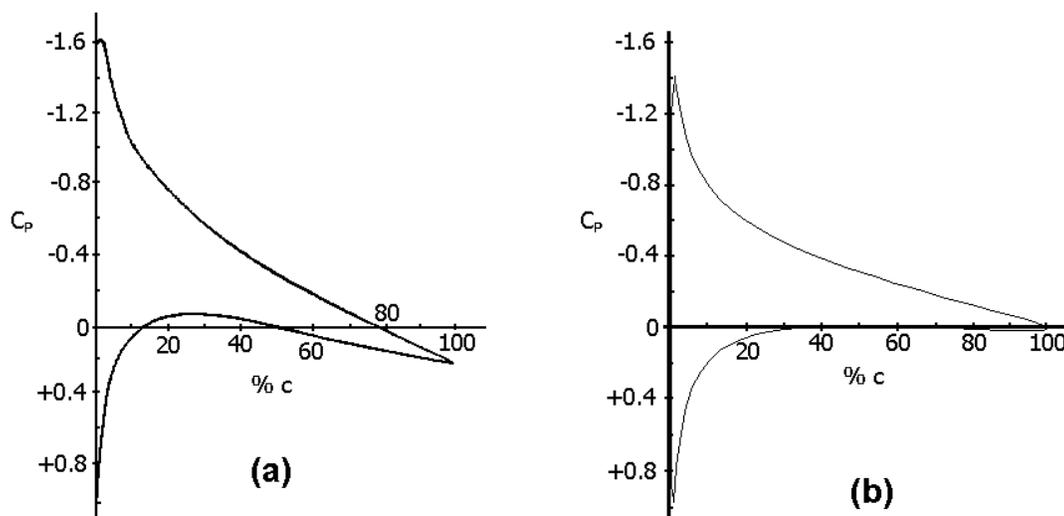


Figura 4.7 – Curvas do C_p desenhadas por Pope (a) e com o Joukowski DCS (b).

No gráfico gerado pelo Joukowski DCS destaca-se o fato de que o C_p se reduz a zero no bordo de fuga do aerofólio (100% c). Isto se deve ao fato de que de que no aerofólio gerado e plotado matematicamente, as linhas superior e inferior do bordo de fuga são tangentes ao escoamento, fazendo com que equação (57) se iguale a zero neste ponto.

Apesar da diferença na forma das curvas, o C_l , que deriva diretamente da relação entre as áreas das superfícies superior e inferior, o C_l é afetado, valendo 0,470 para a curva (a) e 0,472 para a curva (b). Isto se deve ao fato de o C_l não ser calculado através do C_p , mas a partir da equação geral das forças (47) e da relação geral da força de sustentação (51).

4.4. Coeficiente de Momento à um quarto da corda ($C_{m1/4}$):

A tabela 5 mostra os resultados do $C_{m1/4}$ para um aerofólio simétrico, um curvo e um bem curvo, todos com 12,3% de espessura com o ângulo de ataque variando de 0 a 17°.

Tabela 5 – Resultados do $C_{m1/4}$ pelo Joukowski DSC e pelo XFOIL.

	Simétrico 070074	Curvo 070874	Bem curvo 071274
Jouk	0	-0,155	-0,231
XFOIL	0 a -0,007	-0,158 a -0,170	-0,232 a -0,253

Observa-se que para o programa Joukowski DCS o $C_{m1/4}$ independe do ângulo de ataque. Isso vem de sua formulação – equação (68) – relacionando-o apenas com β . Esta formulação foi utilizada pois em (Pope, 1951) se considerou que o centro aerodinâmico (c.a. - ponto em que o vetor resultante das forças sobre o aerofólio intercepta a corda) dos aerofólios Joukowski se localiza à $1/4$ da corda, a partir do bordo de ataque, quando na verdade o c.a. varia de $\pm 2,5\%$ desta posição, condição que é detectada pelo programa XFOIL. Por isso o $C_{m1/4}$ só coincide quando o ângulo de ataque é zero.

5. CONCLUSÕES:

O programa computacional desenvolvido, cuja descrição de funcionamento é o corpo deste trabalho, atinge o objetivo do autor, cuja proposta é uma ferramenta confiável (se comparado com outras ferramentas computacionais de aplicação similar), de fácil utilização, requerendo um mínimo de esforço para obter diferentes geometrias de aerofólios, seus

coeficientes de desempenho, sua representação gráfica, e um arquivo com a lista dos pontos do perfil, que pode ser usado para uma análise mais detalhada em outro programa de análise ou em um programa de desenho.

- Representação gráfica do aerofólio: o programa possibilita a geração de uma grande variedade de geometrias espessuras e tamanhos, através da manipulação dos dados de entrada p , q e c_1 . O arquivo de pontos do aerofólio pode ter a quantidade de pontos que o usuário achar necessária, variando o intervalo de varredura de θ nas equações (27) e (28). Este objetivo foi plenamente alcançado.

- Cálculo do C_l : O objetivo de verificar se os resultados da presente metodologia se aproximavam dos resultados de outros autores (Pope, 1951; Manzanares, 1994; Drela, 2000), foi alcançado. A diferença entre os resultados do Joukowski DCS e do XFOIL chegou a no máximo 1%, e somente para aerofólios extremamente curvos, de pouca aplicação prática.

- Cálculo e representação gráfica do C_p : Este objetivo foi parcialmente alcançado, em termos de representação matemática, quando aplicado aos aerofólios simétricos, apesar de que na prática é quase impossível construir uma asa que tenha suas superfícies superior e inferior paralelas no bordo de fuga, como visto no item 4.3. Para aerofólios curvos o equacionamento utilizado apresenta divergência da curva no bordo de fuga, vindo a tender a $+\infty$ e $-\infty$ para o superfície superior e inferior respectivamente. Embora a distribuição da pressão sobre a superfície do aerofólio seja de suma importância para a escolha da resistência e espessura do material que irá cobrir a asa e parte da estrutura interna da mesma, a aplicação à qual este programa está voltado (aeromodelismo), não existe esta preocupação. Trabalhos futuros poderão aprimorar estes cálculos no programa.

É interessante notar que uma tentativa de simplificar as equações aplicadas no programa, através da eliminação do coeficiente de excentricidade, que se julgou ser apenas um atalho para facilitar os cálculos em décadas passadas, resultou numa divergência dos resultados à medida que aumentava o ângulo de ataque. Utilizando a equação (50), observou-se que a espessura não influenciava no resultado do C_l , o que não era verificado no XFOIL, cujos resultados indicavam que a espessura tinha influência direta. Após a re-incorporação do coeficiente de excentricidade, na equação (61) os resultados do presente programa passaram a detectar a influência da espessura, além de aproximar seus resultados aos resultados do XFOIL, antes com erro de cerca de 8%, agora com menos de 1%. A marca de 1% só é alcançada pelos aerofólios fortemente curvos.

Comparativamente com outros métodos utilizados para a análise de perfis aerodinâmicos, como elementos finitos e volumes finitos, o fator tempo de computação torna-se

um dos grandes atrativos deste programa. Os resultados são visualizados quase que instantaneamente, permitindo sucessivas tentativas e erros até que se encontre a combinação geometria/desempenho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS,

“Aviation Modeller International”, june 1998. Model Activity Press.

Belotserkovskii, Sergei M., 1967. **“The Theory of Thin Wings in Subsonic Flow”** Plenum Press, New York.

Chow, C. et alli, 1985. **“Unsteady Flow About a Joukowski Airfoil in the Presence of Moving Vortices”**. AIAA Journal, volume 23, No 5.

Drela, Mark, Youngren, Harold, 2001. **“XFOIL 6.94 User Guide”**. <http://raphael.mit.edu/xfoil/>, MIT.

Fox, Robert T., McDonald, Alan T., 1998. **“Introdução à Mecânica dos Fluidos”**, Livros Técnicos e Científicos Ltda., Rio de Janeiro.

Huang, M., Chow, C., 1982. **“Trapping of a free vortex by Joukowski Airfoils”**, AIAA Journal, volume 20, No 3.

Hwang, W. S., 2000. **“A boundary node method for airfoils based on de Dirichlet condition”**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volume 190, Elsevier, Amsterdam.

Jameson, A., 1988. **“Aerodynamic Design Via Control Theory”**, NASA CR-181749.

Kuethe, A. M., Schetzer, J. D., 1959. **“Foundations of Aerodynamics”** John Wiley & Sons, Inc, New York.

Manzanares Filho, Nelson, 1994. **“Análise do Escoamento em Máquinas de Fluxo Axiais – Tese de Doutorado”**. ITA, São José dos Campos.

Pope, Alan, 1951. **“Basic Wing and Airfoil Theory”**, McGraw-Hill, New York.

Shames, Irwing H., 1973. **“Mecânica dos Fluidos volume 2 – Análise de Escoamentos”**, Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo.

ANEXO I: Interface visual do programa Joukowski DCS

