

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA  
LINHA DE PESQUISA:  
ENSINO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**GABRIEL DE SOUZA PINHEIRO**

**ENSINO DE PROBABILIDADE: UM JOGO E AS CONTRIBUIÇÕES  
DOS REGISTROS DAS PARTIDAS**

PORTO ALEGRE

2019

**GABRIEL DE SOUZA PINHEIRO**

**ENSINO DE PROBABILIDADE: UM JOGO E AS CONTRIBUIÇÕES  
DOS REGISTROS DAS PARTIDAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

**Orientadora:** Prof. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

PORTO ALEGRE

2019

**GABRIEL DE SOUZA PINHEIRO**

**ENSINO DE PROBABILIDADE: UM JOGO E AS CONTRIBUIÇÕES  
DOS REGISTROS DAS PARTIDAS.**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

**Orientadora:** Prof. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

**Banca Examinadora**

---

Prof. Dra. Luisa Rodriguez Doering

---

Prof. Dr. Renato Perez Ribas

---

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia

Porto Alegre

2019

Agradecimentos:

Agradeço a meus pais, que me apoiaram e incentivaram meus estudos.

Agradeço ao meu irmão, pelo amor e companheirismo.

Agradeço ao professor Rossano e Professora Elisa, pela amizade e contribuições.

Agradeço aos professores membros da banca examinadora pelas sugestões, opiniões e conselhos.

Agradeço a minha orientadora Marilaine de Fraga Sant'Ana, pelo seu empenho, dedicação e paciência que possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Agradeço ao professor Paulinho, por sua mais sincera amizade e confiança depositada em mim.

## RESUMO

Esta dissertação é baseada em ambientes de aprendizagem de Modelagem Matemática pautados pelos cenários para investigação e Jogos e pode ser entendida como a continuidade do desenvolvimento de um jogo iniciado na graduação. A pesquisa é desenvolvida sob uma perspectiva qualitativa com a coleta/produção de dados obtida por meio de oficina desenvolvida em uma escola de Ensino Médio. Entrelaçando Jogos, Modelagem Matemática, Modelos e Pedagogia da Pergunta, objetivamos a investigação e compreensão dos potenciais do jogo e dos registros de partidas construídos e analisados pelos alunos, assim como a investigação dos registros e suas características a partir das definições de modelos a fim de responder à questão de pesquisa: Como as impressões dos alunos acerca dos registros feitos pelos mesmos por meio da descrição das partidas de um jogo criado pelo autor podem contribuir para a construção de conceitos de Probabilidade? Os resultados obtidos mostraram-se significantes no tocante às possibilidades da proposta quando o jogo é entendido como mediador da Modelagem Matemática, Modelos e da Pedagogia da pergunta como suporte à construção do conhecimento e também para a ampliação do conceito de modelo.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática; Jogos; Cenários para investigação; Modelos;

## **ABSTRACT**

This dissertation is based on learning environments of Mathematical Modeling guided by the scenarios for investigation and Games and can be understood as the continuity of the development of a game begun in the graduation. The research is developed from a qualitative perspective with the collection/production of data obtained through a workshop developed in a high school. Interlacing Games, Mathematical Modeling, Models and Pedagogy of the Question, we aim to investigate and understand the potentials of the game and the records of games constructed and analyzed by the students, as well as the investigation of the registers and their characteristics from the definitions of models in order to answer the research question: How can students' impressions of the records made by them by describing matches in a game created by the author contribute to the construction of Probability concepts? The results obtained were significant regarding the possibilities of the proposal when the game is understood as mediator of the Mathematical Modeling, Models and Pedagogy of the question as support to the construction of knowledge and also for the extension of the concept of model.

**Keywords:** Mathematical Modeling; Games; Investigating Sceneries; Models;

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Esquema de Modelagem Matemática. ....	14
Figura 2: Ilustração de um dado não equiprovável. ....	41
Figura 3: Dado das condições utilizado no jogo em questão. ....	46
Figura 4: Tabuleiro utilizado no jogo. ....	48
Figura 5: Tabuleiro adaptado para o aluno com deficiência visual. ....	51
Figura 6: Exemplo de registro detalhado. ....	57
Figura 7: Exemplo de registro por tabela. ....	58
Figura 8: Exemplo de registro simples.....	58
Figura 9: Registro do aluno D. ....	62
Figura 10: Registro da aluna C. ....	64
Figura 11: Crítica do aluno D ao aluno A.....	66
Figura 12: Hipótese do aluno P. ....	67
Figura 13: Hipóteses do aluno D. ....	67
Figura 14: Tabuleiro 6x6 - possibilidades no lançamento de dois dados. ....	70
Figura 15: Resolução do questionamento “Ir para a casa 2 ou 3?”. ....	71

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 1: Ambientes de aprendizagem. ....	17
Quadro 2: Relação Aluno e Professor nas atividades de Modelagem de Barbosa (2001)....	22
Quadro 3: Relação de Dissertações e Teses que se assemelham com a presente pesquisa ..	37

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	9
<b>1 REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>11</b>
<b>1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E SUAS DIFERENTES PERSPECTIVAS .....</b>	<b>12</b>
<b>1.2 MODELOS .....</b>	<b>23</b>
<b>1.3 ENSINAR A PERGUNTAR.....</b>	<b>29</b>
<b>1.4 JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA .....</b>	<b>31</b>
<b>1.5 ESTADO DO CONHECIMENTO.....</b>	<b>34</b>
<b>1.6 UM BREVE RESUMO DE PROBABILIDADE.....</b>	<b>38</b>
<b>2 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA .....</b>	<b>41</b>
<b>2.1 OBJETIVOS DA PESQUISA.....</b>	<b>42</b>
<b>2.2 METODOLOGIA DE PESQUISA .....</b>	<b>43</b>
<b>2.3 CARACTERIZAÇÃO DO AMBIENTE .....</b>	<b>44</b>
<b>2.5 O JOGO .....</b>	<b>45</b>
<b>3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES.....</b>	<b>49</b>
<b>3.1 PRIMEIRO ENCONTRO - OBJETIVOS, EXPECTATIVAS E ANÁLISES.....</b>	<b>49</b>
<b>3.2 SEGUNDO ENCONTRO - OBJETIVOS, EXPECTATIVAS E ANÁLISES .....</b>	<b>52</b>
<b>3.3 TERCEIRO ENCONTRO - OBJETIVOS, EXPECTATIVAS E ANÁLISES .....</b>	<b>59</b>
<b>3.4 QUARTO ENCONTRO - OBJETIVOS, EXPECTATIVAS E ANÁLISES .....</b>	<b>68</b>
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>77</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>77</b>
<b>APÊNDICE.....</b>	<b>92</b>

## INTRODUÇÃO

A presente pesquisa pode ser entendida como a continuação do trabalho feito na graduação, naquele foi desenvolvido um jogo de tabuleiro com as mecânicas de rolagem de dados, movimentação e coleta de pontos, utilizando o jogo como suporte à construção de conceitos de Probabilidade. Entretanto, naquela pesquisa a investigação foi feita de forma superficial quanto as possibilidades que o jogo proporcionou aos alunos, tampouco sobre as possibilidades do jogo relacionando-o com outras metodologias e/ou tendências no Ensino de Matemática. Nesse sentido, objetivando uma investigação significativa quanto ao jogo e seus elementos relacionando-os com Modelagem Matemática, Modelos e Pedagogia da Pergunta, é proposto nesta dissertação a investigação e análise das contribuições do processo de construção de registros e impressões dos alunos quanto aos próprios registros e aos registros dos colegas, almejando a abordagem e construção de conceitos e noções de Probabilidade; entende-se por registro, nesta dissertação, a descrição das decisões no tocante às estratégias do jogo criado pelo autor.

Para tanto, foi realizada uma oficina com alunos do primeiro ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia do Rio Grande do Sul - Câmpus Osório (IFRS - Câmpus Osório), em que foram convidados a participarem das atividades de forma crítica, objetivando uma postura ativa acerca do seu protagonismo na construção do seu próprio conhecimento calcados na ideia de ambientes de aprendizagem de Modelagem Matemática pautado sob os cenários para investigação de Skovsmose (2000) e Jogos.

A escolha do tema é motivada por três fatores: a formação escolar básica e acadêmica do autor, pois enquanto aluno do Ensino Médio e Acadêmico do Curso de Licenciatura em Matemática, o conteúdo de Probabilidade não foi abordado; outro fator importante para a escolha do tema foi a imersão em leituras no que se refere à Modelagem Matemática enquanto aluno do Mestrado em Ensino de Matemática. O terceiro fator se refere à inconformidade com o fato de que nas escolas onde trabalhou não abordaram este tema que julgamos importante para o desenvolvimento crítico do aluno. Além disso, muitas vezes a Probabilidade é um conteúdo presente nas escolas de forma superficial, apenas apresentando as fórmulas e posteriormente aplicando-as em listas de exercícios, isto é, seguindo o “paradigma do exercício” (SKOVSMOSE, 2000).

A problemática desta dissertação decorre da vivência do autor frente a sua formação enquanto aluno da graduação, período no qual lhe foi apresentado os Jogos como suporte à

construção do conhecimento e também como aluno do mestrado, no qual teve a oportunidade de conhecer outras tendências no que se refere ao Ensino de Matemática, em especial Modelagem Matemática. Foi de forma gradual que a proposta para a presente dissertação se consolidou, mesclando as vivências do autor enquanto acadêmico, assim, combinando a utilização de jogos, Modelagem Matemática e Pedagogia da Pergunta com o objetivo de investigar o entrelaçamento dos três aspectos citados, almejando compreender o processo de ensino e aprendizagem em um ambiente de aprendizagem de Modelagem Matemática pautado sob Cenários para Investigação e Jogos.

Assim, buscando compreender os possíveis potenciais dos registros como suporte à construção de conceitos e, também, investigar os registros a partir das definições de modelos, a prática desta pesquisa foi desenvolvida em uma turma contendo, inicialmente, vinte alunos selecionados por meio de sorteio dentre quatro turmas de primeiros anos, em quatro encontros totalizando oito horas de oficina. A abordagem metodológica utilizada foi a pesquisa experimental, visto que determinamos um objeto de estudo e selecionamos as variáveis capazes de influenciá-lo, definimos as formas de controle e de observação dos efeitos que as variáveis produzem no objeto. Para a coleta/produção de dados utilizamos o diário de campo do professor, captura de áudio e vídeo, assim como os registros e anotações dos alunos.

O primeiro capítulo deste trabalho apresenta o referencial teórico que fundamenta nossa pesquisa, abordando: um contexto histórico da Modelagem Matemática no Ensino, conceitos fundamentais da Modelagem Matemática vistos sob diferentes perspectivas. É discutido o processo de Modelagem Matemática e Modelo segundo Bassanezi, a concepção de Barbosa no que se refere à Modelagem Matemática como Ambientes de Aprendizagem e Modelos Matemáticos e também o entendimento de Dalla Vecchia do tocante ao processo de Modelagem Matemática e Modelo Matemático. Neste mesmo capítulo apresentamos as ideias de Freire e Faundez sobre a Pedagogia da Pergunta e a importância do ato de perguntar.

No segundo capítulo abordamos a caracterização da pesquisa, apresentando os objetivos geral e específicos, questão de pesquisa, metodologia de pesquisa, coleta/produção de dados, caracterização do ambiente de ensino e por último a descrição do jogo utilizado nesta dissertação.

O terceiro capítulo foi destinado à análise e descrição dos quatro encontros que foram realizados com a turma. Separamos este capítulo por aulas, optamos por fazer a análise e descrição individual de cada encontro. O objetivo principal do primeiro encontro foi convidar os alunos para a participação e desenvolvimento das atividades, neste encontro os discentes

tiveram o primeiro contato com o jogo. No segundo encontro eles foram convidados a descreverem, isto é, registrarem as decisões e as suas estratégias adotadas no decorrer da partida e também a formularem questões acerca do jogo e das suas estratégias. O terceiro encontro foi destinado para os mesmos recriarem as partidas de seus colegas e responderem um questionário elaborado pelo autor e sua orientadora; objetivando a crítica do estudante ao registro do colega e a estratégia que este adotou. No quarto encontro o docente em conjunto com os discentes responderam às questões formuladas por estes no segundo encontro.

Por último, as considerações finais, neste capítulo o autor responde a questão de pesquisa que norteia este trabalho: **Como as impressões dos alunos acerca dos registros feitos pelos mesmos por meio da descrição das partidas de um jogo criado pelo autor podem contribuir para a construção de conceitos de Probabilidade?** Neste mesmo capítulo são discutidos os objetivos específicos, as questões levantadas durante os capítulos anteriores e o entrelaçamento entre a Modelagem Matemática, Jogos, Modelos e Pedagogia da pergunta.

## 1 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica de nosso trabalho que está calcada nos conceitos de ambientes de aprendizagem de Skovsmose (1997, 2000, 2001; 2007; 2008; 2014), na Pedagogia da Pergunta de Freire e Faundez (2017) e na Pedagogia da Autonomia de Freire (2002), na Modelagem Matemática de Dalla Vecchia (2012; 2017), Barbosa (2001; 2004; 2008), Bassanezi (2006, 2008), Silva (1996), Vertuan (2016), Kaiser (2006), Almeida (2016), Silva (2016). Nossa pesquisa tangencia aspectos referentes à tendência de Jogos na educação Matemática de Macedo, Petty e Passos (2007), Grandó (2001) e Kishimoto (2006). No que se refere à caracterização da pesquisa, assim como objetivos e metodologias, trazemos os autores Bicudo (2006), Bogdan&Biklen (1994), Ludke& André (2017) e Gil (2007).

A escolha deste referencial teórico aconteceu de forma gradual conforme a proposta de oficina estava sendo construída almejando utilizar o jogo criado pelo autor. A Modelagem Matemática, em nossa pesquisa, advém do ato de investigar utilizando matemática, situações que não se apresentam por meio dela. Sobre a seção de Modelos, interessa-nos a etimologia da palavra, visto que é um objetivo nosso compreender como se apresenta o registro do aluno frente as definições dos autores aqui citados. A pedagogia da pergunta, além de fundamentar a construção do conhecimento, advém da proposta feita aos alunos de questionar o jogo, as estratégias e as regras do mesmo. O jogo além de aproximar o aluno e proporcionar momentos

de protagonismo na construção do conhecimento, é o mediador entre a Modelagem Matemática, Modelos e Pedagogia da Pergunta.

## **1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E SUAS DIFERENTES PERSPECTIVAS**

O ensino da Matemática tem sido alvo de atenções ao que se refere a como ensinar e o que ensinar, tem-se desenvolvido muitas medidas para melhorar as situações do professor e dos alunos em sala de aula no sentido de formar alunos que exerçam a cidadania de forma crítica. Dentre muitas metodologias de ensino, Silva (1993) caracteriza o ensino tradicional em termos:

- epistemológicos: baseados na crença de que o conhecimento Matemática é descoberto por aqueles que “produzem” Matemática;
- psicológicos: baseados na certeza de que o aluno aprende vendo e o professor ensina mostrando;
- didáticos: baseados na crença de que é mais “fácil” para o aluno se o ensino for separado em conteúdos;
- pedagógicos: baseados na crença de que deve aprovar o aluno que “aprendeu”.
- políticos: baseados na aprovação dos alunos que se adaptam ao sistema descrito acima.

Neste sentido, a Modelagem Matemática no ensino de Matemática origina-se como uma alternativa ao ensino tradicional. Barbosa (2001) aponta cinco argumentos a favor da inserção da Modelagem Matemática no ensino de Matemática, sendo eles: a motivação, a compreensão do papel sociocultural da Matemática, a facilitação da aprendizagem, a preparação para utilizar a Matemática em outras áreas do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades de exploração e/ou investigação.

Mas o que é Modelagem Matemática? Muitas vezes essa tendência é caracterizada pela criação de modelos e/ou aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento, porém, Barbosa (2004) afirma que este é um conceito que limita a teoria, além disso, o autor reconhece que a Modelagem Matemática é um campo com grandes fronteiras conceituando-a como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade” (BARBOSA, 2004, p.3).

A Modelagem Matemática teve início na Matemática Aplicada, e foi neste ramo da Matemática que os primeiros conceitos e procedimentos em relação ao que caracteriza uma atividade de Modelagem Matemática se firmaram (Almeida, Silva e Vertuan, 2016). A Modelagem Matemática vista sob a ótica da Educação Matemática tem diferentes abordagens e perspectivas, também têm sido realizadas diferentes atividades em sala de aula partindo de pressupostos relacionados às diferentes perspectivas.

Alguns pesquisadores associam a evolução da Modelagem Matemática com a própria História da Matemática. Segundo Bassanezi “A atividade de aplicar a Matemática é tão antiga quanto a própria matemática. É sabido que muitas ideias em matemática surgiram a partir de problemas práticos [...]” (BASSANEZI, 2006, p. 44), entretanto, foi recentemente que este estudo tornou-se uma tendência no Ensino de Matemática. Os primeiros trabalhos interseccionando Modelagem Matemática e Educação Matemática no Brasil surgiram na década de 1970, tendo como pioneiros, Rodney Carlos Bassanezi, Ubiratan D’ambrosio e Aristides Camargo Barreto.

Após essa tendência ter se tornado frequente no Ensino de Matemática, muitos pesquisadores se preocupam com a fluidez na prática escolar. De acordo com os objetivos do professor, Kaiser e Sriraman (2006) apontam cinco diferentes perspectivas da Modelagem na Educação Matemática:

- **Realística:** tendo como objetivo geral a resolução de problemas do mundo real, a compreensão do mundo real e a promoção de competências de modelagem;
- **Contextual:** tendo como objetivo temas psicológicos e problemas práticos;
- **Educacional:** tendo objetivos pedagógicos, estruturação de processos de aprendizagem e introdução e desenvolvimento de conceitos;
- **Sócio-crítica:** objetivos pedagógicos, como compreensão de mundo, e o papel do aluno na sociedade;
- **Epistemológica:** tendo como objetivo a promoção da teoria e do desenvolvimento da mesma.

Destacamos a importância do professor ter clareza no que se refere a Modelagem Matemática no ensino, visto que isto traz implicações acerca dos objetivos desejados e como as atividades serão conduzidas e realizadas.

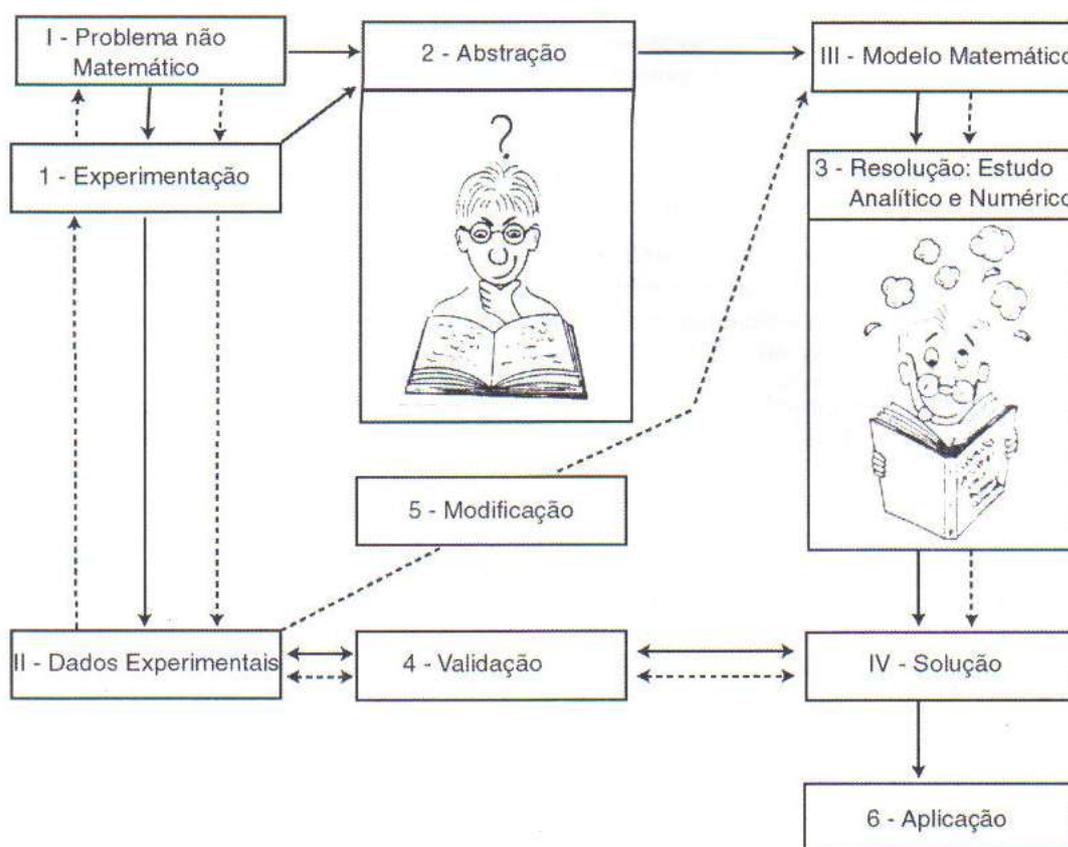
Mas o que é uma atividade de Modelagem Matemática no ensino de Matemática? Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2016), uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita:

[...] em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.12).

A atividade de modelagem matemática descrita acima por ser compreendida como interpretação de uma situação real por meio de um modelo, desta forma, a relação entre realidade e matemática servem como suporte para a construção ou utilização de conceitos matemáticos.

Para Bassanezi (2004), a Modelagem Matemática de uma situação deve seguir uma sequência de etapas descritas na figura 1.

Figura 1: Esquema de Modelagem Matemática



Fonte - (BASSANEZI, 2000, p.27)

Além disto, Bassanezi define Modelagem Matemática como sendo um processo dinâmico utilizado para obter e validar modelos matemáticos a partir dos modelos criados e prever tendências. Bassanezi (2004) explicita, “A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”. (BASSANEZI, 2004, p.24).

Na figura 1 as setas contínuas indicam a primeira aproximação para melhorar o modelo matemático que descreve o problema estudado tornando o processo em algo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas.

1. **Experimentação:** Refere-se ao procedimento “laboratorial” na qual se processa a obtenção dos dados.
2. **Abstração:** Refere-se ao esquema que leva à formulação dos modelos matemáticos e segundo Bassanezi (2002), nesta fase da modelagem procura-se estabelecer a seleção das variáveis, problematização ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando, formulação de hipóteses e a simplificação.
3. **Resolução:** Refere-se a tradução das hipóteses em equações de variáveis discretas ou contínuas. O autor afirma que esta etapa é exclusivamente do matemático, podendo ser completamente desvinculada da realidade modelada.
4. **Validação:** Refere-se ao processo de aceitação do modelo. É nesta etapa que o modelo e as hipóteses são testadas. Bassanezi argumenta que um bom modelo deve ter a capacidade de prever novos fatos ou relações insuspeitas.
5. **Modificação:** Refere-se à alternativa de mudar, melhorar e/ou aprimorar o modelo, caso este não esteja adequado.

Bassanezi (2002) define uma modelagem eficiente como a que

[...] permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. [...] Um modelo parcial pode atender às necessidades imediatas de um pesquisador mesmo que não comporte todas as variáveis que influenciam na dinâmica do fenômeno estudado (BASSANEZI, 2002, p. 31).

De forma geral Bassanezi (2002) descreve o processo de modelagem matemática de forma bem estruturada, com passos ordenados para facilitar a construção e validação do modelo evidenciamos o fato de que, na perspectiva de Modelagem Matemática deste autor, a construção do modelo é uma das etapas da modelagem Matemática, sendo necessária a construção do modelo. Entretanto, outros autores defendem uma modelagem matemática diferente da descrita por Bassanezi (2002), alguns compreendem a Modelagem Matemática sem a necessidade de construção de modelos, sendo os modelos uma consequência do ato da modelagem e não uma obrigatoriedade.

Barbosa (2004) afirma que a Modelagem Matemática, muitas vezes, é conceituada como a aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento, caracterizada pela Matemática Aplicada, na visão deste mesmo autor, isto é uma limitação teórica.

Dentre alguns pontos de argumentação para a inserção da Modelagem Matemática no currículo escolar está a *compreensão do papel sócio-cultural da matemática*, acerca deste tema, Barbosa (2004) destaca que este ponto está intimamente conectado com o interesse de formar sujeitos ativos na sociedade, no sentido de analisar, agir e reagir a respeito do seu papel na sociedade.

Além disto, Barbosa (2004) argumenta que a Modelagem Matemática tem a potencialidade de combater a ideologia da certeza, discutido por Borba e Skovsmose (1997), assim como oportunizar ao aluno criticar as aplicações da Matemática. Podemos entender isto como questionamentos feitos pelos alunos, como por exemplo: O que representa? Como representa? Para que serve? E desta maneira, contornar a ideologia da certeza, que muitas vezes se apresenta em problemas matemáticos.

Podemos entender que toda atividade escolar, em particular tarefas de Matemática, oferecem condições nas quais os alunos são convidados a participar, isto faz alusão ao que Skovsmose (2000) chama de ambientes de aprendizagem.

Skovsmose (2000) apresenta a ideia de *ambientes de aprendizagem* para se referir às condições nas quais os alunos são convidados a desenvolverem algumas atividades. Além disto, Skovsmose distingue a sala de aula em duas organizações, segundo o *paradigma do exercício* e segundo o *paradigma dos cenários para investigação*. O primeiro refere-se a uma aula na qual pode-se manter as perguntas dos alunos em um estado previsível, deixando tanto os docentes quanto os discentes em uma zona de conforto. Neste paradigma as atividades produzidas em sala de aula se tornam binárias, reduzindo o resultado a um esquema de certo ou errado.

Um modelo de aula pautado pelo paradigma do exercício seria uma sala na qual os alunos entram, sentam em classes enfileiradas, geralmente meninos separados de meninas, retiram os livros didáticos de suas mochilas, e estes livros já emanam de si uma autoridade, os alunos se calam e o docente inicia seu monólogo, explica um conteúdo específico e passa uma lista com variações de um mesmo exercício, em que se alteram apenas os valores numéricos, que tem como objetivo fixar o conteúdo estudado, excluindo a vida fora da escola, construindo uma barreira entre escola e sociedade.

Além destes conceitos, Borba e Skovsmose (1997) apresentam a *ideologia da certeza*, que se insere no paradigma do exercício,

A ideologia da certeza designa uma atitude para com a matemática. Refere-se a um respeito exagerado em relação aos números. A ideologia afirma que a matemática, mesmo quando aplicada, apresentará soluções corretas, asseguradas por suas certezas (SKOVSMOSE, 2007, p.81).

Como uma proposta alternativa ao paradigma do exercício Skovsmose (2000) apresenta os cenários para investigação como um ambiente de aprendizagem que pode dar suporte a um trabalho de investigação e que pode possibilitar ao aluno e ao professor aprenderem e ensinarem juntos produzindo significados aos conceitos investigados. Podemos entender os cenários para investigação como construídos a partir de um convite aos alunos para formularem questões e procurarem explicações. Além disto, o autor enfatiza que, para uma tarefa tornar-se um cenário para investigação, é necessário que a tarefa seja aceita pelos alunos, sendo responsabilidade do professor o convite para a participação dos alunos nas tarefas.

Skovsmose (2000) classifica os ambientes de aprendizagem, caracterizando-os entre paradigmas do exercício ou cenários para investigação. Abaixo reproduzimos o quadro apresentado por Skovsmose.

Quadro 1: Ambientes de aprendizagem.

	Listas de exercícios	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências a uma semirrealidade	(3)	(4)
Referências à vida real	(5)	(6)

Fonte: (SKOVSMOSE, 2008, p.23)

Apresentaremos uma caracterização de cada ambientes de aprendizagem, com suas respectivas referências, que podem ser entendidas da forma como os alunos percebem as atividades em sala de aula.

Os ambientes de aprendizagem do tipo (1), (3) e (5) são pautados no paradigma do exercício.

Os ambientes de aprendizagem pautados no paradigma do exercício com referências à Matemática pura, no quadro 1, identificado como o do tipo (1), é um dos mais comuns em sala de aula, aquele em que o professor apresenta o conteúdo, resolvendo alguns exemplos e em seguida, apresenta aos alunos listas de exercícios de uma variação de um mesmo tipo, fazendo referência à matemática pura.

Os ambientes de aprendizagem do tipo (3) são aqueles pautados no paradigma do exercício fazendo referências a uma semirrealidade, frequentemente criada pelos professores ou pelos autores de livros didáticos. Neste tipo de situação todas as informações contidas nos exercícios são suficientes para a solução do problema, sem haver necessidade de investigação nem em margem para questionar sobre quaisquer aspectos da tarefa.

O exercício encontrado no livro didático de Júnior (2009), caracterizado como tipo (3), enuncia: “Em um dia de verão foram coletados 400 kg de lixo que estava espalhado em uma praia do litoral brasileiro. Desse total, 250 kg eram itens de plástico. A quantidade de itens de plástico representa quantos por cento do total de lixo recolhido?” (Júnior, J, R, G. 2009, p. 134). A tarefa descrita é um dos muitos exercícios com referência à semirrealidade em que as informações são suficientes para a solução da questão, além disso, os valores não são reais.

São ambientes de aprendizagem do tipo (5) aqueles que fazem referência à vida real, mas são pautados, também, pelo paradigma do exercício. São caracterizados por trazerem dados reais, normalmente da mídia, sendo jornais, revistas ou televisão. Neste tipo de ambientes de aprendizagem, o ensino e aprendizagem se dá através de materiais retirados da realidade dos alunos e/ou dos professores, no entanto não há questionamentos nem pesquisa por parte dos alunos.

Os ambientes do tipo (2), (4) e (6) são pautados nos cenários para investigação, fazendo referências à Matemática Pura, Semirrealidade ou à vida real (Realidade). Skovsmose (2000) afirma a importância do aceite dos alunos acerca das atividades, já que:

O cenário somente torna-se um cenário para investigação se os alunos aceitam o convite. Ser um cenário para investigação é uma propriedade relacional. A aceitação do convite depende de sua natureza, depende do professor, e depende, certamente, dos

alunos (no momento eles podem ter outras prioridades). O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos. Se um certo cenário pode dar suporte a uma abordagem de investigação ou não é uma questão empírica que tem que ser respondida através da prática dos professores e alunos envolvidos (SKOVSMOSE, 2000, p.5).

Os ambientes de aprendizagem do tipo (2), pautados pelo paradigma dos cenários para investigação que faz referência à matemática pura é caracterizado por investigações que se dão apenas no contexto da matemática, na qual as atividades não fazem referência à realidade ou semirrealidade, atividades numéricas e geométricas, demonstrações, enigmas matemáticos, muitas vezes podem ser descritos como ambientes do tipo (2).

Os ambientes de aprendizagem do tipo (4) estão posicionados em uma semirrealidade, que toma a forma de um cenário para investigação. Um exemplo de tarefa pautada pelo cenário para investigação com referência a semirrealidade seria o exercício mencionado no tipo (3) atentando para os possíveis questionamentos vindos dos alunos ou do professor: Quais são os malefícios ao meio ambiente? Quantos peixes morrem por conta do lixo encontrado no mar? Quais são os principais lixos encontrados na praia? Qual é o litoral do Brasil no qual é encontrado a maior quantidade de lixo? Quantos kg de lixo o brasileiro descarta em média no dia-a-dia? Se questionamentos deste tipo surgissem neste ambiente de aprendizagem, o professor poderia propor aos alunos um Cenário para Investigação, no qual os alunos precisassem desenvolver uma postura ativa, buscando informações reais e pesquisando em diferentes fontes.

Os ambientes de aprendizagem do tipo (6) são cenários para investigação que fazem referências à realidade vivida, neste tipo de cenário, a tarefa proposta pelo professor, ou até mesmo pelos alunos, advém da realidade. Skovsmose (2000) cita um exemplo no qual os alunos participam da elaboração de um projeto de energia, neste caso, o cenário para investigação não é o projeto em si, mas sim a participação de uma atividade educacional com referências à vida real.

Para Barbosa (2004) a Modelagem Matemática é vista como um ambiente de aprendizagem do tipo (6), pautado pelo paradigma dos cenários para investigação, com referência à realidade e está associado à problematização e investigação de um determinado arranjo. A problematização, neste caso, é o ato de criar perguntas e/ou problemas acerca do que está sendo investigado, e a investigação refere-se ao ato de procurar soluções, organizar,

manipular dados e refletir acerca destes, caracterizado como “Conhecimento Reflexivo” descrito por Skovsmose (1994).

O autor tem maior interesse sobre a modelagem cuja investigação se dá no âmbito social, classificado por Barbosa (2001) como perspectiva sócio-crítica, a qual tem objetivo pedagógico e busca a compreensão crítica do mundo circundante. Nesta perspectiva, as atividades oportunizam o debate crítico acerca do papel da matemática na sociedade, neste caso, “nem a matemática nem a Modelagem são “fins”, mas “meios” para questionar a realidade vivida” (BARBOSA, 2001, p.4).

Na definição de Barbosa, a Modelagem Matemática é “[...] um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001, p.6), de acordo com essa definição, Barbosa não assume a obrigatoriedade da construção de um modelo matemático formal.

No entanto, para Dalla Vecchia (2012) a Modelagem Matemática não necessariamente segue um caminho linear, ou seja, nem sempre a Modelagem Matemática se apresenta como ciclos ou sequências pré-definidas de etapas, como é o exemplo apresentado por Bassanezi (2004). Para este autor, a Modelagem Matemática pode ser entendida de “[...] modo fluido e em constante transformação, essa fluidez se mostra principalmente por meio do entrelaçamento entre quatro aspectos considerados relevantes: objetivo pedagógico, modelos/linguagem, problema e realidade.” (WEINGARTEN; DALLA VECCHIA, 2017, p.221). Portanto, a Modelagem proposta pelos autores pode ser vista como um processo não necessariamente linear, pois qualquer variação em algum dos aspectos pode influenciar a condução na busca da solução do problema em questão. Desta forma, o autor compreende a Modelagem Matemática como a “[...] visão alegórica de problema, entendo que as características múltiplas de cada um se entrelaçam, influenciando o processo de MM, do mesmo modo que pedras atiradas em um lago de águas paradas influenciam as ondulações do mesmo [...]” (DALLA VECCHIA, 2012, p.217).

Acerca dos quatro aspectos mencionados por Dalla Vecchia (2012), o autor define objetivos pedagógicos como sendo “[...] o conjunto de fins ou metas que se deseja atingir quando se desenvolve qualquer tipo de proposta com os alunos que visa contribuir para o processo educacional” (DALLA VECCHIA, 2012, p.71).

Para o autor, os objetivos pedagógicos devem refletir o que o professor deseja diante da sua prática. Portanto é necessário haver coerência entre as ações do professor frente à sua

prática e o objetivo pedagógico proposto. Segundo Kaiser e Sriraman (2006), diferentes objetivos podem implicar em diferentes perspectivas de compreender a Modelagem Matemática, e desta forma, conduzir o processo. O objetivo pedagógico deve estar claro para o professor, para que assim, o mesmo tome as devidas ações de forma a consonar com o que será proposto.

Acerca do modelo, Dalla Vecchia (2012) evidencia que “Mesmo compreendendo que nem sempre o desenvolvimento da MM leva a um modelo, considero que este assume um papel relevante, pois não deixa de ser um produto desejado ou almejado” (DALLA VECCHIA, 2012, p.112). O autor compreende que a ideia de modelo faz referência à simbologia utilizada, à finalidade específica e a sua relação com a realidade, levando em consideração esses três aspectos, Dalla Vecchia entende o modelo como sendo o “exemplar de uma situação que se mostra por meio de uma linguagem estruturada por ideias matemáticas.” (DALLA VECCHIA, 2012, p. 116). Evidenciamos o fato de que, quando o autor usa a palavra *exemplar*, o mesmo considera aquilo que se observa ou aquilo que se refere a algo.

Dalla Vecchia (2012) assume o problema como sendo “um conjunto de condições não atuais e indeterminadas que dizem respeito a uma dada situação e que gera um campo de conflitos que vai assumindo gradativamente um caráter mais ou menos estável, à medida que vai sendo determinado.” (DALLA VECCHIA, 2012, p.196), desta forma o autor compreende a Modelagem Matemática como um “[...] processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos sustentados por ideias matemáticas que se referem e visam encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade.” (DALLA VECCHIA, 2012, p.203).

O autor evidencia que a forma como o problema é determinado influi na busca por uma solução e estende a compreensão do problema não como uma estrutura, mas sim visto por meio de campos direcionais que “[...] se mostram inicialmente caóticos, como se fossem influenciados por ondulações vindas de qualquer direção e sentido” (DALLA VECCHIA, 2012, p.120). Desta forma, a maneira como o aluno encara o problema pode influenciar no processo de Modelagem Matemática.

Este mesmo autor também comenta que a ideia de realidade é um aspecto que perpassa distintas concepções de Modelagem Matemática. As concepções de outros autores no que se refere à *realidade* implicaram em algumas inquietações acerca deste tema, o que fez com que Dalla Vecchia (2012) questionasse “O mundo cibernético pode ser visto como uma dimensão de abrangência da realidade? [...]” (DALLA VECCHIA, 2012, p.122). Para tanto, o mesmo considera diferentes dimensões da realidade como a abrangida pelo mundo cibernético.

Destacamos que nesta pesquisa, consideramos, também, o ato de jogar como sendo parte da realidade vivida pelo aluno, de fato, este quando está jogando, está realizando uma atividade real, por mais que esta atividade, em toda sua complexidade se desenvolva no mundo das “ideias” devido ao jogo exigir raciocínio lógico, interpretação, análise de estratégias. Ainda assim, o ato de jogar e colocar em prática as estratégias e decisões adotadas é um ato real que ocorre em um ambiente real, em nosso caso, na oficina proposta para esta pesquisa.

Sobre atividades de Modelagem Matemática, Barbosa (2001) classifica em três casos de formas diferentes, como mostra a quadro 2.

Quadro 2: Relação Aluno e Professor nas atividades de Modelagem de Barbosa (2001).

<i>Casos</i>	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação problema</i>	Professor	Professor	Professor/Aluno
<i>Simplificação</i>	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
<i>Dados Quantitativos e qualitativos</i>	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
<i>Resolução</i>	Professor/Aluno	Professor/Aluno	Professor/Aluno

Fonte: (BARBOSA, 2001, p.6)

Fazendo uma análise acerca dos casos, podemos classificar como:

- Caso 1: O professor é encarregado de elaborar a proposta já disponibilizando as informações necessárias para a resolução da situação problema, cabendo aos alunos o processo de resolução. Todo o trabalho é feito a partir da situação oferecida pelo professor;
- Caso 2: Somente cabe ao professor trazer para sala de aula uma situação problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta de dados, simplificação e resolução do problema.
- Caso 3: A busca pela situação problema é papel do aluno, cabendo a ele a formulação, a compreensão, a coleta de dados, a simplificação e a resolução do problema.

Em todos os casos acima o professor é um co-participante na investigação dos alunos, tendo o papel de dialogar acerca dos processos escolhidos pelos discentes para a investigação, simplificação, representação e/ou resolução da proposta.

Este capítulo teve como objetivo ambientar o leitor acerca de alguns conceitos no que se referem à Modelagem Matemática e ao ato de fazer Modelagem Matemática, para tanto, apresentamos diferentes conceitos e diferentes perspectivas de Modelagem e Modelagem Matemática de diferentes autores, essas diferenças, por mais que sejam, algumas vezes, sutis, fazem diferença na compreensão desta tendência em sala de aula, pois precisamos compreendê-las, e conseguir diferenciá-las para alcançar os objetivos desejados. De acordo com o objetivo da prática que escolhemos a perspectiva de Modelagem Matemática, visando a maximização e eficiência desta tendência de ensino. Apresentaremos no próximo capítulo as diferentes noções de Modelos.

## 1.2 MODELOS

No contexto da Modelagem Matemática, deparamo-nos com o conceito de Modelo, nota-se isto na concepção dos autores citados no capítulo anterior. Segundo Cunha (1989) a palavra modelo deriva do latim *modulus*, que por sua vez significa “pequena medida” (CUNHA, 1989), para entender ainda mais o significado da palavra, podemos procurar por modelo no dicionário, apresentamos alguns modos diferentes de compreender o termo. De acordo com o dicionário Ferreira (2009, s/n), modelo pode ser:

1. Objeto destinado a ser reproduzido por imitação.
2. Representação em pequena escala de algo que se pretende executar em grande.
3. Molde.
4. Pessoa ou coisa cuja imagem serve para ser reproduzida em escultura, pintura, fotografia, etc.
5. Aquilo que serve de exemplo ou norma; molde: modelo literário.
6. Aquele a quem se procura imitar nas ações, no procedimento, nas Maneiras, etc.; molde: tomar alguém por modelo.
7. Pessoa ou ato que, por sua importância ou perfeição, É digno de servir de exemplo.
8. Pessoa que, posando, serve para estudo prático do corpo humano, Em pintura ou escultura; modelo vivo.
9. Pessoa que, empregada em casa de modas, por conta própria ou através de agência, traja vestes ou adereços para exibí-los a clientela; manequim, maneca (fem.), maneco, modelo de passarela.

10. Modelo fotográfico.
11. Vestido, terno, chapéu, sapato, etc., que é criação de uma casa de modas: os mais recentes modelos da estação.
12. Impresso (2), com dizeres apropriados para cada fim, utilizado em escritórios, empresas, bancos etc.
13. Réplica tridimensional de objeto, artefato, cenário, pessoa, etc., construído em escala normal, reduzida, ou ampliada, para fins didáticos, filmagem de efeitos especiais, teste de segurança etc; maquete.
14. Estilo ou design de um determinado produto ou criação, como carro, vestido, jóia, penteado etc.
15. Econ. Modelo econômico.
16. Fís. Conjunto de hipóteses sobre a estrutura ou o comportamento de um sistema físico pelo qual se procuram explicar ou prever, dentro de uma teoria científica, as propriedades do sistema.
17. Inform. Representação simplificada e abstrata de fenômeno ou situação concreta, e que serve de referência para a observação, estudo ou análise.
18. Inform. Modelo (17) baseado em uma descrição formal de objetos, relações e processos, e que permite, variando parâmetros, simular os efeitos de mudanças de fenômeno que representa.

Observamos nestes significados a presença dos termos: molde, representação e descrição usados em diferentes contextos, uma vez que a criação de modelos é recorrente em diversas áreas do conhecimento, como na Arte, Engenharia, Arquitetura, Matemática, Física, entre outras (Almeida, Silva e Vertuan, 2016), extrapolando o contexto da ciência. O que varia de um modelo para outro é a finalidade para qual são construídos, dentre muitos objetivos da criação de modelos, temos: prever o comportamento de um sistema (conjunto de elementos), demonstrar algo, ter um fim pedagógico, no caso desta dissertação, auxiliar na introdução/construção/desenvolvimento de conceitos, ou seja, a construção do modelo teve um fim pedagógico.

Há autores que trazem o conceito de modelo para o contexto abrangido pela ciência, Machado (1991) particulariza esta discussão e apresenta duas formas de compreender o modelo. No primeiro caso, o autor compreende o modelo como sendo de natureza empírica, ou seja, as situações empíricas tornam-se modelos para validar uma teoria que já existe. Sendo assim, o modelo pode ser compreendido como:

[...] um conjunto de fórmulas  $F$ , de uma linguagem formal  $L$ , um modelo para  $F$  é uma particular determinação de um conjunto de objetos e a atribuição de significados, nesse conjunto, às variáveis e às relações que comparecem nas fórmulas de  $F$  de modo que todas elas se tornem proposições verdadeiras a respeito dos objetos considerados. (MACHADO, 1991, p.73).

O segundo modo de compreender o modelo se contrapõe ao primeiro, neste caso o modelo tem uma natureza teórica, constituindo-se em uma estrutura formal, cuja inspiração é a realidade. Nesse ponto de vista, o modelo é em geral “[...] um conjunto de hipóteses relativas ao domínio científico que se investiga e que tem a coerência e as possibilidades dedutivo-explicativas garantidas por uma codificação.” (MACHADO, 1991, p.74). O autor apresenta duas maneiras de compreender o modelo, uma compreende o modelo como aquilo que será adotado como referência e a outra como aquilo que se refere a algo.

Outros autores definem o modelo de diferentes formas. Para Bassanezi (2002), um modelo é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.” (BASSANEZI, 2002, p.20). Para Barbosa (2008) um modelo matemático é toda “[...] representação matemática da situação, por escrito” (BARBOSA, 2008, p.48), além disto, para Barbosa (2008), o modelo matemático é amplo, podendo ser representado por tabelas, gráficos, fórmulas, expressões matemáticas e “[...] todo tipo de registro matemático escrito que se refira a situação-problema, como operações matemáticas básicas” (BARBOSA, 2008, p.48). Outros autores que também se referem ao modelo como sendo uma representação, Almeida, Silva e Vertuan (2016) compreendem o modelo como sendo uma “[...] representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam.”.

Skovsmose (2007) critica as perspectivas de modelos que falam de representação da realidade e de neutralidade do modelo. Portanto o autor discorda da perspectiva de Niss (1989) que entende a Modelagem Matemática como uma representação da realidade, deste mesmo modo, composta por uma tríade que envolve objetos empíricos  $R$  (na visão do autor, representa a realidade), entidades matemáticas  $M$  (para o autor, são as relações matemáticas) e uma função  $f$  que representa a relação entre objetos da realidade com a matemática ( $f: R \rightarrow M$ ). Essa relação enfatiza a ideia de modelo como representação, desta forma, por meio da linguagem e simbologia matemática é possível fazer uma representação total ou parcial da realidade.

Para Skovsmose (2007), a sustentabilidade dessa neutralidade do modelo está relacionada com as características específicas da perspectiva de representação da linguagem, esta pode ser associada a uma espécie de “fotografia”. Para o autor a

[...] linguagem “fotografa” a realidade como um mapa “fotografa” certa seção geográfica. Do mesmo modo que um mapa topográfico pode representar uma situação [...] também a essência da linguagem é uma representação da realidade. Como um mapa confiável captura aspectos essenciais de um campo de batalha, assim também qualquer afirmação confiável representa aspectos da realidade. Obviamente há diferenças entre o mapa topográfico e a paisagem real de linha de frente, mas apesar disso, há semelhanças essenciais (SKOVSMOSE, 2010, p. 110).

A ideia da representação é questionada por Skovsmose (2007) por não apresentar uma descrição dos passos e processos que envolvem a associação do fenômeno com a matemática. Para o autor, a natureza da semelhança entre a linguagem e a realidade descrita não pode ser expressa por meio desta mesma linguagem. Para explicar esta ideia, Skovsmose (2007) traz o exemplo de um artista que representa uma mulher e questiona: Como fazer um desenho que represente as semelhanças entre o desenho e a mulher? Como seria o desenho de um quadro que represente a beleza da mulher?

Como fazer um desenho do modo como o quadro representa a realidade? Isso não parece possível para artistas. Nem mesmo parece fazer sentido. A semelhança entre a beleza e o desenho da beleza não pode ser expressa por um novo desenho. Ou por qualquer desenho (SKOVSMOSE, 2007, p.111).

Desta forma, não é possível expressar a natureza da representação por meio da linguagem utilizada para a própria representação ou “a natureza da representação não é para ser tratada pela linguagem da representação” (SKOVSMOSE, 2007, p.112). Para este mesmo autor, o modelo não pode ser visto como uma linguagem que representa alguma situação, mas sim como um meio de interpretar fenômenos empíricos, fazendo deduções por meio de modelos, como se o fenômeno fosse uma parte da própria matemática (SKOVSMOSE, 2007), ou seja, é defendido por ele a inexistência de uma linguagem ideal ou uma descrição exata do que é observado ou analisado. Sendo assim, nesta perspectiva, um fenômeno ou objeto de estudo não tem uma descrição única, podendo ser descrito de diferentes maneiras e sob diferentes perspectivas.

Para Dalla Vecchia (2012) é “[...] possível compreender que a ideia de modelo matemático pode estar associada a distintos aspectos, tais como os relativos à sua simbologia, à sua finalidade específica e à sua relação com a realidade” (DALLA VECCHIA, 2012. p.116).

Dessa forma, este mesmo autor define um modelo matemático como sendo um “[...] exemplar de uma situação que se mostra por meio de uma linguagem estruturada por ideias matemáticas.” (DALLA VECCHIA, 2012, p.116).

Barbosa (2009) apresenta três modos distintos de identificar um modelo matemático, o primeiro é o *modelo como justificativa* que tem como função “[...] sustentar a introdução de um novo conceito, oferecendo aos alunos uma justificativa.” (BARBOSA, 2009, p.80), o segundo é o *modelo como definição* que visa “[...] o conceito que os alunos devem dominar” (BARBOSA, 2009, p.80) e, por fim, o terceiro que é o *modelo como estruturante* a qual “[...] partes do discurso da matemática escolar foram deslocados para enquadrar um fenômeno [...] e extrair conclusões.” (BARBOSA, 2009, p.80), um modelo como estruturante utiliza de discursos da Matemática para validar fenômenos de outras áreas do conhecimento.

Diante das definições de modelos concebidas pelos autores que mencionamos acima, cabe neste momento o seguinte questionamento: um modelo matemático pode assumir um formato não escrito? Segundo Gilbert, Bouler e Elmer (2000), citado por Barbosa (2009), os modelos podem ser classificados

[...] em termos de sua representação: concreto o qual envolve materiais manipuláveis; verbal, que consiste em descrições de um sistema; visual, o que envolve gráficos, diagramas, animações, etc.; gestual, o que envolve uso do corpo ou partes do corpo; e finalmente, a simbólica, que consiste de representações pictóricas, fórmulas, expressões matemáticas. (BARBOSA, 2009, p.70).

Nota-se que para os autores, existem muitas categorias de modelos, desde o escrito até o verbal, que consiste na descrição de um sistema, considerando “sistema” como um conjunto de elementos. Desta forma, esta descrição pode se dar por meio de áudio, vídeo ou até mesmo na forma escrita, esta que pode ser, inclusive, uma transcrição de áudio. Se considerarmos somente os aspectos individuais em termos de sua representação, limitamo-nos a modelos cuja intersecção entre as “representações” seja nula e excluimos modelos que podem envolver aspectos verbais, no qual a descrição pode ocorrer por meio de áudio e aspectos simbólicos, isto é, a descrição de um sistema através de expressões matemáticas por meio de áudio, desta forma, possibilita espaço para pessoas que tenham dificuldades quanto a escrita ou até mesmo sejam impossibilitadas de escrever, seja por defasagem quanto ao ensino ou por consequência de alguma deficiência física ou cognitiva.

Além do modelo concreto, visual, gestual, verbal e o simbólico, há também o modelo mental, este termo provém de uma teoria que explica o raciocínio e a compreensão baseada em representações mentais com relação à realidade. Para Johnson-Laird (2005) “a percepção produz um modelo mental, a compreensão linguística produz um modelo mental, o pensamento e o raciocínio são manipulações internas de modelos mentais” (JOHNSON-LAIRD, 2005, p. 179, tradução do autor). Para este autor, quando as pessoas percebem o mundo, a visão produz um modelo mental, quando as pessoas compreendem a descrição do mundo, elas podem construir um exemplar similar desse mundo, não tão rico em detalhes, mas mesmo assim, um modelo baseado na descrição e também em seus conhecimentos prévios.

Os modelos mentais, segundo Souza (2017) são “[...] formados por estruturas que permitem prever e explicar muitas das observações feitas na vida cotidiana de maneira mais ou menos direta, além de facilitar a produção de inscrições simbólicas.” (SOUZA, 2017, p.25). Podemos entender o modelo mental, como um precedente do modelo verbal e/ou modelo escrito/simbólico, o conhecimento prévio do aluno interage com o modelo mental produzindo novos modelos, sendo assim, o modelo mental é particular de cada aluno, pois está diretamente vinculado ao conhecimento e a cognição individual de cada pessoa. Outro ponto a ser destacado é o fato do modelo mental influenciar diretamente na compreensão da realidade, visto que o aluno cria um modelo mental para orientar o raciocínio e a tomada de decisão.

Para Hestenes (2006), os modelos mentais são exemplares do mundo como concebido, não como percebido. Portanto, conhecer uma “coisa” é formar um objeto mental desta. O autor considera, também, que qualquer tipo de raciocínio ocorre pela dedução a partir de modelos mentais. Desta forma, podemos entender o modelo mental como um modelo que antecede a criação de outros tipos de modelos já citados por: Bassanezi (2002), Barbosa (2009), Dalla Vecchia (2012), Machado (1991), Almeida, Silva e Vertuan (2016) e outros não citados nesta dissertação.

Evidenciamos o fato de que no espectro de definições e conceitos de modelos, abrangemos uma parte considerável destes que são significativos para a compreensão do que é e como um modelo se apresenta, sendo ele ou não, matemático. É notável que existam muitas definições de modelos, e assim como na Modelagem Matemática, diferenciam-se de acordo com o seu objetivo de construção e/ou análise destes. Ainda que as diferenças sejam sutis quanto aos Modelos Matemáticos, as pequenas divergências são importantes para atingir o objetivo desejado em sala de aula ou até mesmo fora dela, se esse for o objetivo almejado.

### 1.3 ENSINAR A PERGUNTAR

A Modelagem Matemática está, em algumas perspectivas, relacionada com a construção de modelos e, na sua essência, com o ato de perguntar e buscar respostas. Afinal, por que a Modelagem Matemática e os Modelos estão relacionados com perguntas? Para Freire e Faundez (2017), as respostas sempre provém de uma pergunta, ou pelo menos esse é o estado natural da construção do conhecimento, sempre nessa ordem, primeiro se fez as perguntas para depois obter respostas. Neste sentido, busca por respostas decorre através da observação, da investigação e, se necessário, a realização de experimentos, confluindo para o que Barbosa (2001) afirma ser Modelagem Matemática, isto é, o ato de indagar e/ou investigar situações reais por meio da Matemática.

Antes de atentarmos para o que o título desta seção sugere, vamos dissertar sobre o que Freire (1975) chama de *Educação Bancária*, este termo irá contribuir para a justificativa da necessidade de se fazer perguntas nos ambientes de construção do conhecimento. No ambiente da *Educação Bancária* o professor é o detentor do saber e o aluno é uma tábula vazia em que o professor depositará os saberes, ou seja, os educandos são vistos apenas como depósitos. Freire questiona este tipo de ensino, pois o mesmo tira do aluno a possibilidade de refletir, pensar e questionar, inibindo o ato de interagir, pois no cenário da *Educação Bancária* o aluno não tem a possibilidade de ser o protagonista na busca por conhecimento. Segundo Freire (1975) em vez do professor dialogar com os alunos, no sentido de haver interação entre ambos, os educandos apenas recebem informações, memorizam e repetem. Na concepção bancária da educação a única ação disponível para os alunos é a de receber os “depósitos”, guardá-los e arquivá-los. Para Freire, neste contexto, o saber é “[...] uma doação dos que se julgam sábios aos que se julgam nada saber. Doação que se funda numa das manifestações instrumentais da ideologia da opressão - a absolutização da ignorância, segundo a qual esta se encontra sempre no outro [...]” (FREIRE, 1975, p.67)

Para Freire (1975), a verdade deve ser buscada por meio do diálogo, assim oportunizando o professor aprender ao ensinar. Neste cenário há uma maior interação entre professor e aluno, mais diálogos, mais desafios, uma vez que quanto mais dúvidas, inquietações e curiosidades partem dos alunos, mais o educador será desafiado, e por sua vez, vai procurar enriquecer seu conhecimento cada vez mais. Neste sentido,

[...] a curiosidade do estudante às vezes pode abalar a certeza do professor. Por isso é que ao limitar a curiosidade do aluno, a sua expressividade, o professor autoritário limita a sua também. Muitas vezes, por outro lado, a pergunta que o aluno, livre para fazê-la, faz sobre um tema, pode colocar ao professor um ângulo diferente, do qual lhe será possível aprofundar mais tarde uma reflexão mais crítica. (FREIRE; FAUNDEZ, 1985, p.23).

Sendo assim, quando o professor limita a curiosidade do aluno e sua expressividade, o professor limita a própria curiosidade e sua capacidade de buscar respostas. Se não houver questionamentos, inquietações e dúvidas dos alunos, a pedagogia será baseada na *Educação Bancária*.

Freire e Faundez (2017) defendem a ideia de que se deve aprender a perguntar, tanto o educador quanto o educando, muitas vezes esquecem do ato de perguntar. A educação bancária favorece esta maneira de ensinar, em que o professor traz com ele respostas prontas para pergunta pré-estabelecidas pelo mesmo e os alunos se acostumam com esta situação. Freire e Faundez (2017) propõem que antes de qualquer ensinamento, o professor deve ensinar a perguntar, pois é pela pergunta que se traça o caminho do ensino. Outro ponto em questão é que o professor não deve dar respostas absolutas, pois essas não abrem brecha para que haja curiosidade ou até mesmo itens para se descobrir, o que abre caminho para o professor trazer “tudo pronto”, inibindo no aluno e no professor, a capacidade de perguntar.

Freire (2007) diz que o educador autoritário tem mais medo da resposta do que, de fato, da pergunta, ou seja, tem receio pela resposta que deverá dar. Para o autor,

um educador que não castra a curiosidade do educando, que se insere no movimento interno do ato de conhecer, jamais desprezita pergunta alguma. Porque mesmo quando a pergunta para ele, possa parecer ingênua, mal formulada, nem sempre é para que a fez. Em tal caso, o papel do educador, longe de ser o de ironizar o educando, é ajudá-lo a refazer, fazendo melhor a pergunta (FREIRE; FAUNDEZ, 2007, p.60).

Cabe aqui a questão “O que significa perguntar?” ou então, “Por que perguntar?”. Freire e Faundez (2017) defendem que o início do conhecimento é *perguntar*, é somente a partir das perguntas que se deve sair em busca de respostas, e não o contrário. Outro ponto discutido pelos autores é que é necessário viver a pergunta, viver a curiosidade, apresentá-la ao aluno. Um papel importante do professor, em busca desse cenário de construção do conhecimento a partir da pergunta é de criar com os alunos o hábito de perguntar, de se

espantar com a curiosidade. Freire e Faundez (2017) evidenciam “A questão [...] não é a burocratização das perguntas, mas reconhecer a existência como um ato de perguntar.” (FREIRE; FAUNDEZ, 2017, p.74)

É, Portanto, papel do professor estar em constante transformação, desafiando-se a fornecer menos respostas e criar mais espaços em suas aulas para torná-las criativas e interativas (FREIRE; FAUNDEZ, 2017). Em nossa pesquisa a pergunta é fundamental e se faz presente tanto no professor, mas também no aluno, este que é sempre convidado a questionar e fazer indagações durante a aula e fora dela.

Foi objetivo desta seção a reflexão sobre o ato de perguntar, de indagar, de sentir-se inquieto frente à realidade. Julgamos importante a conscientização de que o conhecimento deve ser construído e não transferido, entender que professor e aluno estão no ambiente escolar para se complementarem é fundamental. Aprender e ensinar emana de ambas as partes com base no diálogo, nos debates e no protagonismo na construção do conhecimento, almejando o comprometimento com a construção cidadã, crítica e autônoma não só do aluno, mas também do professor.

## 1.4 JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Uma grande parte das aulas de Matemática, segundo Skovsmose (2000), acontecem sob a perspectiva do paradigma do exercício: o professor apresenta o conteúdo no quadro com o auxílio de livros ou slides e expõe algumas técnicas Matemáticas, posteriormente os alunos resolvem listas de exercícios que, em grande parte, são longas, e com variações do mesmo exercício. Quanto à relação professor e aluno, são aulas em que o professor ocupa a maior parte do tempo com explicação e exposição do conteúdo e outras em que o maior período da aula é ocupado com resolução de exercícios pelos alunos.

Entendemos que os jogos têm o potencial, além de se opor a alguns ambientes pautados sob o paradigma do exercício, podem, também, proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem no qual os mesmos possam ser os protagonistas na construção do seu próprio conhecimento.

O lúdico é apresentado por Huizinga (2007) como uma característica inerente ao ser humano, tão importante quanto o pensar (*homo sapiens*) e o fabricar (*homo faber*). Além disto, este autor apresenta o lúdico como uma característica do jogo. Este autor entende por jogo toda atividade que é [...] exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço,

segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria.” (HUIZINGA, 2007, p.33)

Este mesmo autor comenta que a “tensão”, um elemento do jogo, é essencial, pois por parte do aluno/jogador “Há um esforço para levar o jogo até o desenlace, o jogador quer que alguma coisa ‘vá’ ou ‘saia’, pretende ganhar” à custa do seu próprio esforço.” (HUIZINGA, 2007, p.14). Desta maneira, o jogo cria um ambiente na qual prazer, alegria e regras estão entrelaçados de forma a contribuir para o envolvimento e imersão do aluno, sendo assim, podemos valer-nos do envolvimento e da imersão do aluno a favor da prática pedagógica.

Macedo, Petty e Passos (2007) afirmam que existem maneiras de criar situações prazerosas para os alunos, até mesmo as atividades mais formais podem ser apresentadas e discutidas de forma atrativa para os educandos, visando à construção de conceitos e conhecimentos. O autor também acredita que os jogos podem ter o potencial de trazer para a sala de aula uma atividade prazerosa e ao mesmo tempo instigadora.

Mas afinal, por que trazer situações prazerosas para o ambiente escolar? Percebemos o professor não somente como aquele que ensina, mas, também, aquele que proporciona condições aos alunos para que construam o seu próprio conhecimento. Anteriormente, na seção 1.1, apresentamos a noção de *ambientes de aprendizagem*, termo cunhado por Skovsmose (2000) para designar as condições nas quais os alunos são convidados para participar e desenvolverem atividades. Evidenciamos nesta mesma seção que este convite pode ou não ser aceito pelos mesmos. Visto isso, é inevitável a comparação entre o ato de estudar e o ato de jogar para o qual também é feito um convite. Da mesma forma que jogamos um jogo mais de uma vez por nos proporcionar momentos de prazer, a sala de aula e a construção do conhecimento tornam-se algo confortável e desejável, quando são prazerosas.

O ato de jogar exige do aluno a interpretação de movimentos, a análise das informações e a tomada de decisões. Ao “desafiar” os alunos no sentido de transladar o aluno de um ambiente de aprendizagem pautado pelo paradigma do exercício para um ambiente de aprendizagem pautado pelo paradigma de cenários para investigação no sentido de Skovsmose (2000); o aluno pode não se sentir desafiado pelo professor, mas pode se desafiar e ser o protagonista do seu próprio conhecimento. Macedo, Petty e Passos (2007) afirmam que os jogos têm o potencial de mostrar aos jogadores que são capazes de adquirir informações, e também de aprender conteúdos, que muitas vezes, são complexos, de forma simples e divertida, além disto, Falkembach (2007) afirma que utilizar jogos como suporte para a

construção do conhecimento aumenta a motivação do aluno e pode ser uma ferramenta para a valorização do trabalho em grupo.

Outro ponto a ser discutido é que desde criança os alunos estão inseridos em ambientes de jogos, estão acostumados a jogar em casa, na casa dos colegas, em ambientes em que sintam prazer, este é um fato importante para a aprendizagem do aluno. Sentir-se bem no ambiente escolar é fundamental para um melhor desempenho e os jogos contribuem para que o ambiente seja mais acolhedor e menos autoritário, despertando o interesse dos alunos pelas atividades propostas. Entretanto, Grando (2001) afirma que os pais tendem a interpretar as atividades com jogos como recompensas por bom comportamento dos alunos, indo na contramão de seu real objetivo, que é a construção da capacidade de tomar decisões, investigar e agir com base nos dados coletados pelos jogadores. Este pensamento converge com o que Huizinga (2007) diz sobre a seriedade do jogo, “Em nossa maneira de pensar, o jogo é diametralmente oposto à seriedade. À primeira vista, esta oposição parece tão irreduzível a outras categorias como o próprio conceito de jogo.” (HUIZINGA, 2007, p.8), o ato de brincar, a falta de seriedade é um fator que, muitas vezes, não é visto como algo que auxilia.

Evidenciamos que jogar em sala de aula pode ser pensado de forma a contribuir com o desenvolvimento do aluno, bem como com a construção do conhecimento, não só como uma proposta de fugir de uma aula expositiva. Além disto, para que uma atividade que envolva jogos seja proveitosa, o professor tem a função de mediar os alunos de forma que eles criem suas próprias estratégias, tomem decisões e façam as ações que julgam importantes e/ou necessárias.

Grando (2001) considera que os jogos são facilitadores na aprendizagem de estruturas matemáticas, entendendo que os mesmos podem auxiliar os alunos a desenvolverem capacidades de pensar, analisar e compreender conceitos matemáticos, muitas vezes complexos. Além disto, consideramos os jogos como importantes ferramentas para a elaboração de hipóteses, para então testá-las e comprová-las.

Destacamos o fato de que o educador deve ser criterioso na escolha e na aplicação do jogo, de modo a não tornar a atividade em apenas uma proposta para fugir de uma aula expositiva, o que pode fazer com que os alunos percam o interesse pelo jogo e pela proposta de aula.

Outro ponto a ser destacado é que os alunos podem vir a tomar decisões erradas ou realizar estratégias inadequadas. Grando (2001) afirma que as constatações, como análise do erro e das estratégias devem ser discutidas e o professor só deve intervir no jogo se houver a

solicitação, pois o fato do aluno “enxergar” o próprio erro faz parte do jogo e, muitas vezes, da proposta. Entretanto a intervenção do professor é permitida quando o foco do aluno está se deslocando para fora do contexto, ou quando a intervenção permite a elevação da construção do conhecimento do aluno.

Autores como Macedo, Petty e Passos (2007) defendem que o professor não deve disponibilizar a resposta correta, mas ser o mediador da situação, fazendo questionamentos que levem os alunos a fazerem reflexões sobre as decisões tomadas e/ou estratégias adotadas pelos mesmos.

Neste trabalho utilizamos um jogo de tabuleiro como suporte à construção de registro/descrição/modelo, objetivando a tomada de decisões, análise de estratégias e compreensão do papel da Probabilidade no tocante ao jogo, mas também no cotidiano do aluno. Além da contribuição dos jogos no que se refere à aprendizagem, Kodama e Silva (2004) comentam que o uso de jogos em sala de aula contribui para a alteração da postura do professor, “pois este muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador e incentivador de aprendizagem, do processo de construção do saber por parte do aluno” (KODAMA; SILVA, 2004, p.5).

## **1.5 ESTADO DO CONHECIMENTO**

O Estado do Conhecimento (EC) permite o mapeamento das produções científicas de um determinado tema. Para Morosini (2015) o Estado do Conhecimento é “identificação, registro, categorização que levem à reflexão e síntese sobre a produção científica de uma determinada área, em um determinado espaço de tempo, congregando periódicos, teses, dissertações e livros sobre uma temática específica.” (MOROSINI, 2015, p.102).

Neste sentido, a categorização e análise do que já foi produzido em um determinado campo de pesquisa, em especial no país do pesquisador, é importante para a validação e fundamentação do que está sendo produzido por este. Além disto, as análises possibilitam ênfases em temas abordados nas pesquisas, os referenciais teóricos, as relações entre o pesquisador e a prática pedagógica e as contribuições da pesquisa para a prática pedagógica. Esses estudos permitem ao pesquisador ter uma visão geral do que vem sendo produzido na área e permite ao leitor ficar inteirado sobre evolução do tema da pesquisa em um âmbito nacional, ou até mesmo global.

A coleta de informações para o EC foi realizada por meio do catálogo de Teses & Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), em um período de tempo entre 2012 e 2018. Realizamos cinco buscas alterando as palavras-chaves, os filtros de tempo, grandes áreas do conhecimento e áreas do conhecimento.

A primeira busca foi feita com a palavra “modelo” e somente com filtro de tempo, encontramos 165.245 resultados em 557 instituições diferentes, foram analisadas as cem primeiras teses e dissertações desta busca. Dentre os cem primeiros resultados, nenhum pertencia às áreas de conhecimento de (ensino; ensino de matemática; educação; educação Matemática), encontramos apenas uma tese de doutorado em Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF) com título “Controle Ótimo de Modelos Matemáticos para radioterapia de Gliomas”, Os cem primeiros resultados tratavam apenas de modelos relacionados a aplicações físicas.

A segunda busca feita com as palavras-chave “Modelo Ensino Matemática” e somente com os filtros de tempo, encontramos 103.932 em 496 instituições diferentes e analisamos as duzentas primeiras teses e dissertações. Dentre as pesquisas analisadas, apenas duas tinham relações com a presente dissertação, a primeira era a tese de doutorado intitulada como “A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético” da Universidade Estadual Paulista, do autor Rodrigo Dalla Vecchia. A segunda pesquisa relacionada com a presente dissertação é intitulada como “Saindo da zona de conforto: Investigando as ações e tomadas de decisões de alunos - Consumidores dos 8º ano do EF em situações-problema financeiro - econômicos” da Universidade Federal de Juiz de Fora, da autora Luciana Cordeiro Dias.

Em sua Tese de Doutorado, Dalla Vecchia (2012) investiga a Modelagem Matemática no mundo cibernético, entendendo por mundo cibernético qualquer ambiente produzido por tecnologias. O autor constrói uma visão de Modelagem Matemática que permite compreender as ações dos sujeitos quando estão construindo modelos no mundo cibernético. O estudo é desenvolvido sob uma perspectiva qualitativa, sendo resultado do entrelaçamento teórico e também dos dados produzidos/coletados no decorrer da pesquisa. Nesta Tese, o autor propõe a construção de jogos eletrônicos. Os resultados da pesquisa permitem entendermos a Modelagem Matemática de modo fluido e em constante movimento, tal fluidez se mostra principalmente por meio do entrelaçamento entre quatro aspectos: objetivo pedagógico, modelos/linguagem, problema e realidade.

Na dissertação de Dias (2015), a autora tem como objetivo analisar as ações e tomadas de decisão dos alunos de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal. Utilizando

como referenciais teóricos Skovsmose (2000, 2013) no que se refere a Cenários para Investigação e a importância de desenvolver ambientes críticos e Lins (1993, 1994, 1997, 1999, 2004) no que tange ao Modelo dos Campos Semânticos. A autora enfatiza que o objetivo da pesquisa não foi ensinar fórmulas para a tomada de decisão, mas contribuir para a reflexão dos alunos diante das situações-problema que os mesmos encontram no seu cotidiano.

A terceira busca foi feita com as palavras-chaves “Modelo Jogo Registro” utilizando apenas o filtro de tempo, encontramos 93.605 resultados em 364 instituições diferentes, analisamos as cem primeiras teses e dissertações. Dentre as cem primeiras pesquisas, apenas uma era relacionada com Ensino de Matemática, a dissertação de mestrado intitulada como “Jogos e registros orais e gráficos: desenvolvimento da criança no campo conceitual aditivo” da Universidade de Brasília e da autora Keila Cristina de Araújo Reis.

A pesquisa de Reis (2017) analisa, por meio de situações de jogos, os registros orais e gráficos de crianças do 3º ano do Ensino Fundamental. O jogo é apresentado como um meio de provocar a ludicidade nos sujeitos e, também de ser o mediador da aprendizagem Matemática. A pesquisa é classificada como qualitativa seguindo os procedimentos de Estudo de Caso. Os resultados apontaram diferenças expressivas na maneira como a pesquisa refletiu sobre cada sujeito. A aprendizagem foi construída por meio das interações sociais e pelas experiências com o objeto de estudo. As análises dos registros orais e gráficos demonstraram as construções de cada aluno, apontando que os registros são importantes recursos de comunicação e representação semiótica. A pesquisa apresenta a importância da conexão entre jogo e registro para a aprendizagem, evidenciando a necessidade de que a matemática promova uma experiência lúdica para os sujeitos que aprendem.

A quarta busca foi feita com as palavras-chave “Modelo Jogo Partida Registro” sem filtros e não havia pesquisa relacionada com essas palavras.

A quinta busca foi feita com as palavras-chave “Modelo Registro Descrição” com o filtro do tempo e com o filtro de Áreas do Conhecimento de Educação, Ensino, Matemática e Ensino de Matemática e Ciências, encontramos 1.671 teses e dissertações, analisamos os duzentos primeiros trabalhos e nenhum destes tinha relação com a presente dissertação no que se refere aos objetivos gerais e específicos ou questão de pesquisa.

As dissertações e teses analisadas no banco de dados da CAPES, quando vinculadas com as palavras-chaves; Modelo, Registro, Jogo, Ensino, Matemática e Partida; não tinham relações próximas com a presente dissertação, com exceção das pesquisas já mencionadas anteriormente. Os trabalhos que abordavam sobre “modelos” estavam relacionados com

modelos físicos estabelecidos pela Matemática Aplicada e não possuíam relações com o Ensino ou Educação Matemática. A maioria dos trabalhos que abordavam “jogos” tinham relações com o Ensino de Educação Física, ou então o uso de jogos no Ensino de modo mais geral. Os trabalhos que abordavam “registro” tratavam de registros semióticos e não tinham vínculos com jogos. No que se refere a “partida”, as dissertações que encontramos com essa palavra tratavam de Ensino de Educação Física, nenhuma pesquisa na Área de Conhecimento de Ensino de Matemática. Organizamos os trabalhos analisados no quadro 3.

Quadro 3: Relação de Dissertações e Teses que se assemelham com a presente pesquisa.

Palavras-chave	Título/Autor	Tipo/Instituição	Objetivos	Conclusões
Modelo Ensino Matemática	A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético ----- Rodrigo Dalla Vecchia	Doutorado ----- Universidade Estadual Paulista (UNESP)	Compreender o processo de Modelagem Matemática na realidade do mundo cibernético em um âmbito educacional no que se refere à construção de jogos eletrônicos.	O autor conclui que a Modelagem Matemática pode ser compreendida como um processo não necessariamente linear e se mostra como “um processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos sustentados por ideias matemáticas que se referem e visam encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade.” (DALLA VECCHIA, 2012, p.218)
Modelo Ensino Matemática	Saindo da zona de conforto: Investigando as ações e tomadas de decisões de alunos - Consumidores dos 8º ano do EF em situações-problema financeiro – econômicos ----- Luciana Cordeiro Dias	Dissertação ----- Universidade Federal de Juiz de Fora (UFF)	Analisar as ações e tomadas de decisões dos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da periferia da rede municipal de Juiz de Fora.	Ao longo do prática, os alunos se mostraram acessíveis às propostas, surpresos com as descobertas e atentos às novas situações relacionadas à Educação Financeira. A autora defende que este tema deve ser parte do currículo escolar, para que de forma contínua, os alunos se deparem com situações-problema que estimulem sua rede de conexões em momento oportuno, seja natural, sem angústias, sua tomada de decisão

Modelo Jogo Registro	Jogos e registros orais e gráficos: desenvolviment o da criança no campo conceitual aditivo ----- Keila Cristina de Araújo Reis	Dissertação ----- Universidade de Brasília (UNB)	Analisar, a partir de situações de jogos, os registros orais e gráficos de crianças do 3º ano do Ensino Fundamental no Campo Aditivo.	Os resultados da pesquisa apontaram diferenças significativas na maneira como a pesquisa refletiu sobre cada sujeito, constituindo aprendizagem pelas interações sociais e pelas experiências com o objeto matemático. As análises dos registros orais e gráficos demonstram as construções intrínsecas de cada um e os caminhos que construíram para construção dos conceitos.
----------------------	---	--	---	---

Fonte: Arquivos do autor.

Deste modo, julgamos que, alicerçados pela pesquisa de EC, a presente dissertação diverge em diferentes aspectos das pesquisas que foram realizadas no cenário nacional no que se refere à Modelagem Matemática, Modelos e Pedagogia da Pergunta no período de 2012 a 2018, especialmente aspectos relacionados ao campo. Ainda assim, é possível notar que há autores realizando pesquisas que se assemelham em alguns pontos desta dissertação, um exemplo é a pesquisa de Dias no qual os alunos utilizam a Matemática como suporte à tomada de decisões, entretanto, não estão presentes em sua pesquisa aspectos relacionados a jogos. Destacamos a relevância do mapeamento que foi possível ser feito acerca das pesquisas que estão sendo realizadas, assim possibilitando a validação deste trabalho quanto a sua originalidade.

## 1.6 UM BREVE RESUMO DE PROBABILIDADE

Nesta seção abordaremos conceitos de Probabilidade que serão explorados no decorrer desta pesquisa, são eles: Eventos Aleatórios e Determinísticos, a definição de Probabilidade, Probabilidade Condicional, Espaço Amostral e Eventos Equiprováveis. Estes conceitos foram abordados em aula com os alunos por meio de questões formuladas por eles em um ambiente de jogos, a partir de dúvidas no tocante às estratégias adotadas pelos alunos no jogo em questão nesta dissertação.

Ao consultar um dicionário encontramos as seguintes definições para Probabilidade no dicionário Ferreira (1999):

1. Qualidade de provável.
2. Motivo ou indício que deixa presumir a verdade ou a possibilidade dum fato.
3. *Mat.* Número positivo e menor que a unidade, que se associa a um evento aleatório, e que se mede pela frequência relativa de sua ocorrência numa longa sucessão de eventos.

A palavra probabilidade está presente em nosso dia-a-dia. Quando observamos o céu nublado e afirmamos que há grande probabilidade de chover, ao andar por uma rua escura pensa-se que a probabilidade é grande de ser furtado. Uma mulher descobre que está grávida e a família toda faz “apostas” acerca do sexo do bebê. A palavra “Probabilidade” e palavras que pertencem ao universo deste tema como “apostas”, “provável”, “chance”, entre outras palavras que são mencionadas diariamente por todos nós. Afinal, o que elas querem dizer? O que significam?

Outro termo corriqueiro é a aleatoriedade, eventos aleatórios estão presentes diariamente em nossas vidas, desde o lançamento dos dados, até o aplicativo de músicas do seu celular.

Além dos eventos aleatórios, existem os eventos determinísticos, um evento é determinístico quando o evento é submetido a repetições em condições semelhantes e esse conduz a resultados idênticos. Um evento é aleatório quando submetemos repetidamente um evento a condições semelhantes e esse produz resultados diferentes. Os fenômenos aleatórios estão mais próximos de nós quanto imaginamos, são perguntas frequentes: Qual é a minha chance de ganhar na mega sena? Qual é a chance de eu acertar o resultado de um lançamento de uma moeda?

A Probabilidade, segundo Morgado *et al.* (2006), é a área da Matemática que cria, desenvolve e estuda modelos que podem ser utilizados para estudar fenômenos aleatórios. O modelo mencionado por Morgado varia em sua complexidade, dependendo do fenômeno estudado, porém “todos esses modelos têm ingredientes básicos comuns” (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 2006, p. 128).

Em um experimento aleatório, o espaço amostral são todas as possibilidades de eventos do experimento. um exemplo é o lançamento de um dado, temos como espaço amostral

(denominado corriqueiramente por  $\Omega$  “ômega”)  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ , além disto, denotamos a quantidade de elementos por  $\#(\Omega) = 6$ .

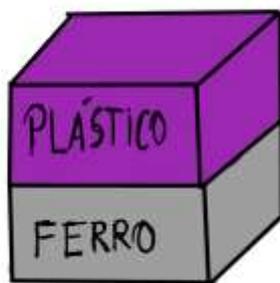
Afinal, muito se ouve: Qual a probabilidade “disto” acontecer? Qual é a probabilidade de eu ser sorteado em um jogo? Muito se fala no termo probabilidade, mas o que é e qual é a sua definição? Em termos informais, a probabilidade de um evento A acontecer é igual a ao “que eu quero que aconteça” sobre “todas as possibilidades”, para facilitar o entendimento, podemos imaginar um lançamento de um dado de vinte faces, nesta situação temos um espaço amostral com um total de vinte elementos  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ , mas ao lançar um dado de vinte lados, qual é a chance de obtermos um número primo? Neste caso, em nosso espaço amostral há oito números primos, que são  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ , portanto a probabilidade de obter um número primo em um lançamento de um dado de vinte lados é igual a  $\frac{8}{20}$ .

Outra maneira de definir a probabilidade de um evento ocorrer é por meio do quociente  $\frac{\text{númerodecasosfavoráveis}}{\text{númerodecasospossíveis}}$ , segundo Morgado *et al.* (2006), há consequências imediatas desta definição, são propriedades:

- a) Para todo evento A,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;
- b)  $P(\Omega) = 1$ ;
- c)  $P(\phi) = 0$ ;
- d) Se  $A \cap B = \phi$ , então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Em alguns casos, o experimento possui um espaço amostral chamado de equiprovável, que é quando todos os eventos unitários têm a mesma chance de ocorrer. É importante destacar que este fato nem sempre ocorre. Um exemplo seria um cubo formado por dois paralelepípedos retângulos colados, um de plástico e outro de ferro, sabendo que o ferro é mais pesado que o plástico, é mais provável que a face de ferro caia para baixo, o que torna o espaço amostral deste experimento não equiprovável.

Figura 2: Ilustração de um dado não equiprovável.



Fonte: Arquivos do autor.

Quando se tem um espaço amostral equiprovável, por exemplo  $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$ , a probabilidade de cada evento ocorrer de forma separada é a mesma, sendo assim a probabilidade de  $P_1$  ocorrer é a mesma de  $P_2$  ocorrer e assim por diante, portanto  $P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n$ , pela definição de Probabilidade (b) temos que  $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$ .

Esta seção tem o objetivo de esclarecer ao leitor alguns conceitos que foram discutidos pelos alunos com o auxílio do jogo e do ambiente de aprendizagem pautado pelo jogo e pela modelagem matemática. Evidenciamos que, em grande parte, os conceitos discutidos surgiram por parte dos alunos, partindo das estratégias adotadas pelos mesmos no jogo e pelas críticas às estratégias dos demais colegas, foram estas que abriram “caminhos” para que os alunos questionassem a Matemática envolvida no jogo, e desta forma possibilitando o diálogo e a construção de conceitos de Probabilidade.

## 2 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

O presente capítulo tem como objetivo explicitar a metodologia de pesquisa que norteia a investigação no tocante ao estudo da Modelagem Matemática, às análises dos modelos criados pelos alunos, a análise feita pelos educandos dos modelos de seus colegas e, também, o comportamento dos alunos quando são convidados e participam de um Ambiente de Aprendizagem de Modelagem Matemática e Jogos. A questão diretriz de nossa pesquisa refere-se à crítica dos alunos às estratégias adotadas pelos seus colegas, isto é: **Como as impressões dos alunos acerca dos registros feitos pelos mesmos por meio da descrição das partidas de um jogo criado pelo autor podem contribuir para a construção de conceitos de Probabilidade?**

A questão de pesquisa foi concebida por meio de diálogos com a orientadora desta dissertação enquanto conversávamos sobre o jogo criado pelo autor e seu orientador enquanto aluno da graduação. Durante algumas conversas com a orientadora desta dissertação surgiu a dúvida de como os alunos poderiam se beneficiar da crítica aos registros dos colegas quando os mesmos são convidados a descrever as estratégias, os movimentos e as coletas de pontos do jogo em questão.

De modo a responder a questão que direciona esta pesquisa, serão abordados neste capítulo os objetivos gerais e específicos, a metodologia de pesquisa apontando qual perspectiva de coleta/produção de dados usamos, como foi feita a análise destes dados, o que levamos em consideração para isso e a caracterização do ambiente que a coleta/produção e aplicação do jogo foi realizada.

## **2.1 OBJETIVOS DA PESQUISA**

A presente pesquisa tem como objetivo investigar as contribuições das análises dos alunos aos registros criados pelos seus colegas utilizando como objeto de estudo e investigação um jogo inédito. É também um objetivo desta pesquisa analisar quais são os potenciais do jogo aliado aos registros, desde a construção até a análise crítica destes, no tocante a construção do conceito de Probabilidade em uma turma de Ensino Médio.

Objetivos específicos:

- Identificar conceitos de Matemática no jogo criado pelo autor.
- Identificar evidências de pensamento crítico nas concepções e estratégias utilizadas pelos estudantes no decorrer do jogo, assim como a autonomia dos mesmos.
- Investigar o processo de construção do registro e a análise dos alunos no tocante às estratégias adotadas pelos seus adversários.
- Investigar os registros construídos pelos alunos a partir da descrição das partidas de um jogo com base nas definições de modelos.

## 2.2 METODOLOGIA DE PESQUISA

Este estudo se caracteriza como pesquisa qualitativa em virtude da forma como será realizada a coleta/produção e análise dos dados e também da problemática na qual se desenvolve a pesquisa. Segundo Bogdan & Biklen (1994, p.16), a investigação qualitativa agrupa diversas estratégias de pesquisa e as questões são formuladas com objetivo de investigar fenômenos em toda a sua complexidade, além disso, o foco principal é a compreensão de comportamentos a partir das perspectivas dos sujeitos da investigação.

Para Ludke & André (2017) o significado que as pessoas dão às coisas e a sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador,

“Nesses estudos há sempre uma tentativa de capturar a “perspectiva dos participantes”, isto é, a maneira como os informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas. Ao considerar os diferentes pontos de vista dos participantes, os estudos qualitativos permitem iluminar o dinamismo interno das situações, geralmente inacessível ao observador externo.” (LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A, 2017, p.14)

Observar a reação dos alunos enquanto os mesmos realizam as atividades propostas permite ao professor uma análise e uma possível alteração em seu planejamento baseado no comportamento dos alunos, como expressões físicas, comunicação verbal com os colegas e com o professor, visando compreender a perspectiva do aluno quanto ao desenvolvimento das atividades. Assim como os autores comentam, devemos considerar os pontos de vista dos participantes (LUDKE; ANDRÉ, 2017), tal ato favorece tanto os educandos quanto o(a) educador(a), objetivando o dinamismo das atividades, em nossa pesquisa, o ato de jogar e investigar. Para Bicudo (2006, p.107), a pesquisa qualitativa busca “[...] atingir aspectos do humano sem passar pelos crivos da mensuração, sem partir para métodos previamente definidos e, portanto, sem ficar preso a quantificadores e aos cálculos recorrentes”. Será, portanto, um papel do pesquisador, olhar para os acontecimentos e dados coletados/produzidos nesta pesquisa, com uma perspectiva interpretativa e reflexiva.

Esta pesquisa tem um caráter qualitativo e muito próximo à pesquisa experimental que, para Gil (2007), consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciar o objeto de pesquisa, definir algumas formas de controle e de

observação dos efeitos que as variáveis podem produzir no objeto. Portanto, almejamos identificar como os alunos (objeto) eram influenciados pelo jogo (variável), isto é, como os alunos constroem os registros a partir do jogo. Na coleta/produção de dados foram utilizados o caderno de pesquisa do professor, vídeos, áudios e os materiais dos alunos, anotações, cálculos e registros.

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) prevê na Resolução 466/12 algumas diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos, esta resolução incorpora, sob a ótica do indivíduo e das coletividades, a autonomia, não maleficência, beneficência, justiça e equidade e almeja assegurar direitos e deveres que dizem respeito aos participantes, à comunidade científica e ao estado.

Destacamos os aspectos éticos desta pesquisa, no presente trabalho o aluno não teve envolvimento com nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade a contribuição para o sucesso da presente dissertação. Por meio de um termo de consentimento os pais e responsáveis ficaram cientes que os usos das informações fornecidas pelos(as) alunos(as) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.).

## **2.3 CARACTERIZAÇÃO DO AMBIENTE**

A coleta de dados foi desenvolvida no primeiro semestre de 2018, no Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia do Rio Grande do Sul - Câmpus Osório (IFRS-Câmpus Osório). As tarefas foram aplicadas em turmas de primeiros anos, pois tomamos como um pré-requisito para a inscrição dos alunos que os mesmos não tivessem estudado Probabilidade. O IFRS-Câmpus Osório abrange tanto a educação básica como também profissional e superior. Destacamos que a forma como a instituição articula o ensino, pesquisa e extensão foi um influenciador na escolha do local para realizar a pesquisa, de forma que os alunos se comprometem com a flexibilidade do tempo e do espaço escolar.

Tínhamos a disponibilidade de quinze a vinte vagas. Visto que o IFRS-Câmpus Osório atende quatro turmas de primeiros anos, disponibilizamos cinco vagas por turma. O convite para a oficina foi realizado no turno normal dos alunos. Havia mais alunos do que vagas, portanto se fez necessário realizar sorteios em cada turma. No momento da inscrição atribuímos um número para cada aluno, num recipiente colocamos os números e sorteamos cinco em cada turma.

As oficinas ocorreram no turno inverso em quatro encontros de duas horas cada, totalizando oito horas que aconteceram nos dias 22/06, 26/06, 29/06, 03/07, nas terças e sextas-feiras no decorrer de duas semanas.

## 2.5 O JOGO

O jogo em questão foi desenvolvido pelo autor enquanto acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática em conjunto com seu orientador da graduação, durante a realização do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), o qual tinha como objetivo analisar uma sequência de atividades com jogos com vistas para a construção de conceitos de Probabilidade. No desenvolvimento da pesquisa de Mestrado, este jogo sofreu mudanças de regras e de estética.

Uma alteração que julgamos importante foi a inclusão da possibilidade de retirar pontos do oponente, tal alteração foi sugerida por um aluno da graduação em Licenciatura de Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em uma aplicação piloto com estudantes da Licenciatura em matemática, na disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática III ministrada pela orientadora desta dissertação. Abaixo explicamos o jogo e todas as suas variantes, apresentando o tabuleiro que foi utilizado na pesquisa.

### Manual do jogo

**Número de jogadores:** Dois jogadores, podendo estender a grupos.

**Material:** Um tabuleiro por jogador e dois dados de seis faces, numeradas de 1 a 6. Um dos dados será denominado “**Dado das Condições**”, que irá indicar quais resultados o jogador deve obter.

Figura 3: Dado das condições utilizado no jogo em questão.



Fonte: Arquivos do autor.

**Objetivo do jogo:** Mover seu tóten até a última casa do tabuleiro (casa número 12 na figura 4) de forma a somar pelo menos cinco pontos de força (raio). Sendo que existem quatro tipos de pontos, cada uma com um valor diferente.

#### Nível 1 (Base):

O nível um abrange somente uma casa (1), nesse nível para gerar pontos de força é necessário apenas um dado, os pontos de força gerados nesse nível valem **um ponto**;

#### Nível 2:

O nível dois abrange as casas 2,3,4,5 e 6, nesse nível serão utilizados dois dados para fazer os lançamentos. Os pontos de força gerados nesse nível valem **dois pontos**;

#### Nível 3:

O nível três abrange as casas 7,8,9,10 e 11, nesse nível serão necessários dois dados para fazer os lançamentos, os pontos de força gerados nesse nível valem **três pontos**;

#### Nível 4: :

O nível quatro é a linha de chegada, a casa 12. Você não irá mais mover, mas após atingir esse nível você poderá tentar gerar pontos de força que valem **quatro pontos**;

**Início do jogo:** Cada jogador inicia com um tóten na casa um, com zero pontos de força.

**Movimentação:** A movimentação nos quatro níveis do tabuleiro ocorre de acordo com as orientações indicadas no tabuleiro, ou seja, existem regras de movimentação para cada nível.

Exemplo:

O jogador pretende mover o tóten da base (casa 1) para a **casa 3**. Ele joga o **Dado das Condições** obtém “menor ou igual”. O jogador deve lançar um dado e obter um resultado **menor ou igual a 3**, para conseguir se mover para a **casa 3**.

Obs.: Nos níveis seguintes o jogador deve lançar o dado para verificar qual a condição e usar **dois dados** ao tentar se mover.

**Gerando pontos de força:** É possível produzir novos pontos de força ao longo do jogo, e eles podem ser produzidos em diferentes locais, tendo assim valores diferentes de acordo com o nível em que estão localizadas, ou seja, podem valer 1, 2, 3 ou 4 pontos. As unidades podem ser produzidas nas casas ilustradas do tabuleiro, números 1, 2, 4, 6, 8, 10 e 12. Porém, só é possível gerar pontos uma vez por casa, isto é, se o jogador já gerou pontos na casa número 6, então ele não poderá gerar pontos nesta casa novamente, entretanto esta mesma casa pode ser usada para movimentação se for opção do jogador

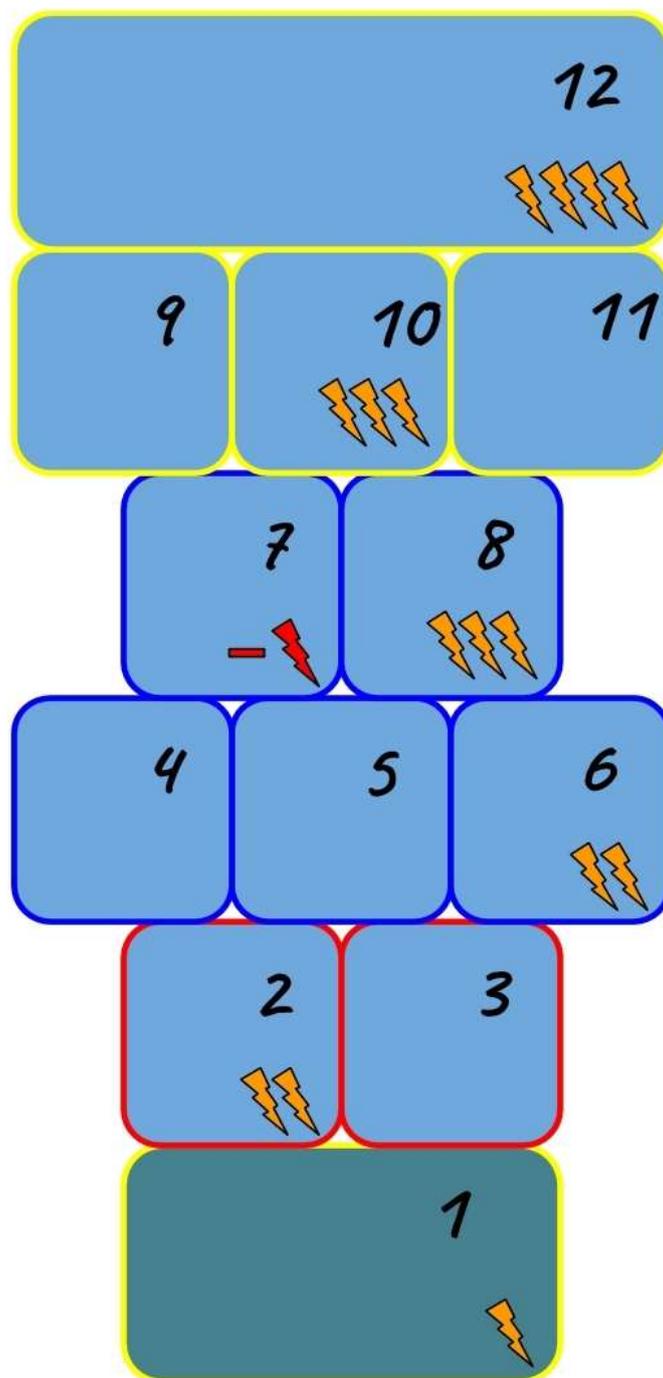
Em todos os níveis, para gerar os pontos de força, é necessário que o jogador consiga obter o número da casa como a soma dos dois dados que serão lançados, com a exceção da primeira fase, em que o jogador lançará apenas um dado.

**Retirar pontos de força:** É possível retirar um, e somente um, ponto de força do adversário na **casa 7**, para isto, é necessário que o jogador já posicionado na **casa 7** lance os dois dados e obtenha a soma sete.

**Fim do Jogo:** O jogo termina quando ao final de uma rodada algum dos jogadores tiver ao menos cinco pontos na **casa 12**. No caso de mais de um jogador alcançar este objetivo no fim de uma mesma rodada, o que tiver mais pontos será o vencedor, caso contrário, os jogadores empatam.

## Tabuleiro

Figura 4: Tabuleiro utilizado no jogo.



Fonte: Arquivos do autor.

### **3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES**

Neste capítulo apresentamos a descrição dos encontros, os seus objetivos, as expectativas e a análise dos dados que foram coletados/produzidos durante os quatro encontros realizados com a turma de primeiro ano no Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia do Rio Grande do Sul - Câmpus Osório (IFRS-Câmpus Osório). Evidenciamos que todas as referências feitas aos alunos neste capítulo e também todas as imagens dos registros, tabuleiros e transcrições de áudios foram autorizados pelos responsáveis dos alunos de acordo com o termo de consentimento que está disponível nos anexos desta dissertação.

No decorrer da escrita foi necessário mencionar alguns alunos que foram fundamentais para a pesquisa, para isto, mencionamo-os utilizando letras maiúsculas, facilitando a referência dentro do texto. Objetivando uma leitura fluida, também fizemos algumas transcrições de conversas entre eles. As transcrições de comentários feitos pelos educandos não foram totalmente fiéis ao áudio, optamos por ser deste modo como uma forma de evitar o constrangimento dos discentes, sendo assim, não transcrevemos erros de pronúncia ou de ortografia, exceto nas imagens recortadas dos modelos e questões dos estudantes.

#### **3.1 PRIMEIRO ENCONTRO - OBJETIVOS, EXPECTATIVAS E ANÁLISES**

Destacamos a importância do primeiro encontro, pois é nele que foi feito o convite do professor aos alunos para o desenvolvimento de um cenário para investigação, segundo Skovsmose (2014) “Podemos convidar, mas nunca obrigar, os alunos a participarem das atividades em torno de um cenário para investigação. [...]” (SKOVSMOSE, 2014, p.46). Desta forma, neste primeiro encontro foram colocados aos alunos os objetivos da oficina em geral, e posteriormente explicado os objetivos do primeiro encontro.

Eram objetivos deste encontro a adaptação e o reconhecimento do jogo tratado nesta dissertação, bem como a formulação de questões no que se refere a “melhor” estratégia ou estratégia ideal e acerca das regras do jogo. Julgamos que o reconhecimento e a adaptação ao

jogo no que se refere as regras e rejogabilidade<sup>1</sup> são importantes para que o aluno possa usufruir de todo o potencial do jogo, desta forma possibilitando mais informações importantes para a construção das estratégias no jogo.

Entre os objetivos do primeiro encontro, o principal era o aceite dos alunos em participar da proposta com vistas a desencadear um cenário para investigação. Desejávamos, então, despertar o envolvimento dos alunos pelo jogo, assim como pela proposta da oficina.

Este encontro foi planejado para durar dois períodos de quarenta e cinco minutos e ocorreu de forma dialógica com atividades em duplas. Foram utilizados como recurso didático o quadro branco e o jogo composto por dois tabuleiros e três dados (dois dados convencionais e um dado customizado por duplas).

Destacamos o fato de ter um aluno portador de deficiência visual no grupo. Este aluno tem um papel importante em nossa pesquisa, portanto sempre que nos referirmos a ele, usaremos a letra A, por exemplo: “O aluno A sugeriu a utilização [...]”.

Iniciamos o encontro convidando os alunos a se disporem em duplas e um trio, pois neste primeiro encontro contávamos com a presença de um número ímpar de alunos. Após decidirmos a composição da sala, iniciamos a explicação do jogo esclarecendo o objetivo de vitória e as regras. Foram disponibilizados dois tabuleiros e três dados por duplas e uma folha em branco para cada aluno, solicitamos aos mesmos que registrassem qualquer tipo de dúvida no que se refere às regras do jogo ou estratégias do jogo, utilizamos como exemplo a questão “Preciso coletar pontos na casa 1?”. O registro das dúvidas é feito ao mesmo tempo que os alunos jogam, portanto, grande parte das questões advém de dúvidas dos alunos acerca de suas próprias estratégias de jogo. Evidenciamos que esta etapa tem uma grande importância em nossa pesquisa, pois no último encontro serão retomadas estas questões.

A explicação foi dialógica, expondo no quadro o tabuleiro, as regras do jogo e também o dado das condições. Neste momento o aluno B comentou “*O asterisco deixa o jogo interessante, nos faz refletir sobre a escolha que devemos adotar.*”.

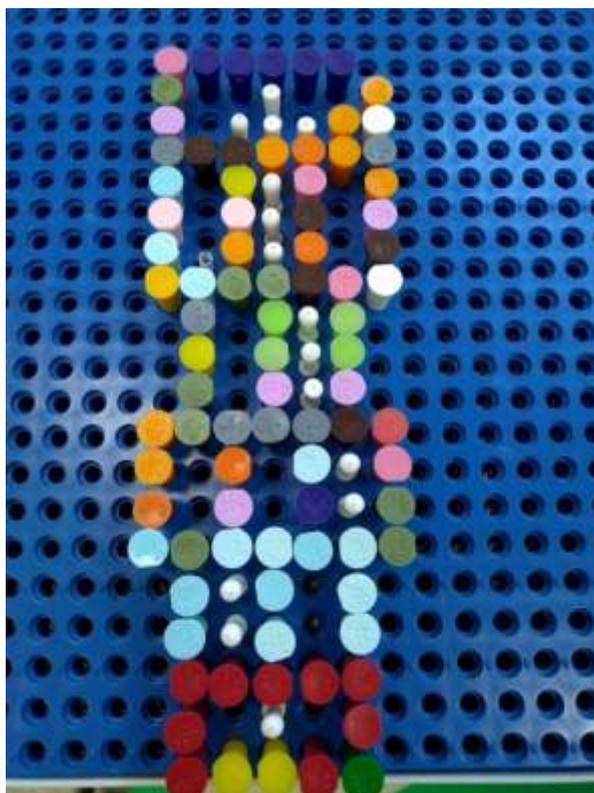
Após a explicação, fizemos o convite aos alunos para jogarem uma primeira vez de forma a conhecerem o jogo. Enquanto os alunos jogavam, usamos este tempo para explicar o jogo para o aluno A, pois o mesmo sugeriu que explicássemos para ele desta forma. Evidenciamos o fato que não sabíamos que tínhamos em nossa turma um aluno com deficiência

---

<sup>1</sup> Rejogabilidade é uma característica de um jogo que permite ser jogado mais de uma vez sem que haja repetições de movimentos e estratégias, ou seja, tenha muitas possibilidades de ser jogado.

visual, portanto não tínhamos material adaptado, para contornar esta situação o mesmo sugeriu utilizar o multiplano<sup>2</sup> da escola para construir o tabuleiro, a representação das casas com coleta de pontos foi feita com os pinos brancos e o número das casas foi memorizado pelo aluno A. O seu adversário e colega da mesma turma se comprometeu em informar os valores dos dados numéricos e o dado das condições, e juntos montaram o tabuleiro no multiplano como mostra a figura 5.

figura 5: Tabuleiro adaptado para o aluno com deficiência visual.



Fonte: Arquivos do autor.

Visto que o aluno A não teria como escrever, o mesmo sugeriu registrar suas dúvidas por áudio como não tínhamos naquele momento um gravador, o aluno gravou os áudios no próprio celular. Neste encontro os alunos sugeriram jogar mais de uma vez.

Durante o primeiro encontro os alunos tiveram muitas dúvidas no que se refere às estratégias no jogo, mas também acerca das regras, por ser um jogo em que há o fator “sorte”.

---

<sup>2</sup>É um aparelho didático com uma metodologia flexível que proporciona o auxílio do aluno deficiente visual no aprendizado de Matemática.

Sobre isto, a aluna C questionou *“Este é um jogo que depende da sorte ou da estratégia?”*. Eu a indaguei perguntando qual era a opinião dela, neste momento o seu adversário comentou *“O que você acha da gente jogar utilizando as mesmas estratégias? Assim a gente pode ver o que acontece.”*. Esta partida foi realizada pelo trio, dois alunos contra um, notamos que os alunos estavam em busca de estratégias para responderem a sua própria pergunta, convergindo para o que Freire (1975) acredita ser ideal, o debate e o diálogo em sala.

O foco deste encontro foi a adaptação e conhecimento do jogo, que segundo Macedo, Petty e Passos (2007) é um fator importante para que este não se torne apenas um motivo para o professor não fazer uma aula expositiva, mas também gerar discussões e reflexões. Foi, também, um objetivo deste encontro a formulação de questões acerca das estratégias adotadas pelos alunos e no que se refere as regras do jogo. Muitos alunos fizeram as mesmas perguntas, listamos aqui algumas que julgamos importantes para o debate do quarto encontro:

1. Coletar pontos no início ou no final?
2. Qual é a melhor estratégia? Ela existe?
3. Coletar pontos ou retirar pontos do adversário?
4. Se eu erreí muitas vezes, paro de tentar ou continuo tentando?
5. Ir para a casa 2 ou 3?
6. O colega escolher o número que eu devo obter no lançamento do dado importa? (referente à coleta de pontos na casa 1)
7. O jogo depende de sorte ou de estratégia?
8. O que fazer para ganhar do adversário?
9. Vale a pena ficar na casa 12 coletando pontos?
10. Como fazer as melhores escolhas?
11. A casa 7 faz tanta diferença no jogo?

Podemos notar que as questões instigaram os alunos a buscar por soluções. Evidenciamos que não está em discussão, neste momento, qual foi o método utilizado pelos alunos para solucionar as suas inquietações, mas sim a própria busca por respostas. Notamos, também, que neste encontro alguns alunos estavam com dificuldades em formular questões, portanto foi necessário um momento de intervenção do professor de modo a tornar o encontro mais fluido, pois para Freire e Faundez (2017) um dos desafios do professor é, antes de tudo, ensinar o aluno a perguntar.

### **3.2 SEGUNDO ENCONTRO - OBJETIVOS, EXPECTATIVAS E ANÁLISES**

Iniciamos o segundo encontro retomando o anterior para lembrarmos das regras do jogo e das diferentes estratégias adotadas pelos colegas . Antes de iniciarmos as atividades, foram expostos aos alunos os objetivos do, são eles: jogar com um olhar mais apurado e crítico no encontro que se refere à tomada de decisões e registrar as decisões, ou seja, registrar os movimentos, coletas de pontos e estratégias adotadas na partida. Sobre a construção dos registros, o professor comentou que a descrição deveria ser feita de forma que seus colegas pudessem compreender a estratégia adotada pelo mesmo.

Dois alunos, por motivos relacionados à escola, se ausentaram da oficina a partir do segundo encontro, sobretudo dois novos alunos solicitaram a participação desta. Dessa forma, fez-se necessário apresentar o jogo e suas respectivas regras aos alunos que iniciaram a oficina neste encontro. Após as apresentações, alguns alunos sugeriram jogar sem iniciar o registro/descrição das jogadas, com o objetivo de lembrar as regras e as possíveis estratégias de movimentação e coleta de pontos do primeiro encontro. Os primeiros trinta minutos foram destinados ao jogo aberto, sem a necessidade de descrever a partida. Aproveitamos este momento para propor aos alunos a construção de mais questões, como foi solicitado no encontro anterior. Destacamos a participação e colaboração dos alunos com os demais que ainda não haviam jogado, a participação ativa dos alunos foi muito importante para a fluidez deste encontro, visto que, neste encontro, alguns alunos ainda tinham dúvidas quanto as regras do jogo.

No encontro anterior os alunos formularam questões sobre o jogo, regras e suas estratégias, aproveitamos o tempo que foi dedicado aos alunos iniciantes para que os mesmos e os demais construíssem novas questões. Para a surpresa o pesquisador/professor, os alunos que iniciaram neste encontro e os demais elaboraram algumas questões que ainda não haviam sido levantadas, são elas:

1. Qual é a melhor estratégia para coletar pontos?
2. Vale a pena voltar para uma casa adjacente?
3. Ir para a casa 5 pelas opções que ela me abre ou ir para a casa 6 pelos pontos que ela me dá?
4. Qual é a melhor condição nas casas de bordas azuis?

5. O jeito que você lança o dado influencia o resultado?
6. Quais são as vantagens reais da casa 7?

O aluno que construiu a questão (2) indagou o professor de forma mais clara antes de anotá-la na folha, nas palavras do aluno: “Como calcular se vale a pena ficar na casa doze tentando coletar pontos ou se vale a pena voltar para a casa 10 ou 8 para coletar os pontos com maior chance de obter o resultado?”. Os alunos, muitas vezes, indagavam o professor ao invés de anotar o questionamento no papel, portanto, fez-se necessário tomar nota de muitas questões no caderno de pesquisa.

Outra questão que foi levantada por parte dos alunos: Quais eram as principais diferenças entre escolher um caminho ou outro, pois em algum momento deste encontro o professor comentou que haviam caminhos melhores e mais rápidos, neste momento uma aluna questionou “Como que existe caminhos mais rápidos se todos eles saem do mesmo lugar e vão até o mesmo lugar com a mesma quantidade de casas?”. O professor questionou a aluna: “Imagine que você está no meio da sala, bem no meio, no ponto médio entre duas paredes, a parede A, que está a sua frente e a parede B que está atrás de você, sempre que você lançar um dado de seis faces e cair o número 1, você dá um passo para trás, e sempre que cair um número maior que um, você dá um passo para frente, sendo assim, em qual parede você acha que você chega mais rápido?”, outro comentário feito pelo professor foi: como podemos listar todos os “caminhos” do jogo?

Neste momento podemos notar que a pergunta, o ato de perguntar se fez presente e se fez importante. Temos como relevante para a pesquisa, para o desenvolvimento da atividade e para a construção do conhecimento este momento da aula, pois como Freire e Faundez (2017) afirmam, é a partir da pergunta que se busca a resposta e não o contrário. A dúvida da aluna parte de uma situação real, a realidade do aluno que está jogando, e a busca por resposta advém da pergunta da aluna em conjunto com a pergunta do professor. Esclarecemos o fato desta aluna, em seu caderno, listar as possibilidades de um dado, lançá-lo dez vezes e tomar nota dos valores. Foi por meio deste pequeno experimento que a mesma conjecturou “bom, professor. Ao meu ver, a chance de cair um número maior que um é maior que a chance de cair somente um, pois eu atirei o dado dez vezes e caiu 1 somente duas vezes, então eu vou chegar na parede A mais rápido. É a mesma ‘coisa’ com o jogo? Tem caminhos que são mais rápidos que outros? Faço a mesma conta que eu fiz neste caso para o jogo?”. Podemos notar que a pergunta, que o ato de perguntar foi essencial para o desenvolvimento das atividades e,

posteriormente, para a construção de conceitos, visto que, para Freire e Faundez (2017), quanto mais se perguntar, maior é a chance do conhecimento ser construído. .

Após os alunos serem apresentados ao jogo, foi feito o convite para jogarem com um olhar apurado e crítico no que se refere às estratégias adotadas no jogo. Os alunos optaram por não trocarem de duplas, convergindo para o que Huizinga (2007) comenta sobre a formação de grupos em ambientes de jogos, segundo o autor

“Os jogadores tendem a tornar-se permanentes, mesmo depois de acabado o jogo. [...] a sensação de estar separadamente juntos, numa situação excepcional, de partilhar algo importante, afastando-se do resto do mundo e recusando as normas habituais, conserva a magia para além da duração de cada jogo.” (HUIZINGA, 2007, p.15)

Os alunos iniciaram as partidas comprometendo-se a jogarem de forma crítica no tocante às regras e às estratégias que seriam adotadas, neste momento solicitamos que os mesmos descrevessem a partida em uma folha disponibilizada pelo professor, foi solicitado que a descrição/registo fosse clara, de modo que os colegas entendessem e pudessem recriar a partida, e desta forma, as estratégias adotadas.

O aluno A fez a descrição em um gravador de áudio, enquanto os seus colegas fizeram a descrição em um formato escrito. Assim como o tabuleiro, a maneira como o aluno A poderia descrever os movimentos e coleta de pontos no jogo não havia sido pensado, isto é, o mesmo sugeriu gravar em áudio às estratégias adotadas. A sugestão do aluno A foi feita no primeiro encontro, pois no final da mesma o professor explicou para os alunos o que seria feito neste encontro. Em vista disso, disponibilizamos um gravador de áudio para o aluno A e instruímos o seu colega para ajudá-lo com as gravações.

A descrição do aluno A foi feita de modo pausado, ou seja, ele pensava em sua estratégia momentânea, gravava o movimento que ele iria fazer, pausava, realizava a ação e posteriormente gravava o resultado dos dados, segue a transcrição de um trecho do registro do aluno A:

*“Estou na casa 1, quero ir para a casa 3;  
O dado de condição sorteou maior ou igual a 3;  
O dado sorteou 2, então continuo na casa 1;  
Estou na casa 1, vou tentar ir novamente para a casa 3;*

*O dado da condição me permitiu escolher a condição, portanto escolhi maior ou igual a 3;*

*O dado sorteou 6, portanto fui para a casa 3;*

*Estou na casa 3 e quero ir para a casa 6;*

*O dado de condição sorteou maior ou igual a 6;*

*A soma dos dados foi 4, portanto continuo na casa 3;*

*Quero ir para a casa 6;*

*O dado de condição sorteou maior do que 6;*

*A soma dos dados foi 2, com isso continuo na casa 3;*

*[...]*

*Quero coletar os pontos na casa 12;*

*A soma dos dados deu 4, não coletei os pontos de força;*

*Infelizmente perdi o jogo.”*

Durante o jogo alguns alunos questionaram como deveria ser feita a descrição: Ela deve ser detalhada? Deve aparecer as minhas tentativas? Os valores obtidos no lançamento dos dados? Na descrição deve aparecer “coisas” de matemática?; Convidamos os alunos a decidirem por si só, pois era um objetivo nosso identificar a autonomia e criticidade do aluno quanto a construção do registro da partida. Seguem três exemplos de registros feito pelos alunos:

figura 6: Exemplo de registro detalhado.



Fonte: Arquivos do autor.

No primeiro registro/descrição o aluno detalhou bem a partida, informando a estratégia, as tentativas e os valores obtidos nos lançamentos dos dados, inclusive utilizando simbologia matemática ( $>$ ,  $<$ ,  $=$ , ...). Neste registro o aluno não só apresenta sua estratégia, mas também as tentativas de movimentação e coleta de pontos, visto que o êxito depende do lançamento dos dados, e portanto, da aleatoriedade.

Figura 7: Exemplo de registro por tabela.

~~Exemplo~~ Vou registrar por tabela a sequência de jogadas, mostrando o resultado desejado e o resultado adquirido.

Condição	>	* ↑	≤							
Casa desejada	2	5	8	8	8	8	8	8	8	8
N.º adquirido	5	7	8	5	6	9	11	4	11	5
Movimento	X	X	X							
Geração				X	X	X	X	X	X	X

Fonte: Arquivos do autor.

No segundo registro o aluno optou por descrever a partida utilizando uma tabela, esta que foi dividida em condição, casa desejada, soma obtida no lançamento dos dados, movimento e geração, este aluno também optou por apresentar as tentativas que não obteve sucesso no lançamento dos dados. Evidenciamos este registro por conta do aluno ter utilizado uma tabela, mostrando-se autêntico e criativo quanto ao formato do registro, sendo este elogiado pelo colega pela praticidade e disposição e fácil interpretação, contendo de forma prática todas as informações necessárias para a recriação da partida.

Figura 8: Exemplo de registro simples.

Casa 1 → Casa 3  
 Casa 3 → Casa 6  
 Casa 6 → ptos  
 Casa 6 → Casa 8  
 Casa 8 → ptos  
 Casa 8 → Casa 11  
 Casa 11 → Casa 12

Fonte: Arquivos do autor.

No terceiro registro o aluno optou somente por apresentar a sua estratégia de forma simples, podemos interpretar a terceira descrição de forma que a primeira coluna significa “Estou na [...]”, a flecha significa “Fui para [...]” ou “Coletei [...]” e a segunda coluna apresenta a ação realizada, com relação às outras descrições, esta não apresenta o número de tentativas.

Nota-se que há diferenças entre as descrições em relação a suas complexidades e disposição de informações. Claramente identificamos a autonomia do aluno quanto a forma de registro/descrição relacionado com a sua complexidade de informações e a forma como estas são apresentadas ao jogador/aluno/leitor.

Destacamos o fato de que a descrição da partida, em nossa pesquisa, foi fundamental, visto que será a partir da descrição da partida feita pelos seus colegas que o aluno analisará as estratégias dos mesmos e poderá criticá-las objetivando a investigação matemática da movimentação, coleta de pontos e da estratégia adotada pelo seu colega, desta forma, objetivando a compreensão e almejando a melhor estratégia e respostas para as questões levantadas no primeiro encontro e, também, no início deste encontro. Evidenciamos o fato de que, no ambiente de aprendizagem que os alunos e o professor formaram, a Matemática não é um fim, mas um meio para obtermos respostas para os questionamentos dos alunos e fundamentar a crítica, análise e validação das hipóteses de melhor estratégia adotadas pelos alunos.

### **3.3 TERCEIRO ENCONTRO - OBJETIVOS, EXPECTATIVAS E ANÁLISES**

O terceiro encontro foi de grande relevância para a pesquisa. Estávamos com grandes expectativas para esse encontro, almejávamos as críticas dos alunos no tocante às estratégias de seus colegas. Foi neste encontro que os alunos puderam analisar, questionar e criticar os registros construídos por seus colegas com o auxílio de questões formuladas pelo professor e pela orientadora desta dissertação.

Eram objetivos deste encontro os alunos recriarem as partidas de seus colegas por meio das descrições feitas no encontro anterior, analisar as estratégias que os colegas adotaram, e criticar os registros; quanto às informações disponibilizadas, quanto ao nível de complexidade das descrições e quanto à maneira que as informações são dispostas, visando a objetividade e eficiência do registro no sentido de facilitar a interpretação do mesmo.

Iniciamos lembrando o encontro anterior. Foram alvo de conversa os registros criados naquele, comentamos que alunos fizeram diferentes tipos de descrições, com diferentes formas de apresentar os movimentos e coleta de pontos, sendo assim, alguns alunos receberiam registros com mais ou menos informações e, talvez, precisassem de um pouco mais de atenção e análise para recriar as partidas devido às diferenças entre os registros.

Após a conversa inicial, combinamos com os alunos que cada um trocava de registro com qualquer outro da sala, de preferência com colegas que não foram seus oponentes, objetivando a dinâmica da proposta. Novamente os alunos sugeriram continuar com as mesmas duplas e trios para realizarem a atividade, outra vez convergindo para o que Huizinga (2007) afirma sobre a formação de grupos em ambientes de jogos, como foi mencionado na análise do segundo encontro. No início do encontro somente foram trocados os registros entre os colegas, alguns se surpreenderam por haver registros muito sucintos, que não apresentavam o número de tentativas de obter a condição necessária para a movimentação ou para a coleta de pontos. Deduz-se que, para esses alunos, a informação do número de tentativas é importante para recriar o jogo e analisar a estratégia do colega.

Logo após conversarmos sobre os registros e sobre as possíveis faltas de informações, os alunos iniciaram as partidas reproduzindo os jogos dos colegas baseados nos registros. Durante as reproduções muitos alunos questionaram os registros no tocante, principalmente, a falta de informações, pois os mesmos acharam que conseguiriam reproduzi-los totalmente, por mais que alguns alunos tenham comentado que “Não tem como reproduzir exatamente o modelo do colega, professor. Mesmo que não tivesse faltando informações, a chance é baixa de conseguirmos tirar nos dados as mesmas coisas e no mesmo número de tentativas.”, nota-se que, neste momento, alguns alunos já estavam com um raciocínio um pouco mais apurado frente a um olhar probabilístico da situação.

Ainda assim, alguns alunos estavam achando estranho não conseguirem recriar exatamente o que os colegas fizeram no encontro passado. Mais de um aluno comentou que os movimentos poderiam ser recriados, mas os dados de condições não seria possível recriar, pois os mesmos não tinham domínio sobre o que seria obtido no lançamento dos dados. Aproveitamos esse momento do encontro para mencionar o termo *aleatoriedade*, frente ao que os alunos comentaram sobre não ter domínio dos resultados obtidos no lançamento dos dados.

Neste momento questionamos os alunos “você sabem o que é aleatoriedade?”, um aluno respondeu que “São coisas que a gente não sabe o que vai dar o resultado.”, alguns alunos concordaram com ele, outros responderam que “São resultados que não se repetem.”,

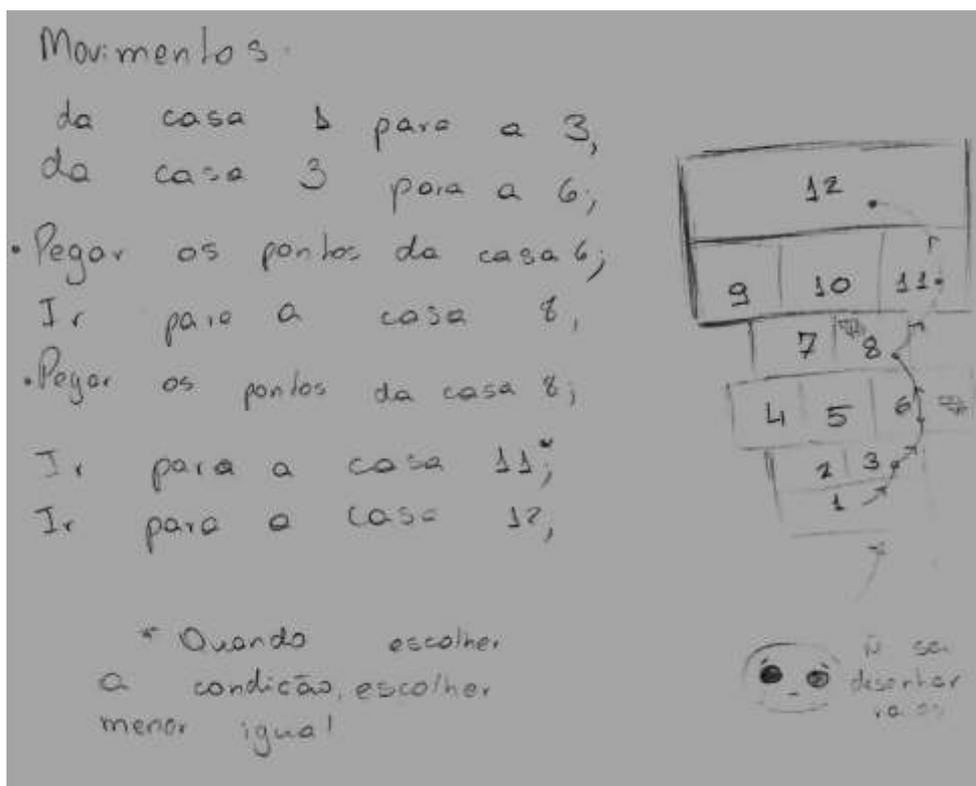
diante das respostas o professor comentou “o lançamento de um dado é aleatório? Se sim, o que faz o lançamento do dado ser aleatório?”, esse questionamento gerou um diálogo importante para a pesquisa, muitos alunos afirmaram que o lançamento de um ou mais dados era aleatório e argumentaram que era aleatório porque não sabíamos o resultado que obteríamos no lançamento destes.

Para finalizar essa discussão de “*O que é aleatoriedade?*” o professor comentou sobre o caso de uma empresa de aparelhos eletrônicos, no aplicativo de música, havia a opção *aleatoriedade* e após algum tempo de uso os clientes estavam reclamando que ao ativar esta função algumas músicas tocavam mais de uma vez seguidas, ou seja, a mesma música tocava duas ou mais vezes seguidas. Após a reclamação dos clientes a empresa reprogramou o aplicativo para que a mesma música nunca tocasse seguida dela mesma. Visto isso, o professor comentou “[...] a empresa tornou o aleatório menos aleatório, pois pelo menos um resultado a gente já sabe, logo após tocar uma música qualquer, essa música não tocará novamente.”. Os alunos tiveram uma certa dificuldades em compreender o conceito de aleatório, a ideia de poder repetir resultados, para alguns, significava que o evento não era aleatório, porém, este tema seria discutido novamente no último encontro, optamos por não prolongar o encontro em torno deste conceito.

Após a conversa os alunos voltaram a recriar as partidas de seus colegas, após todos os alunos recriarem suas partidas um aluno sugeriu jogarem novamente, o mesmo argumentou que na primeira partida deu para perceber algumas estratégias, mas um segundo jogo os possibilitaria focar nos detalhes. Desta forma, oportunizando-os ter um olhar mais crítico e apurado das estratégias adotadas pelos colegas. Os demais alunos concordaram em recriar a partida novamente.

O aluno A trocou seu registro com o aluno D, porém, o aluno D descreveu sua partida no formato escrito, portanto este teve que usar o gravador de áudio para gravar a sua descrição para que o aluno A pudesse recriar a partida, o aluno D optou por gravar em seu próprio celular e mandar por mensagem para o celular do aluno A, porém, não foi necessário transcrever o áudio do aluno A para que o aluno D recriasse a partida, o mesmo preferiu ficar escutando o áudio no gravador disponibilizado pelo professor. Abaixo segue o registro escrito e o registro em áudio do aluno D, o mesmo fez os dois, sem a necessidade do auxílio do professor.

Figura 9: Registro do aluno D.



Fonte: Arquivos do autor.

Segue a transcrição do áudio feita pelo aluno D: “Ir da casa um para a casa três, ir da casa três para a casa seis, coletar pontos na casa seis, ir para a casa oito, coletar pontos na casa oito, ir para a casa onze, depois ir para a casa doze e finalizar o jogo.”. Podemos notar que o aluno D ao alterar o seu modelo do formato escrito para o formato de áudio conseguiu ser fiel ao registro escrito..

Os demais alunos não tiveram complicações ao recriar a partida de seus colegas. Após todos terminarem a segunda partida, o professor colocou no quadro quatro questões relativas aos registros e estratégias adotadas pelos colegas. Inicialmente eram quatro questões, todavia um aluno sugeriu incluir uma quinta questão que se referia às regras do jogo:

1. Você consegue recriar o jogo do colega?
2. É necessário melhorar ou alterar o registro do colega?
3. Faça uma crítica acerca da estratégia/registro do colega.
4. Faça indagações/hipóteses acerca da “melhor estratégia” ou “estratégia ideal”.
5. Faça uma crítica ao jogo e às regras do jogo.

A partir das questões os alunos puderam ter um olhar mais apurado e crítico quanto aos seus próprios registros e dos seus colegas, evidenciamos que a questão de pesquisa desta dissertação refere-se às contribuições das análises e das críticas feitas aos próprios registros e dos colegas. Desta forma, este momento da oficina foi fundamental para respondermos a questão diretriz. Destacamos algumas respostas e comentários feitos pelos alunos. Evidenciamos o fato da matemática, em nossa prática, ter a função de sustentar a argumentação dos alunos, novamente reforçando a frase já mencionada em capítulos anteriores, nesta pesquisa a matemática é um meio e não um fim, isto é, a matemática é um meio para obter respostas, confluindo para o que Barbosa (2001) comenta “[...] conceitos, noções e algoritmos matemáticos são utilizados na indagação e na investigação da situação-problema” (BARBOSA, 2001, p. 32).

Buscando facilitar a leitura e a análise das respostas dos alunos, optamos por dissertar separadamente sobre cada questão e as respostas fornecidas pelos alunos. Iniciamos analisando as respostas dos alunos que se referem à primeira questão e assim por diante, para no final desta seção concluir com um comentário geral abordando todas as questões, críticas e análises por parte dos alunos. Destacamos que o aluno A respondeu às questões por meio de gravação de áudio por sugestão do próprio.

Sobre a primeira questão “Você consegue recriar a partida do colega?”. Nosso objetivo com esta questão era investigar a crítica dos alunos quanto às informações que estavam disponíveis nos registros, visto que, segundo Hestenes (2006), antes do modelo/registro escrito/verbal/outros o aluno cria um modelo mental, que por sua vez é particular de cada aluno, sendo assim, evidentemente cada aluno produziria um registro de seu modo, com as características próprias, contendo mais ou menos informações. Destacamos também o fato de que o professor não interviu na construção dos registros em nenhum momento, portanto cada registro é particular de cada aluno, objetivando a autonomia do mesmo.

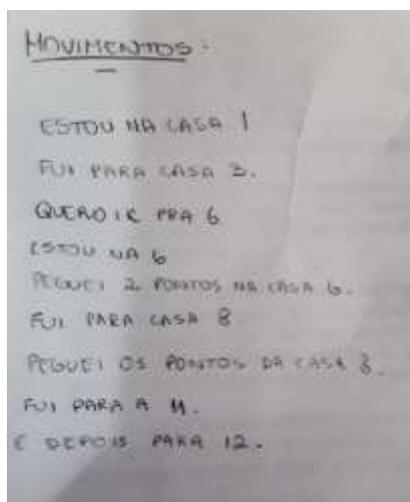
Todos os alunos relataram que conseguiram recriar a partida do respectivo colega, porém, alguns comentaram que haviam registros com ausência de informações. Outros dois comentários que julgamos importantes foram feitos pelos alunos E e F que responderam “Não, eu ganhei e ele perdeu. Além disso a transcrição não mostra o número de erros ou acertos” e “Sim, recriar a estratégia, mas não as tentativas.”. Estes comentários evidenciam que os alunos estavam notando a aleatoriedade presente no jogo como sendo um fator importante para o resultado final. Destacamos que no primeiro encontro a aluna C questionou “O jogo depende

somente da sorte ou também da estratégia?”, nota-se que as respostas dos alunos estão convergindo para os questionamentos feitos no primeiro e no segundo encontro.

Cabe aqui destacar o comentário do Aluno D acerca do registro feito em áudio pelo aluno A, segundo ele “Quanto a forma que foi feito o registro: nada de pontos negativos, foi tudo muito bem efetuado [...] muito provavelmente, porque o mesmo foi feito em gravação de áudio.”, nota-se que o registro em áudio foi bem aceito pelo aluno D, porém não podemos generalizar esse comentário, pois o aluno D foi o único que recriou o jogo do aluno A. O aluno A comentou que o registro do aluno D “[...] estava bem claro, e diferente da minha tática que se resumia pegar pontos no final, ele garantiu os pontos no início e depois só ir até a casa doze.”. O comentário do aluno A comparando os registros não é exclusivo, outros alunos também responderam fazendo pequenas comparações com os seus próprios registros e estratégias.

Sobre a segunda questão “É necessário melhorar ou alterar o registro?”. Mais da metade dos alunos responderam que sim, era necessário alterar o registro pois no mesmo não havia informações adicionais como o número de tentativas para respeitar a condição estabelecida pelo dado e o número de tentativas na coleta de pontos, com exceção de um aluno que comentou “Por mais que meu colega não tenha colocado o número de tentativas, eu ainda consegui saber qual foi a sua estratégia e pude analisar ela de forma crítica como foi pedido.”. No que se refere a falta de informações, a aluna N comentou que o modelo da aluna C “[...] não especifica quando que ela conseguiu ou não o objetivo, seria melhor mais detalhes.”. Segue abaixo o registro da aluna C.

Figura 10: Registro da aluna C.



MOVIMENTOS:

ESTOU NA CASA 1  
FUI PARA CASA 2.  
QUERO IR PRA 6  
ESTOU NA 6  
PEGUEI 2 PONTOS NA CASA 6.  
FUI PARA CASA 8  
PEGUEI OS PONTOS DA CASA 8.  
FUI PARA A 11.  
E DEPOIS PARA 12.

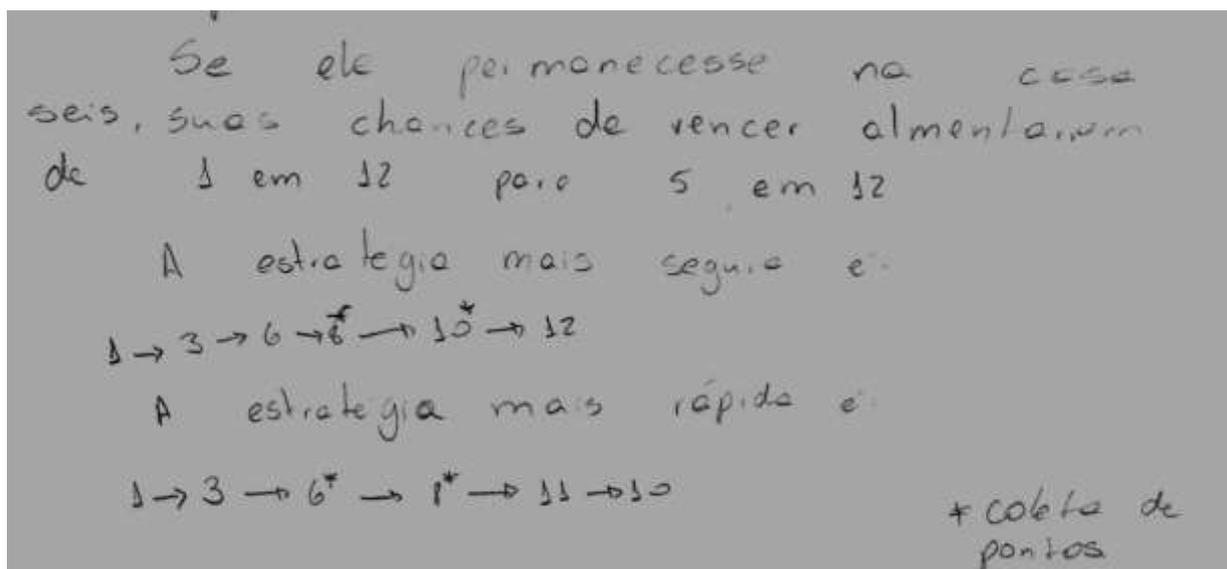
Fonte: Arquivo do autor.

Nota-se que os alunos estavam curiosos acerca do número de tentativas dos colegas. Observamos que para os alunos criticarem a estratégia como boa ou não, ideal ou não, o número de tentativas é tão importante quanto o cálculo a priori.

Sobre a terceira questão “Faça uma crítica acerca da estratégia/registro do colega.”. Nesta questão os alunos tiveram a oportunidade de utilizar a matemática para criticar e argumentar sobre os possíveis equívocos dos colegas. Neste momento surgiram algumas dúvidas quanto ao lançamento dos dados. Alguns alunos já conseguiam diferenciar as somas dos valores de dois dados das diferentes possibilidades de obter estas somas, por exemplo, existem onze somas com dois dados de seis lados  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , mas para cada soma, existem diferentes possibilidades, por exemplo, para a soma dois, nos dois dados deve-se obter o número um, para a soma quatro, é necessário que se obtenha um e três, dois e dois ou três e um. Havia alunos que acreditavam que as somas eram equiprováveis, ou seja, a probabilidade de obter soma dois no lançamento de dois dados era a mesma de obter soma sete. Neste momento do encontro, os alunos iniciaram um debate entre eles. O aluno D sugeriu tentar explicar à classe a diferença entre ter onze somas possíveis e trinta e seis possibilidades para obter as respectivas somas. O mesmo foi até o quadro e desenhou a tabela seis por seis para colocar todos os possíveis resultados, explicando para a turma que para a soma dois existe somente uma possibilidade, ou seja, o primeiro dado obter um e o segundo dado obter um, e para a soma dar sete existem seis possibilidades  $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2), (6,1)\}$ . Outra vez a autonomia do aluno se fez presente na oficina, fator que julgamos primordial para o desenvolvimento de um cidadão crítico e autônomo.

Esse mesmo aluno, ao criticar a estratégia do aluno A, comentou “A estratégia dele foi boa, só que ele acabou por desistir de coletar os pontos na casa seis a partir da quinta falha e investiu nos pontos da casa oito (o que não foi errado) e na casa doze (o que foi o seu maior erro), tendo em vista as chances de ele conseguir coletar ou não os pontos.”. É notável que os alunos estavam utilizando a matemática para argumentar a crítica ao registro, outra resposta que possibilita o autor afirmar tal fato é a crítica que esse mesmo aluno fez ao registro do aluno A.

Figura 11: Crítica do aluno D ao aluno A.



Fonte: Arquivos do autor.

Destacamos também a crítica do aluno M ao registro da aluna P, segundo o aluno M “[...] a estratégia possui falhas em vários pontos. A extração de pontos da casa 1 implica uma quantidade substancial de tempo sendo gasto por um ganho desprezível de pontos. Apesar da chance de [...] acertar o número na casa 1 ser maior do que nas demais casas com coleta de pontos [...], acredito que a perda de tempo com o ponto na casa 1 não seja justificável. A ida até a casa 2, se não para pegar pontos (o que não teria sentido, visto a chance de coleta) não daria nenhuma vantagem ao jogador, e até o prejudicaria se tentasse coletar pontos na casa 6 ou 8. [...] A ida para a casa 10 poderia ser otimizada indo para a casa 11, já que ela se situa mais nos extremos que a casa 10, e se sortear uma condição menor que, as chances de se obter um número menor são maiores.”

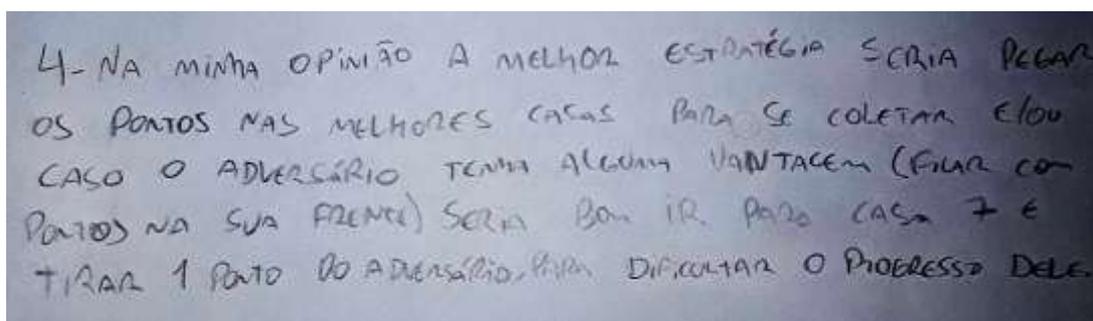
Mais da metade dos alunos fundamentaram as críticas com base nas chances no lançamento dos dados, convergindo para a expectativa do professor, pois esperávamos que os alunos utilizassem do debate, das conversas e do conhecimento prévio ou até mesmo do conhecimento construído durante a oficina para sustentar a crítica.

Destacamos a resposta dada pela aluna H “A estratégia transcrita foi bem simples, pois o objetivo seria coletar pontos na casa 6 e 8 e posteriormente avançar para a casa 12. Seria esta a melhor estratégia?”. Mas por que dar ênfase a esta resposta? Essa questão possibilitou ao professor iniciar a construção do conceito de Probabilidade, e assim como essa, muitas outras questões levantadas pelos alunos enquanto críticos possibilitaram ao professor iniciar discussões que construíram conceitos e diálogos, confluindo para o que Freire e Faundez

(2017) comentam acerca do ato de perguntar, a resposta advém do questionamento e não o contrário. Outro ponto a ser destacado é que o debate entre os alunos foi algo frequente durante a oficina, e para Freire e Faundez (2017) o debate, a troca de conhecimento são fatores importantes para o desenvolvimento do aluno enquanto cidadão crítico.

Sobre a quarta questão “Faça indagações/hipóteses acerca da ‘melhor estratégia’ ou ‘estratégia ideal’.”. Esperávamos com essa questão possibilitar ao aluno conjecturar alguma estratégia para posteriormente esta ser validada ou invalidada de acordo com os cálculos que seriam feitos no último encontro. Muitos alunos fizeram indagações e hipóteses com um viés crítico, comentando o melhor caminho e as melhores coletas de pontos baseados ou em suas experiências com o jogo até o momento ou com cálculos de chances na coleta de pontos. Neste momento alguns alunos questionaram o professor sobre como o cálculo das movimentações era feito. Optamos por responder essa pergunta no quarto encontro, pois seria necessário um pouco mais de tempo para isto. Seguem abaixo duas hipóteses feitas pelos alunos.

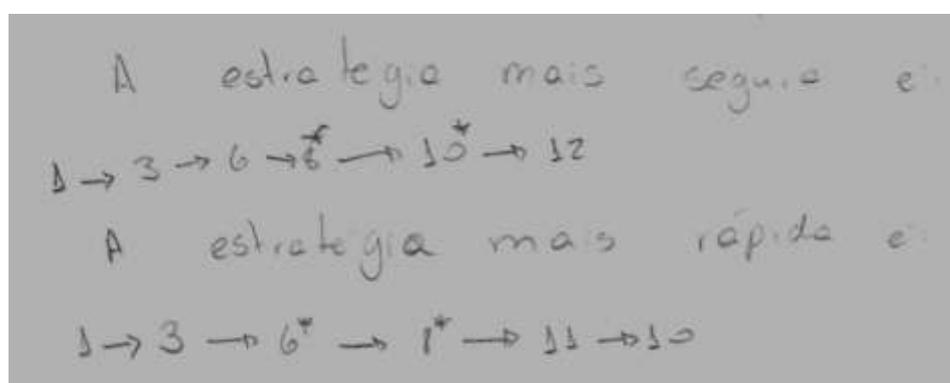
Figura 12: Hipótese do aluno P.



4- NA MINHA OPINIÃO A MELHOR ESTRATÉGIA SERIA PEGAR OS PONTOS NAS MELHORES CASAS PARA SE COLETAR E/OU CASO O ADVERSÁRIO TENHA ALGUMA VANTAGEM (FILAR COM PONTOS NA SUA FRENTE) SERIA BOM IR PARA CASA 7 E TIRAR 1 PONTO DO ADVERSÁRIO, PARA DIFICULTAR O PROGRESSO DELE.

Fonte: Arquivos do autor.

Figura 13: Hipóteses do aluno D.



A estratégia mais segura é:  
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 6^* \rightarrow 10^* \rightarrow 12$   
 A estratégia mais rápida é:  
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6^* \rightarrow 1^* \rightarrow 11 \rightarrow 10$

Fonte: Arquivos do autor.

Sobre a quinta e última questão “Faça uma crítica ao jogo e às regras do jogo.”. Esclarecemos que esta questão não estava no planejamento de aula. Um aluno sugeriu a questão e achamos conveniente colocá-la na oficina. Todos os alunos fizeram as críticas e sugeriram mudanças. A alteração mais solicitada foi de colocar mais casas com retirada de pontos do adversário ou a casa sete retirar dois pontos do adversário. Segundo o aluno D “Se o meu adversário retirar pontos nas casas 1, 6 e 8, a casa 7 fica ineficiente, pois só posso retirar um ponto.”, outra sugestão válida deste mesmo aluno é adicionar multiplicadores pelo mapa, ou seja, a casa 6 disponibiliza, normalmente, dois pontos, mas se eu acionar algum multiplicador ela passaria a disponibilizar quatro pontos. Outros alunos sugeriram mais caminhos, aumentar o mapa para o jogo ficar mais desafiador. Dentre outras sugestões, um aluno sugeriu uma versão *mobile* do jogo ou uma versão digital, web ou aplicativo.

Cabe aqui destacar o comentário do aluno I “O jogo é muito interessante e divertido, podendo ter momentos de tensão onde você e seu inimigo estão há poucos passos da vitória e ele começa a tirar pontos de força [...] ”, nota-se que a tensão que Huizinga (2007) apresenta como um elemento importante do jogo fez-se presente durante a oficina. Para este mesmo autor “Há um esforço para levar o jogo até o desenlace, o jogador quer que alguma coisa “vá” ou “saia”, pretende ganhar à custa do seu próprio esforço.” (HUIZINGA, 2007, p.14).

Evidenciamos a importância deste encontro não somente para a pesquisa, mas também para o desenvolvimento crítico do aluno, pois foi neste que estes puderam conjecturar, criticar, analisar e, alguns, validar as suas hipóteses. Encerramos a análise e descrição do terceiro encontro com o comentário feito pelo aluno D “achei interessante como a matemática está presente no jogo, vou tentar usar ela pra jogar LoL<sup>3</sup>.”.

### **3.4 QUARTO ENCONTRO - OBJETIVOS, EXPECTATIVAS E ANÁLISES**

O quarto e último encontro teve como objetivo esclarecer e comentar as questões que os alunos produziram no primeiro e no segundo encontro. Esperávamos neste encontro a participação ativa dos alunos, almejando o diálogo e a construção de possíveis conceitos frente às questões e indagações deles. Optamos, novamente, por dissertar separadamente cada questão

---

<sup>3</sup>“LoL” é a sigla utilizada para mencionar League of Legends, um jogo de computador online e competitivo, isto é, uma equipe contra outra disputando espaço no mapa com algumas variáveis que influenciam o rumo do jogo.

e, no final da seção, fazer uma reflexão geral do encontro. Sendo assim, esta seção terá a mesma estrutura da anterior.

Alguns alunos elaboraram questões semelhantes aos de seus colegas, isto é, questões que, em sua essência, são iguais. Esclarecemos este fato pois o número de questões é menor do que o número de alunos, deste modo, sugerindo que alguns alunos não participaram das atividades ou que cada aluno fez apenas um questionamento, no entanto, cada um criou pelo menos duas questões, porém, algumas foram questionadas mais de uma vez.

Neste encontro os educandos não sentaram-se em duplas como nos encontros anteriores, os mesmo se dispuseram na sala de aula em formato de “U”, optamos por não interferir na opção dos alunos em se disporem desta maneira. Outra característica exclusiva deste encontro foi a duração do encontro, foi necessário prolongar o tempo para que todas as questões fossem debatidas. Evidenciamos que em cada questão dialogada, a pergunta era feita, inicialmente, ao aluno para posteriormente o professor, junto com os mesmos, fazerem os comentários necessários, ou seja, o papel do professor neste encontro foi de mediador.

Sobre a questão **“Coletar pontos no início ou no final?”**. No início deste encontro, por sugestão do aluno D, dedicamos um espaço do quadro para fazer um quadrado seis por seis e dispor os possíveis resultados no lançamento de dois dados, como mostra a figura 14. Nesta questão um aluno comentou “Podemos listar todas as chances de todas as casas de coleta de pontos, aí podemos ver qual é mais fácil”, a partir do comentário deste aluno definimos que a probabilidade de um evento acontecer depende de todos os eventos possíveis, citamos como exemplo da probabilidade de duas caras no lançamento de duas moedas, com a ajuda dos alunos listamos os quatro eventos possíveis {cara, cara; cara, coroa; coroa, cara; cara, cara}, dentro deste conjunto o que queremos é a solução na qual as duas moedas fornecem cara, a partir disso definimos que a Probabilidade de obtermos duas caras é de  $1/4$ , além de definir informalmente que a Probabilidade de um Evento A acontecer é  $P(A) = \frac{O \text{ que eu quero}}{O \text{ que eu tenho}}$ , no exemplo das moedas quer-se o resultado cara e cara e têm-se os possíveis resultados {cara, cara; cara, coroa; coroa, cara; cara, cara}, isto é, um para quatro.

Definimos com os alunos, com o auxílio do quadro da figura 14 que a casa número um tem  $1/6$ , de sucesso na coleta de pontos, por ser necessário o uso de somente um dado. A casa número dois tem  $1/36$ , a casa seis tem  $5/36$ , a casa oito tem  $5/36$ , a casa dez tem  $3/36$  e a casa doze tem  $1/36$ . Feito o levantamento de pontos, os alunos, em um consenso, disseram que as melhores casas para coletar pontos ficavam no meio do tabuleiro, ou seja, na casa seis e oito, ainda assim, o professor indagou “E a casa número 1?”, os alunos responderam que “Não vale muito

a pena, professor. Ela é uma casa que, por mais que seja a mais fácil, ainda vale mais a pena a tentativa na casa seis ou oito por conta dos pontos que elas disponibilizam”. Já na primeira questão ficou evidente a autonomia do aluno quanto às respostas e sugestões para a análise e resolução dos problemas.

Figura 14: Tabuleiro 6x6 - possibilidades no lançamento de dois dados.

D1/D2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fonte: Arquivos do autor.

Sobre a questão **“Qual é a melhor estratégia para vencer? Ela existe?”**. Essa questão não gerou um debate extenso e poucos alunos comentaram algo sobre ela. O professor apenas fez o comentário que para calcularmos a melhor estratégia era necessário interseccionar o melhor caminho com a melhor coleta de pontos. Não dedicamos muito tempo para essa questão pois o debate de outras questões responderam esta.

Sobre a questão **“Se eu errei muitas vezes, eu paro ou continuo tentando?”**. Diferente da questão anterior, esta questão foi, nas palavras dos alunos, interessante. Para respondê-la, baseei-me em uma questão que me foi feita enquanto aluno da graduação, indaguei aos alunos por meio de diálogo “Imagine que vocês estão prestes a serem operados sabendo que a probabilidade de sucesso da operação é 99%. Antes de ser operado vocês perguntam ao médico quantas operações ele já havia efetuado até o momento. Noventa e nove - respondeu o médico- e foram todas bem sucedidas. O que vocês fariam? Fariam a cirurgia ou não fariam? Por quê?”, a turma ficou dividida quanto a resposta, os alunos que responderam que não fariam argumentaram que “Se a cirurgia tem 99% de chance, então a cada cem cirurgias, uma falha, então se eu for fazer a centésima cirurgia, a chance de dar errado é bem grande.”, após o comentário do aluno, indaguei “Mas como que a Probabilidade vai saber que logo na sua cirurgia ela é a centésima a ser feita? A Probabilidade não tem memória, turma.”, evidenciamos para os alunos que se lançarmos um dado e neste obtermos o número um, no segundo lançamento a chance de obter o número um continua sendo 1/6, pois o dado não “lembra” que no lançamento anterior ele obteve o número um.

Um aluno comentou “Então se eu ficar muito tempo tentando na casa 12, não necessariamente eu precise esperar trinta e seis lançamentos para eu obter a soma 12, pode ser que eu consiga esse resultado em apenas um lançamento, mas também em mais de trinta e seis lançamentos?”. Esclarecemos aos alunos que mudar de casa não altera a Probabilidade da casa onde ele estava ou a casa para onde ele irá.

Notamos que o ato de comparar questões e comparar soluções foi uma alternativa que se mostrou eficaz em alguns casos, transladar soluções para o domínio dos alunos facilitou a compreensão dos mesmos, isso se fez evidente nesta questão que o professor trouxe o problema para um âmbito em que os alunos estavam mais acostumados, os mesmos mostraram compreender o problema e a solução após transladar os mesmos problemas para o lançamento dos dados.

Sobre a questão “**Ir para a casa 2 ou 3?**”. Esse tópico foi feito no sentido de “Se for necessário escolher o melhor caminho, por onde começo? Indo para a casa 2 ou casa 3?”. Os alunos não sabiam como resolver essa questão, portanto, fez-se necessário que o professor tivesse uma posição mais ativa neste momento. Abaixo segue a tabela construída junto com os alunos. Enquanto montávamos a tabela no quadro, íamos questionando os alunos sobre a probabilidade das condições.

figura 15: Resolução do questionamento “Ir para a casa 2 ou 3?”

Movimentação para a casa número 2			
Dado das condições	Dado numérico	P( c ) x P( n )	
>	1/6	4/6	4/36
<	1/6	1/6	1/36
=	1/6	1/6	1/36
≥	1/6	5/6	5/36
≤	1/6	2/6	2/36
Escolha	1/6	5/6	5/36
Total			18/36

Movimentação para a casa número 3			
Dado das condições	Dado numérico	P( c ) x P( n )	
>	1/6	3/6	3/36
<	1/6	2/6	2/36
=	1/6	1/6	1/36
≥	1/6	4/6	4/36
≤	1/6	3/6	3/36
Escolha	1/6	4/6	4/36
Total			17/36

Fonte: Arquivos do autor.

Dividimos os cálculos em duas etapas, analisamos todas as chances que o jogador de ir para a casa dois e posteriormente para a casa três. Junto com os alunos analisamos qual era a probabilidade de obter cada condição (maior, menor, maior ou igual, menor ou igual, igual e escolha livre) e obter os respectivos valores nos dados, sempre obedecendo a condição necessária, lembrando que para ir para a casa 2 ou 3 somente é necessário um dado numérico de seis lados, por exemplo, se o aluno quiser ir para a casa três e o dado das condições sorteia “maior”, a chance de obter um número maior que três é de  $3/6$  (4,5 ou 6), além disso explicamos para os alunos a relação entre o “ou” e o “e” com a finalidade de esclarecer quando multiplicam-se as probabilidades e quando somam-se as probabilidades. Sendo assim, a probabilidade de obtermos a condição “maior” e obter valores maior que três {4,5,6} é de  $3/36$ , pois é necessário multiplicar as probabilidades de  $1/6$  e  $3/6$ . A chance de ir para a casa dois é a soma de todas as probabilidades individuais de condição multiplicada pela probabilidade do dado numérico, ou seja, a chance de me mover para a casa dois é  $18/36$  e a chance de ir para casa três é  $17/36$ . Este questionamento foi importante para definirmos alguns conceitos de Probabilidade e Probabilidade Condicional.

Sobre a questão **“O colega escolher o número (condição para coleta de pontos na casa 1) importa para o andamento do jogo?”**. Nesta questão não foi necessário a participação ativa do professor. Um aluno comentou “Não importa, qualquer número escolhido vai ter a probabilidade de mais ou menos 16%”. O professor questionou “Bom, e se o adversário de vocês puder escolher para qual casa vocês deverão ir, esse fato importaria para o andamento do jogo?” a turma comentou que neste caso sim, pois algumas casas eram mais “fáceis” que outras, como foi respondido na questão anterior.

Sobre a questão **“O jogo depende da estratégia ou da sorte?”**. Essa questão gerou um debate importante para a pesquisa. Muitos alunos, desde o primeiro e segundo encontro, estavam percebendo a aleatoriedade presente no jogo, fato este que gerou debates no terceiro encontro. Para responder essa questão utilizamos a *lei dos grandes números*. Questionamos os alunos sobre o que eles achavam que aconteceria se cada um lançasse um dado numérico seis vezes, todos concordaram com o aluno D que comentou “Bom, professor, se a chance de obter cada número é de  $1/6$ , então deve, mais ou menos, cair todos os números pelo menos uma vez.”, a sugestão do aluno foi que se todos lançassem o dado seis vezes, cada aluno obteria todos os números {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Objetivando o esclarecimento do comentário do aluno D, o professor sugeriu que cada aluno lançasse o dado seis vezes e anotasse os resultados.

Após todos realizarem os lançamentos, houve um debate acerca dos resultados obtidos, alguns alunos ficaram surpresos, pois haviam obtido duas ou três vezes o mesmo número. Um aluno obteve quatro vezes o mesmo número. Esses fatos fizeram com que os alunos questionassem a Probabilidade, pois ela não respeitava os cálculos a priori. Posteriormente o professor solicitou os resultados de cada um e anotou em uma tabela no quadro, foi contabilizado quantas vezes cada número foi obtido nos lançamentos, agora com um total de setenta e dois lançamentos. Foi possível notar com o quadro que o número de vezes em que cada número foi obtido se aproximou de  $1/6$  com relação aos setenta e dois lançamentos, nas palavras do aluno A “[...] **então quanto mais a gente lança os dados, mais o número de vezes que cada número cai se aproxima do valor que a gente calcula?**”. Nota-se que os próprios alunos, evidentemente com uma matemática informal, se aproximaram do conceito da *lei dos grandes números*<sup>4</sup>. Percebe-se o papel ativo dos alunos na construção dos conceitos de Probabilidade.

O professor comentou que a estratégia é válida. Se a melhor estratégia for baseada em princípios de Probabilidade, a longo prazo esta estratégia irá vencer mais vezes, mas ainda assim é possível que outra estratégia que não seja a mais adequada possa ser a que levará o aluno à vitória.

Sobre a questão “**Vale a pena ficar na casa 12 tentando coletar pontos?**”. Vale ressaltar que esse questionamento foi feito, também, enquanto o aluno A estava jogando no segundo encontro, pois foi a estratégia adotada por ele. O professor comentou “[...] a casa doze garante quatro pontos, a mesma pontuação pode ser garantida somando os pontos das casas um e dez, das casas um e oito e das casas seis e dois. Basta calcularmos estas probabilidades e ver qual é a mais provável.”. A chance de obtermos quatro pontos somando a pontuação das casas um e dez é de  $3/216$ , isto é,  $1/6$  vezes  $3/36$ , aproximadamente 1,38%. A chance de obtermos quatro pontos somando a pontuação das casas um e oito é de  $5/216$ , ou seja,  $1/6$  vezes  $5/36$ , aproximadamente 2,31%. A chance de obtermos quatro pontos somando a pontuação da casa dois e seis é de  $5/1296$ , ou seja,  $1/36$  vezes  $5/36$ , aproximadamente 0,38%. Ainda assim, é mais vantajoso, nessas condições, tentar obter quatro pontos na casa doze, contudo, um aluno comentou “[...] professor, dependendo da estratégia, não vale a pena tentar retirar pontos na casa doze, por exemplo, eu consigo coletar cinco pontos somando a pontuação das casas seis e oito, a probabilidade é de aproximadamente 1,92% e na casa um e doze é de 0,46%.”.

---

4 Quanto mais tentativas são realizadas, mais a média aritmética dos resultados observados irá se aproximar da probabilidade real (ROSS, 2010)

Sobre a questão **A casa 7 faz diferença? Coletar pontos ou tirar pontos? Quais são as vantagens reais da casa 7?** Essa questão se fez presente em todos os encontros, os alunos indagaram essa questão mais de uma vez durante o jogo. Segundo os alunos, a casa sete é ineficaz caso seu adversário coletasse mais de cinco pontos antes da vitória, portanto, só seria válido utilizar a casa sete caso o adversário tivesse somente cinco pontos e estivesse rumo a casa doze, pois a regra do jogo permite que os jogadores retirem apenas um ponto de seu adversário, desta forma, se o adversário possui seis pontos, a casa se torna inútil, pois ainda assim o adversário teria os cinco pontos para vitória, caso a casa sete fosse utilizada.

Sobre a questão **“Vale a pena voltar para uma casa adjacente?”**. O professor complementou a questão comentando “Afinal, por que voltar para uma casa adjacente?”, um aluno pontuou “Mas professor, se eu estiver na casa doze e quiser coletar pontos na casa dez, caso eu ainda não tenha coletado pontos na casa dez, será que vale a pena?”. O professor questionou os alunos sobre o que é necessário para validar a hipótese de que é melhor voltar para a casa dez. Um aluno comentou “Temos que calcular a probabilidade de voltar para a dez e voltar para a casa doze.”, o professor comentou “[...] ainda assim, falta a probabilidade de coletar pontos na casa dez.”, posteriormente o professor sugeriu que juntos fizessem as contas.

Foi calculada a probabilidade de ir para a casa dez e de voltar para a casa doze utilizando o mesmo método da questão **“Ir para a casa 2 ou 3?”**, e também a probabilidade de coletar pontos na casa dez. A probabilidade de ir para a casa dez é de exatos 50%, a probabilidade de coletar pontos na casa dez é de aproximadamente 8,33% e a probabilidade de voltar para a casa doze é de aproximadamente 50,4%, portanto a chance de voltar para a casa dez, coletar pontos e voltar para a casa doze é de aproximadamente 50% vezes 50,4% vezes 8,33%, aproximadamente 2,1%. A chance de ficar na casa doze e tentar coletar pontos nessa casa são de aproximadamente 2,8%. Foi observado pelo professor, em conjunto com os alunos, que em alguns casos, é mais eficaz continuar na casa doze tentando a coleta de pontos do que voltar para casas adjacentes, visto que temos que levar em consideração a probabilidade de ir para a casa, coletar pontos e voltar para a casa de onde estávamos.

Sobre a questão **“Ir para a casa 5 pelas opções que ela me abre ou ir para a casa 6 pelos pontos que ela me dá?”**. O professor não respondeu este questionamento, entretanto, os alunos debateram entre si, segue um trecho dos comentários feito pelos alunos.

(Aluno A): *“Depende da minha estratégia. Por exemplo, se eu pretendo coletar pontos na casa seis, eu não preciso ir para a casa cinco.”*

(Aluno E): “Se eu quiser retirar pontos do meu colega, seria mais fácil eu ir para a casa cinco, mas aí eu abriria mão de não coletar pontos na casa seis, o que não é ruim, pois a casa oito tem a mesma chance da casa seis e ainda me concede três pontos ao invés de dois.”

(Aluno D): “Mas se eu quiser ir para a casa oito, devo ir para a casa cinco ou casa seis, qual é a mais provável?”

(Aluno A): “Se tu estiver na casa três, ainda vale a regra de ter que lançar o dado das condições, nesse caso teríamos que fazer a mesma conta que fizemos para definir qual era a melhor opção, ir pra casa dois ou pra casa três.”

(Aluno D): “Essa escolha é muito relativa, depende muito da estratégia do jogador.”

Sobre a questão **Qual é a melhor condição nas casas de bordas azuis?** Sobre essa questão o aluno D comentou “[...] é só ver qual é o resultado que mais aparece na tabela que mostra todos os resultados no lançamento de dois dados, professor, eu acho que ou será maior ou igual, ou menor ou igual, depende de qual número for.”, em contrapartida o aluno G comentou “Como o número sete é o que mais aparece, se o número da casa que eu quero ir for menor do que sete, eu tenho que escolher a condição maior ou igual, se o número da casa que eu quero ir é maior do que sete, então eu tenho que escolher a condição menor ou igual.”.

Sobre a questão **O jeito que se lança o dado influencia o resultado?** Esse tópico gerou outra discussão acerca da aleatoriedade. No momento em que o professor leu a questão para os alunos, um colega comentou “Mas se o jeito que eu lanço o dado alterasse o resultado, logo o lançamento dos dados não seria um evento aleatório, professor.”. Nota-se que o debate sobre a aleatoriedade do terceiro encontro fez-se presente como argumentação para a resposta dessa questão. Outro aluno comentou “Então se tivéssemos domínio das forças que agem sobre o dado o lançamento não seria um experimento aleatório?”, o professor respondeu que sim, e complementou comentando que a aleatoriedade é um termo complexo. Muitos alunos presentes na oficina eram discentes do curso de informática da mesma instituição, outro comentário que surgiu por parte de um aluno da informática foi “[...] e a aleatoriedade do computador, ela é realmente aleatória? Estou falando do Excel, que tem a função =ALEATÓRIOENTRE.”, o professor comentou que o nome correto para este caso é *pseudo aleatoriedade* e que, em softwares e computadores em geral, na prática, não é possível gerar de forma realmente aleatória valores de uma distribuição uniforme, entretanto, é possível gerar, de forma determinística, uma sequência de valores que parecem ser aleatórios e uniformemente distribuídos.

Neste encontro almejávamos o diálogo e a construção do conhecimento partindo, principalmente, dos alunos. Evidenciamos que as questões foram elaboradas pelos alunos, provindo de inquietações dos mesmos no que se refere ao jogo, estratégias e regras. Portanto, assim como Freire (2002), concordamos que

“Saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção. [...] sendo um ser aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, a suas inibições, um ser crítico e inquiridor, inquieto em face da tarefa que tenho - a ele ensinar e não a de transferir conhecimento.” (FREIRE, 2002, p.27)

Notamos neste encontro a autonomia do aluno quanto à tomada de decisão, quanto à argumentação e os comentários feitos acerca das questões. Fato este que se fez evidente quando o professor não precisou solicitar aos alunos tais ações. Os comentários e as argumentações partiram dos alunos, sem a necessidade de intervenção do professor. Outro ponto que merece destaque são as argumentações dos alunos fundamentadas por conceitos e cálculos matemáticos, percebemos em diferentes questões que os alunos, antes de respondê-las, realizavam os cálculos com o auxílio de tabelas e calculadoras e, em alguns momentos, com o auxílio do professor.

A crítica dos alunos nas respostas e comentários também é aparente, notamos que neste encontro os alunos estavam interagindo mais entre eles e, também, com o professor. Aconteceram diferentes diálogos entre os alunos e entre os alunos e o professor. A crítica, neste caso, como o ato de investigar precisamente o que o colega argumentou, se fez presente em muitos diálogos que apresentamos neste capítulo.

Destacamos a importância deste encontro para a construção de alguns conceitos de Probabilidade. É importante ressaltar o papel ativo do aluno como protagonista na construção do seu próprio conhecimento. Lembramos que em alguns momentos do encontro, os alunos fizeram conjecturas, críticas e demonstrações no que se refere às respostas para os questionamentos feitos pelos mesmos, inclusive, na questão que foi debatido sobre sorte e estratégia, um aluno se aproximou do conceito de Lei dos Grandes Números baseado em sua investigação e experimentação.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo almeja a reflexão dos objetivos específicos e também os questionamentos que surgiram durante a presente pesquisa, almejando o entrelaçamento da dissertação com a questão norteadora, retomando os principais aspectos abordados ao longo da pesquisa.

Iniciamos pela apresentação do processo de construção da dissertação. Primeiramente temos o questionamento acerca das contribuições dos registros das partidas de um jogo inédito para os alunos que participaram da oficina proposta neste trabalho, objetivando a construção de conceitos de Probabilidade. Pensando nisso, a questão que norteou nossa pesquisa foi: **Como as impressões dos alunos acerca dos registros feitos pelos mesmos por meio da descrição das partidas de um jogo criado pelo autor podem contribuir para a construção de conceitos de Probabilidade?**

Tínhamos como objetivo investigar os potenciais e as contribuições das análises dos alunos aos registros criados pelos seus colegas, utilizando como objeto de estudo e investigação um jogo criado pelo autor desta dissertação e seu orientador enquanto aluno da graduação. Foi também um objetivo desta pesquisa analisar quais são os potenciais do jogo associado aos registros, desde a construção até a análise crítica destes, no tocante a construção do conceito de Probabilidade em uma turma de Ensino Médio. Foram objetivos específicos: **identificar conceitos de Matemática no jogo criado pelo autor, identificar evidências de pensamento crítico nas concepções e estratégias utilizadas pelos estudantes no decorrer do jogo, assim como a autonomia destes e investigar o processo de construção dos registros e as análises dos alunos no tocante às estratégias adotadas pelos seus colegas.**

Iniciamos fazendo as reflexões no que se refere aos objetivos específicos. Destacamos que inicialmente o jogo era diferente do que foi proposto nesta dissertação. Em sua primeira versão não havia a possibilidade de retirar pontos na casa sete e a organização dos níveis no tabuleiro eram diferentes. Todas as alterações do jogo ocorreram enquanto o autor foi aluno do mestrado em uma oficina ministrada para os alunos de uma turma da graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Nesta oficina solicitamos aos educandos sugestões para melhorar o jogo e suas regras, foi a partir das sugestões destes alunos que implementamos as novas regras no jogo. Neste sentido, os diálogos entre os alunos e também entre os alunos e o professor/pesquisador feitas em sala de aula que objetivavam a construção de conceitos matemáticos diferem da pesquisa feita

enquanto aluno da graduação em muitos sentidos, principalmente no que se refere à construção dos registros e análise destes.

Foram alvo de diálogos, debates e reflexões em nossos encontros, principalmente, temas relacionados com Probabilidade, visto que o jogo se trata de lançamento de dados e o nosso problema de pesquisa refere-se ao ensino de Probabilidade. Destacamos que todos os conceitos construídos pelos alunos na oficina proposta resultaram dos encaminhamentos que o jogo proporcionou. Refletimos e construímos os conceitos de: Probabilidade, Probabilidade Condicional, possibilidades no lançamento de um ou mais dados e Lei dos Grandes Números. Sobre a Lei dos Grandes Números, julgamos importante dar destaque para o fato dos alunos construírem e se aproximarem desta lei com base em suas observações e experimentos, como pode ser percebido pelo comentário do aluno A “[...] então quanto mais a gente lança os dados, mais o número de vezes que cada número cai se aproxima do valor que a gente calcula?”. A autonomia e o protagonismo dos alunos quanto à construção de conhecimentos se faz presente durante os quatro encontros propostos.

Sobre nosso segundo objetivo específico, concordamos e conduzimos nossa pesquisa sob a perspectiva de crítica apresentada por Skovsmose (2001), para o autor, a noção de crítica está vinculada ao ato de investigar, neste sentido a crítica implica em reflexões, ações e reações. Destacamos também o esforço do professor/pesquisador de não limitar a curiosidade do aluno, almejando a autonomia do mesmo. Neste sentido, concordamos com Freire (2002) quando este afirma que é

[...] fundamental [...] que o professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que professor e alunos se assumam epistemologicamente curiosos. Neste sentido, o bom professor é o que consegue, enquanto fala trazer o aluno até a intimidade do movimento de seu pensamento. (FREIRE, 2002, p.52)

Durante a descrição e a análise dos encontros podemos perceber a autonomia e a reflexão crítica dos alunos quanto aos objetivos de cada encontro. É notável que os educandos adotaram posturas de autonomia quanto às regras e estratégias adotadas no primeiro encontro, que é evidenciado pelos comentários dos alunos. Um exemplo foi a observação do aluno B “O asterisco deixa o jogo interessante, nos faz refletir sobre a escolha que devemos adotar.”, este se referia ao asterisco do dado das condições, que possibilita ao aluno escolher a condição

desejada dentre: maior, menor, maior ou igual, menor ou igual, ou igual. Outro momento do primeiro encontro que evidencia a presença de pensamento crítico do aluno é aparente no diálogo entre os alunos que jogaram formando um trio em que a aluna C questiona se o jogo depende da sorte ou da estratégia e os colegas sugerem jogar utilizando a mesma estratégia e refletir sobre o resultado da partida. Neste momento não é de nosso total interesse avaliar o método que os alunos utilizaram para investigar a situação na qual se encontravam, mas sim, perceber a crítica e a autonomia que circunda o problema, isto é, a busca por respostas.

Nota-se que a crítica, muitas vezes está atrelada ao ato de perguntar, ou seja, a investigação, reflexão, ação e reação derivaram, em nossa pesquisa, continuamente das inquietações dos alunos, o que foi possível observar nos quatro encontros sendo mais evidente no quarto e último encontro, em que os alunos foram convidados a responder as dúvidas e inquietações formuladas por eles no primeiro e no segundo encontros. No quarto encontro, os alunos se mostraram autônomos e críticos constantemente. Como mencionamos anteriormente, o aluno A se aproximou do conceito de Lei dos Grandes Números alicerçado por sua própria investigação e observação do experimento feito no encontro com o lançamento de dados. Notamos este fato como um ato de criticidade e autonomia, assim nos aproximando de Freire (2002) quando este comenta que é ideal que o professor saiba

[...] que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.[...] sendo um ser aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, a suas inibições, um ser crítico e inquiridor, inquieto em face da tarefa [...] a ele ensinar e não a de transferir conhecimento. (FREIRE, 2002, p.27)

Sobre o último objetivo específico: **investigar o processo de construção dos registros e as análises dos alunos no tocante às estratégias adotadas pelos seus colegas.** No primeiro encontro os alunos foram convidados a jogar de forma despretensiosa, isto é, almejávamos a adaptação dos alunos frente ao jogo inédito. No segundo encontro convidamos os alunos a jogar e registrar a partida, descrever a movimentação e a coleta de pontos. É importante destacar que em nenhum momento o professor/pesquisador se opôs aos registros criados pelos alunos, pois percebemos que a construção do registro também faz parte da construção crítica e autônoma dos educandos.

Destacamos a criatividade dos alunos na construção dos registros. Na seção 3.2 dissertamos sobre três diferentes tipos de registros criados, desde o mais simples até o mais

complexo em termos de disposição e quantidade de informações apresentadas no registro. Os diferentes tipos de registros remetem novamente a criticidade do aluno diante dos objetivos desta construção. Ainda que alguns registros fossem simples, todos os alunos conseguiram compreender e interpretar as estratégias adotadas pelos colegas.

Evidenciamos, também, o fato de termos um aluno com deficiência visual e a importância deste aluno para a pesquisa, em função da construção e análise do registro construído por ele. A presença deste aluno não era de nosso conhecimento até iniciarmos os encontros, portanto não havíamos preparado material adaptado. O aluno sugeriu utilizarmos um tabuleiro adaptado que pertencia à instituição. Quanto à construção dos registros, o próprio aluno sugeriu gravar em áudio os seus movimentos e coletas de pontos, novamente evidenciando sua autonomia. Foi adquirido um gravador de áudio e solicitado o auxílio de seu colega/adversário na utilização do aparelho no que se refere a gravação. Neste sentido, não esperávamos a construção de um registro em áudio, a ideia partiu do aluno, percebemos esse fato como importante frente à construção e análises dos registros e suas implicações.

Quanto a análise dos registros, no terceiro encontro os alunos foram convidados a criticar os registros de seus colegas. Cada aluno trocou seu registro com um colega que não fosse o seu atual adversário. Convidamos os alunos a recriarem a partida do colega com base nos registros criados pelos mesmos, almejando a análise da estratégia adotada por estes. Após os alunos recriarem as partidas, foram convidados a responder quatro questões formuladas pelo professor/pesquisador em conjunto com a orientadora:

- Você consegue recriar o jogo?
- É necessário melhorar ou alterar o registro do colega?
- Faça uma crítica acerca da estratégia/registo do colega.
- Faça indagações/hipóteses acerca da “melhor estratégia” ou “estratégia ideal”.

Todos os alunos responderam às questões, alguns de forma simples, outros com um olhar mais apurado e crítico. Podemos afirmar que todos conseguiram recriar as estratégias dos colegas, porém, houve muitas críticas quanto à quantidade de informações nos registros. Alguns alunos tinham o conhecimento da estratégia, mas não tinham conhecimento das tentativas dos colegas no lançamento dos dados. Essas características não se fizeram presentes em todos os registros, evidenciando as diferentes configurações e formatos.

Quanto às críticas feitas às estratégias adotadas pelos colegas, notamos que a partir do terceiro questionamento os alunos passaram a utilizar a Matemática mais frequentemente para fundamentar suas críticas e sugestões, como se faz evidente no comentário do aluno M “[...] a estratégia possui falhas em vários pontos. A extração de pontos da casa 1 implica uma quantidade substancial de tempo sendo gasto por um ganho desprezível de pontos. Apesar da chance de [...] acertar o número na casa 1 ser maior do que nas demais casas com coleta de pontos [...], acredito que a perda de tempo com o ponto na casa 1 não seja justificável. A ida até a casa 2, se não para pegar pontos (o que não teria sentido, visto a chance de coleta) não daria nenhuma vantagem ao jogador, e até o prejudicaria se tentasse coletar pontos na casa 6 ou 8. [...] A ida para a casa 10 poderia ser otimizada indo para a casa 11, já que ela se situa mais nos extremos que a casa 10, e se sortear uma condição menor que, as chances de se obter um número menor são maiores.”. A construção e a análise dos registros foram fundamentais para respondermos a nossa questão de pesquisa.

A questão de pesquisa que orientou esta dissertação diz respeito à construção e análise dos registros. Almejávamos com ela a reflexão no que se refere às contribuições das análises dos registros no que se refere à construção do conceito de Probabilidade, isto é: De que forma a análise destes registros podem contribuir para a construção destes conceitos?

Objetivando a reflexão e a resposta da pergunta diretriz, julgamos necessário antes responder as questões: Por que jogar com criticidade? Por que fazer indagações sobre o jogo, as estratégias e as regras? Por que recriar e analisar os registros dos colegas?

No segundo encontro solicitamos que os alunos jogassem com um “olhar” crítico e apurado no que se refere a tomada de decisões e estratégia com o objetivo de perceber a criticidade do aluno quanto a estas. Esperávamos que questionassem as próprias decisões a fim de obter a melhor estratégia para conquistar a vitória, para tanto, convidamos os alunos a anotarem os próprios questionamentos, que foram comentados e respondidos pelos alunos em conjunto com o professor/pesquisador no quarto encontro. Destacamos a importância da crítica às próprias estratégias, pois as indagações e inquietações foram alicerce da construção dos conceitos de Probabilidade e provieram do ato de jogar e criticar as decisões de movimentação e coleta de pontos. Cabe aqui evidenciar a importância de questionar, de fazer perguntas, de sentir-se inquieto com as próprias decisões, pois concordamos com Freire e Faundez (2017) quando os autores afirmam que toda resposta provém da pergunta e não o contrário, isto é, a busca por resposta, a fundamentação e a argumentação advém da pergunta, sendo assim, julgamos como sendo extremamente significativo o ato de perguntar e buscar por respostas.

A recriação da partida dos colegas foi importante para o presente trabalho, pois possibilitou aos alunos utilizarem a Matemática como fundamentação para as argumentações, isto é, a Matemática foi um meio para alicerçar a crítica e a argumentação dos alunos.

Neste sentido, **Como as impressões dos alunos acerca dos registros feitos pelos mesmos por meio da descrição das partidas de um jogo criado pelo autor podem contribuir para a construção de conceitos de Probabilidade?** A questão tem enfoque na análise dos registros. Todos os encontros contribuíram com dados para a reflexão e a resposta da questão de pesquisa. O primeiro encontro contribuiu com a adaptação do aluno perante o jogo. O segundo encontro com a descrição do jogo e com a transcrição das inquietações dos alunos. O terceiro encontro com a recriação da partida dos colegas e análise dos registros e estratégias adotadas por eles. O quarto encontro com a reflexão e respostas para as indagações e inquietações dos alunos durante o primeiro e segundo encontros.

Destacamos que as inquietações e as dúvidas dos alunos provieram das análises do próprio jogo/registro e também dos registros dos colegas. Novamente salientamos a importância do questionamento em sala de aula, concordamos com Freire e Faundez (2017) quando estes propõem que antes de qualquer ensinamento, o professor deve ensinar a perguntar, pois é pela pergunta que se traça o caminho do ensino.

Neste sentido a análise dos registros dos colegas está vinculada à ideia de crítica de Skovsmose (2001), isto é, investigação, reflexão, ação e reação. Durante as análises feitas pelos alunos foram levantados muitos questionamentos que necessitavam de respostas. Neste sentido, julgamos que todos os questionamentos merecem ser refletidos e investigados, independente do questionamento, para Freire e Faundez (2017) nenhum questionamento é irrelevante e todos, sem exceção, merecem o comprometimento ‘o e respeito do educador.

Os dados coletados/produzidos levam-nos a acreditar que as análises dos registros atreladas às inquietações dos alunos possibilitaram ao professor e aos discentes buscar por respostas utilizando como alicerce a Matemática, como é evidente, por exemplo, no comentário da aluna H “A estratégia transcrita foi bem simples, pois o objetivo seria coletar pontos na casa 6 e 8 e posteriormente avançar para a casa 12. Seria esta a melhor estratégia?”. Este como os outros questionamentos levantados pelos alunos no primeiro e segundo encontro possibilitaram diálogos e reflexões que posteriormente favoreceram a construção de conceitos de Probabilidade, como a ideia de aleatoriedade, conceito de Probabilidade, Probabilidade condicional e a aproximação de um aluno do conceito de Lei dos Grandes Números. Segundo o

aluno A “[...] então quanto mais a gente lança os dados, mais o número de vezes que cada número cai se aproxima do valor que a gente calcula?”.

É notável durante os quatro encontros, mas principalmente no quarto encontro, a autonomia e a criticidade dos alunos na busca por respostas para as inquietações dos mesmos, gerando diálogos construtivos no que se refere ao ensino e aprendizagem de Probabilidade. Neste sentido, as impressões dos alunos acerca dos registros dos colegas e dos próprios possibilitaram a construção de questões que posteriormente serviram como suporte à construção dos conceitos e noções mencionados acima.

Até o momento não citamos a importância da Modelagem Matemática e Modelos para esta dissertação. Como mencionamos seções 1.1 e 1.2, a Modelagem Matemática tem diferentes perspectivas, porém acreditamos que em nossa oficina nos aproximamos muito da perspectiva apresentada por Barbosa, para este, a Modelagem Matemática é “[...] um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001, p.6), entendendo como “outras áreas da realidade” aquelas como realidade virtual, a realidade vivida pelo aluno, por exemplo, em nossa pesquisa, o ato de jogar.

Muitas vezes a Modelagem Matemática é vinculada com a construção/criação de modelos, haja vista que há autores que defendem que a construção/criação de modelos não seja uma obrigatoriedade, mas sim, uma decorrência do ato de fazer Modelagem Matemática. Neste sentido, questionamos: **os registros feitos pelos colegas são, de fato, modelos?**

Segundo Ferreira (2009) um modelo é aquilo que serve de exemplo, que pode ser replicado. Em nossa prática, os registros criados pelos colegas por meio da descrição das partidas serviram de exemplo para serem recriadas pelos colegas, isto é, os alunos construíram os registros a partir da descrição das suas estratégias e num segundo momento os colegas utilizaram os registros destes para recriarem as partidas e analisarem as estratégias por eles adotadas. Baseado no fato de que os registros serviram de exemplos para outros alunos, julgamos que estes podem ser definidos como modelos.

Ainda assim, o conceito de modelo é amplo, podendo variar de autor para autor. Para Bassanezi (2002), um modelo matemático é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. (BASSANEZI, 2002, p.20). Para Barbosa (2008) um modelo matemático é qualquer “[...] representação matemática da situação, por escrito [...]” (Barbosa, 2008, p.48). Para Dalla Vecchia um modelo é um “exemplar de uma

situação que se mostra por meio de uma linguagem estruturada por ideias matemáticas.” (DALLA VECCHIA, 2012, p. 116).

Baseado nas concepções de modelos dos autores acima e, também, buscando compreender como os registros que os alunos construíram se entrelaçam com o ato de Modelagem Matemática realizado em nossa prática, questionamos:

### **1. O processo de modelagem matemática pode assumir a construção de um modelo não matemático, indagá-lo e investigá-lo por meio da Matemática?**

Acima citamos três autores que conceituam modelos matemáticos tendo como principal característica a simbologia matemática, também, para Barbosa (2008), o modelo matemático é amplo, podendo ser representado por tabelas, gráficos, fórmulas, expressões matemáticas e “[...] todo tipo de registro matemático escrito que se refira à situação-problema [...]” (BARBOSA, 2008, p.48).

Barbosa (2009) apresenta três modos distintos de identificar um modelo matemático: *modelo como justificativa* que tem como função “[...] sustentar a introdução de um novo conceito, oferecendo aos alunos uma justificativa.” (BARBOSA, 2009, p.80), *modelo como definição* que visa “[...] o conceito que os alunos devem dominar” (BARBOSA, 2009, p.80) e, por fim, *modelo como estruturante* no qual “[...] partes do discurso da matemática escolar foram deslocados para enquadrar um fenômeno” (BARBOSA, 2009, p.80). Neste sentido, consideramos os registros construídos pelos alunos em nossa prática como modelos, pois esses descrevem e referem-se a uma situação-problema que, em nossa prática, foi a descrição da partida de jogo, almejando a crítica e tendo um objetivo pedagógico.

No entanto, para Dalla Vecchia é “[...] possível compreender que a ideia de modelo matemático pode estar associada a distintos aspectos, tais como os relativos a sua simbologia, a sua finalidade específica e a sua relação com a realidade” (DALLA VECCHIA, 2012, p.116).

Entendemos, nesta pesquisa, o modelo matemático relacionando-o com a sua finalidade, sendo possível ou não a utilização de uma simbologia matemática. Um exemplo de modelo em que o aluno não utiliza simbologia matemática é apresentado na figura 8, na seção 3.2, entretanto, todos os alunos realizaram o mesmo tipo de investigação em todos os modelos construídos na prática desta pesquisa. Ainda que o modelo utilizado em nossa pesquisa não tenha, necessariamente, uma simbologia matemática, a análise feita sob uma perspectiva

crítica matemática produziu resultados que diferem apenas no sentido de expressão da linguagem, no que Dalla Vecchia (2012) entende como modelo matemático.

Baseando-nos nas concepções de Dalla Vecchia (2012) e Barbosa (2009), assumimos em nossa pesquisa o registro do aluno como sendo um *Modelo de Descrição*, que diferentemente de Dalla Vecchia (2012) e Barbosa (2009; 2001), não necessariamente assume uma linguagem/simbologia matemática. Em nossa pesquisa este modelo advém da descrição da partida do jogo, isto é, o aluno é convidado a descrever a estratégia, a movimentação e a coleta de pontos para posteriormente outro aluno fazer a análise deste modelo, isto é, recriar a partida com base no registro do colega, criticar e responder as questões feitas pelo professor mencionadas na seção 3.3, convergindo para a concepção de Modelagem Matemática de Barbosa (2001), para o autor, são “[...] ambientes de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade [...]” (BARBOSA, 2001, p.6).

Ressaltamos também a importância do aluno A para a discussão no que se refere à construção de modelos. Visto que Barbosa (2008) refere-se ao modelo como escrito, cabe o questionamento: Um modelo pode assumir um formato não escrito? Segundo Gilbert, Bouler e Elmer (2000), citado por Barbosa (2009), os modelos podem ser classificados

[...] em termos de sua representação: concreto o qual envolve materiais manipuláveis; verbal, que consiste em descrições de um sistema; visual, o que envolve gráficos, diagramas, animações, etc.; gestual, o que envolve uso do corpo ou partes do corpo; e finalmente, a simbólica, que consiste de representações pictóricas, fórmulas, expressões matemáticas. (BARBOSA, 2009, p.70)

Neste sentido, compreendemos o modelo, também, na forma verbal, falada, que segundo Gilbert, Bouler e Elmer (2000) consiste na descrição de sistemas. Portanto, alicerçados pelo estudo do Estado de Conhecimento e também nas concepções de modelos dos autores citados neste capítulo e no capítulo 1, adotamos os registros como *Modelo de Descrição: sendo um exemplar escrito ou verbal da descrição das decisões dos alunos referentes a uma partida de um jogo.*

Entendemos que ainda há lacunas no tocante às contribuições deste tipo de modelo para a Modelagem Matemática no Ensino. Almejamos, futuramente, a continuação desta pesquisa objetivando o aprofundamento deste tema atrelado à Educação Matemática e no

Ensino de Matemática em outros Ambientes de Aprendizagem, que não só aquele pautado sob o uso de Jogos, mas almejando sempre os Cenários para Investigação de Skovsmose (2001).

O jogo, por sua vez, teve uma função importante na pesquisa. A prática desenvolvida com os alunos foi, de certa forma, um entrelaçamento entre Modelagem Matemática, construção de registros/modelos, Jogos e Pedagogia da Pergunta. No sentido da Modelagem Matemática, referimo-nos ao ato de investigar situações reais por meio da matemática, o que se fez evidente nas críticas dos alunos aos registros/modelos dos colegas, que por meio da matemática investigaram e analisaram as estratégias adotadas pelos mesmos. A Pedagogia da Pergunta contribuiu com as reflexões acerca das inquietações, do ato de perguntar e das possibilidades que resultam das inquietações dos alunos, isto é, das contribuições do ato de questionar no ambiente educacional no que se refere à construção do conhecimento. O jogo, em nossa pesquisa, foi o mediador para unir a Modelagem Matemática, as construções dos registros/modelos e a Pedagogia da Pergunta. O ato de jogar, principalmente, o jogo descrito neste trabalho foi importante para alcançarmos os objetivos da pesquisa e responder a questão diretriz.

Além de servir como mediador, o jogo também teve a função de aproximar o aluno para as tarefas propostas. No terceiro encontro solicitamos que fizessem críticas ao jogo e suas regras, dentre todas as respostas destacamos os comentários feitos pelos alunos M e G, a aluna M respondeu “Gostei muito do jogo! Não tenho críticas negativas em relação a ele. Acredito que poderíamos fazer, deste jogo, um jogo de tabuleiro na caixinha, com uma tabela com as regras, os dados e os peões, assim disponibilizando-os a todos.”, o aluno G comentou “O jogo é interessante e divertido podendo ter momentos muito tensos onde você e seu inimigo estão a poucos passos da vitória e ele começa a tentar tirar pontos de força. Eu gostei do jogo [...]”. Nota-se que o aluno G mencionou a “tensão” que o jogo causou, convergindo para o que Huizinga (2007) comenta sobre a “tensão” ser um elemento do jogo importante pois por parte do aluno/jogador “Há um esforço para levar o jogo até o desenlace, o jogador quer que alguma coisa “vá” ou “saia”, pretende ganhar” à custa do seu próprio esforço.” (HUIZINGA, 2007, p.14)

No que se refere ao jogo, entendemos que ainda há lacunas para serem preenchidas, tanto no tocante ao jogo no ensino de modo geral, mas também no jogo específico utilizado nesta pesquisa. Alguns alunos pontuaram que as regras poderiam estar mais claras e que o jogo poderia ter mais opções de caminhos para percorrer, isto é, um tabuleiro maior. Sobre o jogo no

ensino, julgamos que ele cumpriu o objetivo de envolver o aluno na prática pedagógica, contribuindo para o envolvimento e imersão do aluno.

Sobre a prática e a postura do professor, consideramos que o potencial da aplicação do jogo, aliado à construção dos modelos e Pedagogia da Pergunta de Freire e Faundez (2017) depende muito da postura adotada pelo professor. Durante a dissertação comentamos sobre alguns comportamentos do professor que influenciaram de forma positiva ou negativa no que se refere à mediação, tendo vistas para o protagonismo dos educandos na construção do conhecimento. Acreditamos que o professor/pesquisador em nenhum momento desencorajou a curiosidade do aluno, respeitando e se comprometendo com todos os questionamentos dos alunos, o que se mostrou positivo frente à introdução dos conceitos de Probabilidade, possibilitando diálogos que oportunizaram o desenvolvimento crítico e autônomo dos alunos e também do professor.

Podemos afirmar que a presente pesquisa tem o potencial de contribuir para os estudos e avanços no tocante a Modelagem Matemática no Ensino de Matemática. Como professor sinto-me satisfeito por ter alcançado os objetivos pedagógicos propostos para a oficina. Como pesquisador, fico contente por saber que este trabalho, sobretudo o jogo, poderá ser utilizado por outros professores, possibilitando mais pesquisas que contribuam para o Ensino de Matemática. Por último, esta pesquisa, acima de tudo, despertou no autor/professor/pesquisador a satisfação em perceber no aluno a curiosidade e a busca por respostas para as suas inquietações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1. ed., 2ª reimpressão - São Paulo: Contexto, 2016.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como?** Veratini, n. 4, p. 73 - 80, 2004.

BARBOSA, J. C. **As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem Modelagem Matemática**. Acta Scientiae, v.10, n. 1, p. 47-50, 2008.

BARBOSA, J. C. **Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica**. Alexandria Revista de educação em Ciências e Tecnologia, v. 2. n. 2, p. 69-85, 2009.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Ed. Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3º ed. São Paulo, Contexto, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Ed. Contexto, 2004.

BAWDEN, D. **Information and digital literacies: a review of concepts**, Journal of Documentation, Vol. 57 Issue: 2, pp.218-259, <https://doi.org/10.1108/EUM0000000007083>.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução M.J. Alvarez, S.B. Santos e T.M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M.; SKOVSMOSE, O. **The ideology of certainty in mathematics education**. For the learning for mathematics, Kingston, v. 17, n. 3, p. 17-23, nov. 1997.

CUNHA, A. G. da. **Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.

DALLA VECCHIA, R. **A modelagem matemática e a realidade do mundo cibernético**. 2012. 275 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/102151>>.

DIAS, L. C. **“saindo da zona de conforto”: investigando as ações e astomadas de decisão de alunos-consumidores do 8º ano do ensino fundamental em situações-problema financeiro-econômicas**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal d Juiz de Fora . 2017.

- FALKEMBACH, G. A. M. **O Lúdico e os Jogos Educacionais**. Disponível: <[http://penta3.ufrgs.br/midiasedu/modulo13/etapa1/leituras/arquivos/Leitura\\_1.pdf](http://penta3.ufrgs.br/midiasedu/modulo13/etapa1/leituras/arquivos/Leitura_1.pdf)> Acesso em: 7 de junho de 2018.
- FERREIRA, A. B. H. **Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa**. 3ª ed. totalmente revista e ampliada. -Rio de Janeiro : Nova Fronteira, 1999.
- FERREIRA, A. B. H. **Dicionário Aurélio Eletrônico**. Positivo, 2009.
- FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1975.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**. São Paulo: Paz e Terra, 2015.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 2002.
- FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 34. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002.
- FREIRE, P; FAUNDEZ, A. **Por uma pedagogia da pergunta**. 8. ed. Rio de Janeiro / São Paulo : Paz e Terra, 2017.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.
- GILBERT, J. K.; BOULTER, C. J.; ELMDER, R. Positioning models in science education and in design and technology education: In; GILBERT, J. K.; BOULTER, C. J. (Eds.). **Developing models in science education**. Dordrech: Kluwer, 2000. p. 3-17.
- GRANDO, R. C. **O jogo na educação: aspectos didático-metodológicos do jogo na educação matemática**. Unicamp, 2001.
- HESTENES, D. **Notes for a modeling of science, cognition and instruction**. Amsterdam: University of Amsterdam, 2006, p.34 – 65. Disponível em: [http://modeling.asu.edu/R&E/Notes\\_on\\_Modeling\\_Theory.pdf](http://modeling.asu.edu/R&E/Notes_on_Modeling_Theory.pdf). Acesso em 07 de março de 2019.
- HUIZINGA, J. **Homo Ludens**. 5 ed. São Paulo: Perspectiva, 2007.
- JOHNSON-LAIRD, N. P. **The history of mental models**. 2005. Disponível em: <http://mentalmodels.princeton.edu/papers/2005HistoryMentalModels.pdf>. Acesso em 22 de novembro de 2018.
- KAISER, G.; SRIRAMAN, B. **A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education**. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v.38, n. 3, p.302-310, 2006.
- KISHIMOTO, T. M. (org). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 9a ed. - São Paulo : Cortez, 2006.
- KODAMA, H. M. Y; SILVA, A. F. **Jogos no Ensino da Matemática**. II Bial da Sociedade Brasileira de Matemática, UFBa. 2004.

LÜDKE, M.; ANDRÉ M. E.D.A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. Rio de Janeiro: EPU. 2017.

MACHADO, N. J. **Matemática e Realidade**. 3ª ed. São Paulo: Cortez e Editores Associados, 1991.

MACEDO, L, PETTY, A. L. S, PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações-problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática – SBM, 2006.

MOROSINI, M. C. **Estado do conhecimento e questões do campo científico**. Educação, Santa Maria, v.40, n. 1, p. 101-116, 2015.

NISS, M. **Aim sand scope of application sand Modelling in Mathematics Curricula**. Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics (22-33). Chichester: Ellis Horwood. (1989)

REIS, K. C. A. **Jogos e registros orais e gráficos: desenvolvimento da criança no campo conceitual aditivo**. Dissertação (mestrado) – Universidade de Brasília. 2017. Disponível em: <[http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/31397/1/2017\\_KeilaCristinadeAraújo.pdf](http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/31397/1/2017_KeilaCristinadeAraújo.pdf)>.

ROSS, S. **Probabilidade: Um curso moderno com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SILVA, M. R. G. **Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em matemática e seu funcionamento em sala de aula de matemática**. Rio Claro: PGEM/UNESP, 1993. 245p. (Dissertação, Mestrado).

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação**. Bolema - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. (2001). **Educação Matemática Crítica (a questão da democracia)**. São Paulo: Papirus.

SKOVSMOSE, O. **Reflective Knowledge: its relation on the mathematical modelling process**. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., London, v. 21, n.5, p. 765-779, 1990.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica**. Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo, Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas, SP: Papirus, 2008.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. Campinas – SP: Papirus, 2014.

WEINGARTEN, T.; DALLA VECCHIA, R. **Problema, sentido e significado: a multiplicidade em Modelagem Matemática**. Ciênc. educ. (Bauru) [online]. 2017, vol.23, n.1, pp.219-235. ISSN 1516-7313. <http://dx.doi.org/10.1590/1516-731320170010013>.

## APÊNDICE

### PLANEJAMENTO DE OFICINA

**Tempo Estimado:** 8 horas.

**Material necessário:** Quadro branco, materiais básicos escolares, calculadoras (opcional), tabuleiro específico e dados específicos.

#### **Objetivos:**

- Jogar de forma despreziosa, almejando o reconhecimento e adaptação frente ao jogo inédito;
- Jogar sob um olhar crítico no que se refere à tomada de decisões;
- Construir questões acerca do jogo, estratégias e regras;
- Descrever as partidas, isto é, a movimentação, coleta de pontos e estratégias;
- Recriar o jogo do colega com base no registro do mesmo;
- Fazer análises críticas acerca do registro/descrição do colega;
- Fazer análises críticas acerca das estratégias do colega;
- Construir conceitos e noções de Probabilidade e afins.

#### **Metodologia**

Aula expositiva dialógica, com atividades em duplas.

#### **Descrição do Jogo**

**Número de jogadores:** Dois jogadores, podendo estender a grupos.

**Material:** Um tabuleiro por jogador e dois dados de seis faces, numeradas de 1 a 6. Um dos dados será denominado “**Dado das Condições**”, que irá indicar quais resultados o jogador deve obter.



**Objetivo do jogo:** Mover seu tóten até a última casa do tabuleiro (casa número 12 na figura) de forma a somar pelo menos cinco pontos de força (raio). Sendo que existem quatro tipos de pontos, cada uma com um valor diferente.

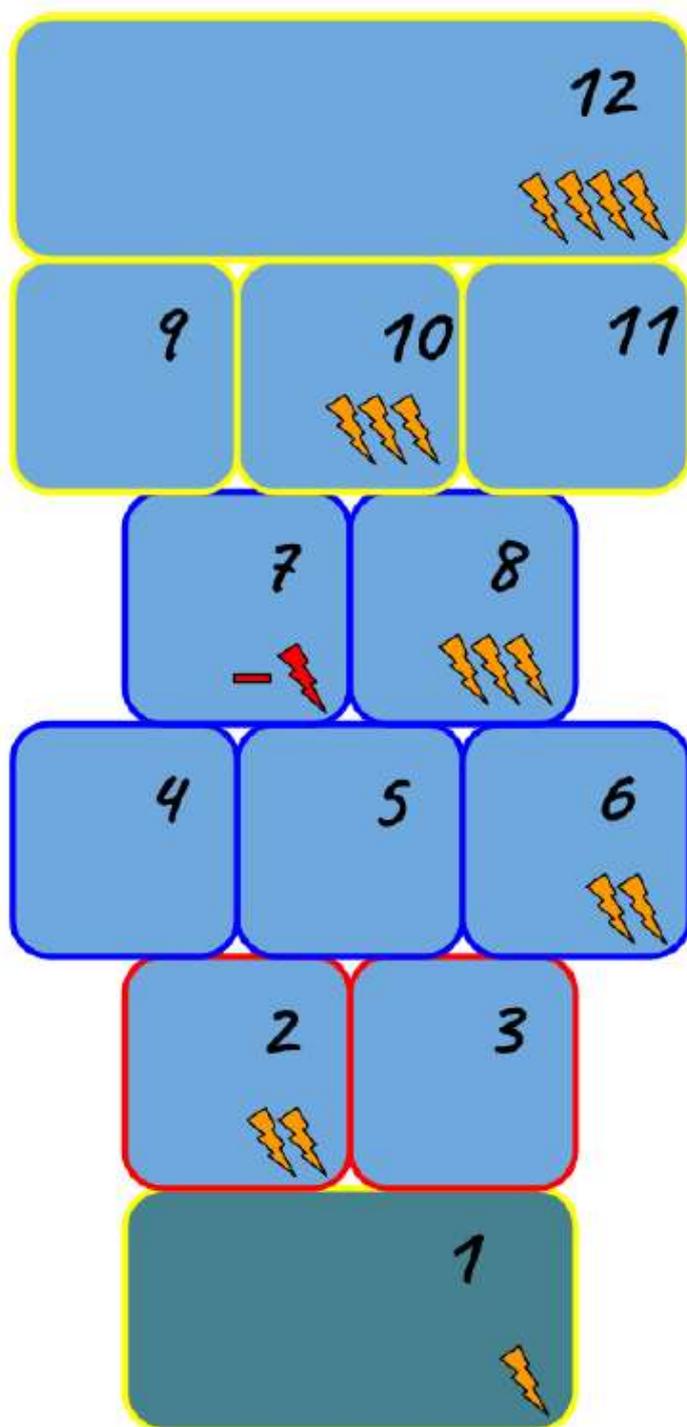
### TABULEIRO

**Nível 1 (Base):** O nível um abrange somente uma casa (1), nesse nível para gerar pontos de força é necessário apenas um dado, os pontos de força gerados nesse nível valem um ponto;

**Nível 2:** O nível dois abrange as casas 2,3,4,5 e 6, nesse nível serão utilizados dois dados para fazer os lançamentos. Os pontos de força gerados nesse nível valem dois pontos;

**Nível 3:** O nível três abrange as casas 7,8,9,10 e 11, nesse nível serão necessários dois dados para fazer os lançamentos, os pontos de força gerados nesse nível valem três pontos;

**Nível 4:** O nível quatro é a linha de chegada, a casa 12. Você não irá mais mover as tropas, mas após atingir esse nível você poderá tentar gerar pontos de força que valem quatro pontos;



**Condição de vitória:** Chegar na base inimiga (casa nº 12) e ter pelo menos 5 pontos de força.

**Movimento**

Avanço: Para a casa 12.

Missão: - Lançar o dado das condições;  
- Lançar **dois** dados numéricos e obter o resultado que satisfaça a condição associada ao nº da casa escolhida.

**Geração de pontos - força: +4 pontos;**

Missão: Lançar **dois** dados e obter a soma igual ao número da casa em que estiver: (12)

**Movimento**

Avanço: Para as casas 7, 8, 9, 10 ou 11;

Missão: - Escolher a casa (7, 8, 9, 10 ou 11);

- Escolher uma condição;  
- Lançar **dois** dados numéricos e obter o resultado que satisfaça a condição associada ao nº da casa escolhida.

**Geração de pontos - força: +2 ou +3 pontos;**

Missão: Lançar **dois** dados e obter a soma igual ao número da casa em que estiver: (6 ou 8)

**Tirar um ponto do adversário:** Na casa nº 7 você pode tirar um ponto do adversário (-1).

Missão: Lançar **dois** dados e obter o número da casa em que estiver, neste único caso, na casa nº 7.

**Movimento**

Avanço: Para as casas 4, 5 ou 6.

Missão: - Escolher a casa (4, 5 ou 6);

- Escolher uma condição;  
- Lançar **dois** dados numéricos e obter o resultado que satisfaça a condição associada ao nº da casa escolhida.

**Geração de pontos - força: +2 pontos;**

Missão: Lançar **dois** dados e obter a soma igual ao número da casa em que estiver: (2)

**Movimento**

Avanço: Para as casas 2 ou 3.

Missão: Escolher a casa (2 ou 3);

Lançar o dado das condições;

Lançar **um** dado numérico e obter o resultado que satisfaça a condição associada ao nº da casa escolhida.

**Geração de pontos - força: +1 ponto;**

Missão: Lançar **um** dado e obter o resultado escolhido previamente pelo adversário.

**Início do jogo:** Cada jogador inicia com uma unidade básica, que vale um ponto, na sua base.

**Movimentação:** A movimentação nos quatro níveis do tabuleiro ocorre de acordo com as orientações indicadas no tabuleiro, ou seja, existem regras de movimentação para cada nível.

Exemplo:

O jogador pretende mover o tóten da base (casa 1) para a **casa 3**. Ele joga o **Dado das Condições** e obtém o resultado 5. A condição a ser satisfeita é: “menor ou igual”. O jogador deve lançar um dado e obter um resultado **menor ou igual a 3**, para conseguir se mover para a **casa 3**.

Obs.: Nos níveis seguintes o jogador deve lançar o dado para verificar qual a condição e usar **dois dados** ao tentar se mover.

**Gerando pontos de força:** É possível produzir novas unidades ao longo do jogo, e elas podem ser produzidas em diferentes locais, tendo assim valores diferentes de acordo com o nível em que estão localizadas, ou seja, podem valer 1, 2, 3 ou 4 pontos. As unidades podem ser produzidas nas casas ilustradas do tabuleiro, números 1, 2, 4, 6, 8, 10 e 12.

Em todos os níveis, para gerar os pontos de força, é necessário que o jogador consiga obter o número da casa como a soma dos dois dados que serão lançados, com a exceção da primeira fase, em que o jogador lançará apenas um dado.

**Retirar pontos:** É possível retirar 1 ponto de força do adversário na **casa 7**, para isto, é necessário que o jogador já posicionado na **casa 7** lance os dois dados e obtenha a soma sete.

**Fim do Jogo:** O jogo termina quando ao final de uma rodada algum dos jogadores tiver unidades na casa doze que somem pelo menos cinco pontos. No caso de mais de um jogador alcançar este objetivo no fim de uma mesma rodada, o que tiver mais pontos será o vencedor.

## Descrição da atividade

### *1º Momento:*

Iniciar este momento com a apresentação da oficina, apontando os objetivos e fazendo a apresentação do jogo com suas respectivas regras, utilizaremos o quadro para apresentar o tabuleiro e dispor as regras acerca das operações do dado das condições.

Após as apresentações, disponibilizar um tabuleiro por aluno e três dados por duplas, sendo dois dados convencionais e um dado das condições.

Solicitar aos alunos que disponham-se em duplas para iniciar o primeiro momento do encontro, no qual os alunos jogarão sem a intervenção do professor, este primeiro momento tem a finalidade de apresentar aos alunos o jogo, tornando o segundo momento fluido, é esperado que nesta etapa surjam questionamentos acerca das estratégias do jogo por parte dos alunos, caso não surja, fica a cargo do professor indagar aos alunos questões como:

- Qual é a melhor estratégia para vencer?
- Quantas possibilidades de caminhos há para sair da base e chegar na última casa (12)?
- Visto esses caminhos, qual é o melhor, ou o mais provável?
- A melhor estratégia está incluída nos caminhos possíveis?
- Qual é a melhor casa para coletar pontos?
- Qual é a melhor estratégia para coletar pontos?
- Interseccionando caminhos e pontos, qual é a melhor estratégia?

Neste momento é objetivo a adaptação dos alunos frente ao jogo, assim como às primeiras dúvidas e questionamentos acerca das estratégias, e se for necessário, é um papel do professor indagar questões simples para os alunos, instigando aqueles de forma a que suas indagações cresçam em grau de complexidade.

### *2º Momento:*

No segundo momento da aula, propor aos alunos jogar novamente, desta vez priorizando as estratégias adotadas pelos mesmos. Neste momento solicitar aos alunos que descrevam a partida, isto é, descrever as movimentações, coletas de pontos e estratégias,

almejando a autonomia dos mesmos quanto à complexidade de informações fornecidas e formato de registro (tabelas, texto corrido, outros) e, também, possibilitando a leitura e interpretação das estratégias pelos colegas. Enquanto os alunos estiverem jogando e surgirem dúvidas quanto ao jogo e quanto às estratégias, solicitar aos mesmos que anotem junto com as questões construídas no primeiro momento.

### ***3º Momento:***

O terceiro momento é reservado para os alunos recriarem o jogo descrito pelos colegas, nesta etapa é objetivo a análise quanto à capacidade de objetividade, criatividade e clareza dos registros dos alunos. Convidar os alunos a responder o questionário:

- Você consegue recriar o jogo do colega?
- É necessário melhorar/alterar o registro?
- Faça uma crítica acerca da estratégia/registo do colega?
- Faça indagações/hipóteses acerca da “melhor estratégia” ou “estratégia ideal”.

### ***4º Momento***

Este é o último momento da prática, será neste que os alunos, com o auxílio do professor, utilizarão o próprio registro, os registros dos colegas, as informações coletadas durante os jogos e os conhecimentos prévios para responderem e comentarem as questões formuladas pelos próprios durante toda a prática, objetivando a construção de conceitos de Probabilidade e temas que circundam este conteúdo. É inevitável que questões que englobam esta temática sejam construídas pelos alunos, pois um fator relevante do jogo é a aleatoriedade, isto é, o jogo envolve lançamento de dados e movimentação no tabuleiro.

### **Avaliação:**

Registros feitos no caderno de pesquisa do professor referente à participação e desenvolvimentos dos alunos nas atividades propostas.

## TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, \_\_\_\_\_, R.G. \_\_\_\_\_, responsável pelo(a) aluno(a) \_\_\_\_\_, da turma \_\_\_\_\_, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada provisoriamente de **Ensino de Probabilidade: Um Jogo e as Potencialidades do Modelo de Descrição**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) **Gabriel de Souza Pinheiro**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela **Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marilaine de Fraga Sant'Ana**, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone **(51) 3308-6182** ou e-mail **marilaine@mat.ufrgs.br**.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- 1) Identificar conceitos de Matemática no jogo criado pelo autor.
- 2) Identificar evidências de pensamento crítico nas concepções e estratégias utilizadas pelos estudantes no decorrer do jogo, assim como a autonomia dos mesmos.
- 3) Investigar o processo de construção do registro e a análise dos alunos no tocante às estratégias adotadas pelos seus adversários.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Rua Holanda - 92, Jardim Formoso, Capivari do Sul - RS, telefone (51) 996880238 / e-mail [gabrielpmatematica@gmail.com](mailto:gabrielpmatematica@gmail.com).

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Osório, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Assinatura do Responsável: \_\_\_\_\_

Assinatura do(a) pesquisador(a): \_\_\_\_\_

Assinatura do Orientador da pesquisa: \_\_\_\_\_