

Arthur Casa Nova Nonnig

**Jogadores *Zealots*: estratégias imutáveis no Dilema
do Prisioneiro na rede quadrada**

Porto Alegre, RS

2019

Arthur Casa Nova Nonnig

**Jogadores *Zealots*: estratégias imutáveis no Dilema do
Prisioneiro na rede quadrada**

Trabalho de Conclusão de Curso como um dos pré-requisitos para a obtenção de grau de Bacharel em Física, apresentado ao curso de bacharelado em Física-Pesquisa Básica do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Mendeli Henning Vainstein

Porto Alegre, RS
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ARTHUR CASA NOVA NONNIG

**Jogadores *Zealots*: estratégias imutáveis no Dilema do
Prisioneiro na rede quadrada**

Trabalho de Conclusão de Curso como um dos pré-requisitos para a obtenção de grau de Bacharel em Física, apresentado ao curso de bacharelado em Física-Pesquisa Básica do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Mendeli Henning Vainstein
UFRGS

Renato Pakter
UFRGS

Roberto da Silva
UFRGS

Porto Alegre, RS
2019

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Mendeli Henning Vainstein pela sua orientação, atenção e paciência em todos os momentos, mesmo quando distante fisicamente.

À CAPES, ao CNPq e à UFRGS pelo suporte à pesquisa;

À Daiane Kuskoski, minha companheira, pelo apoio e carinho durante a escrita desse trabalho.

Ao Guilherme Moraes pelo incentivo, mesmo que involuntário, a me fazer cursar Física após uma graduação em Jornalismo.

E aos colegas e amigos da família, que tanto me ajudaram ao longo do curso: Bruna “Carlão” Carlos, Gustavo Zottis, Henrique “Loreal” Borrin de Souza, Isabel “Isadora” Flöther, Amadeus “Loves” Ayala, Nikolas Tesche e Eduardo “Pai” Issler.

“The man who views the world at 50 the same as he did at 20 has wasted 30 years of his life.”
(Muhammad Ali, 1975)

Resumo

O trabalho tem como objetivo principal a caracterização de um sistema dinâmico baseado na Teoria Evolutiva dos Jogos, com o desenvolvimento de simulações em computador a partir do método de Monte Carlo e análise de modelo de população bem misturada. Estuda-se a cooperação entre jogadores ordinários no Dilema do Prisioneiro em uma rede quadrada com interações entre primeiros vizinhos quando são adicionados jogadores de estratégia imutável, chamados de *zealots* cooperadores. A inserção desse novo jogador – que nunca altera sua estratégia e sempre coopera – muda a dinâmica da rede, o que interfere na cooperação dentro do sistema. Para esse estudo, utilizou-se a Dinâmica de Fermi (estocástica) para determinar o impacto de estratégias imutáveis em comparação com os resultados obtidos para um modelo de população bem misturada (equação diferencial não-linear de tempo contínuo). Caracterizou-se que, qualitativamente, a inserção de jogadores *zealots* tem o mesmo efeito de incentivo à cooperação na rede, com uma densidade inferior de *zealots*, em comparação ao modelo de sistemas dinâmicos – apesar de sua influência estar diretamente relacionada a um parâmetro β , que determina o ruído na escolha racional do jogador.

Palavras-chave: *Zealots*; Dilema do Prisioneiro; Rede Quadrada; Teoria dos Jogos; Cooperação.

Abstract

The main objective of this study is the characterization of a dynamic system based on Evolutionary Game Theory, with the development of computer simulations using the Monte Carlo method and the analysis of a well mixed population model. This study analyses the cooperation among ordinary players in the Prisoner's Dilemma on a square lattice with first neighbor interactions when zealot players, called zealous cooperators, are added. The insertion of this new player – which never changes its strategy and always cooperates – modifies the dynamics of the network, changing the cooperation of the system. Fermi's (stochastic) Dynamics was used to determine the impact of zealots players in comparison with the results obtained for a well-mixed population model (continuous nonlinear differential equation). It has been characterized that, qualitatively, the insertion of zealots players has the same positive effect on the network, even with a lower density of zealots, in comparison to the mathematical model – although its influence is directly related to a β parameter, which determines the noise in the rational choice of ordinary players.

Keywords: *Zealots*; Evolutionary Game Theory; Prisoner's Dilemma; Cooperation; Square Lattice.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	SISTEMAS DINÂMICOS	19
2.1	Modelo de população bem misturada	19
2.2	Ponto de Equilíbrio e Estabilidade no Sentido de Lyapunov	22
2.3	Representação de espaços de fases	23
2.4	Existência e Unicidade	23
2.5	Sistemas não-lineares de tempo contínuo	23
2.6	Bifurcação Transcrítica	25
2.7	Análise do modelo de sistema dinâmico unidimensional	25
3	MODELO COMPUTACIONAL	31
3.1	Simulação	31
3.2	Dinâmica de Fermi	32
3.3	Implementação	33
3.4	Resultados	35
4	CONCLUSÃO	37
	REFERÊNCIAS	39
	ANEXOS	41
	ANEXO A – TEOREMA DE PICARD	43

1 Introdução

A compreensão de como o comportamento cooperativo evoluiu esteve entre as grandes questões a serem respondidas listadas na edição 125 da revista *Science* (PENNISI, 2005). Esse interesse deve-se pelos diferentes exemplos de cooperação encontrados na natureza (AXEL-ROD, 1984), nas mais diversas formas possíveis, desde a cooperação dentro de uma sociedade animal, como em uma alcateia, quanto em casos de mutualismo, como os líquens.

No âmbito da Teoria Evolutiva dos Jogos, a evolução da cooperação em um sistema é bastante estudada, uma vez que, em muitos casos, o comportamento não-cooperativo é aquele com maior benefício se visto de maneira isolada na tomada de decisão – como veremos posteriormente. Mesmo com essa lógica evolutiva bem definida, é possível que surja um comportamento cooperativo. No entanto, antes de tratar exatamente da cooperação na Teoria Evolutiva dos Jogos, primeiro, é preciso definir o que é a Teoria dos Jogos.

Teoria dos jogos, segundo Davis (2012), é a teoria por trás da tomada de decisões. Busca desenvolver uma base matemática para uma tomada de decisão a partir de um propósito de determinado jogador, levando em consideração estratégias para atingir determinado objetivo. Como determina o autor (DAVIS, 2012), um jogador não necessariamente se refere a uma pessoa, pode referir-se também a um grupo, uma corporação ou uma população bem definida. Uma estratégia é definida como um plano de ação que descreve o comportamento do jogador em diferentes circunstâncias.

Em sua obra, Nowak (2006) apresenta o histórico da Teoria Evolutiva dos Jogos, desde J. Maynard Smith até aplicações mais recentes. A ideia da Teoria Evolutiva dos Jogos é a aplicação de Teoria dos Jogos em contextos de sistemas biológicos, como reprodução de vírus, invasão de espécies em territórios, entre outros. Para muitos, esse tipo de aplicação tornou-se mais útil do que a proposta original por trás da Teoria dos Jogos de aplicação em casos de comportamento na Economia (ALEXANDER, 2019). Como traz Gintis (2009), quando tratamos de Biologia, espécies têm um conjunto de estratégias ligadas à origem genética que indivíduos herdam, podendo manter esse conjunto ou mutar. O autor ainda enfatiza que a ideia de interação apresentada está ligada a uma estratégia herdada e não a uma memória ou histórico de jogos prévios.

Dentro das possibilidades de jogos estudados pela Teoria Evolutiva dos Jogos, um dos mais comuns – e o que é utilizado neste trabalho – é o chamado Dilema do Prisioneiro. O nome Dilema do Prisioneiro vem da metáfora por trás da relação entre os jogadores. Como apresenta (SZABO; FATH, 2007), imagine que dois ladrões foram presos separadamente após cometer um roubo juntos. A polícia, no entanto, não tem provas o suficiente para a sentença, sendo assim, um oficial visita cada um deles e oferece o mesmo acordo: se um confessar (não-cooperar no Jogo) e o outro permanecer em silêncio (cooperar), aquele que ficou em silêncio é sentenciado a 3 anos de prisão, enquanto o outro é liberado. Se ambos ficarem em silêncio (cooperar), a

polícia só pode sentenciar cada um a 1 ano de prisão. Se ambos confessarem (não-cooperar), os dois recebem dois anos cada.

Note que, no âmbito do jogo, cooperar está ligado a cooperar com o colega ladrão e não com a polícia. Por essa possível dúvida levantada, ainda existe outra metáfora que explicita as possibilidades dentro do Dilema do Prisioneiro. Como traz (HOFSTADTER, 1985), pode-se ainda entender as possibilidades através da metáfora de troca de malas. Assuma que um indivíduo queira fazer uma compra de uma mercadoria através de um *dealer*, que possui o item desejado. Por algum motivo, a compra deve ser feita em segredo. Cada um dos indivíduos aceita deixar uma mala em um lugar designado na floresta, sendo assim, a compra é realizada quando cada um encontra a mala deixada, sem que haja contato entre vendedor e comprador. Claramente, cada indivíduo tem duas opções: levar o conteúdo combinado (dinheiro ou mercadoria) ou levar uma mala vazia. Então, se ambos cooperarem, os dois saem satisfeitos, como foi combinado. Se apenas um dos dois cooperar, o outro terá vantagem, pois terá o que foi combinado sem ônus. Se ambos não cooperarem, nenhum dos dois consegue atingir o objetivo original (ganhar dinheiro ou obter a mercadoria). A situação apresentada traz as mesmas possibilidades do Dilema do Prisioneiro em outro contexto, em que a cooperação se apresenta de forma mais objetiva entre dois indivíduos. Tanto um cenário quanto o outro podem ser simplificados em uma tabela de ganhos para cada par de escolhas feitas.

No trabalho, usou-se sempre uma tabela de ganhos para o Dilema do Prisioneiro definida no capítulo seguinte, quando explica-se o modelo de maneira prática para aplicação. Interessante ressaltar que, analisando de forma racional as possibilidades, não-cooperar é a melhor escolha dentro do jogo.

No estudo de Teoria Evolutiva dos Jogos, muitos cenários diferentes são possíveis. Primeiramente, escolhe-se o jogo, ou seja, a tabela de ganhos dos possíveis resultados dos jogos. Ainda é possível adicionar outros fatores aos jogos, como memória aos jogadores, inclusão de uma terceira estratégia possível, dependência com o espaço, ou seja, apenas jogadores próximos interagindo. Neste trabalho, focaremos na inserção de um novo jogador, o *zealot*.

O jogador *zealot* (MASUDA, 2012) diferencia-se do jogador ordinário – que pode variar sua estratégia à medida que o sistema evolui – por não alterar de estratégia, mesmo quando esta não se apresenta como a mais favorável. Vendo sob uma perspectiva biológica, o jogador *zealot* sempre passa para a próxima geração a mesma estratégia, independentemente do seu *fitness* (nesse contexto, *fitness* é entendido como uma taxa de sucesso na reprodução). Quando um jogador ordinário deseja assumir a estratégia de um *zealot*, esse assume a estratégia de cooperação. Com isso, fica clara a distinção entre jogadores ordinários e *zealots* nos modelos.

Neste trabalho, vamos analisar a cooperação em uma simulação de rede quadrada a partir de Teoria Evolutiva dos Jogos, mais especificamente, através do Dilema do Prisioneiro. Primeiro, analisaremos o resultado obtido com um modelo de Sistemas Dinâmicos, similar, apresentado em (MASUDA, 2012), resolvendo uma equação diferencial não-linear de tempo contínuo em uma dimensão. Posteriormente, apresentaremos os resultados do modelo de simulações de

Monte Carlo, comparando-os com os resultados obtidos anteriormente.

2 Sistemas Dinâmicos

2.1 Modelo de população bem misturada

No estudo de Teoria Evolutiva dos Jogos, é possível modelar a evolução de uma população interagente através de equações de sistemas dinâmicos. Esse tipo de modelagem não leva em consideração efeitos espaciais, mas tem grande eficácia quando modelam-se populações bem misturadas, em aproximações de campo médio. Desta forma, neste trabalho, utilizaremos como fonte de inspiração e comparação o artigo *Evolution of Cooperation Driven by Zealots*, de Naoki Masuda, publicado na *Scientific Reports*, em 2012. Nesse artigo, Masuda (2012) justifica o estudo de jogadores *zealots* no modelo do Dilema do Prisioneiro, uma vez que, em modelos de formação de opinião à base de imitação, uma pequena parcela de *zealots* pode levar não-*zealots* a mudar de opinião. É importante reforçar que modelos de opinião e modelos de Teoria dos Jogos Evolutiva não são idênticos, porém os resultados apresentados no artigo de Masuda (2012) levam a criar uma relação direta entre a cooperação e a presença de *zealots* no modelo.

Dessa forma, vamos especificar o modelo apresentado por Masuda (2012) e montar as equações de evolução para o caso estudado. Em seu trabalho, Masuda (2012) assume dois tipos de jogadores, o primeiro tipo chamado “jogador ordinário”, que obedece às dinâmicas de evolução, e os “*zealous players*” (“jogadores zelosos” em tradução livre), que podem obedecer à dinâmica evolutiva ou cooperar incondicionalmente. Nesse trabalho, utilizaremos apenas os jogadores *zealots* que cooperam incondicionalmente, como foi explicitado anteriormente. A partir dessas escolhas, mostraremos como foram montadas as equações diferenciais que simulam essa situação.

No artigo de Masuda (2012), a dinâmica evolutiva é descrita da seguinte forma para a chamada “*pairwise comparison rule*”. Cada estratégia no jogo tem um *fitness*, ou seja, a propensão de reproduzir (π_C e π_D). Esse *fitness* é uma função dos ganhos possíveis para determinada estratégia dentro do jogo. Ao final de cada geração, indivíduos com estratégia definida (C ou D) podem alterar a sua estratégia na próxima geração a partir de uma probabilidade que depende da diferença entre os *fitness* das estratégias. Dessa maneira, um jogador C substitui um jogador D com a probabilidade

$$W_{CD} = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(\pi_C - \pi_D)]} \quad (2.1)$$

e D substitui um jogador C com probabilidade definida como

$$W_{DC} = 1 - W_{CD} = 1 - \frac{1}{1 + \exp[-\beta(\pi_C - \pi_D)]} = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(\pi_D - \pi_C)]}. \quad (2.2)$$

Nas expressões, π_C e π_D indicam os *fitness* dos cooperadores e dos não-cooperadores (desertores), respectivamente, β representa o ruído presente na dinâmica — $\beta \gg 1$ equivale a pouco

ruído e $\beta \ll 1$ a bastante ruído, em que o ruído é o que possibilita a troca por uma estratégia de pior *fitness*.

Sendo assim, definem-se π_C e π_D como

$$\pi_C = 1 - w + \frac{w[(X_C + Y_C)R + (1 - X_C + y - Y_C)S]}{1 + y} \quad (2.3)$$

e

$$\pi_D = 1 - w + \frac{w[(X_C + Y_C)T + (1 - X_C + y - Y_C)P]}{1 + y}, \quad (2.4)$$

em que X_C é a densidade de jogadores cooperadores ordinários ($0 \leq X_C \leq 1$), y representa jogadores *zealots* adicionados à parte ($y \geq 0$) – uma vez que os jogadores ordinários são normalizados a 1 –, Y_C representa a densidade de *zealots* cooperadores ($0 \leq Y_C \leq y$) e w indica a intensidade da seleção. Esse tipo de parâmetro que quantifica a relevância do jogo na reprodução é bastante utilizado na literatura, sendo visto, por exemplo, em (NOWAK, 2006).

Os ganhos relacionados a cada uma das interações estão vinculados ao Dilema do Prisioneiro através de uma tabela de ganhos, como traz a Figura 1 abaixo. Essa tabela é composta por R (*Reward*) ganho, a recompensa pela cooperação mútua, P (*Punishment*), o castigo pela não cooperação mútua, T (*Temptation*), tentação de não cooperar, ou seja, o ganho de o indivíduo não cooperar e seu vizinho cooperar. Por fim, temos o S (*Sucker*), ganho quando o indivíduo coopera e o seu vizinho não.

		Jogador b	
		C	D
Jogador a	C	R	T
	D	S	P

Figura 1 – Tabela de ganhos, Dilema do Prisioneiro

Para pertencerem ao Dilema do Prisioneiro, os valores dos payoffs devem obedecer $T > R > P > S$ e $2R > T + S$. Neste trabalho, usa-se sempre $S = P = 0$ (dilema fraco), $R = 1$ e variamos apenas $T = b$, com $b > 1$.

Sobre o modelo, ainda é importante perceber que os jogadores ordinários foram normalizados para a unidade. Dessa maneira, o total, levando em conta os jogadores *zealots*, é dado por $1 + y$.

No caso dos jogadores *zealots*, sua estratégia é atualizada para cooperação com a probabilidade p . Desta forma, existe a probabilidade $(1 - p)$ de um *zealot* se comportar como um jogador ordinário. Neste trabalho, focamos apenas no caso $p = 1$, desta forma, $Y_C = y$. Também

utilizamos sempre $w = 1$, sendo a maior intensidade de seleção possível. Com essas definições, podemos redefinir os *fitness* apresentados:

$$\pi_C = \frac{(X_C + Y_C)R + (1 - X_C)S}{1 + Y_C} \quad (2.5)$$

$$\pi_D = \frac{(X_C + Y_C)T + (1 - X_C)P}{1 + Y_C} \quad (2.6)$$

Assim, podemos definir completamente a equação de evolução do sistema para X_C :

$$\frac{dX_C}{dt} = \frac{2}{1+y} \left\{ \frac{(1 - X_C)(X_C + Y_C)}{1 + \exp[-\beta(\pi_C - \pi_D)]} - \frac{X_C(1 - X_C + y - Y_C)}{1 + \exp[-\beta(\pi_D - \pi_C)]} \right\} \quad (2.7)$$

Na Equação 2.7, podemos ver como é realizada a evolução dos jogadores ordinários cooperadores. No primeiro termo da direita, por exemplo, temos o produto da densidade de jogadores ordinários não-cooperadores, da densidade de jogadores que cooperam (cooperador ordinário e *zealot* cooperador) e da probabilidade de um cooperador substituir um não-cooperador. Essa seleção em duplas é que caracteriza a chamada *pairwise comparasion rule*. O mesmo se aplica para o segundo termo, com o produto da densidade de jogadores ordinários cooperadores, da densidade de jogadores não cooperadores e da probabilidade de um não-cooperador substituir um cooperador. O fator multiplicativo à frente da expressão aparece como uma normalização; no entanto, uma redefinição de t seria o suficiente para suprimi-lo, já que, no nosso caso, trata-se de uma constante.

Utilizando nossos parâmetros já definidos anteriormente, $p = 1$, $y = Y_C$, $S = P = 0$ e $R = 1$, temos:

$$\frac{dX_C}{dt} = \frac{2}{1 + Y_C} \left\{ \frac{(1 - X_C)(X_C + Y_C)}{1 + \exp[-\beta(\pi_C - \pi_D)]} - \frac{X_C(1 - X_C)}{1 + \exp[-\beta(\pi_D - \pi_C)]} \right\} \quad (2.8)$$

Em que:

$$\pi_C = \frac{(X_C + Y_C)}{1 + Y_C} \quad (2.9)$$

$$\pi_D = \frac{(X_C + Y_C)T}{1 + Y_C} \quad (2.10)$$

Note que, como $p = 1$, ou seja, $Y_C = y$, temos que a porcentagem de *zealots* adicionada no sistema torna-se um parâmetro a ser definido, sem que haja evolução dessa quantidade com o tempo. Ou seja:

$$\frac{dY_C}{dt} = 0 \quad (2.11)$$

Dessa maneira, definimos nosso sistema dinâmico a ser estudado a partir da Equação 2.8. Ou seja, analisaremos um sistema unidimensional não-linear de tempo contínuo.

2.2 Ponto de Equilíbrio e Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Segundo Monteiro (2006), o retrato de fases de um sistema dinâmico autônomo (como o caso estudado, Equação 2.8), do tipo $d\vec{x}/dt = \vec{f}(\vec{x})$, é influenciado pela posição e estabilidade dos pontos de equilíbrio \vec{x}^* . O autor define pontos de equilíbrio como soluções estacionárias do sistema, ou seja, se $\vec{x} = \vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, o sistema deixa de se mover no espaço de fases. Assim, podemos definir ponto de equilíbrio como aquele que satisfaz:

$$\frac{d\vec{x}^*}{dt} = \vec{f}(\vec{x}^*) = 0. \quad (2.12)$$

Qualquer ponto \vec{x} da dinâmica que não seja um ponto de equilíbrio (ou ponto fixo) é chamado ponto ordinário ou ponto regular. Essa caracterização é importante quando estamos analisando a evolução de um sistema ao longo do tempo. Note que, dada uma condição inicial que coincide com o ponto de equilíbrio, o sistema permanece nesse ponto do espaço de fases com o passar do tempo. Ou seja, $\vec{x}(0) = \vec{x}^* = \vec{x}(t)$ para todo t .

Pode-se ainda definir os pontos de acordo com a sua estabilidade. O autor (2006) define \vec{x}^* como um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se todas as trajetórias $\vec{x}(t)$, cujas condições iniciais estão inseridas em um ‘volume’ no espaço de fases ‘centrado’ em \vec{x}^* , tendem ao ponto de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$. Se o ‘raio’ desse ‘volume’ é finito, o ponto é classificado como localmente assintoticamente estável. Quando o ‘volume’ engloba todo o espaço de fases, esse ponto de equilíbrio é denominado globalmente assintoticamente estável. Todo ponto assintoticamente estável também recebe o nome de atrator, enquanto o conjunto de condições iniciais que levam a um determinado ponto de atração formam a bacia de atração desse ponto de equilíbrio.

Chama-se \vec{x}^* um ponto de equilíbrio neutramente estável se existe uma esfera de raio γ , centrada em \vec{x}^* , tal que, para qualquer condição inicial dentro desse volume finito, a trajetória $\vec{x}(t)$ não deixa essa esfera, mas não tende a \vec{x}^* quanto $t \rightarrow \infty$.

Ainda é possível, segundo Monteiro (2006), classificar o ponto de equilíbrio como instável. Define-se \vec{x}^* como ponto de equilíbrio instável se não é possível encontrar uma esfera de raio γ , centrada em \vec{x}^* , com condições iniciais pertencentes ao volume definido, tal que todas as trajetórias ficassem presas no interior de uma segunda esfera de raio ε com centro também em \vec{x}^* .

2.3 Representação de espaços de fases

Por convenção de livros que tratam de Sistemas Dinâmicos (MONTEIRO, 2006; STROGATZ, 2007), apresenta-se, neste trabalho, o desenho do espaço de fases com pontos fixos estáveis como pontos preenchidos, enquanto pontos instáveis são apresentados como pontos não-preenchidos.

Como, neste trabalho, analisa-se apenas um caso unidimensional, apresenta-se a forma mais simples de um retrato de fases unidimensional.

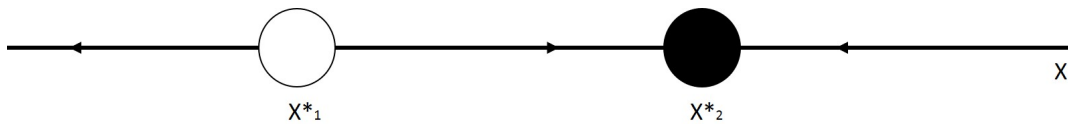


Figura 2 – Representação do espaço de fases unidimensional

2.4 Existência e Unicidade

De acordo com o Teorema de Picard, é garantida a existência e unicidade das soluções $\vec{x}_j(t)$ de um sistema de equações do tipo $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$, com condições iniciais pertencente ao domínio das funções, caso as f_j e suas derivadas parciais $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) sejam contínuas no domínio de definição de f_j . O teorema completo é apresentado no Anexo, enquanto aqui, utiliza-se uma forma simplificada, publicada em Boyce (1998).

Teorema: Se f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas no domínio retangular $R: |x| \leq a, |y| \leq b$, então há um intervalo $|x| \leq h \leq a$ no qual existe uma solução única $Y = \phi(x)$ do problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' = f(x, y) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

2.5 Sistemas não-lineares de tempo contínuo

Quando se estuda um sistema unidimensional autônomo — como o caso da Equação 2.8 — temos que o retrato de fases é bastante influenciado pela localização e estabilidade dos pontos de equilíbrio (MONTEIRO, 2006), em que o sistema pode ser definido como $dx/dt = f(x)$ e os pontos de equilíbrio sendo aqueles em que $dx^*/dt = f(x^*) = 0$. Ou seja, o caso unidimensional da Equação 2.12. Dessa forma, é bastante importante na análise de qualquer sistema dinâmico encontrar os pontos fixos (pontos de equilíbrio).

No caso de um sistema não-linear de tempo contínuo, um meio bastante eficaz de análise da função $f(x)$ é a linearização da função. No caso unidimensional, isso significa expandir $f(x)$ em torno do ponto de equilíbrio e considerar apenas a aproximação de primeira ordem, ou seja,

a aproximação linear. Desta maneira, dada uma função, a expansão em torno de um ponto dá-se da seguinte forma:

$$f(x) \simeq f(a) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a} \frac{(x-a)}{1!} + \left. \frac{d^2f(x)}{d^2x} \right|_{x=a} \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=a} \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (2.13)$$

Assim, expandindo uma função $f(x)$ em torno do ponto fixo e desconsiderando termos de ordens superiores a um, temos:

$$f(x(t)) \approx f(x^*) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} (x - x^*) \quad (2.14)$$

Como $f(x^*) = 0$ pela definição do ponto fixo, o que temos é uma aproximação linear dada apenas pela derivada no ponto fixo. Com isso, basta fazer a troca de variáveis adequada para levar o ponto fixo até a origem do espaço de fases, ou seja, $y(t) \equiv x - x^*$, para escrevermos a função como:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} (x - x^*) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} (y) \quad (2.15)$$

A Equação 2.15, apresentada acima, para a variável $y(t)$ pode ser resolvida de forma linear, com solução igual a:

$$y(t) \simeq y(0) \exp(\lambda t) \quad (2.16)$$

em que $\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*}$.

Com essa solução para a aproximação linear, é possível analisar a estabilidade dos pontos fixos a partir das classificações apresentadas anteriormente. O ponto de equilíbrio de dy/dt , dado por $y^* = 0$, corresponde ao ponto fixo, dado por $x = x^*$. Sendo assim, podemos aplicar a discussão da estabilidade de y para a variável x , tudo seguindo a substituição realizada anteriormente.

Desta forma, analisando a solução apresentada, temos que, quando $\frac{df(x^*)}{dx} < 0$, $y(t) \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $x(t) \rightarrow x^*$. Isso nos permite classificar esse ponto de equilíbrio como assintoticamente estável. Caso, $\frac{df(x^*)}{dx} > 0$, temos que $y(t) \rightarrow \pm\infty$ (o sinal depende do sinal do valor inicial de $y(t)$, ou seja, $y(0)$). Sendo assim, o ponto de equilíbrio é classificado como instável.

É importante ressaltar, como traz Monteiro (2006), que essa análise linear só vale se a derivada tem valor diferente de zero. Ou seja, caso $\frac{df(x^*)}{dx} = 0$, precisaríamos levar em consideração ordens superiores.

Com a análise linear de um sistema não-linear é possível estudar um sistema apenas encontrando as soluções de equilíbrio e as respectivas estabilidades a partir do cálculo de x^* e $\frac{df(x^*)}{dx}$. É importante compreender neste ponto que, no caso unidimensional, a derivada da função aplicada no ponto fixo é o autovalor do sistema linear associado ao sistema não-linear. Ou seja, $\lambda = \frac{df(x^*)}{dx}$, por isso a análise da estabilidade do sistema se dá pelo sinal da derivada no ponto

de equilíbrio — o mesmo procedimento é comum para os autovalores de sistemas de maior dimensionalidade. Esse procedimento é válido, a partir do uso do Teorema de Hartman-Grobman (MONTEIRO, 2006), que garante a preservação da estabilidade de um ponto fixo hiperbólico (com parte real não-nula) quando se lineariza o sistema em torno desse ponto.

2.6 Bifurcação Transcrítica

Como traz Strogatz (2007), existem certas situações nos modelos científicos em que um certo ponto fixo existe para todos os valores de um certo parâmetro. Desta forma, é possível que um ponto de equilíbrio possa mudar de estabilidade à medida que esse determinado parâmetro é variado. Essa mudança de estabilidade do ponto fixo pela variação de determinado parâmetro é chamada de bifurcação transcritical, que é comum em casos de modelos populacionais para uma espécie. Essa alteração é exemplificada na Figura 3 abaixo, com a mudança de um parâmetro em cada uma das situações. Dessa maneira, a origem do espaço de fases, o ponto $(0,0)$, passa de um ponto fixo instável para um ponto fixo estável.

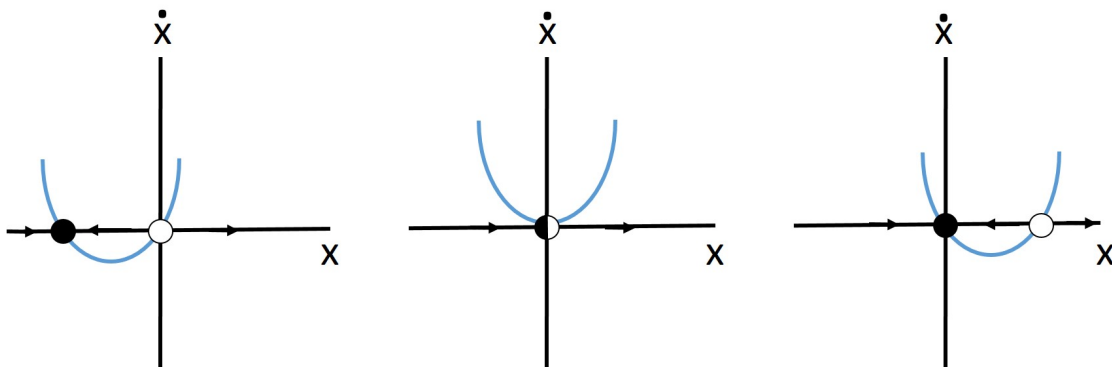


Figura 3 – Representação do espaço de fases unidimensional com bifurcação transcritical

2.7 Análise do modelo de sistema dinâmico unidimensional

Dado o modelo especificado pela Equação 2.8, é possível analisar sua evolução temporal a partir dos pontos de equilíbrio do sistema. Primeiramente, faz-se necessário perceber que esse sistema é autônomo, por não ter explicitamente uma dependência com o tempo. Pode-se ainda supor — antes de qualquer busca específica — que existam pontos de equilíbrio na dinâmica do sistema. Percebe-se também, apenas analisando a equação, que, quando $X_C = 1$, temos um ponto fixo, uma vez que, dessa forma, ambos os termos dentro do parênteses são zerados, independentemente dos valores de Y_C , β , π_C ou π_D . Por conveniência, escreve-se novamente a

Equação 2.8, definindo $F(X_C)$:

$$F(X_C) = \frac{dX_C}{dt} = \frac{2}{1+Y_C} \left\{ \frac{(1-X_C)(X_C+Y_C)}{1+\exp[-\beta(\pi_C-\pi_D)]} - \frac{X_C(1-X_C)}{1+\exp[-\beta(\pi_D-\pi_C)]} \right\} \quad (2.17)$$

Também é possível perceber que a função é contínua e diferenciável, uma vez que a Função de Fermi utilizada garante que não teremos divisão por zero. De qualquer forma, exibimos a derivada em função de X_C .

A partir da função $F(X_C)$, pode-se aplicar computacionalmente o método de Newton-Raphson e encontrar os pontos fixos ($F(X_C) = 0$) estáveis do sistema. Com esse método computacional, é possível variar os parâmetros mais relevantes da dinâmica e encontrar o ponto fixo estável para esse conjunto de parâmetros. Sendo assim, varrem-se os valores de Y_C — que na nossa análise é sempre tratado como um valor constante de *zealots* cooperadores adicionados na população — e analisa-se o comportamento dos pontos fixos para diferentes valores de β .

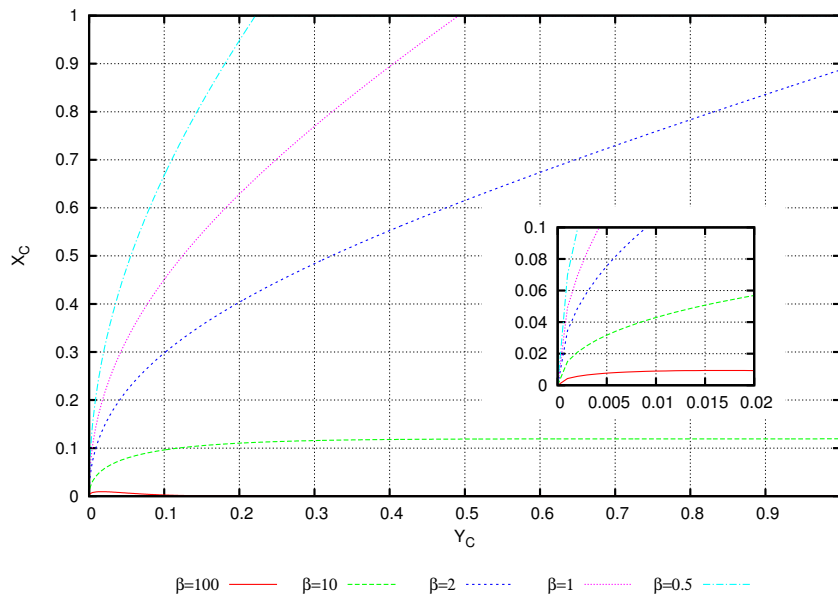


Figura 4 – Gráfico dos Pontos de Equilíbrio com $T = 1.4$, $p = 1$, variando Y_C para alguns valores de β . Em detalhe, o zoom nos valores próximos a zero

Acima, apresenta-se o gráfico dos pontos fixos da porcentagem de cooperadores em função da porcentagem de *zealots* C com parâmetros fixos ($T = 1.4$ e $p = 1$), variando apenas valores de Y_C e β . O valor da tentação escolhido está relacionado com o caso da simulação na rede, o que será explicado posteriormente no trabalho. No gráfico, Y_C é a densidade de *zealots* cooperadores e X_C é a densidade de jogadores ordinários cooperadores. Percebe-se que uma pequena densidade de *zealots* cooperadores já leva o ponto de equilíbrio a ser positivo, elevando a cooperação.

Para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, analisa-se a derivada da função aplicada no ponto fixo. Desta forma, o importante é definir o sinal de $\left. \frac{dF(X_C)}{dX_C} \right|_{X_C=X_C^*}$, uma vez

que, segundo a Equação 2.16, é o sinal dessa derivada que define se determinado ponto fixo é estável ou instável — quando for diferente de zero — com o tempo tendendo ao infinito.

Vale a pena focar certa atenção no ponto $X_C = 1$. Esse ponto, como foi mostrado anteriormente, é sempre ponto fixo do sistema, o que pode ser visto da Equação 2.8. No entanto, a estabilidade desse ponto varia com a mudança no parâmetro em certos casos do parâmetro β . Essa análise pode ser feita com a ajuda de uma função auxiliar $F_2(X_C)$, que é a mesma função $F(X_C)$ igualada a zero (método para encontrar pontos fixos), sem a solução $X_C = 1$. Essa equação, toma a seguinte forma:

$$F_2(X_C) = 0 = \frac{X_C}{(X_C + Y_C)} \exp \left[-\beta(X_C + Y_C) \frac{(1 - T)}{(1 + Y_C)} \right] - 1 \quad (2.18)$$

Com essa função auxiliar, pode-se usar o método numérico de Newton-Raphson para determinar outros pontos fixos diferentes de $X_C = 1$, quando esse é estável. Dessa forma, é possível analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio $X_C = 1$, apenas a partir da derivada da função $F(X_C)$ aplicada nos pontos fixos nos dois casos, como trazem os gráficos a seguir.

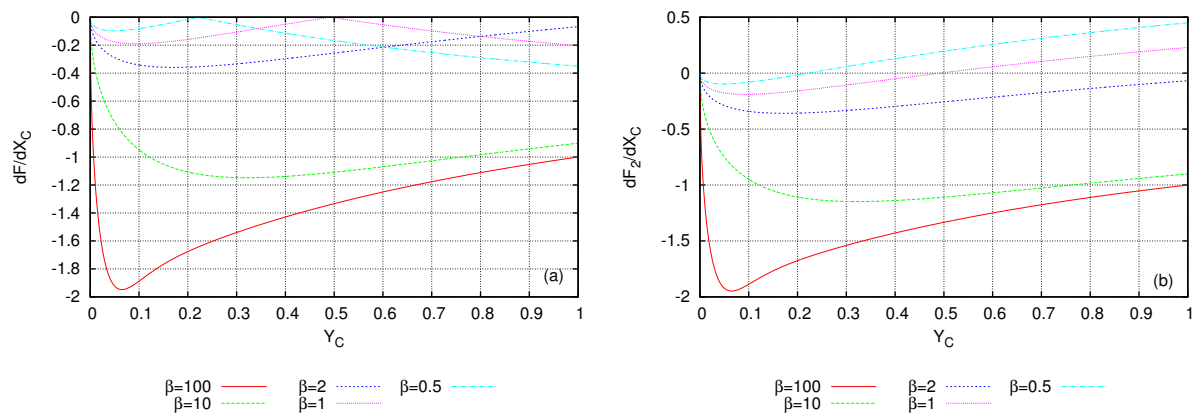


Figura 5 – Gráfico da derivada da função $F(X_C)$, aplicada nos pontos fixos encontrados por $F(X_C)$ e $F_2(X_C)$, (a) e (b), respectivamente, com $T = 1,4$, $R = 1$, $p = 1$.

Percebe-se que, quando consideramos a função com a solução $X_C = 1$, apenas apresentam-se soluções estáveis para o ponto inicial escolhido no método de Newton-Raphson, ou seja, com a derivada aplicada no ponto sendo negativa, como traz o Gráfico da Figura 5(a). Como esse ponto $X_C = 1$ é solução para qualquer parâmetro aplicado, sabemos que essa solução é instável até que Y_C chegue a um determinado valor, aproximadamente $Y_C = 0,227$ para $\beta = 0,5$ e $Y_C = 0,509$ para $\beta = 1$. Esses valores são chamados de parâmetros críticos. Sendo assim, têm-se o caso de uma bifurcação transcítica em $X_C = 1$, para $\beta = 0,5$ e $\beta = 1$, com esse ponto passando de instável para estável. A confirmação da mudança dessa solução para estável vê-se através da Figura 5(b), quando não temos mais a solução $X_C = 1$, e os novos pontos fixos encontrados são instáveis (com derivadas aplicadas nos pontos sendo positivas). Pode-se ainda validar a existência dessa bifurcação transcítica através dos testes de derivadas apresentados

por Monteiro (2006):

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{(X_C, \mu) = (X_C^*, \mu_c)} = 0 \quad (2.19)$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial X_C^2} \right|_{(X_C, \mu) = (X_C^*, \mu_c)} \neq 0 \quad (2.20)$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial X_C} \right|_{(X_C, \mu) = (X_C^*, \mu_c)} \neq 0 \quad (2.21)$$

A primeira derivada é a mais simples, uma vez que derivar parcialmente em função do parâmetro Y_C não altera na função o fator $(1 - X_C)$, que garante o valor igual a zero quando $X_C = 1$. Com o auxílio de métodos computacionais, as outras derivadas podem ser calculadas para os parâmetros apresentados, confirmando que o ponto $X_C = 1$ tem Bifurcação Transcrítica.

Realizada a análise do sistema dinâmico, pode-se atentar para a afirmação feita por Masuda (2012) em seu artigo:

“Assumindo uma pequena fração de cooperadores zelotes (imperfeitos), eu mostro que uma grande fração de cooperação emerge na dinâmica evolutiva de jogos de dilema social. Mesmo que a não-cooperação seja mais lucrativa que a cooperação para a maior parte dos indivíduos, eles comumente imitam a cooperação de outros a menos que a pressão de seleção seja muito forte. (MASUDA, N. Evolution of cooperation driven by zealots. *Sci. Rep.*, v. 2, p. 646, 2012.. Tradução livre)¹”

Analisando resultados com o mesmo valor de tentação e pressão de seleção apresentados por Masuda (2012), nesse caso, $T = 1,5$ e $w = 1$, quando usa-se $p = 1$, percebe-se que o desenvolvimento da cooperação é condicionado ao parâmetro β . Essa afirmação é compreendida através do gráfico a seguir, que mostra o comportamento da cooperação para diferentes valores de β .

¹ “By assuming a small fraction of (imperfect) zealous cooperators, I show that a large fraction of cooperation emerges in evolutionary dynamics of social dilemma games. Even if defection is more lucrative than cooperation for most individuals, they often mimic cooperation of fellows unless the selection pressure is very strong.”

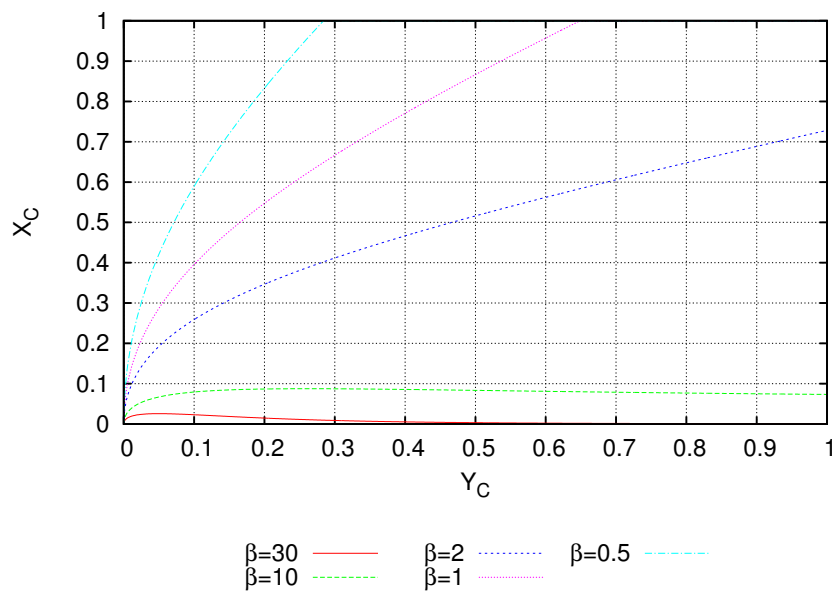


Figura 6 – Gráfico dos Pontos de Equilíbrio com $T = 1,5$, $p = 1$, variando Y_C para alguns valores de β .

Percebe-se, a partir do gráfico, que a cooperação pode até alcançar um valor máximo, quando o “ruído” na seleção for muito grande, ou seja, quando β for muito pequeno. Essa análise corrobora, de certa forma, as condições apresentadas por Masuda (2012) em seu texto, condicionando seus resultados a fraca seleção e *zealots* cooperadores imperfeitos.

3 Modelo Computacional

3.1 Simulação

Para este trabalho, foram realizadas simulações computacionais de Monte Carlo em uma rede quadrada com $N = L \times L$, com $L = 100$. Desta forma, criou-se uma rede quadrada composta por $N=10000$ jogadores, totalmente preenchida, ou seja, sem a existência de buracos ou falhas na rede e condições de fronteiras periódicas. Neste modelo, consideram-se jogadores Cooperadores (C), Desertores ou Não-Cooperadores (D) e *Zealots* Cooperadores (Z_c), sendo esse último jogador o ponto de enfoque deste trabalho. Os diferentes tipos de jogadores variam pela estratégia utilizada no Dilema do Prisioneiro, seja ela cooperadora, não-cooperadora ou sempre cooperadora, como é o caso do jogador *zealot* cooperador. É importante salientar que, no modelo com a presença de *zealots*, apesar de nunca trocarem de estratégia, esses jogadores transmitem a estratégia de cooperação para seus vizinhos.

Todas as interações da rede foram realizadas a partir da vizinhança de von Neumann, com apenas interação entre primeiros vizinhos, como mostra a Figura 7.

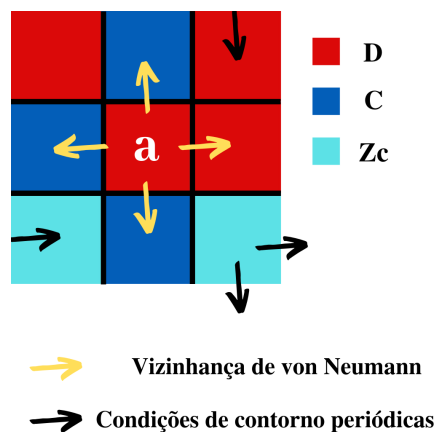


Figura 7 – Interações na rede com vizinhança de von Neumann

Inicialmente cada indivíduo pode escolher sua estratégia com probabilidades iguais, ou seja, existe a mesma quantidade de jogadores C e D na rede, enquanto o número de jogadores Z_c é imposto a cada simulação. Para a interação, percorre-se a rede assincronamente, ou seja, é escolhido um jogador “a” de forma aleatória, que joga com todos seus vizinhos, acumulando, desta maneira, o ganhos das 5 interações possíveis – com os primeiros vizinhos, como visto na Figura 7, e na autointeração. Posteriormente, um de seus vizinhos, o jogador “b”, é escolhido aleatoriamente. Esse, então, repete o mesmo processo, acumulando ganhos das suas interações, como foi exibido na Figura 1.

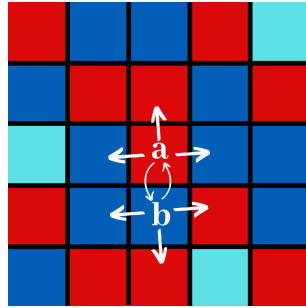


Figura 8 – Interações dos jogadores a e b

Após realizadas as interações, o jogador “a” decide se vai adotar ou não a estratégia do jogador “b” de acordo com uma probabilidade pré-determinada, que, neste trabalho, será dada pela dinâmica de Fermi (SZABO; TOKE, 1998), explicada posteriormente.

3.2 Dinâmica de Fermi

Nesse trabalho, utilizou-se a Dinâmica de Fermi, uma função dada em função da soma dos ganhos de cada um dos jogadores (P_a e P_b) em cada interação — aqui chamamos essa soma de *payoff*. Com os *payoffs* determinados, a probabilidade de troca — da estratégia de “a” para a de “b” — é dada pela função de Fermi, definida abaixo, em que K é um fator de ruído, relacionado com decisões irracionais, ou seja, troca de estratégia por uma de *payoff* inferior.

É importante ressaltar que no modelo adotado, com a presença de *zealots*, caso um jogador ordinário (C ou D) queira adotar a estratégia de um jogador *zealot* na próxima geração, esse terá a estratégia de cooperador. Dessa maneira, fica claro que, nas simulações, a densidade de jogadores *zealots* manteve-se constante, apenas influenciando os jogadores ordinários da rede. Com isso, trata-se a densidade de *zealots* como um parâmetro a ser variado dentro da rede.

$$W_{ab} = \frac{1}{1 + \exp[-(P_b - P_a)/K]} \quad (3.1)$$

O valor de K é sempre positivo, então, se $P_a > P_b$ o valor dentro da exponencial será positivo. Desta maneira, quanto maior o valor de K , menor será o valor da exponencial e maior será o valor de W . Assim, maior será a probabilidade de o indivíduo mudar de estratégia, ou seja, tomar uma decisão irracional. Com isso, podemos fazer a relação direta: quanto menor for o valor de K , menor será a probabilidade de uma troca irracional de estratégia, ou seja, por uma de *payoff* menor. A Figura 9 a seguir mostra W como função da diferença dos *payoffs* ($\Delta P = P_b - P_a$), para diferentes valores de K .

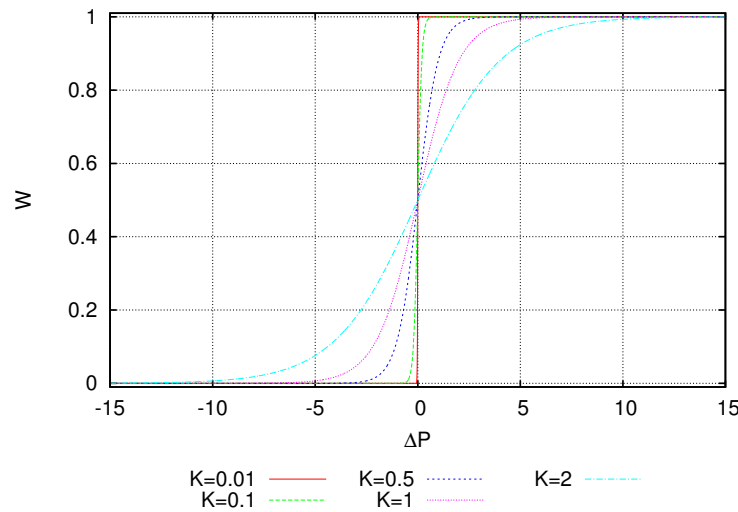


Figura 9 – Probabilidade W de troca como função da diferença de payoffs.

Percebe-se, neste ponto, a similaridade com o caso apresentado anteriormente no sistema dinâmico. No entanto, entende-se que o ruído K , anteriormente era substituído por β^{-1} . Desta forma, por padronização, utilizaremos sempre β como parâmetro de ruído na seleção. Ou seja, a função toma a seguinte forma:

$$W_{ab} = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(P_b - P_a)]} \quad (3.2)$$

Dessa maneira, temos a relação inversa. Quanto menor o valor de β , maior será o ruído. Ou seja, maior será a probabilidade de uma troca de estratégia por uma de *payoff* inferior.

3.3 Implementação

Esse processo de escolha, interação e probabilidade de troca a partir dos payoffs é repetido N vezes – constituindo um passo de Monte Carlo. Sendo assim, probabilisticamente a maior parte dos indivíduos é escolhida e temos a rede sendo percorrida de maneira assíncrona (SZABO; FATH, 2007).

Os passos descritos acima são repetidos até que a rede chegue a um equilíbrio assintótico, ou seja, com o número de cooperadores e não-cooperadores aproximadamente constante. Para este trabalho, utilizou-se 20000 passos temporais para chegar ao equilíbrio. Para cada conjunto de parâmetros, essa evolução foi realizada 100 vezes. Com os dados gerados, realizou-se uma média desse conjunto de simulações. Esse número de simulações foi escolhido para garantir que o erro nas medidas fosse inferior à dimensão dos pontos nos gráficos.

Com o estado de equilíbrio atingido e calculadas as médias, realizou-se uma média entre os valores já no equilíbrio, aproximadamente a partir de 10000 passos temporais, transformando esse estado de equilíbrio em apenas um valor de cooperadores para cada conjunto de parâmetros.

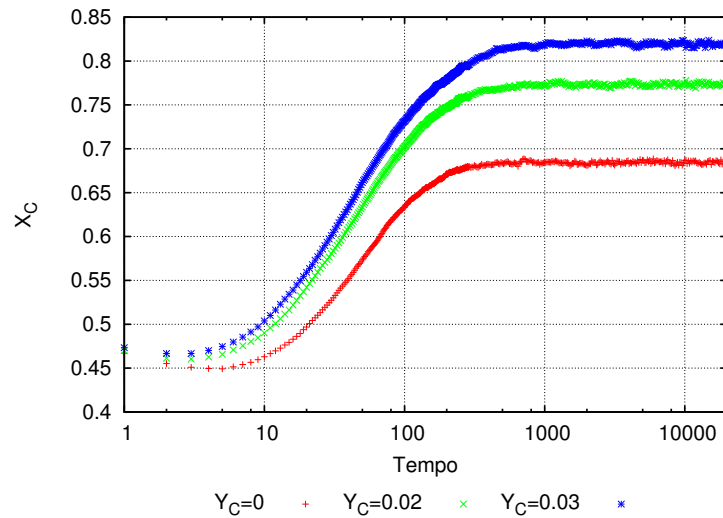


Figura 10 – Evolução temporal da média da fração de cooperadores em uma simulação para o conjunto de parâmetros: $T = 1,4$, $R = 1$, $S = P = 0$ e $\beta = 0,5$.

Nesse trabalho, utilizou-se, nas simulações e primeiras análises dos sistemas dinâmicos, o valor de tentação T igual a 1,4. Esse valor específico está relacionado ao tipo de equilíbrio apresentado pela rede sem a presença de *zealots*. Com $T = 1,4$, temos um equilíbrio dinâmico na rede, ou seja, a quantidade de jogadores cooperadores e não-cooperadores é aproximadamente constante; no entanto, cada jogador da rede individualmente não precisa manter sua estratégia para a geração seguinte do passo temporal. Em outras palavras, a dinâmica na rede não “trava” em determinada configuração. Esse fenômeno se deve pela estrutura da rede, uma vez que, com autointeração, $T = 1,4$ (quando $R = 1$) é o suficiente para um jogador cooperador com dois vizinhos cooperadores ter um *payoff* superior a um não-cooperador com dois vizinhos cooperadores. Perceba, esse tipo de comportamento se repete em um “degrau” definido pela estrutura da rede. Quanto maior o valor de β (menor o valor de K), mais facilmente essa estrutura de degraus é vista na Figura 11(a).

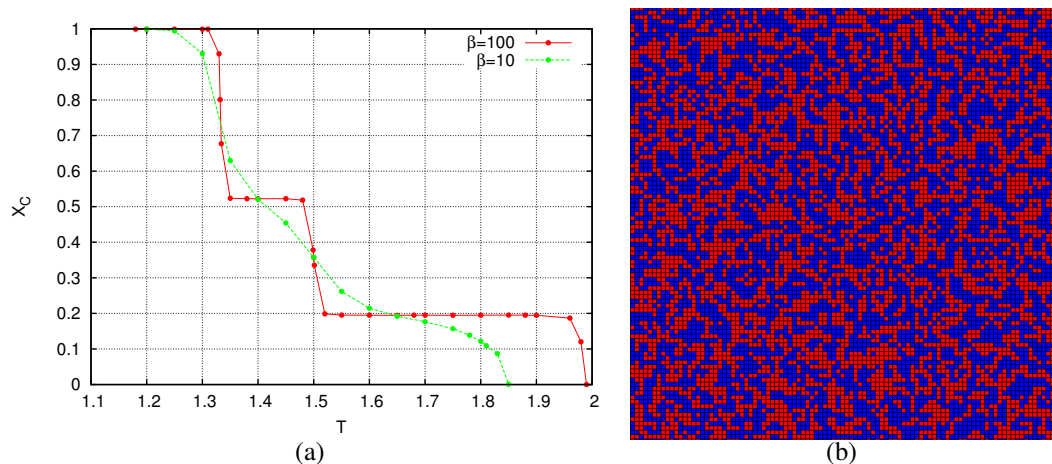


Figura 11 – Em (a), temos o gráfico da densidade de cooperadores na rede em função de T (tentação). Em (b), apresentamos um *frame* da simulação com $T = 1,4$.

Esse tipo de gráfico é visto na literatura que utiliza o mesmo modelo de dinâmica na rede quadrada, como é o caso do trabalho de Szábo e Toke (1998).

Ainda vale a pena ressaltar que para os casos analisados neste trabalho, normalizaram-se os jogadores ordinários. Ou seja, as densidades de cooperadores (C) e não-cooperadores (D) somadas resultam na unidade. Sendo assim, a comparação com os resultados do sistema de equações propostos por Masuda (2012) fica mais direta.

3.4 Resultados

Com o método de implementação do modelo computacional definido, basta agora delimitar os parâmetros utilizados. Como visto anteriormente, o valor da tentação (T) foi fixado em $T = 1,4$ para análise. Esse mesmo valor foi utilizado na análise da equação diferencial estudada. Como exposto anteriormente, $R = 1$ e $S = P = 0$, respeitando o Dilema fraco do Prisioneiro (*weak Prisoner's Dilemma*).

O valor de β foi variado discretamente para o melhor estudo de casos específicos. Assim, utiliza-se $\beta = 0,5$ (o mesmo apresentado por Masuda (2012)), $\beta = 1$, $\beta = 2$, $\beta = 10$ (apresentado por Szabo e Toke (1998)) e $\beta = 100$. Esses valores são importantes para avaliar o impacto do ruído no sistema que leva em consideração o espaço entre os jogadores. Os resultados para tais parâmetros estão expostos no gráfico abaixo.

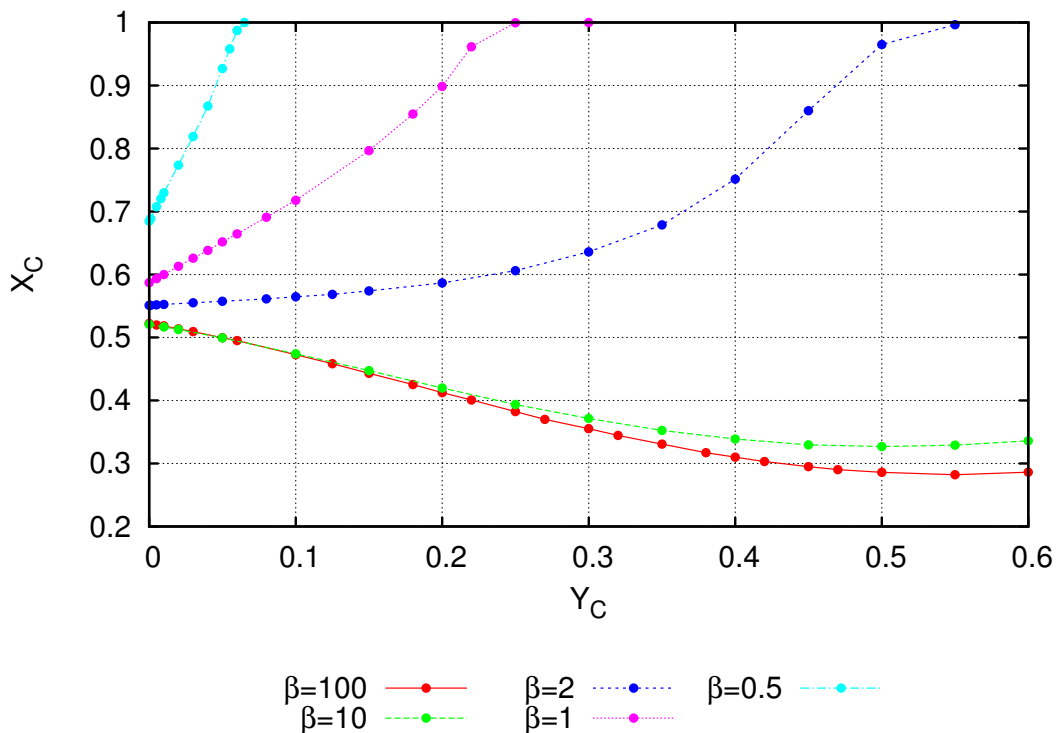


Figura 12 – Densidade de cooperadores na rede em função da densidade de *zealots* cooperadores.

Dado o gráfico, podemos perceber que o comportamento para $\beta = 0,5$ é bastante similar ao apresentado no caso de Sistemas Dinâmicos (Figura 4). No entanto, o fator espacial acrescentado pela rede acelera o processo de crescimento da cooperação. Dessa forma, com uma densidade de *zealots* cooperadores inferior a 0,1, a cooperação já alcança o valor máximo possível entre os jogadores ordinários.

É importante salientar que a afirmação de que a presença de *zealots* cooperadores incentiva a cooperação, no caso estudado ($p = 1$), é fortemente dependente dos valores de β , uma vez que para valores de β como 10 e 100 a presença de *zealots* cooperadores diminui a cooperação entre jogadores ordinários. Desta forma, é possível inferir que a presença de *zealots* cooperadores na rede só auxilia a cooperação quando o ruído é significativo. Em casos de $\beta = 10$ (o mesmo que $K = 0,1$), como apresenta Szabo e Toke (1998), o efeito é o contrário. A presença de *zealots* cooperadores diminui a cooperação, uma vez que acaba por auxiliar o ganho de *payoff* dos jogadores não-cooperadores.

Abaixo mostra-se uma captura de tela da simulação, no limite assintótico, para $\beta = 0,5$ – como traz Masuda (2012). Dessa maneira, a simulação na rede, qualitativamente, corrobora os resultados apresentados no estudo no modelo de população bem misturada apresentado anteriormente no trabalho.

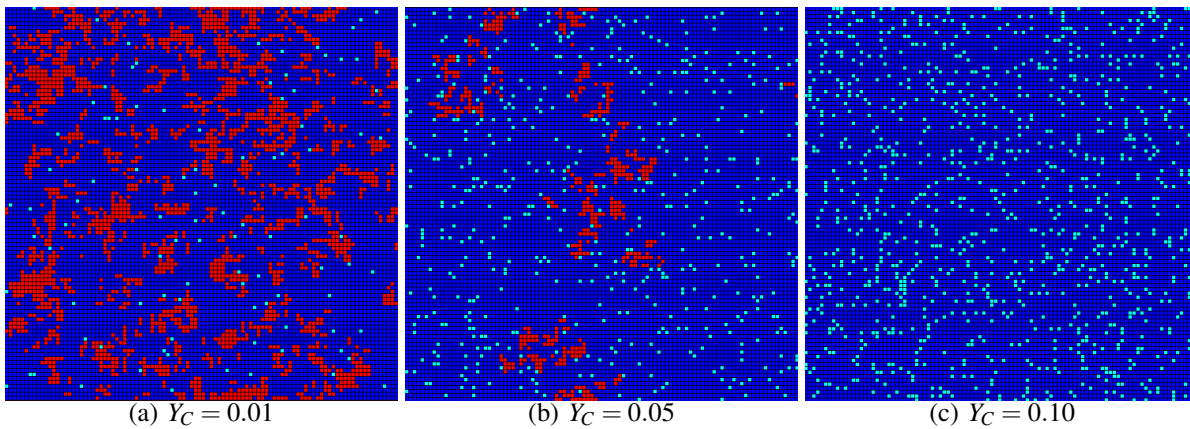


Figura 13 – *Print* do limite assintótico da simulação para $\beta = 0,5$ e $T = 1,4$

4 Conclusão

Neste trabalho, analisou-se o comportamento da cooperação a partir da Teoria Evolutiva dos Jogos, mais especificamente, através do Dilema do Prisioneiro, em dois sistemas distintos: um modelo de população bem misturada, regido por uma equação diferencial não-linear de uma dimensão; uma simulação de Monte Carlo dentro da rede quadrada. Nos dois modelos, utilizou-se uma dinâmica de evolução similar à chamada Função de Fermi. Esse estudo de cooperação foi realizado com a presença de um jogador não-ordinário, chamado *zealot*, que não altera sua estratégia como um jogador ordinário (cooperador ou não-cooperador).

A partir da análise dos modelos, concluiu-se que a presença desse novo jogador é capaz de incentivar ou desincentivar a cooperação entre jogadores ordinários, dependendo fortemente do ruído na dinâmica de evolução de estratégia utilizada. Em ambos os casos, os resultados foram qualitativamente similares para valores pequenos de β (inferiores a 1). Percebeu-se ainda que, no modelo computacional na rede quadrada, é necessária a presença de uma densidade menor desses jogadores *zealots* para que a população como um todo seja afetada, seja pelo crescimento da cooperação ou da não-cooperação. Fica evidente o comportamento diferente no caso para β grande (> 10), em que a presença de *zealots* cooperadores gera uma queda na cooperação – diferentemente do que ocorre no caso de campo médio (capítulo Sistemas Dinâmicos), quando uma pequena densidade de *zealots* cooperadores ($Y_C \ll 1$) tem efeito de incentivo à cooperação. O trabalho ainda reforça o condicionamento apresentado por Masuda (2012) em seu artigo, quando o autor relaciona o incentivo gerado pelos *zealots* à seleção fraca e *zealots* imperfeitos (caso não estudado nesse trabalho).

Para trabalhos futuros, ainda é possível estudar o caso de *zealots* imperfeitos na rede. Além disso, seria interessante explorar mais a fundo os efeitos da rede na dinâmica apresentada, com a adição *zealots* perfeitos, buscando valores limites de β para estimular a cooperação ou até mesmo buscando fatores espaciais que criam valores mínimos para a densidade média de cooperadores. Ainda seria possível a análise de *zealots* cooperadores com a presença de mobilidade na rede, em diferentes dinâmicas de evolução.

Referências

- 1 PENNISI, E. How did cooperative behavior evolve? Science, v. 309, p. 93, 2005. 15
- 2 AXELROD, R. The Evolution of Cooperation. New York: BasicBooks, 1984. 15
- 3 DAVIS, M. Game Theory: A Nontechnical Introduction. Dover Publications, 2012. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486135151. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=4LbCAgAAQBAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=4LbCAgAAQBAJ). 15
- 4 NOWAK, M. Evolutionary Dynamics. Harvard University Press, 2006. ISBN 9780674023383. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=YXrIRDuAbE0C⟩](https://books.google.com.br/books?id=YXrIRDuAbE0C). 15, 20
- 5 ALEXANDER, J. M. Evolutionary game theory. In: ZALTA, E. N. (Ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Summer 2019. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019. 15
- 6 GINTIS, H. Game Theory Evolving: A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction (Second Edition). Princeton University Press, 2009. ISBN 9780691140513. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=ALNwrNYBon4C⟩](https://books.google.com.br/books?id=ALNwrNYBon4C). 15
- 7 SZABO, G.; FATH, G. Evolutionary games on graphs. Phys. Rep., v. 446, p. 97–216, 2007. 15, 33
- 8 HOFSTADTER, D. Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern. Basic Books, 1985. ISBN 9780465045402. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=psPaAAAAMAAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=psPaAAAAMAAJ). 16
- 9 MASUDA, N. Evolution of cooperation driven by zealots. Sci. Rep., v. 2, p. 646, 2012. 16, 19, 28, 29, 35, 36, 37
- 10 MONTEIRO, L. Sistemas dinâmicos. Editora Livraria da Física, 2006. ISBN 9788588325081. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=w0eYcHddMq0C⟩](https://books.google.com.br/books?id=w0eYcHddMq0C). 22, 23, 24, 25, 28
- 11 STROGATZ, S. Nonlinear Dynamics And Chaos. Sarat Book House, 2007. (Studies in nonlinearity). ISBN 9788187169857. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=PHmED2xxrE8C⟩](https://books.google.com.br/books?id=PHmED2xxrE8C). 23, 25
- 12 SZABO, G.; TOKE, C. Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice. Phys. Rev. E, v. 58, n. 1, p. 69–73, July 1998. 32, 35, 36
- 13 SOTOMAYOR, J. Lições de equações diferenciais ordinárias. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. (Projeto Euclides). Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=oexUAAAAYAAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=oexUAAAAYAAJ). 43

Anexos

ANEXO A – Teorema de Picard

Enunciado do teorema de Picard, de acordo com Sotomayor (1979):

Teorema de Picard: Seja f contínua e lipschitziana com relação a segunda variável, isto é, existe uma constante K tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x - y\|$$

para todo $(t,x),(t,y) \in \Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t \in \mathbf{R}; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x \in \mathbf{R}^N; \|x - x_0\| \leq b\}$. Se $\|f\| \leq M$ em Ω , existe uma única função diferencial $\Phi : I_\alpha \rightarrow \mathbf{R}^N$, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$, que é solução de

$$\dot{x}(t) = f(x,t)$$

$$x(t_0) = x_0$$