

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

RICARDO DE SOUZA TAVARES

**SELEÇÃO DE CARTEIRAS: ESCOLHA ENTRE MODELOS
BASEADA EM CRITÉRIOS SIMPLES E PERSISTÊNCIA DE
PERFORMANCE**

**Porto Alegre
2019**

RICARDO DE SOUZA TAVARES

**SELEÇÃO DE CARTEIRAS: ESCOLHA ENTRE MODELOS BASEADA EM
CRITÉRIOS SIMPLES E PERSISTÊNCIA DE PERFORMANCE**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador:

Prof. Dr. João Frois Caldeira.

**Porto Alegre
2019**

CIP - Catalogação na Publicação

Tavares, Ricardo de Souza
Seleção de Carteiras: escolha intertemporal de
modelos baseada em critérios simples e persistência de
performance / Ricardo de Souza Tavares. -- 2019.
63 f.
Orientador: João Frois Caldeira.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-RS, 2019.

1. Seleção de Carteiras. 2. Markowitz. 3.
Persistência de Performance. I. Caldeira, João Frois,
orient. II. Título.

RICARDO DE SOUZA TAVARES

**SELEÇÃO DE CARTEIRAS: ESCOLHA ENTRE MODELOS BASEADA EM
CRITÉRIOS SIMPLES E PERSISTÊNCIA DE PERFORMANCE**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovada em 09 de junho de 2019.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. João Frois Caldeira - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Prof. Dr. André Alves Portela Santos
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziglemann
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Prof. Dr. Hudson da Silva Torrent
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

*“if you’re going to try,
go all the way
this could mean losing girlfriends,
wives, relatives, jobs and
maybe your mind
go all the way.”*

(Charles Bukowski; Roll the Dice, 1975)

RESUMO

Este trabalho traz uma alternativa ao problema da escolha de estratégias para construção de carteiras de investimentos, dado o universo de metodologias concorrentes e a falta de consenso acerca de uma metodologia superior para este fim. Nesse caso, foi proposto um procedimento para seleção de portfólios em que, a cada ponto do tempo, é escolhida a estratégia para construção de carteiras que tenha apresentado melhor desempenho em uma janela de p observações recentes para um determinado critério. Essa escolha é feita com base na suposição de que o portfólio ou ativo que obteve boa performance recente continuará a entregar bons resultados a curto prazo, isto é, tem como base a hipótese de persistência de performance. Quanto aos critérios para avaliação de desempenho, foram utilizados: média, índice Sharpe, e variância – visando a construção de sequências de escolhas que se adaptassem melhor aos diferentes contextos e bases de dados para a alocação de recursos em investimentos às quais foram aplicadas o experimento. Em relação a performance das sequências de escolhas geradas pelo procedimento, houve desempenho satisfatório, especialmente quando foram empregados como critérios a média e o índice Sharpe.

Palavras-chave: Seleção de carteiras. Persistência de performance. Markowitz.

ABSTRACT

This essay presents an alternative to the problem of the choice between strategies for building investment portfolios given the universe of competing methodologies and the lack of consensus about a superior methodology for this purpose. In this case, a portfolio selection procedure was proposed where at each point in time the portfolio strategy was chosen that presented better performance in a window of p recent observations for a given criterion. This choice is made based on the assumption that the portfolio or asset that has performed well recently will continue to deliver good results in the short term, that is, it is based on the hypothesis of persistence of performance. Regarding the performance evaluation criteria, we used: mean, Sharpe ratio, and variance - aiming at the construction of sequences of choices that are better adapted to the different contexts and data bases for the allocation of resources in investments to which the experiment was applied. Concerning the performance of the sequences of choices generated by the procedure, there was a satisfactory performance, especially when the mean and the Sharpe ratio were used as criteria.

Keywords: Portfolio selection. Performance persistence. Markowitz.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Dinâmica das escolhas ótimas entre estratégias com base na hipótese de persistência de performance, utilizando como critério a média e definindo $p=4$	45
Figura 2 – Número de vezes em que as carteiras foram selecionadas no procedimento de escolha tomando como critério a média e definindo $p=4$	45
Figura 3 – Dinâmica das escolhas ótimas entre estratégias com base na hipótese de persistência de performance, tomando como critério o índice Sharpe e definindo $p=9$	50
Figura 4 – Número de vezes em que as carteiras foram selecionadas no procedimento de escolha tomando como critério o índice Sharpe e definindo $p=9$	50
Figura 5 – Dinâmica das escolhas ótimas entre estratégias com base na hipótese de persistência de performance, tomando como critério o índice Sharpe e com $p=11$	55
Figura 6 – Número de vezes em que as carteiras foram selecionadas no procedimento de escolha, tomando como critério o índice Sharpe e com $p=11$	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pré-seleção aplicada à base de ações componentes do índice SP 100	41
Tabela 2 – Desempenho das estratégias individuais aplicadas à base de ações do SP 100	42
Tabela 3 – Carteiras construídas a partir da escolha entre estratégias - SP 100	44
Tabela 4 – Pré-seleção aplicada à base de ações componentes do Ibovespa .	47
Tabela 5 – Desempenho das estratégias individuais – IBOVESPA	48
Tabela 6 – Carteiras construídas a partir da escolha entre estratégias - IBOVESPA	49
Tabela 7 – Pré-seleção aplicada às 25 carteiras <i>size</i> e BTM de Kenneth French	52
Tabela 8 – Desempenho das estratégias individuais - carteiras 25 <i>Size</i> e BTM .	53
Tabela 9 – Carteiras construídas a partir da escolha entre estratégias - 25 BTM	54

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	EVOLUÇÃO DA TEORIA DE SELEÇÃO DE CARTEIRAS	19
3	ESCOLHA DE MODELOS PARA SELEÇÃO DE CARTEIRAS BASEADA EM PERSISTÊNCIA DE PERFORMANCE	26
3.1	Avaliação de desempenho das carteiras	28
3.2	Pré-seleção – Filtragem	30
3.3	Crítérios de performance	31
3.4	Estimações <i>rolling window</i>	33
3.5	Estratégias Competidoras	34
4	APLICAÇÃO E RESULTADOS	39
4.1	Ações componentes do índice S&P 100	40
4.2	Ações do índice Ibovespa	46
4.3	25 carteiras <i>Size</i> e <i>Book-to-market</i> de Kenneth French	51
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A – MODELOS DE FATORES	63
A.1	Modelo Linear de fatores	63
A.2	Modelos de fatores - Regressão Cross-Sectional	63
A.3	Modelo de fatores aplicado a séries temporais	64
	APÊNDICE B – MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS	66
B.1	Modelo CAPM	66
B.2	Fama-French (3)	67
B.3	Fama-French (4) - Carhart	68
B.4	Fama-French (5)	68

1 INTRODUÇÃO

Arranjos e estruturas para alocação de recursos são uma das razões para existência da economia como ciência, grande parte dos estudos nesta área visam a melhor utilização dos recursos disponíveis, que, na maioria das vezes, são escassos. O mesmo ocorre no campo das finanças, em que um dos principais problemas é o de alocação de recursos do investidor, que deseja maximizar os retornos de seus investimentos e ao mesmo tempo minimizar os riscos deles. A partir deste *trade-off*, isto é, a escolha entre níveis de risco e retorno por parte do agente que deseja realizar investimentos, Markowitz (1952) apresenta um trabalho pioneiro que dá origem à moderna teoria de seleção de carteiras.

As diferentes abordagens utilizadas para seleção de carteiras têm como objetivo principal a atribuição de pesos aos ativos, formando, assim, carteiras de investimentos. Especialmente no caso das carteiras de média-variância, há um problema de otimização que pode ser resolvido de modo a minimizar o risco para um dado retorno desejado, maximizar o retorno para um nível máximo de risco que o indivíduo se sujeita a correr, ou combinações desses objetivos com estratégias mais sofisticadas. Com o passar do tempo, a teoria de seleção de carteiras foi ganhando notoriedade, ocorreram inúmeros avanços, além de ampla aplicação em problemas de alocação no mercado financeiro.

A partir de Markowitz (1952), diversas estratégias de seleção de carteiras foram desenvolvidas. Ao mesmo passo que vários problemas em relação a sua implementação e performance foram encontrados. Entre os estudos que obtiveram significativos impactos nesta literatura estão Best e Grauer (1991) os quais demonstraram que a imposição de restrições sobre os pesos dos ativos impactam positivamente a performance das carteiras, Black e Litterman (1992) que em seu modelo de seleção de portfólios propuseram a incorporação da opinião de agentes no processo de otimização, Jagannathan e Ma (2003) que desenvolveram sua estratégia com restrição de venda a descoberto no processo de construção dos portfólios, entre tanto outros estudos acerca do tema.

No entanto, um trabalho de grande impacto no campo da seleção de carteiras foi o realizado por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), no qual os autores desafiam as metodologias tradicionais, em especial às de otimização por média variância, ao demonstrar, utilizando diferentes bases de dados, que a carteira igualmente ponderada obtém melhor performance que as demais carteiras otimizadas em seu estudo. E,

então, a chamada estratégia ingênua seria preferível a algumas das mais elaboradas estratégias competidoras, principalmente, levando em conta os custos de transação decorrentes do rebalanceamento das carteiras.

Tão logo o artigo de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) foi publicado, tornou-se referência e gerou bastante polêmica no meio acadêmico e entre os agentes do mercado financeiro. Após a publicação, surgiram várias pesquisas a fim de demonstrar possíveis pontos fracos do trabalho e de elaborar carteiras de otimização por média ou mínima variância que obtivessem melhores resultados em relação à carteira ingênua. Em uma crítica ao trabalho de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), Kritzman, Page e Turkington (2010) defendem a otimização por média-variância e contestam pontos nos quais os críticos da otimização se apoiam, demonstrando que se escolhidas as estratégias certas, os principais problemas da otimização, como os de que os otimizadores seriam maximizadores de erros ou de que a otimização se basearia em pressupostos falsos, podem ser contornados. Indo além, Kirby e Ostdiek (2012) repetem o experimento realizado por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) com bases de dados semelhantes, no qual desenvolvem carteiras que obtêm melhores performances em relação à igualmente ponderada, trazendo à tona a evidência empírica de que é possível via seleção de carteiras se obter melhores resultados que os gerados pelo portfólio ingênuo (inclusive na presença dos custos de transação).

Apesar das críticas e seus opositores, há inúmeros modelos de seleção de portfólios aplicados a diferentes problemas de alocação no campo das finanças. E a maioria das estratégias para seleção de carteiras, como a otimização por média-variância ou mínima-variância, traz consigo a necessidade da previsão do vetor de retornos esperados e das matrizes de covariância para todos ativos contidos no universo de investimentos. Apesar desta necessidade, há certa dificuldade na realização de tais previsões com níveis de precisão aceitáveis. Além disso, como pode ser visto em Best e Grauer (1991), erros de previsão nesse sentido acarretam em significativa perda de performance das carteiras. Sendo assim, a escolha de estratégias para seleção de carteiras, assim como os modelos para previsão de seus *inputs*, é uma das questões mais discutidas nos campos de finanças e econometria financeira.

Tendo em vista as diversas estratégias competidoras para seleção de carteiras, alguns estudos apresentam como alternativa a combinação de modelos de média e mínima variância como se nota em Garlappi, Uppal e Wang (2006), Kan e Zhou (2007), Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009) e Tu e Zhou (2011). Por outro lado, alguns trabalhos como Rodrigues e Stevenson (2013), Pettenuzzo e Ravazzolo (2016) e Caldeira et al. (2017) utilizam uma série de modelos competidores para combinação de previsões para os *inputs* utilizados no processo de otimização. Ao considerar as

inúmeras estratégias de seleção de carteiras elaboradas no decorrer das últimas décadas, além das diferentes metodologias para estimação e previsão dos *inputs* do problema de otimização, surge a dúvida de como determinar o modelo que melhor se adequa, em termos de performance, a diferentes conjuntos de ativos e, até mesmo, mercados. Ainda, supondo que haja uma escolha de estratégia ótima para construção de carteiras em determinado universo de investimentos, ela se manteria ao longo do tempo? Isto é, continuaria a entregar bons resultados em outros períodos?

Levantadas essas questões, o que se propõe neste estudo é a aplicação de alguns critérios, levando em conta informações recentes sobre o comportamento dos ativos, para se escolher a cada ponto do tempo aquela estratégia com maior potencial de performance. Neste caso, o potencial será avaliado com base no desempenho passado das carteiras, há inúmeros trabalhos que defendem a persistência a curto prazo da performance de ativos individuais ou carteiras como pode ser visto Hendricks, Patel e Zeckhauser (1993), Brown e Goetzmann (1995), Carhart (1997), Bollen e Busse (2004) e Lou (2012). De modo geral, esses autores demonstram que os ativos ou carteiras que tenham entregado bons resultados, em períodos recentes, continuarão a ter desempenho semelhante a curto prazo, o mesmo vale para aqueles que performaram mal. Essa persistência de desempenho, em muitos casos, pode ser capturada pelo fator momento como em Carhart (1997) ou Fama e French (2012)¹.

A despeito dos tradicionais estudos acerca do fator momento, Bollen e Busse (2004) sugerem que a persistência de performance pode ter duração mais curta que a defendida por Carhart (1997) e encontraram evidências de que o desempenho superior seria um fenômeno de prazo ainda mais curto, normalmente, duraria cerca de um mês e meio. Em estudos mais recentes Gao et al. (2018) e Zhang, Ma e Zhu (2019) encontram evidências para presença do fator momento em conjuntos de dados de alta frequência para períodos intradiários. Sendo assim, é possível observar que há literatura tratando da persistência de performance em horizontes de tempo que cobrem períodos maiores que um ano até estudos que encontram evidências para ocorrência desse fenômeno dentro de um único dia.

A partir dessa visão de persistência em relação à performance, construiu-se uma estrutura na qual, após a determinação de um número p de observações passadas dos retornos dos ativos e alguns critérios estatísticos, foi possível fazer a escolha, a cada ponto do tempo, do modelo com maior potencial de performance. Aqui, é assumido

¹Os autores encontraram fortes evidências da ocorrência do fator momento em mercados de ações para três diferentes continentes, o que reforça a utilização de medidas de desempenho avaliadas em observações passadas como critérios indicativos de potencial futuro para ativos do universo de investimentos com o qual se esteja trabalhando.

que o modelo com maior potencial é aquele apresentou melhores resultados nas p observações recentes dos retornos em relação a um critério, ou seja, a definição de potencial é feita seguindo a suposição de persistência de performance.

Na prática, tem-se um grande universo de modelos competidores para seleção de carteiras, além da previsão de retornos e matrizes de covariância, os quais podem se adaptar melhor a determinados mercados ou períodos de tempo. De forma que não é uma tarefa fácil determinar qual estratégia alcançaria melhor performance em termos gerais. Então, porque não aplicar essas metodologias competidores a diferentes bases de dados, de forma que seja possível a cada ponto do tempo, com base no desempenho desses modelos selecionar aquele que tenha apresentado melhor resultado recente, já que, seguindo a linha dos autores que defendem a hipótese da persistência, continuarão a ter bom desempenho a curto prazo?

Para avançar nessa questão foi desenvolvido um processo de escolha em que, a cada ponto do tempo, é selecionado, dentro do universo de modelos (ou estratégias) de seleção de carteiras, aquele candidato a apresentar melhor performance no período posterior, dada a persistência de desempenho nas observações realizadas. No tocante aos critérios empregados no processo de escolha, foram utilizados: i) média: o modelo escolhido será aquele que maximizar a média amostral para as p observações anteriores; ii) índice Sharpe: semelhante ao critério ao anterior, em que será selecionado o modelo que obtiver índice Sharpe máximo para a sub-amostra; iii) variância: nesse caso, o modelo escolhido será aquele que minimizar a variância para as p observações subjacentes à realização do experimento.

Em relação aos ativos utilizados na análise empírica, o estudo foi realizado com três bases de dados distintas: ações de empresas que compõem o índice S&P 100; ações de empresas componentes do Ibovespa; e, por fim, as 25 carteiras baseadas na classificação de capitalização a mercado e razão *book to market*² da base mantida por Kenneth French³. Ainda, recorreu-se a mesma base de Kenneth French para os fatores do mercado americano e a base de dados do NEFIN⁴ para obtenção dos fatores de risco do mercado brasileiro. O experimento foi realizado com dados diários levando em conta observações dos últimos dez anos, 03 de novembro de 2008 a 31 de outubro de 2018, para os ativos e fatores em questão.

²Razão entre o valor patrimonial da empresa, registrado em seus instrumentos contábeis, e o valor de mercado.

³As carteiras desenvolvidas por este autor são utilizadas em importantes pesquisas na área de precificação de ativos e seleção de carteiras, como em DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) e Kirby e Ostdiek (2012). Disponível em http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html,

⁴Centro Brasileiro de Pesquisa em Economia Financeira da Universidade de São Paulo. Disponível em http://nefin.com.br/risk_factors.html.

O procedimento de escolha foi realizado dividindo a amostra em três partes iguais. As observações do primeiro terço correspondem a primeira metade da parte dentro da amostra e foram utilizadas como ponto de partida para as estimações *rolling window* dos parâmetros de retornos esperados e matrizes de covariância destes, além dos coeficientes dos modelos de fatores que foram empregados nas previsões dos *inputs* de algumas das estratégias competidoras para seleção de ativos. Já a segunda parte corresponde ao período restante dentro da amostra, cujas observações foram utilizadas para a etapa de pré-seleção, na qual foram selecionados para composição do universo restrito de estratégias para construção de carteiras os modelos cujo desempenho não violou as restrições pré-estabelecidas (performance superior em termos de índice Sharpe à carteira $1/n$ e *turnover* não superior a 2%).

No processo de escolha entre estratégias foram utilizadas como metodologias competidoras para seleção de ativos a carteira ingênua, carteiras de média-variância com restrição de venda a descoberto construídas a partir da amostra ou dos fatores de risco, a carteira de mínima-variância amostral, além das estratégias *volatility timing* e *reward-to-risk timing* desenvolvidas por Kirby e Ostdiek (2012). Em relação a formulação das carteiras, contou-se com previsões amostrais e com o auxílio dos modelos de fatores propostos por Carhart (1997) e Fama e French (2015).

O procedimento de escolha de estratégias apresentou bom desempenho, quando definida uma janela amostral dos retornos entre 4 e 14 observações anteriores, no caso em que se utilizou o índice Sharpe e média como critérios de otimização de performance. Embora, quando se adotou o critério da variância se obteve uma performance razoável apenas para a base de dados 25BTM. O fato de serem obtidos melhores resultados para prazos menores, como ocorreu neste experimento, vai ao encontro de parte dos resultados obtidos por alguns pesquisadores, como Bollen e Busse (2004), que defendem a hipótese de persistência como um fenômeno de curtíssima duração.

Apesar de o experimento ter sido realizado para ativos de renda variável, especificamente ações, não é difícil vislumbrar sua aplicação em problemas de seleção em renda fixa ou outros mercados com características afins. Ademais, além desta breve introdução, o trabalho conta com uma revisão de literatura no capítulo 2; a descrição dos aspectos metodológicos no capítulo 3; o experimento empírico no capítulo 4; e, por fim, algumas considerações finais acerca do que foi proposto e os resultados obtidos.

2 EVOLUÇÃO DA TEORIA DE SELEÇÃO DE CARTEIRAS

O surgimento do pensamento econômico como teoria e, posteriormente, seu estabelecimento como ciência a partir da experimentação empírica tem como um dos seus motivadores principais o problema de alocação de recursos. Uma vez que os indivíduos quase sempre se deparam com circunstâncias nas quais têm uma quantidade limitada de recursos, o que os faz de algum modo otimizar esses recursos escassos de forma a obter o maior ganho de bem-estar possível, dado o seu conjunto de preferências. O modo que estes indivíduos lidam com a escassez e otimizam suas disponibilidades é alvo constante de pesquisa e averiguação empírica. Nesse contexto, o problema de alocação de recursos em investimentos é um caso particular, no qual os investidores direcionam seus recursos a um universo de ativos disponíveis.

Em se tratando de investimentos, uma das primeiras orientações que se tem a respeito do problema de alocação, segundo Duchin e Levy (2009), foi feita há mais de 1500 anos. Os autores relatam que um antigo babilônio de nome Talmud pregava uma espécie de estratégia ingênua rudimentar, na qual, segundo ele, o indivíduo deveria empregar um terço de suas riquezas em terras, igual parcela em mercadorias, e a última parte em moeda (ou algum substituto). Partindo do caso particular para o geral, para Duchin e Levy (2009) e Tu e Zhou (2011), no fundo Talmud aconselhava as pessoas a adotarem a estratégia $1/N$.

Entretanto, a fase moderna da teoria de seleção de portfólios, derivada do problema de alocação de recursos do investidor, só viria a ser inaugurada com Markowitz (1952). Na qual, a partir do *trade-off* risco-retorno, passaram a ser desenvolvidas inúmeras metodologias para alocação de recursos com o intuito de otimizar o bem-estar do investidor em relação as suas preferências, que também podem ser determinadas pelo seu nível de aversão ao risco. Em alguns casos o problema é construído com um retorno alvo fixo, de modo que o objetivo do problema de alocação é apresentar a carteira com menor variância dado esse nível de retorno. De modo alternativo, pode-se determinar um nível de risco fixo ou máximo, dado pela variância da carteira, e, então, buscar a alocação que apresente o maior retorno esperado para este nível de risco, além várias outras extensões e derivações.

Antes de discorrer acerca da evolução da teoria de seleção de carteiras, seguindo Kolm, Tutuncu e Fabozzi (2014), serão apresentadas algumas definições básicas do problema. O ponto de partida é a definição do universo de investimento composto por n ativos S_1, S_2, \dots, S_n , com retornos incertos R_1, R_2, \dots, R_n . Já a carteira de inves-

timento é representada pelo vetor de pesos $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]'$, neste caso ω_i é o peso do i -ésimo ativo dentre os demais componentes da carteira. Além disso, uma vez que o retorno do ativo livre de risco é dado por R_f , o excesso de retorno de um ativo i qualquer é determinado como $r_i = R_i - R_f$, então $r = [r_1, r_2, \dots, r_n]'$ é o vetor de excessos de retorno dos $i = 1, 2, \dots, n$ investimentos possíveis. Por fim, o excesso de retorno do portfólio (r_p) depende linearmente dos pesos dos componentes da carteira e é dado por:

$$r_p = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \dots + \omega_n r_n = \omega' r \quad (1)$$

Seja σ_i definido como o desvio padrão de R_i e ρ_{ij} a correlação entre S_i e S_j ($\forall i \neq j$), a matriz de covariância, para os n ativos do universo de investimentos, é definida a seguir:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

em que $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ e $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$, $\forall i \neq j$. Ainda, todas as matrizes de covariância, válidas, são semidefinidas positivas com $\omega \Sigma \omega' \geq 0$ (para todo ω), o que equivale a dizer que os autovalores das matrizes são não-negativos.

Ainda, para uma determinada carteira ω , a variância e desvio-padrão de seus retornos são dados por:

$$\text{VAR}(\omega) = \omega' \Sigma \omega \quad (3)$$

$$\sigma(\omega) = \sqrt{\omega' \Sigma \omega} \quad (4)$$

aqui o desvio padrão dos retornos é tomado como medida de risco da carteira.

O vetor de retornos esperados dos ativos é definido como:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

neste caso, $\mu_i = E(R_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Agora, definindo $\Omega \in R^n$ como o conjunto das carteiras possíveis e com $\omega \in \Omega$ denotando os pesos da carteira que deve satisfazer as condições impostas no problema de otimização por média-variância, definido a seguir:

$$\max_{\omega \in \Omega} \mu' \omega - \lambda \omega' \Sigma \omega \quad (6)$$

em que λ é o coeficiente de aversão ao risco, que determina o quão conservador (agressivo) o investidor é em relação ao risco.

Ainda, seguindo a proposta de Markowitz (1952), o problema de otimização por média-variância ainda pode ser definido de modos distintos. Quando se define um limite máximo de risco o qual investidor está disposto a incorrer, nesse caso o retorno é maximizado dada a restrição no risco:

$$\max_{\omega \in \Omega} \mu' \omega \quad S.A. \quad \omega' \Sigma \omega \leq \sigma_{max}^2 \quad (7)$$

O outro caso é quando se define um retorno mínimo a ser atingido, assim deseja-se minimizar o risco, dado este retorno:

$$\min_{\omega \in \Omega} \omega' \Sigma \omega \quad S.A. \quad \mu' \omega \geq R_{min} \quad (8)$$

Na prática, tem-se um problema de otimização, que pode ser resolvido de modo numérico ou analítico. Para tanto, é necessária a estimação dos retornos e das matrizes de covariância dos retornos a serem utilizados como *inputs* no problema de alocação, de modo a gerar os pesos ótimos para o conjunto de ativos. Ainda em relação a moderna teoria de seleção de carteiras, Kritzman (2011) e Kolm, Tutuncu e Fabozzi (2014) apresentam trabalhos que enaltecem os mais de sessenta anos de aplicação e aprimoramento da abordagem de otimização por média-variância. Muito embora essa técnica tenha sido vastamente utilizada nas últimas seis ou sete décadas no campo de finanças, especialmente no contexto de alocação de recursos de investidores, tal abordagem foi e continua sendo alvo de muitas críticas e debates entre os agentes do mercado financeiro, além de pesquisadores no meio acadêmico.

Um dos trabalhos recentes de maior impacto nessa literatura foi o de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), no qual os autores apontam que a carteira ingênua teria melhor performance que as demais carteiras geradas por otimização de média-variância utilizadas em seu experimento empírico. Neste trabalho, os autores recorreram a uma extensa base de dados, composta por portfólios e índices mantidos na base de Kenneth French e na base da MSCI¹ em diversas formas de classificação. Os autores utilizaram diversas metodologias de otimização de média-variância, inclusive contando com estratégias combinações de carteiras, para demonstrar que, dadas as bases de dados utilizadas, a carteira ingênua, de modo geral, obtém melhor desempenho que os demais portfólios construídos pelos autores, que incluem estratégias como às de MacKinlay e Pástor (2000), Garlappi, Uppal e Wang (2006) e Kan e Zhou (2007).

¹Modern Index Strategy Indexes.

No entanto, Kirby e Ostdiek (2012) sugerem que o resultado obtido pelos autores anteriormente citados se deve em grande parte ao seu modelo de pesquisa, que se concentra em portfólios que estão sujeitos a altos riscos de estimação e *turnovers* extremos. E recorrem a metodologias de seleção de carteiras que conseguem ter uma performance superior a carteira 1/N. Tratam-se das estratégias *volatility timing* e *reward-to-risk timing*.

As primeiras estratégias foram elaboradas a partir dos estudos de Fleming, Kirby e Ostdiek (2001) e Fleming, Kirby e Ostdiek (2003). Essas metodologias para construção de carteiras têm como principal vantagem a sua facilidade de implementação, uma vez que não necessitam da realização de otimização, não é necessário inversão das matrizes de covariância, além de a velocidade de ajuste dos pesos da carteira às mudanças na volatilidade dos ativos poder ser regulada por um parâmetro específico. Tais estratégias apresentaram, de modo geral, melhor performance em relação à carteira ingênua quando aplicadas em bases similares às usadas por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009).

Enquanto as estratégias *reward-to-risk timing* desenvolvidas por Kirby e Ostdiek (2012) são metodologias que levam em consideração em sua formulação os retornos esperados dos ativos, ao contrário das *volatility timing*, porém contam com as demais facilidades de implementação das estratégias anteriores. No mesmo estudo, os autores desenvolvem uma estratégia *reward-to-risk* alternativa com a utilização de modelos de precificação de ativos. Nesta abordagem alternativa, os autores utilizam, ao invés dos retornos esperados dos ativos, a média da carga dos fatores, com a justificativa de que a substituição mitigaria os problemas gerados pela previsão dos retornos dos ativos, cujos erros de estimação trazem grandes prejuízos à atribuição de pesos relativos a eles, como observado por Best e Grauer (1991). Tanto na formulação com os retornos esperados, como no caso em que são substituídos pela média da carga dos fatores, as estratégias obtiveram, de modo geral, performance superior à estratégia 1/N.

Entre os autores que contestam os resultados obtidos por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) estão Kritzman, Page e Turkington (2010). Em seu estudo, demonstram que, se utilizados estimadores plausíveis de retornos esperados, volatilidades e correlações, há evidência de que, em uma variedade de aplicações, os portfólios otimizados têm desempenho fora da amostra superior aos portfólios igualmente ponderados. Ainda em relação às críticas à abordagem de média-variância, há uma corrente que argumenta que a otimização se basearia em pressupostos falsos. A abordagem parte da suposição de que os retornos dos ativos seguem distribuição normal ou que os indivíduos apresentam uma função utilidade quadrática. Todavia, Kritzman (2011) argumenta que só há falha quando ambas as suposições são conjunta e significativamente

violadas, o que dificilmente ocorre em experimentos práticos.

Outra importante crítica é levantada por Michaud (1989), segundo o autor, os otimizadores seriam maximizadores de erros. Porém, Kritzman (2006) diz que pequenos erros nos *inputs* do problema levam a grandes diferenças nos pesos da carteira ótima, em relação aos pesos ideais, apenas se os ativos forem substitutos próximos, mas as alocações incorretas em substitutos próximos dificilmente reduzem a eficiência das carteiras. E pequenos erros de alocação em ativos não-substitutos não levam a grandes distorções nas atribuições dos pesos da carteira ótima.

Uma das alternativas para amenizar o problema da imprecisão nos *inputs* do problema de otimização por média-variância, dadas as complicações na estimação dos retornos esperados², é a abordagem de otimização por mínima-variância. Nesse caso, tem-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\omega \in \Omega} \omega' \Sigma \omega \quad S.A. \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (9)$$

em que ω é o vetor de pesos do problema de otimização, ω_i é o peso do i -ésimo ativo no portfólio, Σ é a matriz de covariância dos retornos dos ativos. Uma revisão mais detalhada da abordagem de otimização por mínima-variância pode ser encontrada em Clarke, Silva e Thorley (2006) ou Clarke, Silva e Thorley (2011). Todavia, o objetivo principal deste problema é entregar um vetor de pesos para a carteira que obtenha o menor desvio-padrão dentro do universo de todos os vetores possíveis, dadas informações acerca de risco e retornos esperados.

Outra linha de pesquisa recente, que tenta aprimorar o desempenho das carteiras dentro do problema de seleção, partiu para construção de metodologias de combinação de estratégias no processo de atribuição de pesos aos ativos. Como no trabalho de Kan e Zhou (2007), no qual os autores demonstram que um portfólio gerado pela combinação do ativo livre de risco, do portfólio de tangência amostral e da carteira de mínima-variância global alcança um desempenho melhor que a carteira de média-variância amostral. Nessa abordagem, o fato de haver mais de um portfólio de risco no problema de alocação minimizaria o risco de estimação e traria ganhos em termos de performance em relação à abordagem tradicional.

Na mesma linha, Garlappi, Uppal e Wang (2006) demonstram, ao considerar um investidor não apenas avesso ao risco, como também a incerteza no sentido de Knight (2012)³, que uma carteira robusta resultaria da média ponderada entre as

²Uma consulta mais extensa acerca deste problema é possível em Jagannathan e Ma (2003).

³Neste livro clássico, Frank Knight diferencia risco de incerteza, segundo ele as situações de

carteiras de média e mínima variância. Nesse caso, os pesos dependeriam do valor de um novo parâmetro de incerteza (no sentido de Knight), além do valor assumido pelo tradicional parâmetro de aversão ao risco. De forma que o resultado ótimo para o problema de seleção de carteiras nessa construção seria, portanto, uma combinação dos valores assumidos por essas duas carteiras.

DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) também utilizam da metodologia de combinação de estratégias para seleção de carteiras. Além de construir as combinações desenvolvidas por Garlappi, Uppal e Wang (2006) e Kan e Zhou (2007), formulam outras nas quais ponderam os resultados da estratégia igualmente ponderada com os de carteiras de mínima-variância. Muito embora seu desempenho na aplicação empírica não tenha sido superior a carteira 1/N.

Enquanto, Tu e Zhou (2011) partem da argumentação de que as estratégias de Markowitz (1952) e suas extensões teriam desempenho ruim em muitas situações de real aplicação, para propor estratégias formuladas a partir da combinação da estratégia 1/N com outras mais sofisticadas na tentativa de obter melhor performance em relação às metodologias disponíveis até então. Os autores combinam a carteira ingênua com as desenvolvidas por Jorion (1986), MacKinlay e Pástor (2000) e Kan e Zhou (2007), gerando quatro carteiras que alcançaram boa performance em diferentes cenários nos quais são aplicadas. Inclusive com desempenho superior a carteira igualmente ponderada em vários casos.

Ainda em relação à combinação em seleção de carteiras, Brandt, Santa-Clara e Valkanov (2009) desenvolveram uma metodologia diferente para atribuição de pesos aos ativos. Em sua abordagem, propuseram a utilização de características das empresas às quais os ativos são vinculados para definição dos pesos atribuídos a eles na composição das carteiras. Nesse caso, a combinação de informações a respeito da capitalização a mercado, a razão *book-to-market* e os retornos passados determina os pesos na construção realizada pelos autores.

Por outro lado, autores como Rodrigues e Stevenson (2013) e Pettenuzzo e Ravazzolo (2016) utilizam a abordagem de combinação no problema de previsão dos *inputs* para otimização. Um trabalho recente nessa linha foi realizado por Caldeira et al. (2017), no qual os autores constroem carteiras de média e mínima variância em que a previsão das matrizes de covariância é feita utilizando combinações de modelos de previsão de volatilidade. Além das carteiras construídas por essa metodologia

risco, apesar de os resultados serem desconhecidos, são diferentes dos casos de incerteza por terem distribuições de probabilidades conhecidas. Embora sua interpretação de incerteza não tenha muita aceitação no meio acadêmico, é um estudo de grande importância e foi utilizado pelos autores em sua construção de estratégias de seleção de carteiras.

apresentarem bons resultados, os pesos dos modelos de previsão empregados no processo de otimização são determinados com base em um critério de desempenho que leva em conta a performance da carteira e não apenas a adequação das previsões a posterior observação do evento.

Outras estratégias de seleção de carteiras que têm ganhado notoriedade e se consolidado na literatura são as bayesianas. Nesse tipo de construção se lida com o problema da incerteza em relação à distribuição dos parâmetros no problema de seleção de carteiras, particularmente a matriz de covariância e os retornos esperados. Segundo Avramov e Zhou (2010), a metodologia bayesiana consegue empregar informações prévias úteis acerca das quantidades de interesse na construção de carteiras ótimas através da recuperação da densidade preditiva dos parâmetros utilizados na otimização. Ainda, Kolm, Focardi e Fabozzi (2008), Zhou (2009), Pastor e Veronesi (2009) e Anderson e Cheng (2016) são exemplos de estudos interessantes com a utilização de abordagens bayesianas para seleção de carteiras.

Em relação ao caso brasileiro, há inúmeros trabalhos que tratam do problema de seleção de carteiras com ativos nacionais. Entre eles estão Costa e Nabholz (2004) que utilizam uma abordagem diferente na construção do risco das carteiras, e denominam seu problema de otimização de média-semivariância; Lopes et al. (2010) que se valem do mecanismo de análise envoltória de dados para gerar carteiras de média-variância para o mercado brasileiro; Santos e Tessari (2012) que testam o desempenho e a aplicação de portfólios otimizados por média e mínima-variância em relação ao Ibovespa e à carteira ingênua, com diversas técnicas alternativas; Caldeira, Moura e Santos (2013) que utilizam o modelo de quatro fatores de Carhart (1997) para previsão da volatilidade no problema de mínima-variância para um grande número de ações da bolsa brasileira. Além de Caldeira et al. (2014), Martins, Vasconcellos e Silva (2014), Rotela, Pamplona e Salomon (2014), Araújo e Montini (2015), Pereira et al. (2015), Naibert e Caldeira (2015) e Santiago e Leal (2015) que também aplicam técnicas de seleção de carteiras a ativos do mercado nacional.

3 ESCOLHA DE MODELOS PARA SELEÇÃO DE CARTEIRAS BASEADA EM PERSISTÊNCIA DE PERFORMANCE

Depois de uma breve revisão de literatura acerca da teoria de seleção de carteiras, o presente capítulo se destina a apresentação do procedimento proposto para lidar com o problema de escolha de metodologias para construção de portfólios de investimento.

Como já discutido, um dos grandes problemas na moderna teoria de seleção de carteiras é a definição, dentre o conjunto de metodologias e extensões disponíveis, daquela que tem maiores chances de apresentar melhor performance no período posterior ao conjunto de observações da amostra. Além disso, muitas abordagens que alcançam boa performance em uma determinada base de dados, podem não repetir seu desempenho quando as características do objeto de experimento mudam. Desta forma, abordagens que se apresentam como boas opções podem, como demonstrado por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), sequer superar a carteira ingênua em alguns casos.

Dado que existem várias metodologias competidores para atribuição de pesos aos ativos de uma carteira de investimento, o que se propõe aqui é utilização de diferentes modelos e a cada ponto do tempo, por meio de medidas de desempenho (média, índice Sharpe e variância), a seleção daquele que, com base na hipótese da persistência, tenha apresentado maior indicação de performance. Vários trabalhos como Hendricks, Patel e Zeckhauser (1993), Brown e Goetzmann (1995), Carhart (1997), Grinblatt e Keloharju (2000), Bollen e Busse (2004) e Lou (2012) abordam o tema da persistência de performance a curto prazo, isto é, o caso em que ativos têm o seu rendimento atual impactado pelos seus próprios resultados recentes. Basicamente, esses autores procuram entender e mensurar os laços entre o desempenho atual e o realizado no passado recente, cujos resultados de muitas de suas pesquisas apontam para validade dessa hipótese.

Bollen e Busse (2004) procuraram entender o quão curto seria esse prazo, isto é, por qual período ainda existiriam sinais de persistência de performance? Seus resultados levaram a conclusão que o prazo pode ser bem mais curto que o defendido por Carhart (1997) e demais trabalhos com resultados semelhantes. Os autores encontraram evidências de que o desempenho superior baseado na hipótese de persistência de performance seria um fenômeno de curta duração, de modo geral duraria cerca de um mês e meio, e que só poderia ser detectado usando janelas de medição

relativamente curtas. Além disso, Kaniel, Saar e Titman (2008) demonstraram que decisões de compra e venda de ativos, que determinam seus preços e, portanto, os retornos, muitas vezes são tomadas levando em conta alterações nos preços dos ativos no mês imediatamente anterior e, então, os ciclos de valorização ou deterioração dos ativos seriam limitados a um prazo que pode ser compreendido em um mês. Já Gao et al. (2018) e Zhang, Ma e Zhu (2019) encontram evidências da ocorrência do fator momento para períodos intradiários. Apesar de não se utilizar dados de alta frequência neste trabalho, serão utilizadas informações de períodos que vão desde de alguns dias até um terço da amostra ($T/3$).

Partindo para algumas definições, suponha que haja um universo de $k = 1, 2, \dots, K$ metodologias de seleção de carteiras competidoras, o qual pode ser definido como:

$$U^K = (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k, \dots, \omega^K) \quad (10)$$

em que cada $\omega^k = [\omega_1^k, \omega_2^k, \dots, \omega_n^k]$ é um vetor de pesos ótimos para os n ativos do universo de investimento, gerado por uma metodologia k qualquer dentro do universo de estratégias competidoras disponíveis.

Ainda, o universo de metodologias de seleção de carteiras pode ser apresentado, em uma perspectiva temporal, como:

$$U_t^K = (\omega_t^1, \omega_t^2, \dots, \omega_t^k, \dots, \omega_t^K), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (11)$$

nesse o caso, o vetor de pesos de uma estratégia k qualquer também é apresentado em uma perspectiva temporal $\omega_t^k = [\omega_{1t}^k, \omega_{2t}^k, \dots, \omega_{nt}^k]$.

A presente proposta de escolha entre estratégias para montagem de carteiras sugere que a cada ponto do tempo seja escolhida aquela estratégia ω_t^k que tenha obtido melhor performance recente, considerando alguma medida de desempenho, dadas as informações de desempenho dos modelos até o período anterior ($t - 1$). A ideia é avaliar se um gestor ou um participante do mercado que toma suas decisões de escolha de estratégias para montagem de carteiras com base na hipótese de persistência de performance alcançaria resultados superiores ao caso em que mantém uma estratégia individual fixa ao longo do tempo.

Antes de aprofundar no procedimento e na definição dos critérios, são apresentadas a seguir algumas definições preliminares, assim como as medidas de avaliação de performance das carteiras.

3.1 AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DAS CARTEIRAS

Uma vez definido o universo de estratégias para construção de carteiras, há algumas medidas de desempenho a serem tomadas para comparação da performance delas. A primeira e mais simples medida de desempenho apresentada se trata da média amostral, nesse caso os retornos médios gerados por algum portfólio são definidos como:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\omega'_t R_{t+1}) \quad (12)$$

Outra importante medida, que permite sintetizar informações acerca do risco de cada carteira, é a variância amostral, que pode ser computada da seguinte forma:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\omega'_t R_{t+1} - \hat{\mu})^2 \quad (13)$$

Ainda, pode-se mensurar a performance das carteiras através do índice Sharpe (λ), que leva em conta a razão risco-retorno em sua formulação e é definido do seguinte modo:

$$\lambda = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \quad (14)$$

Além disso, tem-se o *turnover* da carteira, que é definido pelas alterações de pesos a que essa carteira é submetida a cada troca de período, processo conhecido como rebalanceamento. O *turnover* poder ser escrito como:

$$\tau_{p,t} = \sum_{i=1}^n (|\omega_{i,t+1} - \omega_{i,t}|) \quad (15)$$

onde $\omega_{i,t}$ é o peso de um ativo i qualquer na carteira antes de ser realizado o rebalanceamento, e $\omega_{i,t+1}$ é o peso, em $t+1$, que se deseja desse ativo determinado por uma estratégia de seleção de carteiras k qualquer.

A partir da última definição chega-se a média do *turnover* amostral, uma medida que busca capturar o efeito médio do turnover no decorrer do tempo. A média do *turnover* de uma carteira é definido como:

$$\bar{\tau}_p = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{i=1}^N (|\omega_{i,t+1} - \omega_{i,t}|) \quad (16)$$

No processo de avaliação de performance de carteiras de ativos, alguns trabalhos passaram a levar em conta o dispêndio relacionado aos custos de transação,

como se pode ver em DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), Kirby e Ostdiek (2012) e Caldeira et al. (2017). Não adianta se ter uma carteira com retornos altos, porém com custos de transação que consomem todo esse retorno excedente em relação a algum modelo de seleção padrão. Então, em termos práticos é necessário se trabalhar com modelos que não gerem custos de transação muito elevados, de modo a não corroer os ganhos advindos da estratégia.

Os custos de transação, a cada ponto de tempo, podem ser definidos da seguinte forma:

$$CT_t = c \cdot \tau_{pt} \quad (17)$$

aqui em cada ponto do tempo os custos de transação são dados pelo *turnover* multiplicado por uma constante arbitrária c que, segundo DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), determina o nível de custos proporcionais por transação. Ainda, autores como Balduzzi e Lynch (1999), DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) e Kirby e Ostdiek (2012) a definem esta constante com o valor de 50 pontos-base. Já, Caldeira et al. (2017) consideram adequada atribuição de 15 pontos-base, argumentando que este seria um valor conservador, uma que vez que o estudo de French (2008) teria apontado para uma significativa redução dos custos de transação com o decorrer do tempo, chegando a um de nível custo proporcional igual a 11 pontos-base em 2006.

Dada a definição dos custos de transação, o retorno líquido de um portfólio pode ser descrito como o retorno alcançado por uma carteira descontados os custos de transação, dados pela equação (17), em um determinado período t . Assim, os retornos líquidos para uma carteira k qualquer podem ser escritos como:

$$r_{p,t}^{net} = (1 + (w_t^k)'r_{t+1})(1 - CT_t) - 1 \quad (18)$$

Trabalhos que de alguma forma necessitam mensurar o desempenho dos retornos de portfólios de investimento vêm realizando suas avaliações em termos dos retornos líquidos, com a justificativa de que aproximam mais os experimentos das condições reais em que as operações com carteiras são realizadas. Porém, como o rebalanceamento das carteiras, que gera os custos de transação, pode ser realizado com definição da periodicidade a critério do pesquisador ou gestor, optou-se neste estudo por se utilizar os retornos brutos. Por fim, apesar de não levar em conta diretamente os custos de transação no experimento empírico, se utilizará os valores de *turnover* médio como medida auxiliar na etapa de pré-seleção descrita a seguir.

3.2 PRÉ-SELEÇÃO – FILTRAGEM

Foi desenvolvida uma etapa de pré-seleção a ser implementada no período anterior à aplicação dos critérios do procedimento de escolha de estratégias, que consiste em uma restrição ao universo de metodologias destinadas à construção de carteiras. Optou-se por restringir o universo de metodologias para construção de carteiras apenas àquelas que obtiveram desempenho igual ou superior a carteira igualmente ponderada e, além disso, apresentaram custos de transação razoáveis determinados por um nível de *turnover* máximo, dado por um parâmetro γ . Já que o intuito da presente proposta de escolha entre estratégias para construção de carteiras é a sua aplicação em reais situações dos mercados de ativos, o que se pretende com esta etapa é poupar esforço computacional, além de evitar que estratégias que tenham gerado resultados ruins (abaixo da estratégia 1/n) em um longo período de tempo possam prejudicar a performance das carteiras obtidas através das sequências de escolhas entre estratégias.

Antes de avançar sobre esta etapa do trabalho, convém discorrer um pouco acerca da divisão da amostra. Nesse caso, para um número T de observações, a amostra é dividida em três partes iguais (as duas primeiras dentro da amostra), a primeira é utilizada para rolagem das estimações dos parâmetros das estratégias competidoras, na segunda é realizada a etapa de pré-seleção descrita nesta seção e, finalmente, há o procedimento de escolha entre estratégias com base em persistência de performance na última parcela, a parte fora da amostra.

Seja ω^{naive} a carteira igualmente ponderada e γ o parâmetro de *turnover* máximo, a pré-seleção definirá o universo de metodologias para seleção de carteiras restrito (U^*). Os componentes de U^* serão as $j = 1, 2, \dots, J$ estratégias cujos retornos obtiverem desempenho igual ou superior à carteira 1/n em termos de índice Sharpe e, além disso, *turnover* igual ou abaixo de um limite, dado por γ , na segunda parcela de observações dentro da amostra. Ou seja:

$$\text{Se } \lambda(r^j) \geq \lambda(r^{naive}) \text{ e } \gamma \geq \bar{\tau}_p(w^j) \implies \omega^j \in U^* \quad (19)$$

A escolha da carteira ingênua como limite para performance tem como justificativa a argumentação de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) de que ela seria o *benchmark* natural para problemas envolvendo seleção de carteiras. Recomendação que, de fato, vem sendo seguida pela literatura posterior, como pode ser visto em Tu e Zhou (2011), Kirby e Ostdiek (2012) e Caldeira et al. (2017). Dessa forma, optou-se pela carteira 1/n como delimitador de desempenho. Além disso, foi definido o índice Sharpe como medida de performance nesta etapa, pela sua ampla utilização como principal

fonte de avaliação dos resultados em problemas de seleção de portfólios. E, por fim, há o limite adicional dado pelo parâmetro de *turnover* máximo, que visa restringir a escolha às estratégias que apresentem baixos custos de transação. Por mais que o experimento seja realizado com retornos brutos, a definição desse parâmetro é realizada com intuito de eliminar estratégias que tenham potencial de apresentar altos níveis de custos de transação oriundos dos rebalanceamentos periódicos e, assim, corroer os ganhos de performance.

Em suma, a pré-filtragem é feita no segundo terço das observações disponíveis da amostra com vistas a eliminar as estratégias com baixa adaptação aos dados, além daquelas cujos resultados possam ser superestimados por não se descontar os custos de transação. Ela torna possível a obtenção do universo restrito de metodologias para seleção de carteiras, que é utilizado na aplicação dos critérios para escolha de modelos com base em persistência de performance. Apesar de ser aplicada apenas uma vez na fase de averiguação empírica deste estudo, nada impede que um gestor a qualquer tempo reavalie a composição do seu universo restrito de metodologias ou, até mesmo, defina outros critérios para filtragem.

3.3 CRITÉRIOS DE PERFORMANCE

O primeiro passo para escolha de metodologias para construção de carteiras de ativos é a montagem individual de cada estratégia, ou seja, atribuição de pesos aos ativos para cada uma das carteiras consideradas no universo de modelos para seleção de portfólios. Feito isto, chega-se a U^K e, então, pode ser aplicada a etapa de pré-seleção que gerará o universo restrito de metodologias para construção de carteiras (U^*) na segunda parte da amostra. Assim, podem ser empregados na parcela final de observações os critérios para tomada decisão em relação à estratégia a ser escolhida a cada ponto do tempo com base na hipótese da persistência de performance.

A escolha entre estratégias é realizada levando em conta alguns critérios simples avaliados a partir dos retornos dos ativos, cada um a sua vez, numa determinada janela amostral. O procedimento retorna a cada momento a estratégia que tem melhor desempenho para as p observações passadas definidas pela janela amostral em relação ao critério pré-estabelecido. Cada elemento da sequência de escolhas geradas através da avaliação critério, a cada ponto do tempo, pode ser definido como:

$$w_t^s = \mathbf{f}(U_t^*; r^1, r^2, \dots, r^K; p; \delta), \quad t = 1, \dots, T \quad (20)$$

em que $r^k = [r_{t-1}^k, r_{t-2}^k, \dots, r_{t-p}^k]'$ é o vetor de retornos para uma carteira k qualquer e uma determinada janela de observações passadas p . Assim, a sequência de escolhas é função do vetor dos retornos passados até o tempo $t - p$, da dimensão da janela de

defasagem p e de um critério de avaliação performance δ o qual pode ser escolhido arbitrariamente, o que será melhor elucidado a seguir.

A matriz $K \times p$ de retornos passados é dada por:

$$RP = \begin{bmatrix} r_{t-1}^1 & r_{t-1}^2 & \dots & r_{t-1}^K \\ r_{t-2}^1 & r_{t-2}^2 & \dots & r_{t-2}^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{t-p}^1 & r_{t-p}^2 & \dots & r_{t-p}^K \end{bmatrix} \quad (21)$$

em que cada coluna representa os retornos passados de uma estratégia entre as K outras do universo restrito de metodologias para seleção de carteiras. Ainda a janela de defasagem determina o número de linhas da matriz.

De fato, um dos principais passos é a definição da janela de observações passadas, pois ela determinará a dimensão da matriz de retornos passados. Feito isto, o próximo passo é a definição do critério a ser empregado na função de seleção de estratégias (δ).

O primeiro critério estatístico a ser avaliado é a média amostral, de modo que o modelo escolhido em qualquer tempo t será aquele que maximizar a média amostral para as p observações anteriores. Seja $M_t = [M_t^1, M_t^2, \dots, M_t^K]$ o vetor de médias em t , é escolhida a estratégia de seleção de carteiras que obtiver maior média nesta subamostra:

$$w_{t,M}^k = \arg \max(U_t^*; M_t^1, M_t^2, \dots, M_t^K) \quad (22)$$

Isto é, obtém-se a média dos retornos na janela amostral (delimitada pelo parâmetro p) para cada estratégia, depois é identificada aquela com valor máximo do critério e, então, retorna-se o vetor de pesos em t da estratégia que maximizou a média da subamostra de p observações passadas dos retornos.

Se escolhido como critério o índice Sharpe, então, de forma semelhante ao caso anterior, será selecionado o modelo que obtiver índice Sharpe máximo para a subamostra. Do mesmo modo, será calculado o índice Sharpe para cada coluna da matriz (21), ou seja, para cada estratégia dentro da janela de observações passadas, com o vetor de índices sendo dado por: $\lambda_t = [\lambda_t^1, \lambda_t^2, \dots, \lambda_t^K]$. Então, será escolhida, a cada ponto do tempo, a estratégia com melhor performance em termos de índice Sharpe nas p observações passadas:

$$w_{t,\lambda}^k = \arg \max(U_t^*; \lambda_t^1, \lambda_t^2, \dots, \lambda_t^K) \quad (23)$$

em que $w_{t,\lambda}^k$ determina o t -ésimo elemento da sequência de escolhas para atribuição de pesos aos ativos.

Por fim, será utilizada a variância como critério para escolha. Porém, dessa vez o modelo escolhido será aquele que minimizar a variância para as p observações subjacentes a realização do experimento. Aqui, será gerado um vetor das variâncias de cada metodologia para todo t ($V_t = [V_t^1, V_t^2, \dots, V_t^K]$), dada a subamostra definida por p e, posteriormente, será selecionada a estratégia que apresentar menor risco nesta janela amostral:

$$w_{t,V}^k = \arg \min(U_t^*; V_t^1, V_t^2, \dots, V_t^K) \quad (24)$$

nesse caso $w_{t,V}^k$ determina a sequência de escolhas obtidas através da minimização da variância para uma janela de p observações anteriores.

3.4 ESTIMAÇÕES *ROLLING WINDOW*

As estimações dos parâmetros a serem utilizados nas estratégias para construção de carteiras seguirão a abordagem *rolling window*. A escolha desta metodologia de estimação foi feita seguindo DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) e Kirby e Ostdiek (2012) que a empregam em seus trabalhos para a previsão dos parâmetros de média e das matrizes de covariância dos retornos. Nesta abordagem há uma rolagem da amostra, definida por uma janela de observações L , na qual a estimação é feita cobrindo um período que vai de $t - (L - 1)$ até a observação presente (t).

Segundo Kirby e Ostdiek (2012), esta metodologia é desenvolvida de modo a equilibrar os ganhos de eficiência em usar mais observações, com a perda de precisão da previsão ao se incluir observações de tempos mais distantes, que têm pouca probabilidade de sintetizar as condições atuais do mercado. No presente estudo, os estimadores *rolling window* serão utilizados para previsões dos retornos de ativos e fatores, com a formulação seguir:

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} r_{t-l} \quad (25)$$

Além das matrizes de covariância:

$$\hat{\Sigma}_t = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} (r_{t-l} - \hat{\mu}_t)(r_{t-l} - \hat{\mu}_t)' \quad (26)$$

com $\hat{\sigma}_{i,t}^2$ representando os elementos de sua diagonal principal e $\hat{\sigma}_{i,t}\hat{\sigma}_{j,t}$ os demais elementos quando $i \neq j$.

Aqui, as janelas de rolagem serão definidas cobrindo um terço do total de observações dos retornos dos ativos ($L = T/3$), uma vez que o total de observações é dividido em três partes iguais de acordo as etapas do procedimento de escolha.

Ademais, o cálculo dos modelos de precificação de ativos também é realizado seguindo esta abordagem.

3.5 ESTRATÉGIAS COMPETIDORAS

Esta seção se destina a apresentação das estratégias competidoras para este experimento em particular. Nesse caso, foram utilizadas algumas estratégias de fácil compreensão e construção, uma vez que o objetivo aqui é explorar os possíveis ganhos com a escolha de metodologias baseada em persistência de performance e critérios de avaliação simples. A seguir são apresentadas os modelos competidores utilizados no experimento.

Estratégia Ingênua (*naive*)

A estratégia igualmente ponderada, cujo registro das primeiras adoções, segundo Duchin e Levy (2009), datam de mais de 1500 anos atrás, já se mostrou em várias aplicações, como pode-se notar em DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), com performance superior a estratégias sofisticadas e de difícil implementação. Desse modo, é natural a sua escolha para compor as estratégias competidoras, além de servir como uma limitadora de desempenho na etapa de pré-seleção. O peso para cada um dos n ativos desta carteira é definido a seguir:

$$\omega_{i,t}^{naive} = \frac{1}{n} \quad (27)$$

aqui cada ativo recebe peso igual na formulação da carteira, além disso a soma dos pesos deve ser igual a um.

Estratégias de otimização por média-variância

As estratégias de otimização desenvolvidas a partir de Markowitz (1952) e suas extensões dominaram o campo de seleção de carteiras por muito tempo e ainda têm grande espaço nesta área. Em sua formulação básica, o vetor de pesos desta metodologia pode ser obtido através da solução do problema representado pelo sistema (8) e, segundo Cochrane (2009), é determinado como:

$$\omega_t^{mv} = \Sigma_t^{-1} \frac{\mu_t(C\mu_0 - B) + l(A - B\mu_0)}{AC - B^2} \quad (28)$$

com $A = \mu_t(\Sigma_t)^{-1}\mu_t$, $B = \mu_t(\Sigma_t)^{-1}l$ e $C = l'(\Sigma_t)^{-1}l$, aqui l é um vetor no qual todos os elementos são iguais a 1.

As estratégias de otimização por média-variância resultam de combinações de pesos atribuídos aos ativos que visam alcançar o menor risco para um nível fixo de

retorno μ_0 . De modo alternativo, podem ser obtidas fixando um nível máximo de risco, nesse caso a otimização é feita visando um nível de retorno máximo. Serão adotadas duas estratégias de otimização por média-variância neste experimento, em nenhum caso será permitida a realização de venda a descoberto, dados os resultados negativos que esta prática pode trazer em termos de retornos às carteiras, além de que carteiras com venda a descoberto tem custos de transação mais altos, que na maioria das vezes corroem os resultados alcançados pelos portfólios.

A primeira carteira implementada será construída com a utilização da previsão amostral dos retornos esperados e matriz de covariância, além de contar com a restrição de venda a descoberto. A outra carteira fará a previsão dos retornos dos ativos com o auxílio dos modelos de precificação. Nesse caso para a previsão da média de cada ativo, tem-se:

$$\hat{\mu}_{i,t}^* = \beta'_{i,t} \hat{f}_t \quad (29)$$

em que $\beta_{i,t} = (\beta_{i,t}^1, \beta_{i,t}^2, \dots, \beta_{i,t}^F)'$ é vetor dos coeficientes de carga dos F fatores para os i ativos e $\hat{f}_t = (\hat{f}_t^1, \hat{f}_t^2, \dots, \hat{f}_t^F)'$ é o vetor de fatores previstos para o tempo t . De modo semelhante a previsão das volatilidades individuais de cada ativo é feita segundo:

$$\hat{\sigma}_{i,t}^{2*} = \beta'_{i,t} \hat{\Gamma}_t \beta_{i,t} \quad (30)$$

aqui $\hat{\Gamma}_t$ é previsão amostral da matriz de covariância dos fatores.

Na construção das duas estratégias tanto a previsão dos retornos, quanto da matriz de covariâncias é feita utilizando a abordagem *rolling window* para uma janela de rolagem de $T/3$ observações. Além disso, a estimação dos parâmetros dos modelos de fatores (os modelos de precificação de ativos) foi realizada também utilizando os estimadores *rolling window* com igual janela de rolagem. Assim, o experimento será realizado com duas estratégias de média-variância diferentes, uma com estimação amostral e outra com a utilização de modelos de fatores para previsão.

Estratégia de mínima-variância

A estratégia de mínima-variância é um caso particular das carteiras de média-variância. A justificativa para elaboração desta estratégia se encontra na dificuldade de se obter boas estimativas para os retornos esperados, além de que a má especificação deles pode trazer grandes prejuízos à otimização, como visto em Best e Grauer (1991). O vetor de pesos ótimos desta abordagem pode ser alcançado resolvendo o sistema (9) e é dado por:

$$\omega_t^{minv} = \frac{l'(\hat{\Sigma}_t)^{-1}}{l'(\hat{\Sigma}_t)^{-1}l} \quad (31)$$

em que l é um vetor de tamanho n em que cada elemento tem valor 1.

Para estimação das matrizes de covariância dos retornos utilizadas aqui recorreu-se ao estimador *rolling window* amostral, apresentado na equação (26).

Estratégias *Volatility Timing*

Os estudos realizados por Fleming, Kirby e Ostdiek (2001) e Fleming, Kirby e Ostdiek (2003) visavam construir carteiras alternativas, cuja estruturação não dependesse da estimação dos retornos esperados, que, como já muito discutido aqui, é bastante problemática. Os autores desenvolveram, então, as estratégias *volatility timing*, nas quais o rebalanceamento das carteiras depende apenas da volatilidade esperada. Esta metodologia apresenta como grande atrativo a sua facilidade de implementação, não necessitando de otimização ou inversão de matrizes de covariância, além de não gerar pesos negativos.

A metodologia conta ainda com um parâmetro (η) que dá a velocidade de ajuste do rebalanceamento da carteira em relação a mudanças de volatilidade. Segundo Kirby e Ostdiek (2012), se este parâmetro se aproxima de zero a carteira toma formato semelhante a ingênua, porém se $\eta \rightarrow \infty$ a carteira tenderá a ser formada apenas pelo ativo de menor volatilidade.

No presente estudo, assim como em Kirby e Ostdiek (2012), o parâmetro η assumirá os seguintes valores: $\{1, 2, 4\}$. Além disso, o cálculo da volatilidade seguirá duas abordagens, a primeira com estimações *rolling window* amostrais como apresentado na equação (26), cujos pesos para cada ativo i são dados por:

$$\omega_{i,t}^{vt} = \frac{(1/\hat{\sigma}_{i,t})^\eta}{\sum_{i=1}^n (1/\hat{\sigma}_{i,t})^\eta} \quad (32)$$

O outro caso é quando a estimação da volatilidade é feita via modelos de fatores como apresentado na equação (30). Então os pesos dos ativos nesta abordagem são determinados do seguinte modo:

$$\omega_{i,t}^{vt*} = \frac{(1/\hat{\sigma}_{i,t}^*)^\eta}{\sum_{i=1}^n (1/\hat{\sigma}_{i,t}^*)^\eta} \quad (33)$$

Deste modo, serão empregadas seis diferentes estratégias *volatility timing* na aplicação empírica da metodologia de seleção de estratégias, dadas as duas formas de estimação da volatilidade esperada e os 3 valores diferentes do parâmetro η .

Estratégias *Reward-to-Risk Timing*

Tendo em vista que o conjunto de estratégias anterior ignora as informações que podem ser trazidas por meio dos retornos esperados, Kirby e Ostdiek (2012) criam

as estratégias *reward-to-risk*. Assim como no caso anterior esta abordagem não leva conta os elementos fora da diagonal principal da matriz de covariância prevista. Os autores argumentam que a construção de estratégias desconsiderando tais elementos da matriz de covariância diminui o risco de pesos extremos para os ativos. Os pesos desta abordagem para um ativo i qualquer quando se utiliza estimação *rolling window* amostral são dados por:

$$\omega_{i,t}^{rw} = \frac{(\hat{\mu}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t})^\eta}{\sum_{i=1}^n (\hat{\mu}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t})^\eta} \quad (34)$$

em que $\hat{\mu}_{i,t}^+ = \max(\hat{\mu}_{i,t}, 0)$, o que garante pesos positivos à carteira.

Quando se usa os estimadores alternativos, nos quais se conta com o auxílio dos modelos de precificação para previsão, dados pelas equações (29) e (30), o peso da carteira para ativo i é dado por:

$$\omega_{i,t}^{rw*} = \frac{(\hat{\mu}_{i,t}^{*+} / \hat{\sigma}_{i,t}^*)^\eta}{\sum_{i=1}^n (\hat{\mu}_{i,t}^{*+} / \hat{\sigma}_{i,t}^*)^\eta} \quad (35)$$

aqui tem-se $\hat{\mu}_{i,t}^{*+} = \max(\hat{\mu}_{i,t}^*, 0)$.

Assim, serão também seis estratégias *reward-to-risk* aplicadas ao experimento.

Estratégias *Reward-Risk Timing* alternativas

Dados os problemas de estimação dos retornos dos ativos, os quais são usados na abordagem anterior, Kirby e Ostdiek (2012) criaram uma estratégia na qual utilizam as cargas de modelos multi-fatores de risco para substituir os retornos esperados na formulação anterior. Assim, é empregado um novo parâmetro que traz o valor médio da carga dos fatores. Os pesos desta estratégia são dados a seguir:

$$\omega_{i,t}^{rwa} = \frac{(\bar{\beta}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t})^\eta}{\sum_{i=1}^n (\bar{\beta}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t})^\eta} \quad (36)$$

aqui $\bar{\beta}_{i,t}^+ = \max(\bar{\beta}_{i,t}, 0)$ e $\bar{\beta}_{i,t} = (1/F) \sum_{f=1}^F \beta_{i,t}^f$ é a média da carga dos F fatores utilizados na construção do modelo.

Caso a volatilidade também seja calculada via modelos de fatores, isto é, via equação (30), o peso de cada ativo i no portfólio é definido como:

$$\omega_{i,t}^{rwa*} = \frac{(\bar{\beta}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t}^*)^\eta}{\sum_{i=1}^n (\bar{\beta}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t}^*)^\eta} \quad (37)$$

em que $\bar{\beta}_{i,t}^+$ segue as mesmas diretrizes do caso anterior.

Dadas as duas formas de se calcular a volatilidade a serem empregadas na aplicação empírica da metodologia aqui proposta, além dos três parâmetros de velocidade de rebalanceamento da carteira, outra vez serão geradas seis carteiras.

4 APLICAÇÃO E RESULTADOS

O problema de alocação de recursos, em especial o caso da seleção de carteiras de investimentos, pode ser resolvido de diversas maneiras, como já discutido nas seções anteriores. No entanto, dadas as diferentes formas de se resolver esse problema, as quais podemos chamar de estratégias, metodologias ou modelos, não há unanimidade em termos de performance quando se parte para sua implementação empírica. Desse modo, foi desenvolvido o procedimento de escolha descrito no capítulo anterior, no qual, a partir de um universo de metodologias competidoras, deseja-se chegar a cada ponto do tempo àquela cujo desempenho num passado recente foi superior às demais, levando em conta a avaliação de algum dos critérios definidos anteriormente. Nesse caso, segundo a hipótese de persistência de performance, a curto prazo essa carteira continuará a apresentar bom desempenho.

A presente proposta de escolha entre estratégias foi implementada dividindo a amostra em três partes com o mesmo número de observações. A primeira parcela das observações foi tomada como ponto de partida das estimações *rolling window* dos parâmetros das estratégias, assim os primeiros componentes da previsão amostral dos parâmetros de média e volatilidade foram obtidos tomando toda essa parcela como amostra. Além disso, a estimação dos modelos de fatores foi realizada via regressão normal multivariada também contando com auxílio do método de rolagem amostral com igual dimensão da janela de rolagem. Ainda, os retornos e matrizes de covariância dos fatores foram calculados com o procedimento rolagem amostral igual ao aplicado nos retornos dos ativos individuais.

Na segunda parte da amostra é realizada a pré-seleção, nessa etapa foram calculadas as 22 estratégias de seleção de carteiras propostas anteriormente para as três diferentes bases de dados: ações de empresas que compõe o índice Ibovespa; ações de empresas que compõe o índice S&P 100; e 25 carteiras formadas a partir da classificação de capitalização a mercado e razão *book-to-market* do mercado americano. Então, puderam ser selecionadas para a última etapa (fora da amostra) aquelas estratégias que obtiveram desempenho aceitável nesta fase de filtragem e, assim, estavam aptas a integrar o universo restrito de metodologias para construção de carteiras. Nesse caso, além do desempenho superior a estratégia ingênua em termos de índice Sharpe, foram selecionadas as estratégias com *turnover* igual ou inferior a 2%, valor definido para o parâmetro γ , para compor U^* .

Uma vez construído o universo restrito de metodologias para construção de

carteiras de investimento, foi implementado, para cada uma das bases de dados, o procedimento de escolha entre estratégias para seleção de carteiras baseado em persistência de performance, no qual foram definidos como critérios de avaliação: média, índice Sharpe e variância – cada um à sua vez. Além disso, para cada caso, o experimento foi realizado considerando todos valores possíveis para o parâmetro p , que determina o tamanho da matriz de retornos passados. Ademais, os detalhes de implementação e resultados para cada base de dados são apresentados a seguir.

4.1 AÇÕES COMPONENTES DO ÍNDICE S&P 100

A primeira base de dados à qual o estudo foi empregado é formada por observações dos preços das ações de empresas que compuseram o índice S&P 100¹ no último trimestre de 2018 e têm abertura de capital anterior a data inicial desta amostra. Foram tomadas 2517 observações dos preços diários destas ações com ajustamento para dividendos e *splits* que compreendem um período de 10 anos, de 03 de novembro de 2008 a 31 de outubro de 2018.

Ainda em relação à base de dados, para cálculo dos modelos de fatores, os quais foram empregados na construção de algumas das estratégias deste exercício, recorreu-se à base de dados mantida por Kenneth French. O modelo de fator que melhor se adequou à presente análise foi o desenvolvido por Fama e French (2015), que conta com cinco fatores em sua formulação. Para sua construção foram utilizadas 2517 observações, que compreendem período igual ao das ações, dos fatores de risco de mercado, SMB, HML, RMW e CMA, além do ativo livre de risco. O cálculo dos parâmetros do modelo foi realizado com a utilização de regressões normais multivariadas com janela de rolagem de 838 observações. Cabe destacar que todas as estratégias aplicadas nesta base de dados foram realizadas utilizando a mesma especificação para rolagem da janela de estimação.

A tabela 1 traz os resultados obtidos na etapa de pré-seleção, por meio dela foi possível determinar o conjunto de metodologias para compor o universo de estratégias restrito. Neste caso, as estratégias selecionadas para compor U^* foram as duas estratégias de otimização por média-variância, a *volatility timing* e as *reward-to-risk* estimadas com o auxílio do modelo de precificação de ativos de Fama e French (2015), com $\eta = 1$ e $\eta = \{1, 2\}$ respectivamente, além do próprio portfólio igualmente ponderado.

Em relação à performance das estratégias na parcela da amostra destinada à

¹É um índice do mercado de ações norte-americano mantido pela Standard & Poor's que mede o desempenho das empresas de maior capitalização dos Estados Unidos. O índice inclui 102 papéis de 100 grandes companhias de vários setores.

Tabela 1 – Pré-seleção aplicada à base de ações componentes do índice SP 100

Estratégias		Medidas de Performance			
		μ	λ	σ	$\bar{\tau}_p$
Ingênua		19,43	1,620	12,00	0,007
Mínima-Variância		11,22	1,189	9,45	0,016
Média-Variância	Amostrал ⁺	16,57	1,642	10,10	0,013
	FF(5) ⁺	21,31	1,964	10,86	0,018
Volatility Timing Amostrал	$\eta = 1$	17,02	1,608	10,59	0,007
	$\eta = 2$	17,25	1,562	11,05	0,008
	$\eta = 4$	12,11	1,273	9,52	0,010
Volatility Timing FF(5)	$\eta = 1$	17,77	1,716	10,36	0,008
	$\eta = 2$	15,25	1,565	9,75	0,010
	$\eta = 4$	11,14	1,064	10,47	0,015
RWR Amostrал	$\eta = 1$	17,96	1,605	11,20	0,020
	$\eta = 2$	16,72	1,543	10,85	0,032
	$\eta = 4$	14,48	1,350	10,73	0,053
RWR FF(5)	$\eta = 1$	17,88	1,681	10,64	0,010
	$\eta = 2$	16,38	1,640	9,99	0,013
	$\eta = 4$	14,97	1,536	9,75	0,016
RWR Alternativa Amostrал	$\eta = 1$	15,83	1,527	10,37	0,011
	$\eta = 2$	14,21	1,439	9,88	0,016
	$\eta = 4$	11,46	1,187	9,66	0,025
RWR Alternativa FF(5)	$\eta = 1$	16,72	1,586	10,55	0,049
	$\eta = 2$	13,51	1,416	9,55	0,020
	$\eta = 4$	10,07	1,002	10,06	0,023

Fonte: Elaboração do autor.

A tabela traz uma avaliação da performance das estratégias individuais de seleção de ativos, tomando como medidas de desempenho o retorno médio, índice Sharpe e desvio-padrão anualizados, além do turnover médio das carteiras no período de pré-seleção, aplicadas às ações componentes do índice S&P 100. Aqui estão destacados em negrito aqueles valores que violam algum dos critérios da pré-seleção, definidos pela regra (19) (com $\gamma = 0,02$), e, desta forma, excluem as estratégias às quais estes valores pertencem do universo restrito de metodologias para construção de carteiras (U^*).

pré-seleção, pode-se notar que a estratégia que obteve maior índice Sharpe e retorno médio, 1,964 e 21,31 respectivamente, foi a obtida pela metodologia de otimização por média-variância com os parâmetros calculados com auxílio do modelo de fatores. Por outro lado, a estratégia RWR Alternativa FF(5) com $\eta = 4$ foi a que apresentou pior performance no tocante a essas medidas, com média igual a 10,07 e índice Sharpe alcançando apenas 1,002. Quando se analisa o risco destas carteiras, percebe-se que a carteira igualmente ponderada foi aquela com maior desvio-padrão (12,00), enquanto

a carteira de mínima-variância amostral apresentou o menor valor para essa medida (9,45).

Na tabela 2 são apresentados os resultados das estratégias individuais nas 839 últimas observações da amostra. Ao analisar os resultados das carteiras geradas por essas metodologias, nota-se que a estratégia com melhor performance em termos de retorno médio e índice Sharpe continuou sendo a de Média-Variância FF(5), 13,05 e 1,136 respectivamente. Em contrapartida a estratégia que obteve pior desempenho

Tabela 2 – Desempenho das estratégias individuais aplicadas à base de ações do SP 100

Estratégias		Medidas de Performance		
		μ	λ	σ
Ingênua		12,05	0,932	12,94
Mínima-Variância		9,90	0,962	10,29
Média-Variância	Amostral ⁺	10,94	1,051	10,41
	FF(5) ⁺	13,05	1,136	11,49
Volatility Timing Amostral	$\eta = 1$	11,28	0,946	11,93
	$\eta = 2$	11,59	0,971	11,94
	$\eta = 4$	10,39	0,974	10,67
Volatility Timing FF(5)	$\eta = 1$	11,19	0,980	11,43
	$\eta = 2$	10,81	1,016	10,65
	$\eta = 4$	10,11	0,903	11,21
RWR Timing Amostral	$\eta = 1$	12,00	0,952	12,61
	$\eta = 2$	11,94	0,963	12,41
	$\eta = 4$	11,47	0,935	12,28
RWR FF(5)	$\eta = 1$	11,30	0,934	12,10
	$\eta = 2$	11,17	0,967	11,57
	$\eta = 4$	11,26	1,001	11,26
RWR Alternativa Amostral	$\eta = 1$	9,67	0,837	11,55
	$\eta = 2$	8,55	0,755	11,33
	$\eta = 4$	7,45	0,655	11,37
RWR Alternativa FF(5)	$\eta = 1$	10,82	0,938	11,54
	$\eta = 2$	10,03	0,956	10,50
	$\eta = 4$	9,59	0,885	10,84

Fonte: Elaboração do autor.

A tabela 2 traz a avaliação da performance das estratégias individuais de seleção de ativos no período final (fora da amostra), tomando como medidas de desempenho o retorno médio, índice Sharpe e desvio-padrão anualizados das carteiras formadas a partir de ações que compunham o índice S&P 100 no último trimestre de 2018 e foram utilizadas no estudo.

em relação a essas estatísticas foi a RWR Alternativa estimada a partir da amostra com $\eta = 4$, cujos resultados de retorno médio e índice Sharpe atingiram 7,45 e 0,655 respectivamente. Em relação ao desvio-padrão a carteira de mínima-variância amostral novamente foi a que obteve melhor resultado (10, 29), enquanto a carteira ingênua apresentou o maior desvio-padrão dentre as demais carteiras (12, 94).

A tabela 3 apresenta os resultados obtidos por carteiras construídas através da escolha baseada nos critérios de média, índice Sharpe e variância. Cabe ressaltar que apesar de se ter realizado o experimento com todos possíveis valores para a janela de observações passadas (p), optou-se aqui por apresentar o intervalo em que a escolha entre carteiras logrou melhor desempenho, nesse caso entre 4 e 14 observações passadas ao tempo em que foi tomada decisão de alocação, além de janelas amostrais periodicamente espalhadas para fins de comparação.

Ao se analisar a tabela 3, é possível ver que sempre que a escolha de estratégias foi realizada utilizando como critério de otimização os retornos médios no intervalo $p = \{4, \dots, 14\}$ houve desempenho, em termos de índice Sharpe, superior a todas as demais estratégias individualmente construídas apresentadas na tabela anterior, a exceção do caso com a janela de observações passadas foi igual 5 (que ainda assim tem performance superior à carteira 1/n). As escolhas orientadas segundo o critério do índice Sharpe com o mesmo intervalo para janela de observações passadas obtiveram um desempenho um pouco abaixo, embora sempre superior à estratégia ingênua, em alguns casos, não foram capazes de superar o desempenho de algumas carteiras formuladas individualmente. Já os resultados gerados a partir da minimização da variância na subamostra formada pelas observações passadas, por outro lado, foram ruins, apesar de níveis de risco mais baixos quando comparados à performance obtida utilizando os dois critérios anteriores, para nenhuma janela observação se obteve performance superior em relação à carteira de Média-Variância FF(5), que apresentou melhor desempenho entre as estratégias individuais.

Quando o procedimento de escolha foi realizado utilizando a média como critério de otimização e janela de observações passadas igual a quatro ($p = 4$), foram obtidos os melhores resultados em termos de índice Sharpe e retorno médio, 1,378 e 15,39 respectivamente. A figura 1 traz a evolução da seleção entre estratégias para compor essa carteira. Por meio deste gráfico é possível observar a cada ponto do tempo a estratégia escolhida para compor a sequência de escolhas ótimas com base na persistência de performance.

Ainda, a figura 2 traz o número de vezes em que cada uma das estratégias foi a escolhida quando definida a média como critério de seleção para as 4 observações

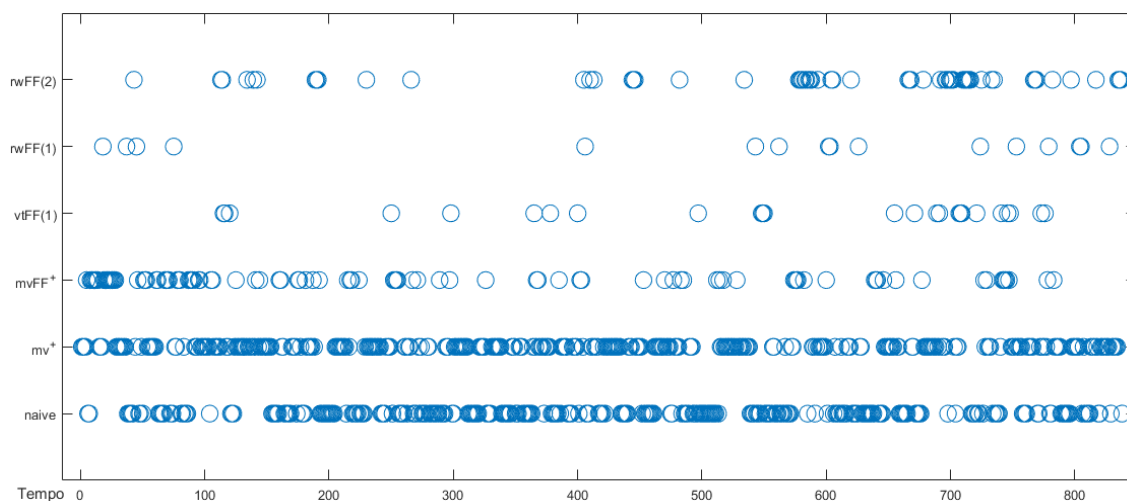
Tabela 3 – Carteiras construídas a partir da escolha entre estratégias - SP 100

Critério	p	Desempenho			p	Desempenho			
		μ	λ	σ		μ	λ	σ	
Média	4	15,39***	1,378***	11,18	20	13,10**	1,214**	10,80	
	5	12,35*	1,112*	11,12	30	13,23**	1,197**	11,06	
	6	14,50**	1,304**	11,12	60	12,62*	1,116*	11,32	
	7	14,41**	1,301**	11,08	90	11,71	1,030*	11,38	
	8	13,77**	1,247**	11,04	120	12,95*	1,138**	11,39	
	9	13,27**	1,213*	10,95	150	14,11**	1,228**	11,50	
	10	14,02**	1,309**	10,72	200	12,43*	1,062*	11,71	
	11	13,82**	1,299**	10,65	250	11,51	0,981	11,73	
	12	13,60**	1,265**	10,76	375	13,97**	1,232**	11,35	
	13	13,01*	1,206**	10,80	500	13,67**	1,202**	11,38	
	14	12,90*	1,195**	10,80	750	13,13**	1,121	11,72	
	Sharpe	4	14,21**	1,282**	11,09	20	13,13**	1,212**	10,84
		5	12,47*	1,131*	11,04	30	13,18**	1,187**	11,11
		6	12,75*	1,157**	11,03	60	12,02	1,076*	11,18
7		12,05	1,101*	10,95	90	11,69	1,050*	11,14	
8		12,54*	1,166**	10,76	120	11,72	1,047*	11,20	
9		13,03*	1,214**	10,74	150	12,08*	1,073*	11,27	
10		12,43*	1,170**	10,63	200	11,38	1,003*	11,35	
11		12,07*	1,128*	10,71	250	12,69*	1,137**	11,17	
12		11,17	1,034*	10,82	375	14,53**	1,334**	10,90	
13		12,66*	1,178**	10,75	500	12,55*	1,172**	10,71	
14		12,81*	1,184**	10,82	750	14,03**	1,220**	11,51	
Variância		4	11,32	1,038*	10,92	20	9,43	0,902	10,46
		5	10,76	0,989*	10,88	30	10,09	0,948*	10,65
		6	9,33	0,866	10,78	60	10,30	0,984*	10,47
	7	11,34	1,057*	10,74	90	10,66	1,015*	10,52	
	8	10,57	0,987*	10,71	120	10,36	0,986*	10,50	
	9	9,32	0,873	10,68	150	10,93	1,041*	10,51	
	10	8,47	0,797	10,64	200	9,57	0,912	10,51	
	11	9,33	0,876	10,66	250	10,17	0,974*	10,45	
	12	8,51	0,798	10,67	375	11,15	1,057*	10,55	
	13	9,13	0,860	10,62	500	10,49	1,000*	10,50	
	14	9,23	0,872	10,58	750	10,49	1,000*	10,50	

Fonte: Elaboração do autor.

Resultados em termos de retorno médio (μ), índice Sharpe (λ) e desvio-padrão (σ) anualizados para carteiras construídas através da escolha de estratégias baseada em persistência de performance, utilizando os critérios de otimização: média, índice Sharpe e variância, para uma janela de p observações recentes. (*) significa que a estratégia teve desempenho superior a ingênua, (**) que obteve performance superior a todas estratégias individuais e (***) que teve o melhor desempenho dentre todas carteiras empregadas no estudo, quando avaliada a performance em relação ao retorno médio e índice Sharpe.

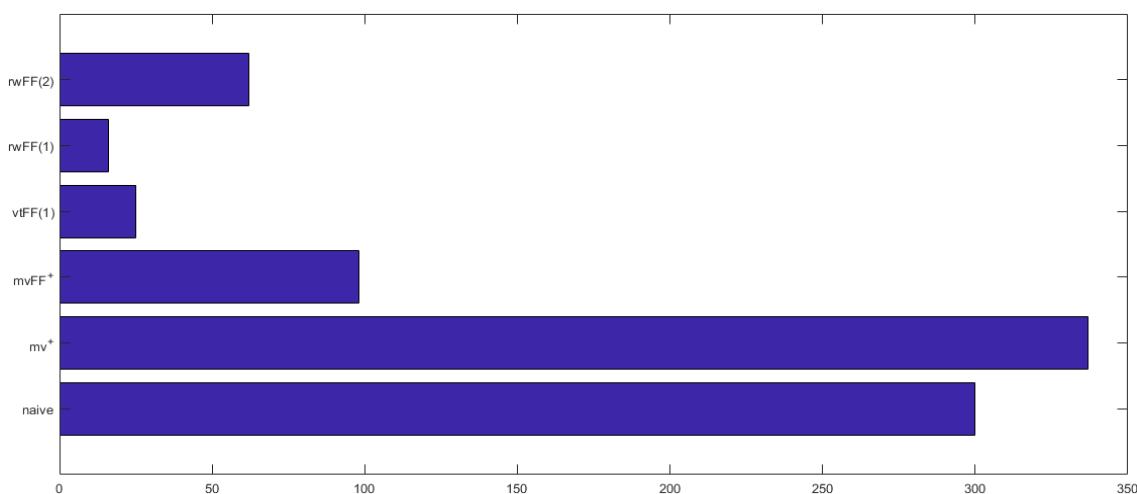
Figura 1 – Dinâmica das escolhas ótimas entre estratégias com base na hipótese de persistência de performance, utilizando como critério a média e definindo $p=4$



Fonte: Elaboração do autor.

A figura traz o deslocamento, ao longo do período fora da amostra, do procedimento de escolha entre as estratégias do universo restrito de metodologias para seleção de carteiras tomando como critério a média para as 4 últimas observações.

Figura 2 – Número de vezes em que as carteiras foram selecionadas no procedimento de escolha tomando como critério a média e definindo $p=4$



Fonte: Elaboração do autor.

O gráfico acima apresenta o número de vezes em que cada estratégia contida em U^* foi escolhida, ao longo do período fora da amostra, quando definido como critério a média para as 4 últimas observações.

imediatamente passadas, isto é, quantas vezes cada estratégia do universo restrito de metodologias obteve maior média se consideradas as 4 observações anteriores à aplicação do procedimento de escolha. Nesse caso, nota-se que a estratégia de média variância amostral (mv^+) e a estratégia ingênua (*naive*) foram as mais selecionadas, a primeira 337 e a segunda 300 vezes ao longo do período. Por outro lado, as metodologias que foram escolhidas por menos vezes foram a RWR FF(1), 25 vezes, e a RWR FF(2), 17 vezes na última parcela de observações.

A apresentação das figuras 1 e 2 foi realizada para ilustrar a dinâmica do processo da escolha de estratégias ao longo do tempo. Assim, optou-se por apresentar o procedimento de escolha que obteve melhor desempenho para exemplificar o processo, que é similar ao aplicado aos demais casos cujos resultados são apresentados na tabela 3.

4.2 AÇÕES DO ÍNDICE IBOVESPA

O experimento foi aplicado ao mercado de ações brasileiro com auxílio de dados históricos dos preços de ações negociadas na B3², que foram obtidos através da base Economatica. O conjunto de dados é constituído por 2472 observações diárias, de 03 de novembro de 2018 a 31 de outubro de 2018, dos preços de ações de empresas que compunham o índice Ibovespa no último trimestre de 2018, cuja abertura de capital foi anterior a data das primeiras observações da amostra.

Além disso, se recorreu a base do Centro Brasileiro de Pesquisa em Economia Financeira da Universidade de São Paulo - NEFIN³ - para obtenção dos fatores de risco de mercado, SMB, HML e WML. Os quais foram utilizados para cálculo do modelo de fatores desenvolvido por Carhart (1997) que foi empregado na estimação das volatilidades e retornos esperados utilizados na construção de algumas estratégias definidas no capítulo anterior. As observações dos fatores têm a mesma frequência e data das observações dos preços ações.

A janela de rolagem da abordagem *rolling window* empregada na previsão dos retornos dos ativos e fatores, assim como das matrizes de covariância dos retornos dos ativos e fatores foi definida como: $L = 823$. E, assim como nos demais casos, o total de observações foi dividido 3 partes iguais, a primeira para rolagem inicial dos estimadores *rolling window*, a segunda destinada à etapa de pré-seleção e a última à aplicação do procedimento de escolha baseado em persistência de performance.

A tabela 4 traz o resultados das estratégias competidoras no período de pré-seleção, o que permite avaliar o desempenho individual das estratégias, além de determinar aquelas selecionadas para compor U^* . Nessa fase, a carteira com melhor desempenho em relação a média dos retornos e índice Sharpe foi a RWR Alternativa FF(4) com $\eta = 4, 26,52$ e $1,127$ respectivamente. Enquanto a estratégia com pior desempenho nesses indicadores foi a $1/n$, apresentando retorno médio e índice Sharpe

²A B3, cujo nome se refere as palavras Brasil, Bolsa e Balcão, é a bolsa de valores brasileira, que ganhou esse nome após a última fusão, em março de 2017, entre Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBOVESPA) e a Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (CETIP).

³Pode ser acessada em <http://www.nefin.com.br>.

negativos, -0,06 e -0,003 respectivamente. Quando se analisa o desvio-padrão, a carteira de mínima variância amostral foi àquela com melhor resultado, 14,16.

Em relação às estratégias selecionadas para compor o universo restrito de metodologias para construção de carteiras, como a carteira ingênua obteve um desempenho muito ruim em termos de índice Sharpe, todas as demais carteiras apresentaram um desempenho superior a ela. No entanto, algumas estratégias obtiveram um *turnover*

Tabela 4 – Pré-seleção aplicada à base de ações componentes do Ibovespa

Estratégias		Medidas de Performance			
		μ	λ	σ	$\bar{\tau}_p$
Ingênua		-0,06	-0,003	19,79	0,014
Mínima-Variância Amostral		11,25	0,794	14,16	0,018
Média-Variância	Amostral ⁺	10,07	0,704	14,32	0,017
	FF(4) ⁺	10,19	0,623	16,36	0,019
Volatility Timing Amostral	$\eta = 1$	0,71	0,039	18,33	0,013
	$\eta = 2$	3,41	0,192	17,80	0,013
	$\eta = 4$	3,68	0,226	16,29	0,015
Volatility Timing FF(4)	$\eta = 1$	5,30	0,325	16,31	0,015
	$\eta = 2$	10,35	0,668	15,50	0,020
	$\eta = 4$	13,90	0,766	18,15	0,028
RWR Amostral	$\eta = 1$	4,59	0,289	15,86	0,041
	$\eta = 2$	5,56	0,362	15,35	0,055
	$\eta = 4$	7,06	0,402	17,59	0,068
RWR FF(4)	$\eta = 1$	9,87	0,579	17,04	0,057
	$\eta = 2$	15,82	0,858	18,44	0,048
	$\eta = 4$	18,55	0,901	20,61	0,047
RWR Alternativa Amostral	$\eta = 1$	1,07	0,053	20,13	0,016
	$\eta = 2$	1,79	0,088	20,29	0,018
	$\eta = 4$	3,87	0,192	20,21	0,024
RWR Alternativa FF(4)	$\eta = 1$	5,76	0,319	18,09	0,017
	$\eta = 2$	13,44	0,750	17,93	0,019
	$\eta = 4$	26,52	1,127	23,54	0,011

Fonte: Elaboração do autor.

A tabela traz uma avaliação da performance das estratégias individuais de seleção de ativos, tomando como medidas de desempenho o retorno médio, índice Sharpe e desvio-padrão anualizados, além do turnover médio das carteiras no período de pré-seleção. Aqui estão destacados em negrito aqueles valores que violam algum dos critérios da pré-seleção, definidos pela regra (19) (com $\gamma = 0,02$), e, desta forma, excluem as estratégias às quais estes valores pertencem do universo restrito de metodologias para construção de carteiras (U^*).

superior ao máximo definido ($\gamma = 0,02$), e, assim, não foram selecionadas para compor U^* , são elas: *Volatility Timing* FF(4) com $\eta = 4$, RWR Amostral com $\eta = \{1, 2, 4\}$, RWR FF(4) com $\eta = \{1, 2, 4\}$ e RWR Alternativa Amostral com $\eta = 4$. Desse modo, as outras 14 metodologias foram escolhidas na fase de pré-seleção para etapa de escolha realizada no período posterior.

Através da tabela 5 é possível analisar o desempenho das 22 estratégias individuais no período fora da amostra. Nota-se que a estratégia com melhor desempenho em termos de retorno médio foi a igualmente ponderada, 19,84, em relação ao

Tabela 5 – Desempenho das estratégias individuais – IBOVESPA

Estratégias		Medidas de Performance		
		μ	λ	σ
Ingênua		19,84	0,814	24,39
Mínima-Variância		2,38	0,148	16,12
Média-Variância	Amostral ⁺	3,84	0,237	16,20
	FF(4) ⁺	13,57	0,656	20,68
Volatility Timing Amostral	$\eta = 1$	12,99	0,613	21,19
	$\eta = 2$	14,27	0,688	20,74
	$\eta = 4$	3,66	0,216	16,99
Volatility Timing FF(4)	$\eta = 1$	13,12	0,638	20,57
	$\eta = 2$	9,62	0,515	18,57
	$\eta = 4$	10,55	0,541	19,52
RWR Timing Amostral	$\eta = 1$	8,52	0,418	20,39
	$\eta = 2$	5,62	0,294	19,11
	$\eta = 4$	4,53	0,233	19,45
RWR FF(4)	$\eta = 1$	7,88	0,355	22,24
	$\eta = 2$	6,68	0,316	21,17
	$\eta = 4$	6,37	0,305	20,88
RWR Alternativa Amostral	$\eta = 1$	15,88	0,709	22,40
	$\eta = 2$	14,50	0,679	21,38
	$\eta = 4$	14,69	0,696	21,11
RWR Alternativa FF(4)	$\eta = 1$	16,57	0,760	21,82
	$\eta = 2$	15,77	0,791	19,94
	$\eta = 4$	17,26	0,834	20,69

Fonte: Elaboração do autor.

A tabela 5 traz a avaliação da performance das estratégias individuais de seleção de ativos no período final (fora da amostra), tomando como medidas de desempenho o retorno médio, índice Sharpe e desvio-padrão anualizados das carteiras para formadas a partir da base de ações componentes do índice Ibovespa.

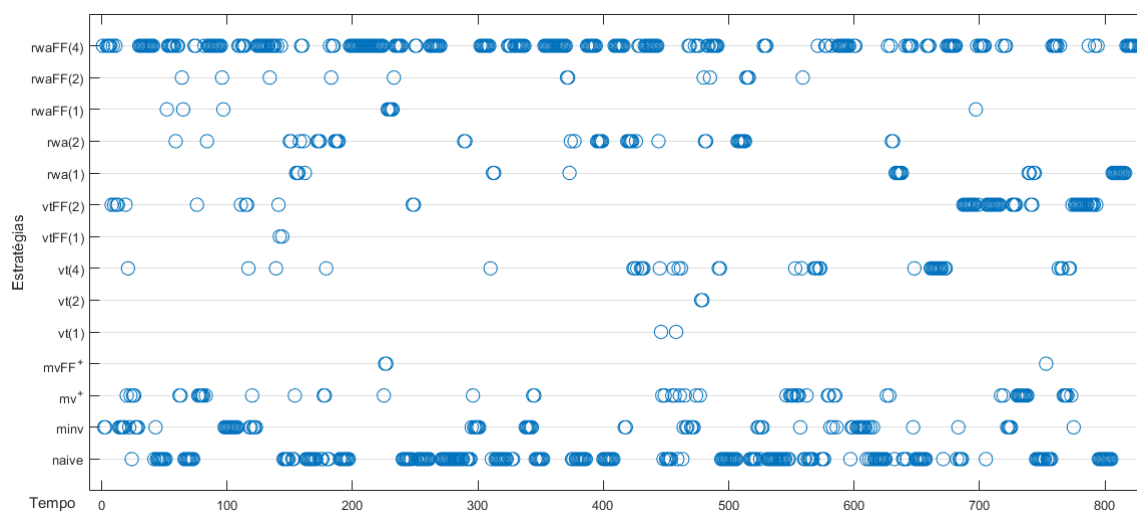
Tabela 6 – Carteiras construídas a partir da escolha entre estratégias - IBOVESPA

Critério	p	Desempenho			p	Desempenho			
		μ	λ	σ		μ	λ	σ	
Média	4	10,44	0,511	20,46	20	14,80	0,668	22,16	
	5	17,86	0,875**	20,43	30	8,11	0,388	20,91	
	6	19,05	0,935**	20,40	60	13,31	0,635	20,98	
	7	16,59	0,795	20,87	90	7,24	0,332	21,81	
	8	19,71	0,965**	20,44	120	15,13	0,695	21,79	
	9	17,33	0,832*	20,83	150	13,69	0,627	21,87	
	10	18,10	0,878**	20,63	200	12,52	0,582	21,52	
	11	18,00	0,874**	20,60	250	16,60	0,760	21,85	
	12	17,58	0,857**	20,53	375	17,92	0,827*	21,69	
	13	17,86	0,866**	20,63	500	18,89	0,892**	21,18	
	14	18,58	0,900**	20,65	750	15,66	0,759	20,65	
	Sharpe	4	10,73	0,545	19,70	20	13,37	0,651	20,55
		5	17,57	0,894**	19,67	30	4,13	0,202	20,50
		6	16,15	0,811	19,93	60	7,07	0,346	20,48
7		18,89	0,945**	19,99	90	5,09	0,241	21,16	
8		20,83**	1,061**	19,63	120	8,47	0,395	21,46	
9		21,30**	1,081***	19,71	150	9,69	0,455	21,29	
10		13,36	0,679	19,70	200	6,64	0,322	20,65	
11		13,05	0,665	19,65	250	13,88	0,663	20,96	
12		13,78	0,705	19,56	375	12,58	0,605	20,78	
13		14,30	0,733	19,52	500	18,48	0,883**	20,95	
14		12,90	0,657	19,66	750	15,63	0,763	20,50	
Variância		4	8,68	0,487	17,81	20	6,82	0,403	16,92
		5	10,78	0,614	17,57	30	5,76	0,347	16,61
		6	10,79	0,625	17,27	60	3,44	0,209	16,51
	7	9,14	0,536	17,05	90	4,41	0,272	16,22	
	8	8,49	0,497	17,10	120	2,95	0,182	16,20	
	9	8,39	0,488	17,20	150	3,11	0,193	16,15	
	10	8,89	0,525	16,94	200	3,33	0,205	16,23	
	11	10,84	0,639	16,98	250	2,99	0,185	16,17	
	12	8,28	0,483	17,14	375	2,22	0,138	16,15	
	13	11,10	0,647	17,18	500	2,15	0,133	16,19	
	14	8,94	0,529	16,92	750	2,08	0,128	16,19	

Fonte: Elaboração do autor.

Resultados em termos de retorno médio (μ), índice Sharpe (λ) e desvio-padrão (σ) anualizados para carteiras construídas através da escolha de estratégias baseada em persistência de performance, utilizando os critérios de otimização: média, índice Sharpe e variância, para uma janela de p observações recentes. (*) significa que a estratégia teve desempenho superior a ingênua, (**) que obteve performance superior a todas estratégias individuais e (***) que teve o melhor desempenho dentre todas carteiras empregadas no estudo.

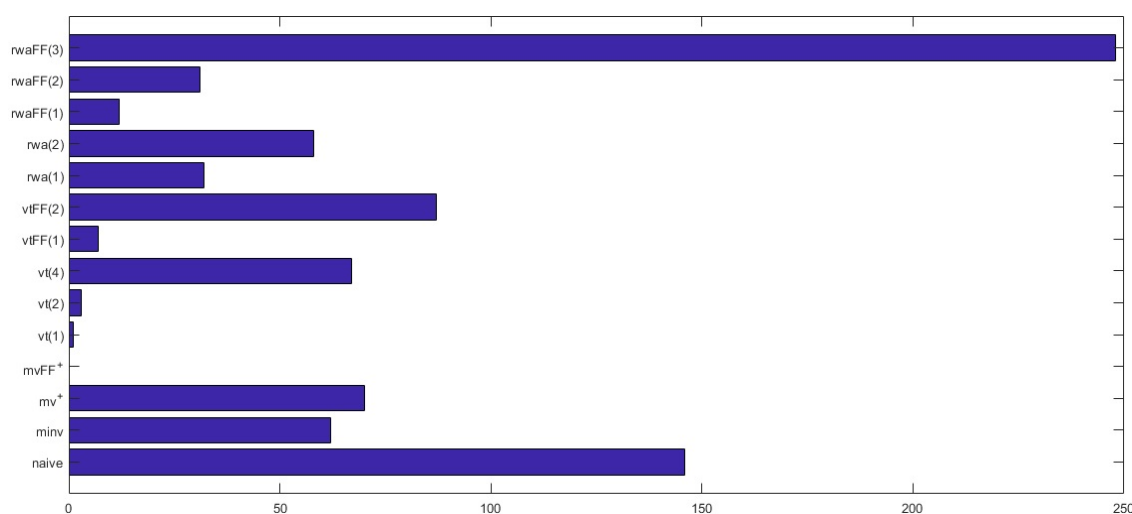
Figura 3 – Dinâmica das escolhas ótimas entre estratégias com base na hipótese de persistência de performance, tomando como critério o índice Sharpe e definindo $p=9$



Fonte: Elaboração do autor.

A figura traz o deslocamento, ao longo do período fora da amostra, da sequência de escolhas entre estratégias do universo restrito de metodologias de seleção de carteiras, tomando como critério índice Sharpe para as 9 últimas observações.

Figura 4 – Número de vezes em que as carteiras foram selecionadas no procedimento de escolha tomando como critério o índice Sharpe e definindo $p=9$



Fonte: Elaboração autor.

O gráfico acima apresenta o número de vezes em que cada estratégia contida em U^* foi escolhida, ao longo do período fora da amostra, quando definido como critério o índice Sharpe para as 9 últimas observações passadas.

Índice Sharpe a RWR Alternativa FF(4) obteve o melhor resultado, 0,834, enquanto a estratégia de mínima-variância amostral apresentou menor desvio-padrão, 16,12. Em contrapartida a metodologia que obteve pior resultado em termos de retorno médio e índice Sharpe, 2,38 e 0,148 respectivamente, foi a de mínima-variância, já a carteira com pior resultado em relação ao risco, foi a 1/n com desvio-padrão de 24,39.

Os resultados obtidos através da escolha de estratégias baseada na hipótese de persistência de performance são apresentados na tabela 6. A partir dela, pode-se notar que quando utilizada a média como critério de escolha, para janelas de observações passadas contidas no intervalo $p = \{4, \dots, 14\}$, houve desempenho superior em termos de índice Sharpe em relação às demais carteiras estimadas individualmente no período fora da amostra, a exceção de quando $p = 7$ e $p = 9$, porém no último caso ainda é superior à estratégia ingênua. Ainda, quando se levou em conta o índice Sharpe como critério, apenas com a definição das janelas de observações passadas com dimensões iguais a $p = \{5, 7, 8, 9\}$ houve performance superior às carteiras construídas individualmente em termos de índice Sharpe. Por outro lado, quando se utilizou o critério da variância no processo de escolha entre estratégias, embora a sequência de escolhas tenha gerado menor desvio-padrão em relação aos dois critérios anteriores, os resultados em termos de retorno médio e, por consequência, índice Sharpe foram muito baixos, sequer superando a estratégia ingênua.

A figura 3 apresenta a dinâmica da sequência de escolhas que apresentou melhores resultados no período fora da amostra. É possível, a cada ponto do tempo, visualizar a estratégia selecionada quando se definiu como critério de otimização o índice Sharpe para as 9 observações passadas. Além disso, a figura 4 traz o número de vezes em que cada estratégia foi escolhida na parcela final das observações para esse caso, através dela pode-se notar que a estratégia mais selecionada foi a RWR Alternativa FF(4) com $\eta = 3$, 248 vezes, seguida da ingênua, 146 vezes. Em contrapartida, a metodologia de otimização por Média-Variância FF(4) não foi selecionada nenhuma vez e a estratégia *Volatility Timing* com $\eta = 1$ apenas uma vez.

4.3 25 CARTEIRAS *SIZE* E *BOOK-TO-MARKET* DE KENNETH FRENCH

A última base de dados na qual foi realizado o estudo se trata da base de 25 carteiras formadas a partir da classificação de capitalização a mercado e razão *book-to-market* mantida por Kenneth French. Várias das mais relevantes pesquisas no campo de seleção de portfólios utilizam as carteiras de French como ativos para as mais diversas formulações metodológicas envolvendo o problema do investidor, trabalhos como os realizados por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), Tu e Zhou (2011) e Kirby e Ostdiek (2012) são exemplos disto. Nesse caso, optou-se pelas carteiras 25 *Size* e BTM pelo seu costumeiro uso no problema de alocação de recursos do investidor, fato que também ocorre nos trabalhos anteriormente citados.

Como se tratam de carteiras que agrupam ativos do mercado americano, a data e a frequência de observações é a mesma do caso das ações componentes do S&P 100. São 2517 observações que abrangem um período que vai de 03 de novembro

de 2008 a 31 de outubro de 2018. Aqui também foram utilizados dados dos fatores que são necessários à estimação do modelo de precificação de Fama e French (2015), além do ativo livre de risco, todos eles disponibilizados por Kenneth French e com a mesma frequência dos dados relativos aos 25 portfólios *Size* e *BTM*. Para todas estimações se recorreu a abordagem *rolling window* amostral com $L = 839$.

Tabela 7 – Pré-seleção aplicada às 25 carteiras *size* e *BTM* de Kenneth French

Estratégias		Medidas de Performance			
		μ	λ	σ	$\bar{\tau}_p$
Ingênua		16,52	1,159	14,21	0,003
Mínima-Variância		13,11	1,094	11,99	0,007
Média-Variância	Amostral ⁺	15,29	1,196	12,79	0,015
	FF(5) ⁺	19,58	1,226	15,98	0,019
Volatility Timing Amostral	$\eta = 1$	16,13	1,178	13,70	0,003
	$\eta = 2$	16,31	1,191	13,71	0,003
	$\eta = 4$	14,71	1,198	12,29	0,004
Volatility Timing FF(5)	$\eta = 1$	16,13	1,179	13,70	0,003
	$\eta = 2$	15,67	1,192	13,16	0,003
	$\eta = 4$	14,74	1,199	12,30	0,004
RWR Amostral	$\eta = 1$	15,99	1,165	13,74	0,009
	$\eta = 2$	15,49	1,165	13,31	0,016
	$\eta = 4$	14,63	1,156	12,67	0,026
RWR FF(5)	$\eta = 1$	16,04	1,166	13,76	0,007
	$\eta = 2$	15,55	1,167	13,33	0,012
	$\eta = 4$	15,05	1,163	12,95	0,017
RWR Alternativa Amostral	$\eta = 1$	16,28	1,160	14,04	0,004
	$\eta = 2$	16,19	1,161	13,96	0,005
	$\eta = 4$	16,20	1,169	13,86	0,008
RWR Alternativa FF(5)	$\eta = 1$	16,28	1,160	14,04	0,004
	$\eta = 2$	16,19	1,162	13,94	0,005
	$\eta = 4$	16,19	1,172	13,83	0,008

Fonte: Elaboração do autor.

A tabela traz a avaliação da performance das estratégias individuais de seleção de ativos, tomando como medidas de desempenho o retorno médio, índice Sharpe e desvio-padrão anualizados, além do turnover médio das carteiras no período de pré-seleção, para as 25 carteiras formadas a partir da classificação de capitalização a mercado e razão *book to market* mantida por Kenneth French. Aqui estão destacados em negrito aqueles valores que violam algum dos critérios da pré-seleção, definidos pela regra (19) (com $\gamma = 0,02$), e, desta forma, excluem as estratégias às quais estes valores pertencem do universo restrito de metodologias para construção de carteiras (U^*).

A tabela 7 traz os resultados relativos ao desempenho das estratégias para seleção de investimentos na fase de pré-seleção, por meio dela é possível notar que a metodologia que apresentou maior retorno médio foi a Média-Variância FF(5), 19,58, e, apesar de ter obtido o maior desvio-padrão dentre as outras estratégias, 15,98, obteve maior índice Sharpe, 1,226. Além disso, a estratégia com melhor resultado em relação ao risco foi novamente a estratégia de mínima-variância, que obteve 11,99 de desvio-padrão, apesar de ser a carteira com piores resultados para média e índice Sharpe, 13,11 e 1,094 respectivamente

Tabela 8 – Desempenho das estratégias individuais - carteiras 25 Size e BTM

Estratégias		Medidas de Performance		
		μ	λ	σ
Ingênua		9,27	0,617	15,05
Mínima-Variância		11,82	0,934	12,67
Média-Variância	Amostrat ⁺	10,35	0,778	13,31
	FF(5) ⁺	14,01	0,973	14,40
Volatility Timing Amostral	$\eta = 1$	9,51	0,652	14,60
	$\eta = 2$	9,49	0,652	14,58
	$\eta = 4$	10,18	0,751	13,56
Volatility Timing FF(5)	$\eta = 1$	9,40	0,641	14,68
	$\eta = 2$	9,53	0,666	14,31
	$\eta = 4$	9,79	0,717	13,67
RWR Timing Amostral	$\eta = 1$	9,08	0,627	14,49
	$\eta = 2$	9,04	0,644	14,05
	$\eta = 4$	9,27	0,685	13,54
RWR FF(5)	$\eta = 1$	9,10	0,623	14,62
	$\eta = 2$	9,04	0,636	14,21
	$\eta = 4$	9,09	0,656	13,86
RWR Alternativa Amostral	$\eta = 1$	9,24	0,619	14,95
	$\eta = 2$	9,27	0,619	14,99
	$\eta = 4$	9,30	0,616	15,11
RWR Alternativa FF(5)	$\eta = 1$	9,14	0,609	15,03
	$\eta = 2$	9,09	0,600	15,15
	$\eta = 4$	8,97	0,580	15,47

Fonte: Elaboração do autor.

A tabela 8 traz a avaliação de performance das estratégias individuais de seleção de ativos no período final (fora da amostra), tomando como medidas de desempenho o retorno médio, índice Sharpe e desvio-padrão anualizados das estratégias para a base das 25 carteiras construídas através da classificação por capitalização a mercado e razão *book-to-market* mantida por Kenneth French.

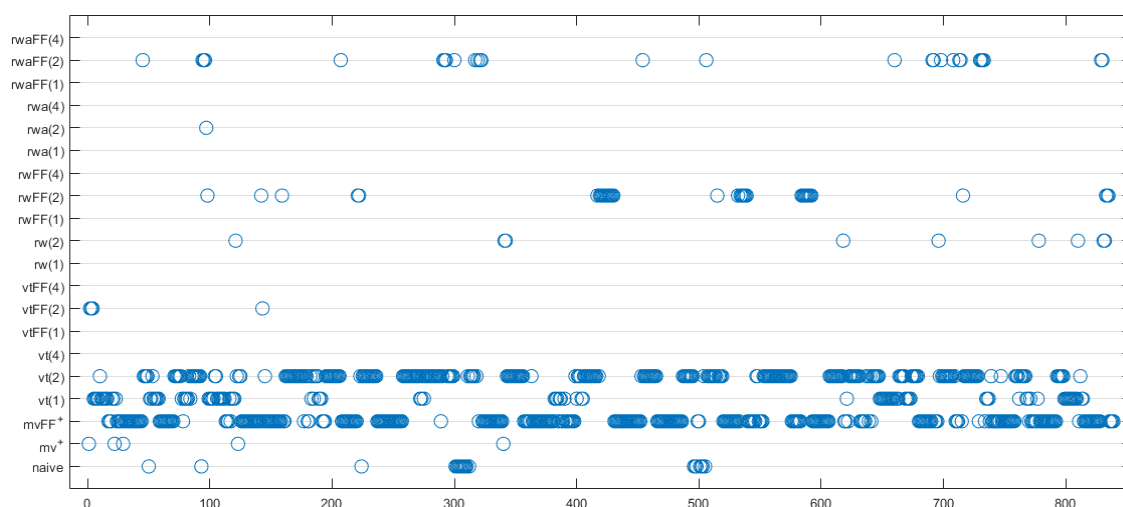
Tabela 9 – Carteiras construídas a partir da escolha entre estratégias - 25 BTM

Critério	p	Desempenho			p	Desempenho			
		μ	λ	σ		μ	λ	σ	
Média	4	17,64**	1,024**	17,23	20	11,87*	0,820*	14,49	
	5	15,18**	0,881*	17,24	30	11,04*	0,756*	14,62	
	6	18,83**	1,091**	17,27	60	10,79*	0,721*	14,97	
	7	18,24**	1,076*	16,97	90	10,22*	0,682*	14,99	
	8	10,63*	0,610	17,43	120	12,72*	0,848*	15,01	
	9	11,07*	0,649*	17,07	150	12,33*	0,825*	14,97	
	10	16,70**	1,002**	16,68	200	12,63*	0,845*	14,97	
	11	21,20**	1,280**	16,56	250	12,08*	0,813*	14,87	
	12	22,79**	1,301**	17,53	375	12,73*	0,866*	14,71	
	13	16,04**	0,935*	17,15	500	12,68*	0,871*	14,58	
	14	17,85**	1,041**	17,15	750	13,58*	0,936*	14,53	
	Sharpe	4	17,96**	1,199**	14,98	20	14,22**	0,985**	14,45
		5	19,13**	1,280**	14,95	30	12,29*	0,854*	14,40
		6	17,91**	1,212**	14,78	60	10,56*	0,724*	14,60
7		18,25**	1,208**	15,11	90	10,78*	0,738*	14,61	
8		15,61**	1,068**	14,62	120	12,68*	0,862*	14,71	
9		13,39*	0,913*	14,68	150	12,33*	0,840*	14,69	
10		17,57**	1,197**	14,70	200	12,62*	0,857*	14,73	
11		20,34**	1,360**	14,96	250	12,83*	0,877*	14,63	
12		18,42**	1,233**	14,95	375	12,12*	0,833*	14,56	
13		15,92**	1,063**	14,98	500	12,90*	0,890*	14,50	
14		15,98**	1,064**	15,03	750	12,19*	0,860*	14,18	
Variância		4	11,52*	0,821*	14,04	20	11,68*	0,857*	13,64
		5	8,95	0,637*	14,04	30	11,00*	0,829*	13,27
		6	9,56*	0,685*	13,96	60	11,14*	0,831*	13,40
	7	9,88*	0,717*	13,80	90	10,70*	0,799*	13,40	
	8	11,29*	0,821*	13,76	120	9,66*	0,722*	13,38	
	9	10,04*	0,739*	13,60	150	10,33*	0,771*	13,41	
	10	9,88*	0,733*	13,49	200	10,23*	0,767*	13,36	
	11	11,79*	0,873*	13,51	250	10,33*	0,775*	13,34	
	12	13,10*	0,976**	13,43	375	10,46*	0,785*	13,34	
	13	9,79*	0,737*	13,30	500	10,34*	0,774*	13,38	
	14	11,01*	0,835*	13,20	750	10,26*	0,762*	13,47	

Fonte: Elaboração do autor.

Resultados em termos de retorno médio (μ), índice Sharpe (λ) e desvio-padrão (σ) analisados para carteiras construídas através da escolha de estratégias baseada em persistência de performance, utilizando os critérios de otimização: média, índice Sharpe e variância, para uma janela de p observações recentes. (*) significa que a estratégia teve desempenho superior a ingênua, (**) que obteve performance superior a todas estratégias individuais e (***) que teve o melhor desempenho dentre todas carteiras empregadas no estudo, quando avaliada a performance em relação ao retorno médio e índice Sharpe.

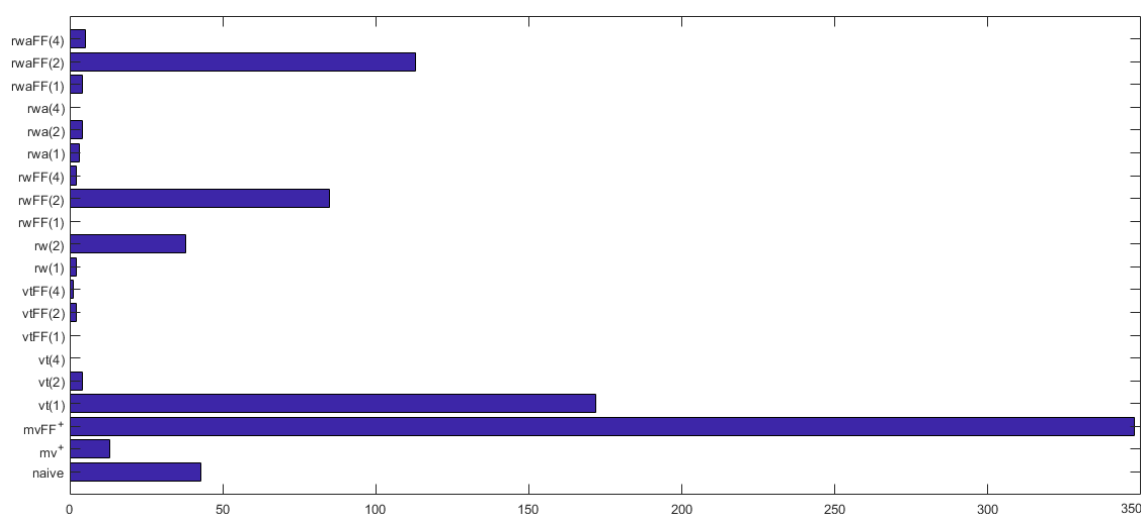
Figura 5 – Dinâmica das escolhas ótimas entre estratégias com base na hipótese de persistência de performance, tomando como critério o índice Sharpe e com $p=11$



Fonte: Elaboração do autor.

A figura traz o deslocamento, ao longo do período fora da amostra, da escolha entre as estratégias do universo restrito de metodologias de seleção de carteiras, tomando como critério o índice Sharpe para as 11 últimas observações.

Figura 6 – Número de vezes em que as carteiras foram selecionadas no procedimento de escolha, tomando como critério o índice Sharpe e com $p=11$



Fonte: Elaboração autor.

O gráfico acima apresenta o número de vezes em que cada estratégia contida em U^* foi selecionada, ao longo do período fora da amostra, quando definido como critério o índice Sharpe para as 11 últimas observações passadas.

Na etapa de pré-seleção, as carteiras que obtiveram resultado, em termos de índice Sharpe, inferior à carteira igualmente ponderada e, deste modo, foram excluídas do universo restrito de metodologias para construção de carteiras foram as estratégias de otimização por Mínima-Variância e RWR Amostral com $\eta = 4$. Sendo que a última estratégia também obteve *turnover* acima do limite máximo pré-determinado ($\gamma = 0,02$) e seria excluída de qualquer forma de U^* . Assim, as demais metodologias puderam

compor U^* e foram avaliadas no processo de escolha no período, que compreendeu as 839 observações fora da amostra.

A tabela 8 apresenta os resultados das estratégias individuais no período fora da amostra, por meio dela pode-se observar que a estratégia com melhor performance, em termos de retorno médio e índice Sharpe, foi a obtida por meio da otimização por média-variância com o auxílio do modelo de fatores de Fama e French (2015) para o cálculo dos *inputs*, com resultados de 14,01 e 0,973 respectivamente. A carteira com menor desvio-padrão foi a de Mínima-Variância: 12,67. Por outro lado, a estratégia RWR Alternativa FF(5) obteve a pior performance em todas as medidas de desempenho, com retorno médio de 8,97, índice Sharpe de 0,58 e 15,47 de desvio-padrão.

Os resultados obtidos através do processo de escolha com base em persistência de performance são apresentados na tabela 9. Nota-se que para o caso em que se recorreu a média como critério se obteve desempenho superior, em termos de índice Sharpe, às carteiras geradas pelas metodologias individuais apresentadas na tabela 8, se analisado o intervalo $p = \{4, \dots, 14\}$, à exceção de quando $p = \{5, 9\}$, nesse caso os resultados ainda foram superiores à estratégia ingênua, e $p = 8$, cujo desempenho ficou abaixo da carteira $1/n$. Quando o critério utilizado foi o índice Sharpe, também houve boa performance considerando este intervalo para as janelas de observações passadas, apenas com $p = 9$ o resultado não foi superior em termos de índice Sharpe às estratégias individuais. Por outro lado, quando se recorreu variância, apesar de resultados com menores níveis de desvio-padrão e desempenho superior à carteira $1/n$, houve uma performance ruim se comparado às carteiras individuais ou às obtidas através das sequências de escolhas realizadas adotando outros critérios, nota-se que apenas quando se definiu $p = 12$ houve desempenho superior às estratégias individuais em termos de índice Sharpe.

A figura 5 traz a dinâmica de escolha entre as estratégias no período fora da amostra quando se levou em conta o índice Sharpe máximo para as 11 observações anteriores. Enquanto a figura 6 mostra o número de vezes em que cada uma das estratégias foi a que apresentou maior potencial de performance em algum ponto da amostra, segundo a hipótese de persistência, tomando como critério o índice Sharpe para as 11 últimas observações. Nesse caso, a estratégia de Média Variância FF(5) foi a mais selecionada, 348 vezes, seguida da estratégia de Média-Variância Amostral, 172 vezes. Enquanto as estratégias *Volatility Timing* Amostral com $\eta = 4$, *Volatility Timing* FF(4) com $\eta = 1$, RW FF(5) com $\eta = 1$ e RW Alternativa Amostral com $\eta = 4$ não foram selecionadas nenhuma vez no decorrer do período.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma vez que há inúmeras estratégias destinadas à seleção de ativos para composição de carteiras de investimento, isto é, vários modelos candidatos a solucionar o problema de alocação do investidor, para os quais não há uma unanimidade em termos de performance em sua aplicação empírica. O que se propôs neste trabalho foi a possibilidade, do ponto de vista do gestor, de a cada ponto do tempo selecionar aquela estratégia que, dado o conjunto de informações passadas, apresentou maior indicação de entregar boa performance no presente. Foram tomados como indicativos de desempenho a média, o índice Sharpe e a variância, cada um a sua vez, com base na hipótese de persistência de performance.

O procedimento de escolha entre estratégias foi realizado em passos distintos, num primeiro momento foi realizada a pré-seleção. Nessa etapa, foram selecionadas estratégias que obtiveram desempenho igual ou superior à carteira ingênua em termos de índice Sharpe e *turnover* abaixo ou igual a um limite, definido por $\gamma = 0,02$. Então, para cada caso se obteve um universo restrito de metodologias para construção de carteiras de dimensão diferente. No experimento realizado com a base de ações componentes do S&P 100 foram pré-selecionadas 6 das 22 estratégias estimadas; no próximo com ações do Ibovespa foram escolhidas 14 metodologias que respeitaram os critérios de filtragem; e, por fim, com a base de 25 carteiras *size* e *book-to-market*, mantidas por Kenneth French, apenas duas estratégias foram excluídas do universo restrito (U^*).

No passo seguinte foi realizada a escolha entre estratégias com base na hipótese de persistência de performance para cada tempo do último terço da amostra. E, de forma geral, foram gerados bons resultados quando adotados como critérios a média e o índice Sharpe, cada um a sua vez, em especial para janelas de observações passadas dos retornos dos ativos definidas entre 4 e 14 observações. Por outro lado, quando o processo de escolha foi estruturado para selecionar a cada ponto do tempo aquela metodologia que obteve menor variância nas últimas p observações não se logrou muito êxito, apenas quando aplicado à última base de dados obteve desempenho superior à estratégia $1/n$, em quase todas as definições de p apresentadas.

Apesar de não se ter definido uma janela de observações passadas ótima para o processo de escolha baseada em persistência de performance, foi demonstrado que para uma faixa entre 4 e 14 observações passadas, normalmente, a escolha baseada em persistência gera um desempenho superior às demais carteiras construídas indi-

vidualmente quando definidos como critérios a média e o índice Sharpe. Já o critério da variância se mostrou incapaz de gerar desempenho superior tanto em termos de maior retorno como para mitigação de risco. Um ponto do trabalho que talvez possa ser aperfeiçoado em pesquisas futuras é a definição de um valor ótimo para o parâmetro p ao longo do tempo.

Além do mais, o procedimento de escolha baseado em persistência de performance mostrou que é possível, sob o ponto de vista do gestor, selecionar, a cada ponto do tempo, aquela estratégia que apresentou maior potencial de gerar bons resultados segundo a hipótese de persistência de performance. Ainda, por meio de três diferentes bases de dados demonstrou-se que a escolha baseada em persistência de performance pode ter aplicação abrangente e razoáveis chances de apresentar bons resultados em diferentes bases de dados e universos de metodologias para construção de carteiras. Em suma, foi proposto e empregado em algumas bases de dados um procedimento com potencial para aplicação em diversos problemas de alocação envolvendo investimentos, especialmente quando utilizada a informação de curto prazo em relação aos critérios empregados neste estudo.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, E. W.; CHENG, A.-R. Robust bayesian portfolio choices. **The Review of Financial Studies**, Oxford University Press, v. 29, n. 5, p. 1330–1375, 2016.
- ARAÚJO, A. C. d.; MONTINI, A. d. Á. Análise de métricas de risco na otimização de portfólios de ações. **Revista de Administração**, Elsevier, v. 50, n. 2, p. 208–228, 2015.
- AVRAMOV, D.; ZHOU, G. Bayesian portfolio analysis. **Annu. Rev. Financ. Econ.**, Annual Reviews, v. 2, n. 1, p. 25–47, 2010.
- BALDUZZI, P.; LYNCH, A. W. Transaction costs and predictability: Some utility cost calculations. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 52, n. 1, p. 47–78, 1999.
- BEST, M. J.; GRAUER, R. R. On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results. **The review of financial studies**, Oxford University Press, v. 4, n. 2, p. 315–342, 1991.
- BLACK, F.; LITTERMAN, R. Global portfolio optimization. **Financial analysts journal**, CFA Institute, v. 48, n. 5, p. 28–43, 1992.
- BOLLEN, N. P.; BUSSE, J. A. Short-term persistence in mutual fund performance. **The Review of Financial Studies**, Oxford University Press, v. 18, n. 2, p. 569–597, 2004.
- BRANDT, M. W.; SANTA-CLARA, P.; VALKANOV, R. Parametric portfolio policies: Exploiting characteristics in the cross-section of equity returns. **The Review of Financial Studies**, Oxford University Press, v. 22, n. 9, p. 3411–3447, 2009.
- BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. Performance persistence. **The Journal of finance**, Wiley Online Library, v. 50, n. 2, p. 679–698, 1995.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; NOGALES, F. J.; SANTOS, A. A. Combining multivariate volatility forecasts: an economic-based approach. **Journal of Financial Econometrics**, Oxford University Press, v. 15, n. 2, p. 247–285, 2017.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A. A. Seleção de carteiras utilizando o modelo fama-french-carhart. **Revista Brasileira de Economia**, SciELO Brasil, v. 67, n. 1, p. 45–65, 2013.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A. A. P.; TESSARI, C. Seleção de carteiras com modelos fatoriais heterocedásticos: aplicação para fundos de fundos multimercados. **RAM. Revista de Administração Mackenzie**, Universidade Presbiteriana Mackenzie, v. 15, n. 2, 2014.
- CARHART, M. M. On persistence in mutual fund performance. **The Journal of finance**, Wiley Online Library, v. 52, n. 1, p. 57–82, 1997.
- CLARKE, R.; SILVA, H. D.; THORLEY, S. Minimum-variance portfolios in the us equity market. **Journal of Portfolio Management**, Citeseer, v. 33, n. 1, p. 10, 2006.

- CLARKE, R.; SILVA, H. D.; THORLEY, S. Minimum-variance portfolio composition. **Journal of Portfolio Management**, v. 37, n. 2, p. 31, 2011.
- COCHRANE, J. H. **Asset Pricing:(Revised Edition)**. [S.l.]: Princeton university press, 2009.
- COSTA, O. L.; NABHOLZ, R. B. Otimização robusta de carteiras utilizando desigualdades matriciais lineares. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 15, n. 1, p. 41–52, 2004.
- DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1-n portfolio strategy? **Review of Financial Studies**, Oxford University Press, v. 22, n. 5, p. 1915–1953, 2009.
- DUCHIN, R.; LEVY, H. Markowitz versus the talmudic portfolio diversification strategies. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 35, n. 2, p. 71–74, 2009.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 3–56, 1993.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Multifactor explanations of asset pricing anomalies. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 51, n. 1, p. 55–84, 1996.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Size, value, and momentum in international stock returns. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 105, n. 3, p. 457–472, 2012.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. A five-factor asset pricing model. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 116, n. 1, p. 1–22, 2015.
- FLEMING, J.; KIRBY, C.; OSTDIEK, B. The economic value of volatility timing. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 56, n. 1, p. 329–352, 2001.
- FLEMING, J.; KIRBY, C.; OSTDIEK, B. The economic value of volatility timing using ?realized? volatility. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 67, n. 3, p. 473–509, 2003.
- FRENCH, K. R. Presidential address: The cost of active investing. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 63, n. 4, p. 1537–1573, 2008.
- GAO, L.; HAN, Y.; LI, S. Z.; ZHOU, G. Market intraday momentum. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 129, n. 2, p. 394–414, 2018.
- GARLAPPI, L.; UPPAL, R.; WANG, T. Portfolio selection with parameter and model uncertainty: A multi-prior approach. **The Review of Financial Studies**, Oxford University Press, v. 20, n. 1, p. 41–81, 2006.
- GRINBLATT, M.; KELOHARJU, M. The investment behavior and performance of various investor types: a study of finland’s unique data set. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 55, n. 1, p. 43–67, 2000.
- HENDRICKS, D.; PATEL, J.; ZECKHAUSER, R. Hot hands in mutual funds: Short-run persistence of relative performance, 1974–1988. **The Journal of finance**, Wiley Online Library, v. 48, n. 1, p. 93–130, 1993.

JAGANNATHAN, R.; MA, T. Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 58, n. 4, p. 1651–1683, 2003.

JORION, P. Bayes-stein estimation for portfolio analysis. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Cambridge University Press, v. 21, n. 3, p. 279–292, 1986.

JORION, P. Bayesian and capm estimators of the means: Implications for portfolio selection. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 717–727, 1991.

KAN, R.; ZHOU, G. Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Cambridge University Press, v. 42, n. 3, p. 621–656, 2007.

KANIEL, R.; SAAR, G.; TITMAN, S. Individual investor trading and stock returns. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 63, n. 1, p. 273–310, 2008.

KIRBY, C.; OSTDIEK, B. It's all in the timing: simple active portfolio strategies that outperform naive diversification. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Cambridge University Press, v. 47, n. 2, p. 437–467, 2012.

KNIGHT, F. H. **Risk, uncertainty and profit**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.

KOLM, P. N.; FOCARDI, S. M.; FABOZZI, F. J. Incorporating trading strategies in the black-litterman framework. **Handbook of Finance**, Wiley Online Library, v. 2, 2008.

KOLM, P. N.; TUTUNCU, R.; FABOZZI, F. J. 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. **European Journal of Operational Research**, v. 2, n. 234, p. 356–371, 2014.

KRITZMAN, M. Are optimizers error maximizers? **Journal of Portfolio Management**, Euromoney Institutional Investor PLC, v. 32, n. 4, p. 66, 2006.

KRITZMAN, M. The graceful aging of mean-variance optimization. **Journal of Portfolio Management**, Euromoney Institutional Investor PLC, v. 37, n. 2, p. 3, 2011.

KRITZMAN, M.; PAGE, S.; TURKINGTON, D. In defense of optimization: the fallacy of $1/n$. **Financial Analysts Journal**, CFA Institute, v. 66, n. 2, p. 31–39, 2010.

LOPES, A. L. M.; CARNEIRO, M. L.; SCHNEIDER, A. B.; LIMA, M. V. A. de. Markowitz na otimização de carteiras selecionadas por data envelopment analysis—dea. **Gestão e Sociedade**, v. 4, n. 9, p. 640–656, 2010.

LOU, D. A flow-based explanation for return predictability. **The Review of Financial Studies**, Society for Financial Studies, v. 25, n. 12, p. 3457–3489, 2012.

MACKINLAY, A. C.; PÁSTOR, L. Asset pricing models: Implications for expected returns and portfolio selection. **The Review of financial studies**, Oxford University Press, v. 13, n. 4, p. 883–916, 2000.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MARTINS, P. R.; VASCONCELLOS, C. F.; SILVA, P. N. d. Análise de modelos de seleção de carteiras de investimento. **Cadernos do IME-Série Matemática**, v. 8, 2014.

MICHAUD, R. O. The markowitz optimization enigma: Is ?optimized?optimal? **Financial Analysts Journal**, CFA Institute, v. 45, n. 1, p. 31–42, 1989.

NAIBERT, P. F.; CALDEIRA, J. F. Seleção de carteiras ótimas sob restrições nas normas dos vetores de alocação: uma avaliação empírica com dados da bm&fbovespa (selection of optimal portfolios under norm constraints in the allocation vectors: an empirical evaluation with data from bm&f bovespa). **Revista Brasileira de Finanças**, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 13, n. 3, p. 504, 2015.

PASTOR, L.; VERONESI, P. Learning in financial markets. **Annu. Rev. Financ. Econ.**, Annual Reviews, v. 1, n. 1, p. 361–381, 2009.

PEREIRA, G. M.; SANT'ANNA, L. R.; FILOMENA, T. P.; BECKER, J. L. Restrição de liquidez para modelos de seleção de carteiras (liquidity constraint for portfolio selection models). **Revista Brasileira de Finanças**, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 13, n. 2, p. 288, 2015.

PETTENUZZO, D.; RAVAZZOLO, F. Optimal portfolio choice under decision-based model combinations. **Journal of applied econometrics**, Wiley Online Library, v. 31, n. 7, p. 1312–1332, 2016.

RODRIGUES, B. D.; STEVENSON, M. J. Takeover prediction using forecast combinations. **International Journal of Forecasting**, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 628–641, 2013.

ROTELA, P.; PAMPLONA, E. d. O.; SALOMON, F. L. R. Otimização de portfólios: análise de eficiência. **RAE-Revista de Administração de Empresas**, Fundação Getulio Vargas, v. 54, n. 4, 2014.

SANTIAGO, D. C.; LEAL, R. P. C. Carteiras igualmente ponderadas com poucas ações e o pequeno investidor. **RAC-Revista de Administração Contemporânea**, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração, v. 19, n. 5, 2015.

SANTOS, A. A. P.; TESSARI, C. Técnicas quantitativas de otimização de carteiras aplicadas ao mercado de ações brasileiro. **Revista Brasileira de Finanças**, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 10, n. 3, p. 369, 2012.

TU, J.; ZHOU, G. Markowitz meets talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 99, n. 1, p. 204–215, 2011.

WELLS, C. **The Kalman filter in finance**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 32.

ZHANG, Y.; MA, F.; ZHU, B. Intraday momentum and stock return predictability: Evidence from china. **Economic Modelling**, Elsevier, v. 76, p. 319–329, 2019.

ZHOU, G. Beyond black-litterman: Letting the data speak. **Journal of Portfolio Management**, Euromoney Institutional Investor PLC, v. 36, n. 1, p. 36, 2009.

APÊNDICE A – MODELOS DE FATORES

No contexto de determinação dos retornos esperados dos ativos e matrizes de covariância, os modelos de fatores têm sido amplamente utilizados, como pode ser notado em MacKinlay e Pástor (2000) e Kirby e Ostdiek (2012). Além disso, uma das características mais atraentes destes modelos fica por conta de sua implementação computacional que é relativamente simples se comparada a outras abordagens utilizadas para este fim. A seguir há uma breve apresentação acerca dos modelos de fatores e sua aplicação em séries temporais e em dados de painel.

A.1 MODELO LINEAR DE FATORES

Suponha que haja n ativos em um ponto de tempo qualquer e seja $y_t = (y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{n,t})'$ o vetor aleatório contendo os retornos dos ativos para este ponto no tempo. Dessa forma, para um ativo i o modelo de regressão, pode ser escrito como:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \beta_{1,i}f_{1,t} + \beta_{2,i}f_{2,t} + \dots + \beta_{K,i}f_{K,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (38)$$

nesse caso, $f_{k,t}$ é um dos k fatores empregados no modelo de regressão, enquanto $\beta_{k,i}$ é o coeficiente de sensibilidade dos retornos do ativo i em relação ao fator k e $\varepsilon_{i,t}$ é o termo de erro inerente ao ativo i . Ainda, a equação anterior pode ser reescrita do seguinte modo:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \beta_i' f_t + \varepsilon_{i,t} \quad (39)$$

em que $\beta_i = (\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \dots, \beta_{K,i})'$ é vetor dos coeficientes de sensibilidade do retorno do ativo i aos fatores e $f_t = (f_{1,t}, f_{2,t}, \dots, f_{K,t})'$ é o vetor de fatores no tempo t .

A.2 MODELOS DE FATORES - REGRESSÃO CROSS-SECTIONAL

Agora, tomando os n ativos, o modelo pode ser formulado em uma abordagem *cross-sectional*:

$$y_t = \alpha + Bf_t + \varepsilon_t \quad \forall t \in 1, 2, \dots, T \quad (40)$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ é o vetor $n \times 1$ dos interceptos, $B = (\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \dots, \beta_{k,i})'$ é matriz $n \times K$ dos coeficientes de sensibilidade dos ativos aos fatores e $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{n,t})'$ é o vetor de erro dos ativos.

O vetor f_t , que deve ser $I(0)$, tem a esperança e matriz de covariância dadas por:

$$E[f_t] = \mu_f \quad (41)$$

$$\text{Cov}[f_t] = E[(f_t - \mu_f)(f_t - \mu_f)'] = \Omega_f \quad (42)$$

em que μ_f é o vetor das médias dos K fatores comuns e Ω_f é a matriz de covariância dos fatores.

O termo de erro tem características de um ruído branco:

$$E[\varepsilon_t] = (0, \dots, 0)' \quad (43)$$

$$\text{Cov}[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Psi \quad (44)$$

$$\text{Cov}[\varepsilon_t \varepsilon_s'] = E[\varepsilon_t \varepsilon_s'] = 0 \quad \forall t \neq s \quad (45)$$

$$\text{Cov}[f_t \varepsilon_t] = 0 \quad \forall t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (46)$$

aqui, Ψ é uma matriz diagonal ($\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$), em que $\sigma_i = \text{VAR}(\varepsilon_{i,t})$ é a variância do i -ésimo ativo.

Sendo assim, o processo estocástico n -variado y_t tem as seguintes propriedades condicionais em relação a seus momentos:

$$E[y_t | f_t] = \alpha + B f_t \quad (47)$$

$$\text{Cov}[y_t | f_t] = \Psi \quad (48)$$

Enquanto que os momentos incondicionais são definidos como:

$$E[y_t | f_t] = \mu_y = \alpha + B \mu_f \quad (49)$$

$$\text{Cov}[y_t | f_t] = \Sigma_y = B \Omega_f B' + \Psi \quad (50)$$

A.3 MODELO DE FATORES APLICADO A SÉRIES TEMPORAIS

Os modelos de fatores podem ser facilmente aplicados a problemas envolvendo séries temporais. Nesse caso, para cada ativo i o vetor $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,t}, \dots, x_{i,T})$ carrega os retornos para todos períodos da amostra e pode ser expresso do seguinte modo:

$$x_i = \vec{1}' \alpha_i + \mathbf{F} \beta_i + \varepsilon_i \quad (51)$$

em que $\vec{1} = (1, \dots, 1)$; α_i é o intercepto; $\beta_i = (\beta_{1,i}, \dots, \beta_{k,i}, \dots, \beta_{K,i})$ são os parâmetros associados aos fatores; $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,t}, \dots, \varepsilon_{i,T})$ é o vetor de erros com $(\text{Cov} = \sigma_i I)$,

onde I é uma matriz identidade. Além disso, a matriz de fatores (F) é dada por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_t \\ \vdots \\ f'_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{2,1} & \dots & f_{K,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1,t} & f_{2,t} & \dots & f_{K,t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1,T} & f_{2,T} & \dots & f_{K,T} \end{bmatrix} \quad (52)$$

A abordagem do modelo para séries temporais também pode ser estendida ao caso multivariado com a seguinte formulação:

$$\mathbf{X} = \vec{1}'\alpha + \mathbf{FB} + \mathbf{E} \quad (53)$$

aqui, $\mathbf{X} = [x_1 | \dots | x_n]$ é a matriz intertemporal dos retornos dos ativos; $\mathbf{B} = [\beta_1 | \dots | \beta_n]$ é a matriz com os coeficientes de sensibilidade aos fatores de todos os ativos; e $\mathbf{E} = [\varepsilon_1 | \dots | \varepsilon_n]$ a matriz de ruídos do conjunto de regressores.

APÊNDICE B – MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS

Os modelos de precificação de ativos são um caso particular dos modelos de fatores, os quais podem ser facilmente aplicados ao problema de seleção de carteiras como ferramenta auxiliar no processo de estimação dos parâmetros das metodologias de seleção de carteiras. A apresentação desses modelos partirá da construção do modelo CAPM, cuja derivação das equações seguirá o trabalho de Wells (2013), chegando até a construção de modelos mais sofisticados como os elaborados a partir de Fama e French (1993).

B.1 MODELO CAPM

Supondo que um indivíduo planeja investir parte de sua riqueza em um ativo livre de risco e a parte restante em um ativo de risco. Então, sendo R_f os retornos esperados para o ativo livre de risco e R_M o risco advindo do mercado, se ele investe uma fração x de sua riqueza no ativo de risco, então o retorno esperado para seu investimento é definido como:

$$R_x = (1 - x)R_f + xR_M \quad (54)$$

O risco de se possuir um ativo é medido pelo desvio padrão dos retornos desse ativo. Dessa forma, a variância do ativo livre de risco deve ser zero, enquanto a do ativo de risco é dada por σ_M^2 . Logo, a variância do retorno do investimento é definida como:

$$\text{VAR}(R_x) = \sigma_x^2 = (1 - x)^2 \times 0 + x^2 \times \sigma_M^2 = x^2 \sigma_M^2 \quad (55)$$

Agora, assumindo que a utilidade do investidor é função do retorno do seu investimento e do risco inerente a ele. A função utilidade pode ser representada da seguinte forma:

$$U(R_x, \sigma_x) = U((1 - x)R_f + xR_M, x\sigma_x) \quad (56)$$

De acordo com a equação acima, a utilidade é função dos retornos esperados dos ativos, da variância do ativo de risco e da proporção da riqueza investida nos ativos. Suponha que o investidor escolha x para que sua utilidade seja maximizada, a condição de primeira ordem para este problema é:

$$\frac{\partial U}{\partial R_x}(R_M - R_f) + \frac{\partial U}{\partial \sigma_x} \sigma_M = 0 \quad (57)$$

Reescrevendo a condição de primeira ordem, chega-se:

$$\frac{\partial U / \partial \sigma_x}{\partial U / \partial R_x} = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M} \quad (58)$$

Pela equação (58), tem-se que a utilidade é maximizada quando a taxa marginal de substituição entre risco e retorno (lado esquerdo da equação (58)) é igual ao preço do risco (lado direito).

Definindo β_i como a sensibilidade do ativo i em relação ao mercado. Então, o risco total desse ativo pode ser expresso como: $\beta_i \sigma_M$. Ao se multiplicar a equação (58) pelo risco do ativo, chega-se ao custo do risco dado por:

$$\beta_i \times (R_M - R_f) \quad (59)$$

Em equilíbrio, os retornos de um ativo i em posse do investidor, ajustados pelo risco envolvido na posse do ativo, devem ser iguais aos de qualquer outro k ativo, de forma que:

$$R_i - \beta_i(R_M - R_f) = R_k - \beta_k(R_M - R_f) \quad (60)$$

Ao definir o ativo livre de risco como o ativo k (um caso particular da equação (60)), a igualdade anterior se transforma em:

$$R_i - \beta_i(R_M - R_f) = R_f \quad (61)$$

Rearranjando a equação (61), chega-se a equação básica do modelo CAPM, que um contexto de séries temporais é escrita como:

$$R_{it} = R_{ft} + \beta_{it}(R_{Mt} - R_{ft}) \quad (62)$$

B.2 FAMA-FRENCH (3)

Com o passar do tempo, o modelo CAPM recebeu inúmeras aplicações no campo de finanças e até hoje é utilizado, inclusive no contexto de previsão de retornos dos ativos e matrizes de covariância como em Jorion (1991). Porém, Fama e French (1993) identificaram dois fatores adicionais que colaborariam para determinação da variação do retorno do ativos.

O modelo de três fatores de Fama e French (1996) (FF-3) adiciona os fatores *Small Minus Big* (SMB) e *High Minus Low* (HML) ao tracional CAPM. O primeiro consiste de uma carteira com posições vendidas de empresas com grande capitalização

a mercado (*big*s) e compradas de empresas com baixa capitalização (*small*s), que segundo os autores tendem a performar melhor que as anteriores. Enquanto o HML, tem em sua composição posições compradas de empresas *value*, que são empresas com alta razão *book-to-market*, e, em contrapartida, posições vendidas de empresas com baixa razão *book-to-market*, chamadas *growth* por normalmente representarem mercados com potencial crescimento. O modelo é definido como:

$$R_{it} = R_{ft} + \beta_{1it}(R_{Mt} - R_{ft}) + \beta_{2it}(SMB_t) + \beta_{3it}(HML_t) \quad (63)$$

B.3 FAMA-FRENCH (4) - CARHART

Outra extensão dos modelos *Fama-French* que ganhou bastante notoriedade e aplicações empíricas foi o modelo de quatro fatores desenvolvido por Carhart (1997). Esse modelo é uma extensão do modelo de três fatores de Fama e French (1996) com a adição de um novo fator: o momento. Tal fator é constituído por uma carteira com posições vendidas de ativos que performaram mal em um período recente de tempo e compradas de ações de empresas que tiveram bom desempenho nesse mesmo período. A justificativa é que empresas que performaram bem num período curto de tempo imediatamente anterior ao atual, tenderão a manter essa performance a curto prazo, e a persistência de desempenho tende a se manter também para as empresas que entregaram resultados ruins.

A ideia é que ativos que tenham obtido um bom desempenho recente continuem a performar bem a curto prazo, o mesmo vale para ações com baixo desempenho (CARHART, 1997). O modelo é definido como:

$$R_{it} = R_{ft} + \beta_{1it}(R_{Mt} - R_{ft}) + \beta_{2it}(SMB_t) + \beta_{3it}(HML_t) + \beta_{4it}(MOM_t) \quad (64)$$

em que MOM_t representa o fator momento para um período t qualquer.

B.4 FAMA-FRENCH (5)

Ainda, Fama e French (2015) desenvolveram uma extensão de seu modelo com mais dois fatores visando capturar de modo mais eficiente as anomalias no contexto de precificação de ativos. O fator *Robust-Minus-Weak* (RMW), ou fator de lucratividade operacional, é construído pela diferença entre dois portfólios: o primeiro montado com ações de empresas ditas robustas, ou seja com alta lucratividade operacional; e o outro com ativos de empresas com baixa lucratividade (*weaks*). O segundo fator acrescido a abordagem tracional é o *Conservative-Minus-Aggressive* (CMA), em que são construídas carteiras compostas de ativos de empresas com baixo investimento

(conservadoras) e de alto investimento (agressivas¹), novamente o fator é constituído da diferença entre os dois portfólios anteriormente citados. O modelo de cinco fatores de Fama e French (2015) é definido como:

$$R_{it} = R_{ft} + \beta_{1it}(R_{Mt} - R_{ft}) + \beta_{2it}(SMB_t) + \beta_{3it}(HML_t) + \beta_{4it}(RMW_t) + \beta_{5it}(CMA_t) \quad (65)$$

¹São consideradas empresas agressivas aquelas que apresentam altos níveis de investimentos, mesmo tendo baixa lucratividade.