Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatísitca

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Hugo Adolfo Frota Ibánez

Sobre a dinâmica de operadores lineares em espaços de Banach: hiperciclicidade

Porto Alegre - Brasil

2019

Hugo Adolfo Frota Ibánez

Sobre a dinâmica de operadores lineares em espaços de Banach: hiperciclicidade

Dissertação submetida por Hugo Adolfo Frota Ibánez como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Dr. Lucas Henrique Backes (PPG-MAT-UFRGS)

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatísitca

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Porto Alegre - Brasil

2019

Dedico este trabalho à minha mãe Eliene e minha namorada Dionete,
pela grande força que me deram nessa parte de minha vida.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Lucas Backes pelas conversas, orientações e apoio.

Agradeço aos professores Fagner Bernardini e Diego Marcon por terem feito parte de minha formação, suas aulas me motivaram muito.

Agradeço aos colegas da pós, Guilherme Feltes, Gustavo Pessil, Josué, Jader, Thomas Jacobus, Priscila, Gleiciano, Eduardo Alves, Leonardo, Marcus e William, pela receptividade, companheirismo e conversas totalmente aleatórias.

Agradeço meus pais pela criação e apoio.

Agradeço em especial à minha mãe Eliene e minha namorada Dionete por todo apoio que me deram, seja financeiro ou moral.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Nessa dissertação estudamos a dinâmica de operadores lineares em espaços de Banach focando principalmente no conceito de hiperciclicidade. Apresentamos alguns critérios de hiperciclicidade, estudamos a estrutura tanto do conjunto de vetores hipercíclicos quanto do conjunto de operadores hipercíclicos e estudamos algumas propriedades espectrais de tais operadores. Por fim, apresentamos um resultado recente devido a Charpentier, Ernst e Menet [CEM16] que caracteriza os subconjuntos Γ de $\mathbb{C}$ tais que $\overline{\mathrm{Orb}}(\Gamma x, T) = \overline{\{\gamma T^n x;\ \gamma \in \Gamma, n \geq 0\}} = X$ é equivalente a $\overline{\mathrm{Orb}}(x, T) = \overline{\{T^n x;\ n \geq 0\}} = X$, onde X é um espaço de Banach e $T \in L(X)$. Quando $\overline{\mathrm{Orb}}(x, T) = X$ chamamos o operador T de hipercíclico e quando $\overline{\mathrm{Orb}}(\Gamma x, T) = X$ chamamos o operador T de Γ-supercíclico.

Palavras-chave: Operadores Lineares, Hiperciclicidade, Γ-superciclicidade.

Abstract

In this dissertation we study the dynamics of linear operators in Banach spaces focusing mainly on the concept of hypercyclicity. We present some criteria of hypercyclicity, we study the structure of both the set of hypercyclic vectors and the set of hypercyclic operators and we study some spectral properties of such operators. Finally, we present a recent result due to Charpentier, Ernst and Menet [CEM16] which characterizes the subsets Γ in $\mathbb{C}$ such that $\overline{\mathrm{Orb}}(\Gamma x, T) = \overline{\{\gamma T^n x;\ \gamma \in \Gamma, n \geq 0\}} = X$ is equivalent to $\overline{\mathrm{Orb}}(x, T) = \overline{\{T^n x;\ n \geq 0\}} = X$, where X is a Banach space and $T \in L(X)$. When $\overline{\mathrm{Orb}}(x, T) = X$ we call the operator T hypercyclic T and when $\overline{\mathrm{Orb}}(\gamma x, T) = X$ we call the operator T Γ-supercyclic.

Keywords: Linear Operators, Hypercyclicity, Γ-supercyclicity.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Ao contrário do que possa parecer, dinâmica linear pode ser tão complicada quanto dinâmica não linear. Em 1929, G. D. Birkhoff [Bir29] obteve um exemplo de operador linear que possui uma importante propriedade em dinâmica: a existência de uma órbita densa. Depois, G. R. MacLane [Mac52] (1952) encontrou o mesmo fenômeno para o operador de derivação, e S. Rolewicz [Rol69] (1969) mostrou que shifts lineares também podem possuir órbitas densas. Chamamos os operadores com essa propriedade de hipercíclicos. Esse termo apareceu pela primeira vez em torno de 1986 no trabalho de Beauzamy [Bea86] motivado pelo problema do subespaço invariante. Posteriormente o termo foi usado por Bourdon, Godefroy e Shapiro ([BS88], [GS91]).

A dinâmica linear é uma área relativamente nova e que se desenvolveu de maneira bem rápida. Segundo Bayart e Matheron [BM09] essa área provavelmente nasceu com a tese de Kitai [Kit82] em 1982. Tornou-se bastante popular, graças ao esforço de muitos matemáticos. Em particular, os trabalhos de Godefroy e Shapiro [GS91], a pesquisa de Grosse-Erdmann [Gro99] e as notas de Shapiro [Sha], tiveram uma influência considerável tanto no seu desenvolvimento interno como na sua difusão dentro da comunidade matemática.

A dissertação é estruturada em 5 capítulos e 2 apêndices. Logo no Capítulo 1 vemos a relação entre dinâmica linear e outros ramos da matemática. Usamos noções de dinâmica topológica e análise funcional (teoria de operadores) para tratar dos operadores hipercíclicos. Por exemplo, o Teorema Transitivo de Birkhoff nos da uma relação entre órbitas densas e transitividade topológica. Vemos que não existem operadores hipercíclicos em dimensão finita, portanto se trata de um fenômeno infinito dimensional. Apresentamos alguns critérios de hiperciclicidade e exemplos. Logo em seguida discutimos de forma breve o problema do critério de hiperciclicidade. Para finalizar o capítulo demonstramos a existência de operadores hipercíclicos para espaços de Banach separáveis de dimensão infinita (Teorema de Ansari-Bernal), respondendo a uma questão de Rolewicz [Rol69].

No Capítulo 2 discutimos sobre a estrutura do conjunto de vetores hipercíclicos demonstrando o Teorema Transitivo de Birkhoff que nos dá, além de uma ferramenta para provar que certos operadores são hipercíclicos, a informação de que esse conjunto é residual, ou seja, é um G_δ denso. Falamos também do problema do subespaço invariante, que motivou o estudo dos operadores hipercíclicos, uma vez que podemos formular essa conjectura em termos de vetores hipercíclicos. Essa conjectura continua em aberto para espaços de Hilbert e espaços de Banach reflexivos.

Vemos no Capítulo 3 que o conjunto dos operadores hipercíclicos definidos em um espaço de Banach X são densos em $L(X)$ na topologia da convergência pontual para operadores. Por outro lado, o conjunto dos operadores hipercíclicos definido em um espaço de Hilbert H é nunca denso em $L(H)$ com respeito a topologia da norma.

Não poderíamos deixar de falar das propriedade espectrais dos operadores hipercíclicos, por isso, reunimos alguns resultados interessantes sobre o espectro de operadores hipercíclicos no Capítulo 4. Mostramos a relação de um operador hipercíclico e sua adjunta e que operadores compactos não são hipercíclicos.

Para finalizar o trabalho, discutimos no Capítulo 5 sobre dois artigos, o primeiro devido a Bourdon e Feldman [BF03] e o segundo Charpentier, Ernst e Menet [CEM16]. Dividimos assim o capitulo em três seções. Na primeira seção, falamos do primeiro artigo que envolve um problema devido a Peris [Per01, Problema 2] que diz: Se uma órbita é densa em algum lugar, então ela é densa. Como consequência conseguimos provar também o Teorema de Ansari e o Teorema Multi-hipercíclico (Costakis-Peris). Na segunda seção provamos um teorema que caracteriza os conjuntos $\Gamma \subset \mathbb{C}$ para os quais a noção de Γ-superciclicidade coincide com o de hiperciclicidade. Chamamos um operador de Γ-supercíclico se $\{\gamma T^n x;\ \gamma \in \Gamma,\ n \geq 0\}$ for denso em X. Esse teorema generaliza o Teorema de León-Müller [LM04, Corolário 2] que nos diz que um operador é hipercíclico se, e somente se, é $\mathbb{T}$-supercíclico. Por fim, na terceira seção apresentamos alguns problemas em aberto.

Foram feitos dois apêndices no final, dividido em duas partes: na primeira reunimos diversos resultados clássicos e também resultados não tão conhecidos; já, na segunda parte, exibimos um interessante teorema que nos diz que para toda função contínua definida em um espaço métrico compacto arbitrário existe um operador hipercíclico que restrito a um compacto é conjugado a essa função, ou seja, isso nos diz que sistemas dinâmicos lineares podem ser tão complicados quanto sistemas dinâmicos não lineares.

1 Hiperciclicidade

Ao longo deste capítulo estaremos preocupados em dar as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da teoria de operadores hipercíclicos, para isso, precisaremos de alguns conceitos da dinâmica topológica.

1.1 Dinâmica topológica

Podemos definir dinâmica topológica como o estudo das transformações contínuas definidas em um espaço topológico (usualmente compacto). Sua origem deve-se aos trabalhos de Poincaré e Birkhoff. Foi Poincaré que primeiro formulou e resolveu problemas de dinâmica como problemas em topologia. Birkhoff contribui com conceitos fundamentais em dinâmica topológica e foi o primeiro a empreender seu desenvolvimento sistemático.

No entanto, para nosso propósito basta considerar sistemas dinâmicos definidos em espaços métricos.

Definição 1.1. *Um sistema dinâmico (discreto) é um par* (X, T) *consistindo de um espaço métrico* (X, d) *e uma aplicação contínua* $T : X \to X$.

Muitas vezes chamamos simplesmente T ou $T : X \to X$ um sistema dinâmico. Além disso, adotamos a notação Tx no lugar de $T(x)$.

Estamos interessados na evolução de um sistema que começa com um certo estado x_0. Para isso definimos os iterados $T^n : X \to X$, $n \geq 0$, pelas n-ésimas iterações de T,

$$T^n = T \circ \ldots \circ T \quad (n \text{ vezes})$$

com

$$T^0 = I,$$

a identidade em X.

Definição 1.2. *Seja* $T : X \to X$ *um sistema dinâmico. Para* $x \in X$ *chamamos*

$$\mathrm{Orb}(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$$

a órbita de x *por* T.

Introduzimos alguns exemplos clássicos de sistemas dinâmicos.

Exemplo 1.3 (Rotação no círculo)**.** *Seja* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ *o círculo unitário. O sistema* $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $z \mapsto e^{i\alpha}z$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, *descreve a rotação do ponto* z *por um ângulo* α.

Exemplo 1.4 (Aplicação tenda). *A aplicação tenda é dada por* $T : [0,1] \to [0,1]$*,* $Tx = 2x$*, se* $x \in [0, \frac{1}{2}]$*, e* $Tx = 2 - 2x$*, se* $x \in (\frac{1}{2}, 1]$*. O nome deriva da forma de seu gráfico.*

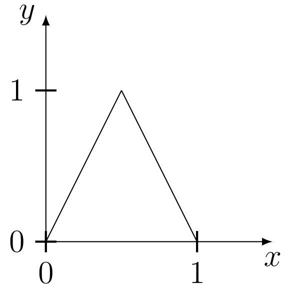

Figura 1 – Aplicação tenda T

Exemplo 1.5 (Doubling map no intervalo). *Consideremos o intervalo* $[0,1]$ *no qual identificamos* 0 *e* 1*. Então* $T : [0,1] \to [0,1]$*,* $x \mapsto 2x$ $(mod\ 1)$ *descreve um sistema dinâmico.*

Exemplo 1.6 (Shift no intervalo). *Identificamos novamente* 0 *e* 1*. A aplicação* $T : [0,1] \to [0,1]$*,* $x \mapsto x + \alpha$ $(mod\ 1)$ *com* $\alpha \in [0,1]$ *descreve o shift por* α *módulo* 1*, de todo ponto no intervalo unitário.*

Em geral, cada teoria matemática possui sua noção de isomorfismo. Quando é que consideramos dois sistemas dinâmicos (X,T) e (Y,S) "iguais"? Se existir um homeomorfismo $\phi : Y \to X$ tal que, se $x = \phi(y)$ então $Tx = \phi(Sy)$. Isso é equivalente a dizer que $T \circ \phi = \phi \circ S$.

Lembremos que um homeomorfismo é uma aplicação bijetora contínua onde sua inversa também é contínua. Em várias aplicações, contudo, já é o suficiente exigir que ϕ seja contínua com imagem densa.

Definição 1.7. *Sejam* $S : Y \to Y$ *e* $T : X \to X$ *sistemas dinâmicos.*

(a) *Então* T *é dito topologicamente quase-conjugado a* S *se existir uma aplicação contínua com imagem densa tal que* $T \circ \phi = \phi \circ S$*, isto é, o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\phi"'] & Y \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "T"] & X \end{tikzcd}$$

(b) *Se* ϕ *pode ser escolhido sendo um homeomorfismo então* S *e* T *são ditos topologicamente conjugados.*

Note que $T : X \to X$ é topologicamente conjugado a $T : X \to X$, pois a identidade $I : X \to X$ é um homeomorfismo e $(T \circ I)x = (I \circ T)x$ para todo $x \in X$.

Agora, se $T : X \to X$ é topologicamente conjugado a $S : Y \to Y$ então existe um homeomorfismo $\phi : Y \to X$ tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$. Dado $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $\phi(y) = x$. Logo,

$$(\phi^{-1} \circ T)x = (\phi^{-1} \circ T)\phi(y) = \phi^{-1} \circ (\phi \circ S)y = Sy = (S \circ \phi^{-1})x.$$

Isso mostra que S é topologicamente conjugado a T.

Se $T : X \to X$ é topologicamente conjugado a $S : Y \to Y$ e S é topologicamente conjugado a $Q : Z \to Z$ então existem homeomorfismos $\phi_1 : Y \to X$ e $\phi_2 : Z \to Y$ tais que $T \circ \phi_1 = \phi_1 \circ S$ e $S \circ \phi_2 = \phi_2 \circ Q$. Tomemos $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ e mostremos que ϕ conjuga T e Q. Como composta de homeomorfismos é homeomorfismo, ϕ é um homeomorfismo. Além disso, ϕ satisfaz a propriedade de conjugação:

$$(\phi \circ Q)z = (\phi_1 \circ \phi_2) \circ Qz = \phi_1 \circ (S \circ \phi_2)z = T \circ (\phi_1 \circ \phi_2)z = (T \circ \phi)z.$$

Portanto, T é topologicamente conjugado a Q.

Acabamos de mostrar que conjugação topológica é uma relação de equivalência entre sistemas dinâmicos.

O que torna essa noção ainda mais interessante é o fato de não ser óbvio quando dois sistemas dinâmicos são topologicamente conjugados ou não.

Definição 1.8. *Dizemos que uma propriedade P de um sistema dinâmico é preservada por (quase-)conjugação se vale o seguinte: se o sistema dinâmico $S : Y \to Y$ possui a propriedade P então todo sistema dinâmico $T : X \to X$ que é (quase-)conjugado a S também possui a propriedade P.*

Uma forma de definir um “novo” sistema dinâmico a partir de um sistema dinâmico T é restringi-lo a um subconjunto. Contudo, é preciso garantir que T aplique esse subconjunto nele mesmo.

Definição 1.9. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico. Então um subconjunto $Y \subset X$ é chamado T-invariante ou invariante por T se $T(Y) \subset Y$.*

Assim, se $Y \subset X$ é T-invariante, então $T_{|Y} : Y \to Y$ é também um sistema dinâmico.

Definição 1.10. *Um sistema dinâmico $T : X \to X$ é dito topologicamente transitivo se, para todo par U, V de conjuntos abertos não vazios de X, existir algum $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Observação 1.11. *Nas notas de Joel H. Shapiro [Sha] ele define transitividade topológica como uma aplicação T que possui órbita densa. Contudo, veremos que a definição que Shapiro apresenta em suas notas é equivalente à Definição 1.10.*

Exemplo 1.12. *A aplicação tenda é topologicamente transitiva. Para ver isso, note que T^n é linear por partes, com $T^n(\frac{2k}{2^n}) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$, e $T^n(\frac{2k-1}{2^n}) = 1,\ k = 1, \ldots, 2^{n-1}$; veja Figura 2. Assim, seja $U \subset [0, 1]$ um aberto não vazio. Então U contêm algum intervalo $J := [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$. Mas, já que $[0, 1] = T^n(J) \subset T^n(U)$, então de fato $T^n(U)$ intersecta qualquer conjunto não vazio V de $[0, 1]$.*

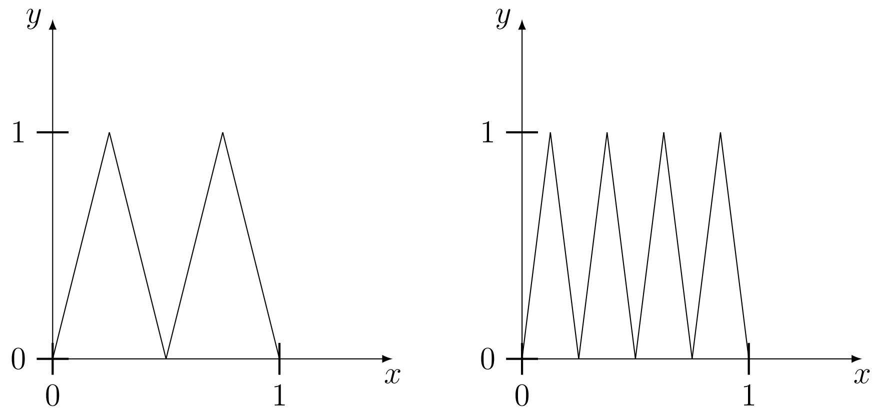

Figura 2 – Os iterados T^2 e T^3 da aplicação tenda

Seguem alguns resultados de transitividade topológica.

Proposição 1.13. *Transitividade topológica é preservada por quase-conjugação.*

Demonstração. Seja $T : X \to X$ quase-conjugado a $S : Y \to Y$ por meio de $\phi : Y \to X$ e sejam U, V subconjuntos abertos não vazios de X. Já que ϕ é contínua e de imagem densa, $\phi^{-1}(U)$ e $\phi^{-1}(V)$ são não vazios e abertos. Digamos que S seja topologicamente transitivo, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^n(\phi^{-1}(U)) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$, ou seja, existe $y \in \phi^{-1}(U)$ tal que $S^n(y) \in \phi^{-1}(V)$. Logo, $\phi(y) \in U$ e $T^n\phi(y) = \phi(S^n y) \in V$ provendo que T é também transitivo. $\square$

Proposição 1.14. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico com inversa contínua T^{-1}. Então T é topologicamente transitivo se, e somente se, T^{-1} também for.*

Demonstração. Segue do seguinte fato: $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ é equivalente a $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$ para todos subconjuntos U, V de X abertos e não vazios. $\square$

Proposição 1.15. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico, onde X não possui pontos isolados.*

(*a*) *Se $x \in X$ possuir órbita densa por T então o mesmo acontece com cada $T^n x$, $n \geq 1$.*

(*b*) *Se T possui órbita densa então ele é topologicamente transitivo.*

Demonstração. (a) Segue do fato que $\mathrm{Orb}(x, T) \setminus \{x, Tx, \ldots, T^{n-1}x\}$ está contido em $\mathrm{Orb}(T^n x, T)$ e que, em todo espaço métrico sem pontos isolados, um conjunto denso permanece denso após retirar finitos pontos.

(b) Suponha que $x \in X$ possui órbita densa por T. Sejam U, V subconjuntos abertos não vazios de X. Então existe algum $n \geq 0$ tal que $T^n x \in U$. Por (a), $T^n x$ também possui órbita densa, assim sendo existe algum $m \geq n$ tal que $T^m x \in V$. Isso implica que $T^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. □

É menos óbvio que se X for um espaço métrico completo e separável, a recíproca de (b) vale, isto é, se T é topologicamente transitivo então T possui órbita densa. Esse resultado foi obtido por Birkhoff [Bir20] em 1920.

Teorema 1.16 (Teorema Transitivo de Birkhoff)**.** *Seja T uma aplicação contínua em um espaço métrico completo e separável X sem pontos isolados. Então são equivalentes:*

(i) *T é topologicamente transitivo;*

(ii) *existe algum $x \in X$ tal que $\mathrm{Orb}(x, T)$ é densa em X.*

Se uma dessas condições valem então o conjunto de pontos em X com órbita densa é um G_δ denso.

Apresentaremos sua prova no Capítulo 2.

Exemplo 1.17. *Vimos no Exemplo 1.12 que a aplicação tenda é topologicamente transitiva, portanto possui órbita densa pelo Teorema transitivo de Birkhoff.*

Proposição 1.18. *A propriedade de possuir órbita densa é preservada sob quase-conjugação.*

Demonstração. Seja $T : X \to X$ quase-conjugado a $S : Y \to Y$ por meio de $\phi : Y \to X$, e seja $y \in Y$ um vetor cuja órbita é densa por S. Se U é um subconjunto aberto não vazio de X então $\phi^{-1}(U)$ é aberto e não vazio, desse modo existe $n \geq 0$ tal que $S^n y$ pertence a $\phi^{-1}(U)$. Mas então $T^n \phi(y) = \phi(S^n y)$ pertence a U. □

Como vimos no Exemplo 1.12 a aplicação tenda é topologicamente transitiva. De fato, provamos algo mais forte, uma vez que $T^n(U)$ intersecta V não somente para algum n, mas para todo n suficientemente grande. Está propriedade recebe um nome especial.

Definição 1.19. *Um sistema dinâmico $T : X \to X$ é dito mixing se, para todo par U, V de abertos não vazios de X, existir algum $N \geq 0$ tal que*

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \textit{para todo } n \geq N.$$

Como no caso da transitividade topológica temos:

Proposição 1.20. *A propriedade mixing é preservada por quase-conjugação.*

Agora definiremos o produto de aplicações.

Definição 1.21. *Sejam $S : Y \to Y$ e $T : X \to X$ sistemas dinâmicos. Então a aplicação $S \times T$ é definida por*

$$S \times T : Y \times X \to Y \times X, \quad (S \times T)(y, x) = (Sy, Sx).$$

Então $S \times T$ é contínua, e para suas iteradas temos

$$(S \times T)^n = S^n \times T^n.$$

Produtos de mais que dois espaços ou aplicações é definido similarmente.

Exemplo 1.22. *Seja $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $z \mapsto e^{i\alpha}z$ uma rotação no círculo. Então $(T \times T)^n(z_1, z_2) = (e^{in\alpha}z_1, e^{in\alpha}z_2)$. Observemos que o quociente das duas coordenadas nos dá z_1/z_2, independente de n. Isso nos diz que $T \times T$ não pode ser topologicamente transitivo.*

Agora veremos uma noção que envolve o produto de um mesmo sistema dinâmico.

Definição 1.23. *Um sistema dinâmico $T : X \to X$ é dito weakly mixing se $T \times T$ é topologicamente transitivo.*

Como o produto $U \times V$ de abertos não vazios $U, V \subset X$ formam uma base para topologia de $X \times X$, T é weakly mixing se, e somente se, para todos $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ abertos e não vazios, existir algum $n \geq 0$ tal que

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Denotamos por $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos naturais mais o zero.

Definição 1.24. *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico. Então, para todos conjuntos $A, B \subset X$, o conjunto de retorno de A para B é definido como*

$$N_T(A, B) = N(A, B) = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Usualmente retiramos o índice T quando isto não causa ambiguidade. Nesta notação, T é topologicamente transitivo (ou mixing) se, e somente se, para todo par U, V de subconjuntos abertos não vazios de X, o conjunto de retorno

$$N(U, V) \quad \text{é não vazio (ou cofinito, respectivamente);}$$

e T é weakly mixing se, e somente se, para todos $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ abertos não vazios,

$$N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset.$$

Observação 1.25. *Para todo sistema dinâmico,*

$$\textit{mixing} \Longrightarrow \textit{weakly mixing} \Longrightarrow \textit{topologicamente transitivo}.$$

A primeira implicação segue da definição, a segunda segue do fato que T é quase-conjugado a $T \times T$ por meio da aplicação $(x, y) \mapsto x$.

1.2 Operadores hipercíclicos

A partir de agora nos restringiremos ao estudo de sistemas dinâmicos lineares. Mais precisamente, $T : X \to X$ denotará um operador linear limitado definido num espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Quando não houver ambiguidade, utilizaremos a palavra operador para nos referirmos a um operador linear limitado.

Nessa seção vamos definir o que é um operador hipercíclico, daremos uma relação entre hiperciclicidade e a dimensão do espaço e por fim, trataremos dos três exemplos clássicos de operadores hipercíclicos.

Definição 1.26. *Chamamos um operador $T : X \to X$ de hipercíclico se existir algum $x \in X$ cuja órbita por T seja densa em X. Nesse caso, chamamos x de vetor hipercíclico por T. O conjunto de vetores hipercíclicos por T é denotado por $HC(T)$.*

Note que a existência de um vetor hipercíclico por um operador T implica que o espaço de Banach X é separável. De fato, se x é um vetor hipercíclico para T, então o subconjunto $\{x, Tx, T^2x, \ldots, T^nx, \ldots\} \subset X$ é enumerável e denso, o que nos mostra que X é separável.

Teorema 1.27. *Não existem operadores hipercíclicos em espaços de dimensão finita $X \neq \{0\}$.*

Demonstração. Suponha, pelo contrário, que T é um operador hipercíclico em $\mathbb{K}^N$, $N \geq 1$. Pegue $x \in HC(T)$ e observe que $\{x, Tx, T^2x, \cdots, T^{N-1}x\}$ é um conjunto linearmente independente e consequentemente forma uma base para $\mathbb{K}^N$. De fato, caso contrário o conjunto gerado pela $\mathrm{Orb}(x, T)$ possuiria dimensão menor que N e portanto não poderia ser denso em $\mathbb{K}^N$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}_+$, pode-se encontrar uma sequência de inteiros $(n_k)_k$ tal que $T^{n_k}x \to \alpha x$, pois, $\mathrm{Orb}(x, T)$ é denso. Então $T^{n_k}(T^ix) = T^i(T^{n_k}x) \to \alpha T^ix$ para cada $i < N$. Como cada $z \in \mathbb{K}^N$ pode ser escrito como combinação linear de $\{x, Tx, T^2x, \cdots, T^{N-1}x\}$, concluímos que $T^{n_k}z \to \alpha z$ para todo $z \in \mathbb{K}^N$. Segue-se que $\det(T^{n_k}) \to \alpha^N$, isto é, $\det(T)^{n_k} \to \alpha^N$. Assim, colocando $a := |\det(T)|$, vemos que o conjunto $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathbb{R}_+$. O que é impossível. $\square$

O próximo teorema devido a S. Rolewicz [Rol69] nos da uma infinidade de exemplos de operadores hipercíclicos.

Teorema 1.28. *Seja X ou ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ ou c_0 (Veja Apêndice A.2). Para todo número real $a > 1$ arbitrário, existe um operador $T : X \to X$ que depende de a e um elemento $x_0 \in X$ tal que a órbita $\mathrm{Orb}(x_0, T)$ é densa em X.*

Demonstração. Sejam $B : X \to X$ o shift à esquerda

$$B(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...)$$

e F o shift à direita

$$F(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...).$$

Definimos assim $T = aB$ e $S = F/a$. Então $\|T\| = a$, $\|S\| = 1/a$, $TS = I$, onde I denota o operador identidade.

Agora começamos a construir o vetor x_0. Seja $\{x^{(n)} : n \geq 1\}$ um conjunto denso em X formado pelas sequências quase-nulas, ou seja, somente um número finito de suas coordenadas é não nulo. Seja m_k o maior índice com $x^{(k)}_{m_k} \neq 0$.

Defina uma sequência $(n_k)_k$ de inteiros positivos tal que

$$n_k > \max_{1 \leq i \leq k} m_i \tag{1.1}$$

e

$$\|S^{n_k} x^{(k)}\| < \frac{1}{2^k}. \tag{1.2}$$

Seja

$$p(k) = \sum_{i=1}^{k} n_i. \tag{1.3}$$

Escrevemos

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} S^{p(k)} x^{(k)}. \tag{1.4}$$

De (1.2) obtemos que (1.4) é convergente, pois,

$$\|S^{p(k)} x^{(k)}\| \leq \|S^{n_1}\| \cdot \|S^{n_2}\| \cdots \|S^{n_{k-1}}\| \cdot \|S^{n_k} x^{(k)}\| < \frac{1}{a^{p(k-1)} 2^k}.$$

A condição (1.1) implica que

$$T^{n_k} x^{(i)} = 0 \quad \text{para } i < k.$$

Assim sendo

$$\begin{aligned} T^{p(k)} x_0 &= T^{p(k)} (S^{p(1)} x^{(1)} + \cdots + S^{p(k)} x^{(k)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} S^{p(i)} x^{(i)}) \\ &= x^{(k)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} S^{p(i)-p(k)} x^{(i)}. \end{aligned}$$

Mas

$$\| \sum_{i=k+1}^{\infty} S^{p(i)-p(k)} x^{(i)} \| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \|S^{n_i} x^{(i)}\| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}.$$

Portanto

$$\|T^{p(k)} x_0 - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Seja $x \in X$ arbitrário. Como $\{x^{(n)} : n \geq 1\}$ é denso em X, podemos extrair uma subsequência $(x^{(n_j)})_j$ tal que $x^{(n_j)} \to x$. Então

$$\|T^{p(n_j)} x_0 - x\| \leq \|T^{p(n_j)} x_0 - x^{(n_j)}\| + \|x^{(n_j)} - x\|$$

fazendo $j \to \infty$ obtemos $T^{p(n_j)} x_0 \to x$. Isso nos da que $\mathrm{Orb}(x_0, T)$ é densa em X. $\square$

Os primeiros exemplos de operadores hipercíclicos foram encontrados por G. D. Birkhoff [Bir29] em 1929, G. R. MacLane [Mac52] em 1952 e S. Rolewicz [Rol69] em 1969. Para mostrar que esses operadores são hipercíclicos, mostraremos que eles são topologicamente transitivos e como consequência do Teorema transitivo de Birkhoff obtemos então a existência de órbita densa, portanto o operador será hipercíclico. Exibimos abaixo os três exemplos clássicos:

Exemplo 1.29 (Operadores de Birkhoff)**.** *No espaço $H(\mathbb{C})$ das funções inteiras consideremos o operador translação dado por*

$$T_a f(z) = f(z + a), \quad a \neq 0.$$

Sejam $U, V \subset H(\mathbb{C})$ abertos não vazios arbitrários e fixe $f \in U, g \in V$. Pela definição da topologia em $H(\mathbb{C})$ existe um disco fechado K centrado em 0 e um $\varepsilon > 0$ tal que uma função inteira h pertence a U (ou a V) sempre que $\sup_{z\in K} |f(z) - h(z)| < \varepsilon$ (ou $\sup_{z\in K} |g(z) - h(z)| < \varepsilon$, respectivamente). Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer natural tal que K e $K + na$ são discos disjuntos. Considerando a função que é definida como f numa vizinhança de K e por $z \mapsto g(z - na)$ numa vizinhança de $K + na$, o Teorema de Runge (Ver A.22), diz que existe um polinômio p tal que

$$\sup_{z\in K} |f(z) - p(z)| < \varepsilon \quad e \quad \sup_{z\in K+na} |g(z - na) - p(z)| < \varepsilon,$$

e portanto também

$$\sup_{z\in K} |g(z) - (T_a^n p)(z)| = \sup_{z\in K} |g(z) - p(z + na)| < \varepsilon.$$

Isto mostra que $p \in U$ e $T_a^n p \in V$, de modo que T_a é topologicamente transitivo. Já que $H(\mathbb{C})$ é um espaço de Banach separável, T_a é hipercíclico.

Exemplo 1.30 (Operadores de MacLane). *Considere o operador de derivação*

$$D : f \to f'$$

em $H(\mathbb{C})$. *Já que polinômios são densos em* $H(\mathbb{C})$, *dados abertos não vazios* $U, V \subset H(\mathbb{C})$, *existem polinômios* $p \in U$ *e* $q \in V$, $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^k$ *e* $q(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} b_k z^k$. *Seja* $n \geq N+1$ *arbitrário. Então o polinômio*

$$r(z) = p(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{k! b_k}{(k+n)!} z^{k+n}$$

possui a propriedade que $D^n r = q$. *Além disso, para todo* $R > 0$ *obtemos que*

$$\sup_{|z| \leq R} |r(z) - p(z)| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{k! |b_k|}{(k+n)!} R^{k+n} \to 0$$

quando $n \to \infty$. *Assim, se* n *é suficientemente grande, então* $r \in U$ *e* $D^n r \in V$. *Isto implica que* D *é hipercíclico.*

Exemplo 1.31 (Operadores de Rolewicz). *No espaço* $X = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, *ou* $X = c_0$ *consideremos o múltiplo*

$$T = \lambda B : X \to X,$$

do shift à esquerda, onde $\lambda \in \mathbb{C}$. *Observe que nesse exemplo o parâmetro* λ *pode ser complexo enquanto que no Teorema 1.28 o parâmetro a é real. Primeiro, se* $|\lambda| \leq 1$ *então* $\|T^n x\| = |\lambda|^n \|B^n x\| \leq \|x\|$ *para todo* $x \in X$ *e* $n \geq 0$. *Assim* T *não pode ser hipercíclico nesse caso.*

Por outro lado, T *é hipercíclico sempre que* $|\lambda| > 1$. *De fato, se* $U, V \subset X$ *são abertos não vazios, podemos encontrar* $x \in U$ *e* $y \in V$ *da forma*

$$x = (x_1, ..., x_N, 0, 0, ...), \quad y = (y_1, ..., y_N, 0, 0, ...),$$

para algum $N \in \mathbb{N}$. *Seja* $n \geq N$ *arbitrário. Defina* $z \in X$ *por* $z_k = x_k$ *se* $1 \leq k \leq N$, $z_k = \lambda^{-n} y_{k-n}$ *se* $n+1 \leq k \leq n+N$, *e* $z_k = 0$ *caso contrário, obtemos uma sequência com* $T^n z = y$. *Além disso,* $\|x - z\| = |\lambda|^{-n} \|y\| \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Assim, se* n *é suficientemente grande, então* $z \in U$ *e* $T^n z \in V$. *Isto mostra que* T *é topologicamente transitivo, como os espaços são de Banach e separáveis,* T *é hipercíclico.*

1.3 Critérios de hiperciclicidade

O Teorema Transitivo de Birkhoff reduz hiperciclicidade a simples condição de transitividade topológica. Não obstante, em várias situações não é óbvio como verificar essa condição para um dado operador.

O propósito dessa seção é dar alguns dos principais critérios para mostrar que um determinado operador é hipercíclico.

Teorema 1.32 (Critério de Godefroy-Shapiro)**.** *Seja T um operador. Suponha que os subespaços*

$$X_0 := \text{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \textit{ para algum } \lambda \in \mathbb{K} \textit{ com } |\lambda| < 1\}$$
$$Y_0 := \text{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \textit{ para algum } \lambda \in \mathbb{K} \textit{ com } |\lambda| > 1\}$$

são densos em X. Então T é mixing, e em particular hipercíclico.

Demonstração. Sejam U, V abertos não vazios de X. Por hipótese X_0, Y_0 são densos, podemos assim achar $x \in X_0 \cap U$ e $y \in Y_0 \cap V$. Consequentemente esses vetores podem ser expressos na forma

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \quad \text{e} \quad y = \sum_{k=1}^{m} b_k y_k,$$

onde $Tx_k = \lambda_k x_k, Ty_k = \mu_k y_k$, para escalares $a_k, b_k, \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{K}$ com $|\lambda_k| < 1, |\mu_k| > 1, k = 1, \ldots, m$. Já que

$$T^n x = \sum_{k=1}^{m} a_k \lambda_k^n x_k \to 0 \quad \text{e} \quad u_n := \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{1}{\mu_k^n} y_k \to 0$$

quando $n \to \infty$ e $T^n u_n = y$ para todo $n \geq 0$, existe algum $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$x + u_n \in U \quad \text{e} \quad T^n(x + u_n) = T^n x + y \in V.$$

Isto mostra que T é mixing e portanto hipercíclico. □

Usaremos esse critério para mostrar que os Operadores de Rolewicz são hipercíclicos, para isso precisaremos também do seguinte resultado:

Definimos a complexificação de um espaço de Banach real X por

$$\widetilde{X} = \{x + iy;\ x, y \in X\}.$$

Além disso, seja $T : X \to X$ um operador real em X. Então sua complexificação $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ é dada por

$$\widetilde{T}(x + iy) = Tx + iTy.$$

Um simples cálculo nos mostra que $\widetilde{T}$ é um operador complexo em $\widetilde{X}$.

Proposição 1.33. *Seja T um operador definido em um espaço de Banach real e separável. Se sua complexificação $\widetilde{T}$ é hipercíclica então T também é.*

Já que $\widetilde{T}$ coincide com $T \times T$, a hiperciclicidade de $\widetilde{T}$ é equivalente a T ser weakly mixing. Portanto, como um operador weakly mixing é hipercíclico segue o resultado.

Exemplo 1.34 (Operadores de Rolewicz)**.** *Seja $T = \mu B$, $|\mu| > 1$, o múltiplo do shift definido no espaço $X = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, ou $X = c_0$. Pela Proposição 1.33, é suficiente considerar o caso complexo. Seja $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$ um vetor não nulo, para achar os autovetores de B temos que resolver a seguinte equação: $Bx = \lambda x$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ é distinto de zero. Resolvendo a equação temos:*

$$(x_2, x_3, \dots) = \lambda(x_1, x_2, \dots) \Longleftrightarrow x_2 = \lambda x_1, x_3 = \lambda^2 x_1, \dots$$

o que nos dá $x = (x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \dots)$, fazendo $x_1 = \lambda(\lambda^{-1} x_1)$, concluímos que um autovetor de B é um múltiplo não nulo da sequência

$$e_\lambda := (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots).$$

Para que e_λ seja um elemento de X, precisamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^n|^p < \infty$ ($X = \ell^p$) ou $\lim \lambda^n = 0$ ($X = c_0$), em ambos casos obtemos $|\lambda| < 1$.

Assim sendo, e_λ é um autovetor de $T = \mu B$ com autovalor $\mu\lambda$.

Afirmação 1. *Afirmamos que, para todo subconjunto Λ do disco unitário $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < 1\}$ que possui um ponto de acumulação dentro do disco, o conjunto*

$$\operatorname{span}\{e_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$$

é denso em X.

Demonstração. Pelo Teorema de Hahn-Banach A.10 é suficiente mostrar que todo funcional linear contínuo que se anula em cada $e_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$, se anula em X. Agora, já que $x^* \in X^*$ é dado, via representação canônica, por uma sequência $y = (y_n)_n \in \ell^q$ para um certo q com $1 \leq q \leq \infty$, obtemos que

$$x^*(e_\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \lambda^n \text{ se } |\lambda| < 1.$$

Agora, como $(y_n)_n$ é necessariamente limitado (pois $y \in \ell^q$), isso define uma função holomorfa em λ, e se anula, por hipótese, no conjunto Λ com um ponto de acumulação. O Teorema A.21 implica que essa função holomorfa é identicamente nula, portanto $y_n = 0$ para todo $n \geq 1$ o que nos dá $x^* = 0$. □

Em particular, o subespaço

$$\begin{aligned} X_0 &= \operatorname{span}\{x \in X;\ Tx = \eta x \textit{ para algum } \eta \in \mathbb{C} \textit{ com } |\eta| < 1\} \\ &= \operatorname{span}\{e_\lambda;\ |\lambda| < 1/|\mu|\} \end{aligned}$$

é denso em X. Similarmente o conjunto Y_0 do critério de Godefroy-Shapiro também é denso em Y_0 (note que $1/|\mu| < 1$). Isso implica que os operadores de Rolewicz são hipercíclicos.

Teorema 1.35 (Critério de Kitai)**.** *Seja T um operador. Se existem $X_0, Y_0 \subset X$ densos e uma aplicação $S : Y_0 \to Y_0$ não necessariamente linear, tal que para todo $x \in X_0,\ y \in Y_0$,*

(i) $T^n x \to 0$,

(ii) $S^n y \to 0$,

(iii) $TSy = y$,

então T é mixing.

Demonstração. Sejam U, V subconjuntos abertos e não vazios de X. Da densidade de X_0 e Y_0 segue que $U \cap X_0 \neq \emptyset$ e $V \cap Y_0 \neq \emptyset$. De (i) segue

$$x \in U \cap X_0 \Rightarrow T^n x \to 0,$$

e de (ii) obtemos

$$y \in V \cap Y_0 \Rightarrow S^n y \to 0.$$

Por (iii) temos $T^n S^n y = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue então, que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$x + S^n y \in U \quad \text{e} \quad T^n(x + S^n y) = T^n x + y \in V.$$

Isto mostra que T é mixing. □

Exemplo 1.36 (Operadores de Rolewicz)**.** *O operador $T = \lambda B, |\lambda| > 1$, é mixing em todo espaço $X = \ell^p, 1 \leq p < \infty$, ou c_0. De fato, tomando por $X_0 = Y_0$ o conjunto das sequências finitas, que é denso em X, e para $S : Y_0 \to Y_0$ a aplicação $S = \frac{1}{\lambda}F$, onde F é o shift $F : (x_1, x_2, ...) \to (0, x_1, x_2, ...)$, as condições do critério de Kitai são claramente satisfeitas.*

Agora mostraremos com um exemplo, que o critério de Kitai é um resultado mais forte do que o critério de Godefroy-Shapiro.

Exemplo 1.37. *Considere o shift bilateral $T = B$, dado por*

$$B(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}},$$

no espaço com peso $\ell^1(\mathbb{Z}, v) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}};\ \|x\| := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| v_n < \infty\}$, onde $v_n = \dfrac{1}{|n|+1}, n \in \mathbb{Z}$. A igualdade $Tx = \lambda x,\ x \neq 0$, implica que

$$x = (..., \frac{1}{\lambda^2}x_0, \frac{1}{\lambda}x_0, x_0, \lambda x_0, \lambda^2 x_0, ...),\ \lambda \neq 0,\ x_0 \neq 0.$$

Mas então obtemos que

$$\|x\| = |x_0|(1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\lambda|^n}{n+1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|\lambda|^n(n+1)}) = \infty,$$

independente do valor de λ. Assim sendo T não possui autovalores e, em particular, não satisfaz o critério de Godefroy-Shapiro.

Por outro lado satisfaz o critério de Kitai. De fato, se escolhemos para $X_0 = Y_0$ o espaço de sequências finitas bilaterais $(..., 0, 0, x_{-m}, ..., x_n, 0, 0, ...)$, $m, n \geq 0$, e para $S : Y_0 \to Y_0$ o shift à direita, então facilmente se verifica as condições do critério de Kitai para T.

Este exemplo mostra, em particular, que operadores hipercíclicos não precisam possuir autovetores.

Teorema 1.38 (Critério de Gethner-Shapiro)**.** *Seja T um operador. Se existem $X_0, Y_0 \subset X$ densos, uma sequência crescente $(n_k)_k$ de inteiros positivos, e uma aplicação $S : Y_0 \to Y_0$ não necessariamente linear, tal que para todo $x \in X_0$, $y \in Y_0$,*

(i) $T^{n_k}x \to 0$,

(ii) $S^{n_k}y \to 0$,

(iii) $TSy = y$,

então T é weakly mixing.

Demonstração. Sejam U_1, U_2, V_1 e V_2 conjuntos abertos não vazios. Por hipótese podemos encontrar vetores $x_j \in U_j \cap X_0$ e $y_j \in V_j \cap Y_0$, $j = 1, 2$. Então por (iii),

$$T^{n_k}(x_j + S^{n_k}y_j) = T^{n_k}x_j + y_j, \ j = 1, 2.$$

Segue de (i) e (ii) que, para k suficientemente grande, $x_j + S^{n_k}y_j \in U_j$ e $T^{n_k}x_j + y_j \in V_j$ para $j = 1, 2$. Isto mostra que $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$. □

Exemplo 1.39. *Consideremos o shift à esquerda com peso $T = B_w : c_0 \to c_0$ dado por*

$$B_w(x_1, x_2, ...) = (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, ...),$$

com sequência peso

$$w = (w_1, w_2, ...) = (1, 2, 2^{-1}, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, 2, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, 2^{-1}, ...).$$

Note que o valor de w_1 é irrelevante, uma vez que $T(x_1, x_2, ...) = (w_2x_2, w_3x_3, ...)$. O operador T é contínuo. De fato, visto que

$$\|Tx\| = \|(w_2x_2, w_3x_3, ...)\| = \sup_{n\geq 2} |w_nx_n| \leq 2 \sup_{n\geq 2} |x_n| \leq 2\|x\|,$$

concluímos que T é limitado e portanto contínuo. Seja $(m_k)_k$ a sequência crescente de todos naturais com $w_{m_k} = 2^{-1}$ e $w_{m_k+1} = 2,\ k \geq 1$. A partir de

$$T^n x = \left(\left(\prod_{i=2}^{n+1} w_i \right) x_{n+1}, ... \right), \quad n \geq 1,$$

obtemos $T^{m_k-1}x = (x_{m_k}, ...)$ para todo $k \geq 1$, pois, $\prod_{i=2}^{m_k} w_i = 1$ para todo $k \geq 1$. Em particular, se definimos $U = \{x \in c_0; \|x\| < 1\}$ e $V = \{x \in c_0; |x_1| > 1\}$, que são abertos não vazios, obtemos de:

$$x \in U \Rightarrow \|T^{m_k-1}x\| \leq \|x\| \leq 1, \quad \forall\ k \geq 1$$

que $T^{m_k-1}(U) \cap V = \emptyset$, para todo $k \geq 1$, o que mostra que T não é mixing. Assim sendo não pode satisfazer o critério de Kitai.

Por outro lado, tomemos por $X_0 = Y_0$ o espaço das sequências finitas e S o shift à direita com peso $S : Y_0 \to Y_0,\ S(x_1, x_2, ...) = (0, w_2^{-1}x_1, w_3^{-1}x_2, ...)$. Vemos facilmente que $TSy = y,\ y \in Y_0$, e que $T^n x \to 0,\ x \in X_0$. Resta encontrar uma sequência crescente de inteiros positivos $(n_k)_k$ tal que $S^{n_k}y \to 0$ para cada $y \in Y_0$ a fim de satisfazer todas condições do critério de Gethner-Shapiro. De fato, seja $n_k = m_k + k - 1,\ k \in \mathbb{N}$, e denote por e_n o vetor em c_0 que possui 1 na n-ésima posição, e 0 caso contrário. Então obtemos que

$$S^{n_k} e_1 = \left(0, ..., 0, \prod_{i=2}^{m_k+k} w_i^{-1}, 0, ... \right) = (0, ..., 0, 2^{-k}, 0, ...),$$

de modo que $S^{n_k} e_1 \to 0$. Por outro lado, já que $\|Sx\| \leq 2\|x\|$, S também é contínua. Assim sendo, para todo $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} S^{n_k} e_j &= S^{n_k} \left(\left(\prod_{i=2}^{j} w_i \right) \left(0, ..., 0, \prod_{i=2}^{j} w_i^{-1}, 0, ... \right) \right) \\ &= S^{n_k} \left(\left(\prod_{i=2}^{j} w_i \right) S^{j-1} e_1 \right) \\ &= \left(\prod_{i=2}^{j} w_i \right) S^{j-1}(S^{n_k e_1}) \to 0. \end{aligned}$$

A partir disso concluímos que $S^{n_k}y \to 0$ para todo $y \in Y_0$, como queríamos mostrar.

Teorema 1.40 (Critério de hiperciclicidade)**.** *Seja T um operador. Se existem $X_0, Y_0 \subset X$ densos, uma sequência crescente $(n_k)_k$ de inteiros positivos, e uma aplicação $S_{n_k} : Y_0 \to X$ tal que, para todo $x \in X_0,\ y \in Y_0$,*

(i) $T^{n_k}x \to 0$,

(ii) $S_{n_k}y \to 0$,

(iii) $T^{n_k} S_{n_k} y \to y$,

então T *é hipercíclico.*

Demonstração. Mostraremos que T é topologicamente transitivo. Sejam U, V dois subconjuntos não vazios e abertos de X e pegue $x \in X_0 \cap U$, $y \in Y_0 \cap V$. Então $x + S_{n_k} y \to x \in U$ quando $k \to \infty$ enquanto que $T^{n_k}(x + S_{n_k} y) = T^{n_k} x + T^{n_k} S_{n_k} y \to y \in V$. Assim, $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$ se k é suficientemente grande. □

Observação 1.41. *Se o critério de Gethner-Shapiro ou o critério de hiperciclicidade é satisfeito para a sequência dos naturais* $(n_k)_k = (n)_n$, *então a prova mostra que o operador* T *também é mixing.*

1.4 Problema do critério de hiperciclicidade

Para entender o problema do critério de hiperciclicidade precisaremos da seguinte definição.

Definição 1.42. *Sejam* $T : X \to X$ *e* $S : Y \to Y$ *operadores em espaços de Banach* X *e* Y *respectivamente. Então o operador* $T \oplus S$ *é definido por*

$$T \oplus S : X \oplus Y \to X \oplus Y, \quad (T \oplus S)(x, y) = (Tx, Sy).$$

Lembremos que o produto $T \times S$ é a aplicação definida em $X \times Y$ que leva (x, y) em (Tx, Sy). Quando a aplicação for linear podemos identificar $T \times S$ com $T \oplus S$. Na definição de aplicação weakly mixing se tomarmos o caso especial em que a aplicação é um operador temos.

Definição 1.43. *Um operador* $T : X \to X$ *é dito weakly mixing se* $T \oplus T$ *é hipercíclico em* $X \oplus X$.

Por definição, aplicações weakly mixing são topologicamente transitivas. Vimos porém que o contrário não vale: por exemplo, toda rotação irracional no círculo $\mathbb{T}$ é topologicamente transitiva mas tal rotação nunca é weakly mixing (ver Exemplo 1.22). No caso linear, as coisas tornam-se muito interessantes porque weakly mixing acaba por ser equivalente ao Critério de hiperciclicidade (ver Teorema de Bès-Peris [GP11, Teorema 3.15]).

Como vimos anteriormente o Critério de hiperciclicidade é um refinamento do Critério de Kitai. O seguinte problema, originalmente proposto por D. Herrero [Her91], foi reconhecido como uma das questões mais excitantes em dinâmica linear:

Problema. *Todo operador hipercíclico em um espaço de Banach separável satisfaz o critério de hiperciclicidade? Equivalentemente, é $T \oplus T$ hipercíclico sempre que T é?*

Esse problema foi resolvido por M. De La Rosa e C. Read [DR09] que construíram um espaço de Banach X e um operador hipercíclico $T \in L(X)$ tal que $T \oplus T$ não é hipercíclico.

Logo em seguida, Bayart e Matheron [BM07] demonstraram que tais operadores podem ser construídos em uma grande classe de espaços de Banach, incluindo $c_0(\mathbb{N})$ ou $\ell^p(\mathbb{N})$.

1.5 Existência de operadores hipercíclicos

Vimos nas seções anteriores alguns exemplos de operadores hipercíclicos definidos em espaços distintos. Também vimos que só faz sentido falar de hiperciclicidade em espaços de Banach separáveis e de dimensão infinita. Isso nos sugere a seguinte pergunta: Todo espaço de Banach separável e de dimensão infinita suporta um operador hipercíclico?

A resposta para essa pergunta foi obtida independentemente por Ansari [Ans97] e Bernal [Ber99], resolvendo o problema que foi proposto por Rolewicz [Rol69].

Para demonstrar a existência de operadores hipercíclicos em espaços de Banach separáveis precisaremos de dois resultados referentes a pertubação da identidade por um shift. Para isso, precisamos definir os espaços com peso $\ell^p(v)$ e $c_0(v)$.

Seja $v = (v_n)_n$ uma sequência peso positiva, isto é, uma sequência formada por números estritamente positivos. Definimos os seguintes espaços com peso

$$
\begin{aligned}
\ell^p(v) &= \left\{(x_n)_{n\geq 1};\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n < \infty\right\}, \quad 1 \leq p < \infty, \\
c_0(v) &= \left\{(x_n)_{n\geq 1};\ \lim_{n\to\infty} |x_n| v_n = 0\right\},
\end{aligned}
$$

onde $(x_n)_{n\geq 1}$ pode ser uma sequência real ou complexa.

Teorema 1.44 (Theorem 8.2 de [GP11])**.** *Seja X o espaço $\ell^p(v)$, $1 \leq p < \infty$, ou $c_0(v)$. Se $\sup_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$, então o operador $T := I + B$ é mixing em X onde B é o operador shift à esquerda.*

Corolário 1.45 (Corollary 8.3 de [GP11])**.** *Seja X um dos espaços ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, ou c_0, e seja $w = (w_n)_n$ uma sequência peso tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_n| < \infty$. Então $T = I + B_w$ e $T = e^{B_w}$ são operadores mixing em X.*

Precisaremos também de dois lemas auxiliares.

Lema 1.46. *Todo espaço de Banach separável que não é isomorfo a $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ possui um subespaço denso que admite uma norma contínua.*

Lema 1.47. *Seja X um espaço espaço de Banach de dimensão infinita e separável que não é isomorfo a ω. Então existem sequências $(x_n)_n$ em X e $(x_n^*)_n$ em X^* tal que*

(i) $(x_n)_n$ *converge a* 0, *e* $\operatorname{span}\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ *é denso em* X*;*

(ii) $(x_n^*)_n$ *é equicontínuo;*

(iii) $x_n^*(x_k) = 0$ *se* $k \neq n$*, e* $0 < x_n^*(x_n) \leq 1, \ n \geq 1$.

Demonstração. Pelo Lema 1.46 existe um subespaço denso M de X que admite uma norma contínua $|||\cdot|||$. Selecionamos uma sequência linearmente independente $(z_n)_n$ em M onde o span de $(z_n)_n$ é denso em M, e portanto em X. Pelo Teorema de Hahn-Banach existem funcionais $y_n^* \in (M, |||\cdot|||)^*$ tais que, para todo $n \geq 1, \ y_n^*(z_n) = 1$ e $y_n^*(z_k) = 0$ para $k < n$. Seguindo um procedimento do tipo Gram-Schimidt, fazemos $y_1 = z_1$ e $y_n = z_n - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^*(z_n) y_k$ para $n > 1$, obtemos assim uma sequência $(y_n)_n$ em M tal que $\operatorname{span}\{y_n; \ n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{span}\{z_n; \ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X e $y_n^*(y_k) = \delta_{k,n}, \ k, n \in \mathbb{N}$.

Por continuidade existem $K_n \geq 1, \ n \geq 1$, tais que $|y_n^*(x)| \leq K_n |||x|||$ para todo $x \in M$. Já que M é denso em X, existe uma seminorma contínua p em X onde a restrição a M coincide com $|||\cdot|||$, e cada y_n^* possui uma única extensão linear para X, que denotaremos também por y_n^*. Claramente, $|y_n^*(x)| \leq K_n p(x)$ para todo $x \in X, \ n \geq 1$. Isso implica que $\{K_n^{-1} y_n^*; \ n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínuo. Agora, como X é metrizável, existem números $\alpha_n \in (0, 1]$ tais que $(\alpha_n y_n)_n$ converge a 0 em X. Fazendo $x_n = \alpha_n y_n$ e $x_n^* = K_n^{-1} y_n^*, \ n \geq 1$, a afirmação segue. □

Agora estamos prontos para provar o resultado principal dessa seção.

Teorema 1.48 (Ansari-Bernal)**.** *Todo espaço de Banach separável de dimensão infinita suporta um operador mixing e portanto hipercíclico.*

Demonstração. Em $X = \omega$, o shift à esquerda é um operador mixing (ver Exemplo 1.36). Podemos portanto supor que X é um espaço de Banach separável de dimensão infinita que não é isomorfo à ω. Aplicando o Lema 1.47 achamos sequências $(x_n)_n$ em X e $(x_n^*)_n$ em X^* com as propriedades especificadas. Consideremos $T : X \to X$,

$$Tx = x + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_{n+1}^*(x) x_n, \quad x \in X.$$

A equicontinuídade de $(x_n^*)_n$ e o fato que $(x_n)_n$ tende a 0 implica que T é um operador bem definido em X.

Por outro lado, o operador

$$S : \ell^1 \to \ell^1, \quad S((\alpha_n)_n) = (\alpha_1 + \frac{x_2^*(x_2)}{2}\alpha_2, \alpha_2 + \frac{x_3^*(x_3)}{2^2}\alpha_3, ...)$$

é a pertubação da identidade por um shift à esquerda com peso e portanto mixing pelo Corolário 1.45. A aplicação $\phi : \ell^1 \to X$ dado por $\phi((\alpha_n)_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ é contínua, e possui imagem densa já que o span linear de $x_n,\ n \geq 1$, é denso em X. Portanto, como $T \circ \phi = \phi \circ S$, T é quase-conjugado a S, daí segue a conclusão. $\square$

2 Estrutura de HC(T)

Dado um operador T hipercíclico o que podemos afirmar sobre o conjunto de vetores hipercíclicos $HC(T)$? São muitos? Existe algum tipo de estrutura nesse conjunto?

O objetivo desse capítulo é responder essas perguntas e também falar do problema do subespaço invariante.

2.1 O conjunto dos vetores hipercíclicos

Vimos no capítulo anterior que o Teorema transitivo de Birkhoff nos ajudou a demonstrar que certos operadores são hipercíclicos. Agora apresentaremos sua demonstração e veremos que além de ser útil para mostrar que alguns operadores são hipercíclicos, ele também nos dá uma importante informação sobre o quão grande é o conjunto de vetores hipercíclicos.

Teorema 2.1 (Teorema Transitivo de Birkhoff)**.** *Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico linear. São equivalentes:*

(i) T é hipercíclico.

(ii) T é topologicamente transitivo.

Nesse caso, $HC(T)$ é um G_δ denso.

Demonstração. Primeiro, observe que se x é um vetor hipercíclico para T então $\mathrm{Orb}(x, T) \subset HC(T)$. De fato, já que X não possui pontos isolados, todo conjunto denso $A \subset X$ permanece denso após remover um número finito de pontos. Aplicando isto para $A := \mathrm{Orb}(x, T)$, e desde que $\mathrm{Orb}(T^p x, T) = \mathrm{Orb}(x, T) \setminus \{x, Tx, \cdots, T^{p-1}x\}$, vemos que $T^p x \in HC(T)$ para todo inteiro positivo p. Assim $HC(T)$ é ou vazio ou denso em X. A partir disso, é claro que $(i) \Rightarrow (ii)$. De fato, se (i) vale e os abertos U, V são dados, podemos pegar $x \in U \cap HC(T)$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x \in V$. Em particular, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Para provar a recíproca, notemos que uma vez que X é separável, ele é segundo contável, isto é, admite uma base contável de abertos. Seja $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal base. Um vetor $x \in X$ é hipercíclico para T se, e somente se, sua órbita visita cada conjunto aberto V_j, isto é, se, e somente se, para todo $j \in \mathbb{N}$ existir um natural $n \geq 0$ tal que $T^n x \in V_j$. Assim pode-se descrever $HC(T)$ como segue:

$$HC(T) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j).$$

Isto mostra em particular que $HC(T)$ é um conjunto G_δ. Além disso, segue do Teorema de Baire que $HC(T)$ é denso em X se, e somente se, cada aberto $W_j := \cup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j)$ é denso, em outras palavras, se, e somente se, para cada aberto não vazio $U \subset X$ e todo $j \in \mathbb{N}$ encontrarmos n tal que

$$U \cap T^{-n}(V_j) \neq \emptyset \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad T^n(U) \cap V_j \neq \emptyset.$$

Já que $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base para a topologia de X, isto é equivalente a transitividade topológica de T. □

Mostramos que o conjunto dos vetores hipercíclicos é interseção enumerável de abertos e densos. Chamamos esse tipo de conjunto de residual, assim sendo $HC(T)$ é residual.

Observação 2.2. *Note que a demonstração do Teorema Transitivo de Birkhoff não depende da estrutura linear do sistema dinâmico T.*

Proposição 2.3. *Seja T um operador hipercíclico em X. Então,*

$$X = HC(T) + HC(T),$$

isto é, todo vetor $x \in X$ pode ser escrito como soma de dois vetores hipercíclicos.

Demonstração. Seja $x \in X$. Já que tanto $HC(T)$ e $x - HC(T)$ são conjuntos G_δ densos, suas interseções devem ser não vazias pelo Teorema de Baire, ou seja, existe $y \in HC(T) \cap (x - HC(T))$ o que nos da, $y = x - h$ onde $y, h \in HC(T)$ seque então que $x = y + h$, portanto $x \in HC(T) + HC(T)$. □

Como consequência, o conjunto $HC(T)$ só pode ser um subespaço, exceto pelo vetor nulo, se todo vetor não nulo for hipercíclico e em tal caso o operador não possui subconjunto invariante fechado não trivial. Tal operador existe, por exemplo, em ℓ^1, mas sua construção é muito complicada.

O próximo resultado se repetirá algumas vezes em outras seções com uma roupagem diferente.

Lema 2.4. *(a) Seja T um operador hipercíclico. Então sua adjunta T^* não possui autovalores. Equivalentemente, todo operador $T - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{K}$, possui imagem densa.*

(b) Seja T um operador hipercíclico em um espaço de Banach real. Então a adjunta $\widetilde{T^*}$ de sua complexificação $\widetilde{T}$ não possui autovalores. Equivalentemente, todo operador $\widetilde{T} - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, possui imagem densa.

Demonstração. (a) Seja $x \in HC(T)$. Suponha, por contradição, que T^* possui um autovalor λ, isto é,

$$T^*x^* = \lambda x^*$$

para algum $x^* \in X^*,\ x^* \neq 0$. Então obtemos que, para todo $n \geq 0$,

$$\mathbb{K} = \overline{\{x^*(T^n x);\ n \geq 0\}} = \overline{\{(T^*)^n x^*(x);\ n \geq 0\}} = \overline{\{\lambda^n x^*(x);\ n \geq 0\}}$$

Se $|\lambda| \leq 1$ ou $x^*(x) = 0$ então $\|\lambda^n x^*(x)\| \leq \|x^*(x)\|$ para todo $n \geq 0$, ou seja, o conjunto $\{\lambda^n x^*(x);\ n \geq 0\}$ é limitado e, portanto, não pode ser denso em $\mathbb{K}$. Se $|\lambda| > 1$ e $x^*(x) \neq 0$ então $0 \notin \overline{\{\lambda^n x^*(x);\ n \geq 0\}}$, portanto diferente de $\mathbb{K}$. Concluímos então que T^* não pode ter autovalor.

Além disso, pelo Teorema de Hahn-Banach A.10, $T - \lambda I$ possui imagem densa precisamente quando

$$(T^*x^* - \lambda x^*)(x) = x^*((T - \lambda I)x) = 0 \quad \text{para todo } x \in X$$

implica que $x^* = 0$, que é equivalente a λ não ser um autovalor de T^*.

(b) Agora, seja X um espaço de Banach real e seja $\widetilde{T}$ a complexificação de T. Seja $x \in X$ hipercíclico para T e suponha que $\widetilde{T^*}$ possui um autovetor $\widetilde{x^*} \in \widetilde{X^*},\ \widetilde{x^*} \neq 0$, com um autovalor λ. Então obtemos

$$\begin{aligned} \widetilde{T^*}\widetilde{x^*}(x + iy) &= \lambda \widetilde{x^*}(x + iy) \\ \widetilde{T^*}(x^*(x) + ix^*(y)) &= \lambda(x^*(x) + ix^*(y)) \end{aligned}$$

que implica

$$T^*x^*(x) - \lambda x^*(x) + i(T^*x^*(y) - \lambda x^*(y)) = 0$$

que nos diz que $T^*x^*(x) - \lambda x^*(x) = 0$, ou seja, λ é um autovalor para a adjunta T^*, um absurdo. O restante da demonstração é feita como em (a). $\square$

Como uma consequência obtemos uma das pedras angulares da teoria dos sistemas dinâmicos lineares.

Teorema 2.5 (Bourdon)**.** *Se T é um operador hipercíclico e p é um polinômio não nulo, então o operador $p(T)$ possui imagem densa.*

Demonstração. (Caso complexo) Podemos assumir que $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ com $a_N \neq 0$, $N \geq 1$. Para o espaço X sob o corpo dos complexos o resultado segue imediatamente do Lema 2.4 (a) e do fato que p pode ser escrito como produto de fatores lineares, desse modo

$$p(T) = a_N(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_N I)$$

com certos $\lambda_k \in \mathbb{C}, k = 1, \cdots, N$.

(Caso real) Se X é um espaço sob o corpo dos reais, consideremos a complexificação $\widetilde{T}$ de T. Pelo Lema 2.4 (b), segue como no caso complexo que, para todo polinômio p, $p(\widetilde{T})$ possui imagem densa em $\widetilde{X}$. Agora se p possui coeficientes reais, então

$$p(\widetilde{T})(x+iy) = p(T)x + ip(T)y, \quad x, y \in X,$$

que implica também que $p(T) : X \to X$ possui imagem densa. $\square$

Estamos prontos para deduzir um importante resultado sobre a estrutura algébrica do conjunto de vetores hipercíclicos.

Teorema 2.6 (Herrero-Bourdon)**.** *Se x é um vetor hipercíclico para T, então*

$$\{p(T)x : p \text{ é um polinômio}\} \setminus \{0\}$$

é um conjunto denso de vetores hipercíclicos.

Em particular, todo operador hipercíclico admite um subespaço invariante denso consistindo, exceto por zero, de vetores hipercíclicos.

Demonstração. Seja x um vetor hipercíclico para T. Então

$$M = \{p(T)x : p \text{ é um polinômio}\} = \operatorname{span} \operatorname{Orb}(x, T)$$

é um subespaço denso T-invariante de X. Além disso, se $y = p(T)x \in M \setminus \{0\}$ então $p \neq 0$ e

$$T^n y = p(T)(T^n x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Já que x é hipercíclico e, pelo Teorema de Bourdon, $p(T)$ possui imagem densa, y também possui órbita densa sob T. $\square$

O Teorema de Herrero-Bourdon nos permite deduzir uma estrutura topológica adicional para o conjunto de vetores hipercíclicos.

Corolário 2.7. *O conjunto $HC(T)$ de vetores hipercíclicos para um operador hipercíclico T é um subconjunto conexo de X.*

Demonstração. Seja M o subespaço denso do Teorema de Herrero-Bourdon. Note que M é de dimensão maior que 1 porque, caso contrário, x seria uma autovetor, que é não hipercíclico, portanto $M \setminus \{0\}$ é conexo. Agora, usando o fato que se $A \subset B \subset \overline{A} \subset X$ e A é conexo, então B também é conexo. Aplicando isto para $A = M \setminus \{0\}$ e $B = HC(T)$ concluímos o que queríamos. $\square$

2.2 Problema do subespaço invariante

Nessa seção apresentaremos o problema do subespaço invariante e sua relação com os operadores hipercíclicos. Tomaremos por referência [Sha14].

A formulação mais geral desse problema é:

Deve cada $T \in L(X)$ possuir um subespaço invariante não trivial?

A resposta é sim se:

- X tem dimensão finita. Nesse caso X é isomorfo a $\mathbb{C}^n$ para algum $n > 1$. Suponha $T \in L(X)$. Então T possui autovalor λ. O auto-espaço correspondente é $\ker(T - \lambda I)$ que é invariante por T, e assumindo que o operador não é um múltiplo escalar da identidade, é não trivial.

- X é não separável. Nesse caso, fixemos $x \in X \setminus \{0\}$, e seja M o fecho do span da órbita de T por x, isto é,

$$M = \overline{\operatorname{span}}\{T^n x;\ n \geq 0\}.$$

Vemos que M é invariante por T e como não é separável temos $M \neq X$. Já que M contém x e x é não nulo, o subespaço M é não trivial.

- T é compacto. Foi provado primeiro para espaços de Hilbert por Von Neumann em 1920. Sua prova que nunca foi publicada, foi melhorada por Aronszajn e Smith [AS54] que simplificaram o argumento e generalizaram para espaços de Banach.

- $p(T)$ é compacto para algum polinômio p. Este resultado foi provado em 1960 por Bernstein e Robinson [BR66].

A resposta é, em geral, não!

- O primeiro contraexemplo foi produzido por Per Enflo em 1970, mas o espaço de Banach construído foi muito complicado. Seu artigo [ENF87] não apareceu até o final dos anos 80.

- Charles Read ([Rea85] e [Rea86]) deu um contraexemplo mais acessível, em particular ele mostrou que existe um operador R no espaço ℓ^1 que não possui subespaço invariante fechado não trivial.

O problema está em aberto para:

- Espaços de Hilbert separáveis (isso é o que é usualmente chamado "Problema do subespaço invariante"), e mais geralmente

- Espaços de Banach reflexivos separáveis, e ainda mais geralmente.

- Operadores adjuntos: se o espaço dual X^* de X é separável e $T \in L(X)$ deve $T^* : X^* \to X^*$ possuir um subespaço invariante não trivial?

Enunciamos o Teorema de Read que serve como contraexemplo no caso de espaços de Banach não reflexivos.

Teorema 2.8 (Read)**.** *Existe um operador em ℓ^1 onde todos vetores não nulos são hipercíclicos.*

No teorema acima vemos a relação do problema do subespaço invariante com os operadores hipercíclicos. Esse teorema também nos da um exemplo de operador cujo conjunto de vetores hipercíclicos é igual a $X \setminus \{0\}$, ou seja, a menos do vetor nulo, é um espaço vetorial formado por vetores hipercíclicos.

Note que nesse caso, se existisse um subespaço fechado não trivial, digamos $M \subset X$, ele teria vetores hipercíclicos, tomemos por exemplo $x \in M$ não nulo. Como ele é um vetor hipercíclico temos que:

$$X = \overline{\text{span}}\{T^n x;\ n \geq 0\},$$

e como $\overline{\text{span}}\{T^n x;\ n \geq 0\}$ é o menor subespaço fechado que contém x, temos que $\overline{\text{span}}\{T^n x;\ n \geq 0\} \subset M$, mas isso implica que $M = X$. Concluímos disso que todo operador $T \in L(X)$ para o qual todos vetores não nulos são hipercíclicos não pode ter subespaço fechado não trivial.

3 Estrutura do espaço de operadores hipercíclicos

3.1 Existem muitos operadores hipercíclicos

Vimos que a existência de um vetor hipercíclico implica a existência de "muitos" vetores hipercíclicos (ver Teorema 2.1). Uma pergunta natural então é a seguinte: será que a existência de um operador hipercíclico em um dado espaço implica que então devem haver muitos deles, em um certo sentido?

A interpretação mais natural para o problema nos dá uma resposta negativa. De fato, nenhum operador T em um espaço de Banach X com $\|T\| \leq 1$ pode ser hipercíclico porque todas suas órbitas são limitadas. Assim o conjunto de operadores hipercíclicos em X não é denso no espaço $L(X)$ de todos operadores, quando munido com a topologia da norma.

Mas existe uma outra topologia em $L(X)$, que é bem conhecida, a topologia forte de operadores (strong operator topology), abreviada como SOT; é a topologia da convergência pontual de operadores. Mostraremos que o conjunto de operadores hipercíclicos é de fato denso nessa topologia.

Para preparar o terreno, seja X um espaço de Banach e $L(X)$ o espaço de operadores em X. A topologia de operadores forte é então definida da seguinte forma: para $T \in L(X)$, a base de vizinhanças é dada por

$$U_{x_1,...,x_n}(T, \varepsilon) = \{S \in L(X) : \|Tx_k - Sx_k\| < \varepsilon \text{ para } k = 1, ..., n\},$$

onde $x_1, ..., x_n,\ n \geq 1$, é uma coleção arbitrária de vetores linearmente independentes de X, e $\varepsilon > 0$. Assim, uma sequência (mais geralmente uma net) $(T_\alpha)_\alpha$ é SOT-convergente para um operador T se, e somente se, para todo $x \in X,\ T_\alpha x \to Tx$.

Começando com um operador hipercíclico T em um espaço de Banach X é imediato que se $A : X \to X$ é um operador invertível então $A^{-1}TA$ é conjugado a T e portanto também hipercíclico. Um resultado surpreendente neste contexto diz que, sob uma condição bem fraca em um operador arbitrário T, a órbita similar de T,

$$S(T) = \{A^{-1}TA;\ A : X \to X \text{ invertível}\},$$

é SOT-denso em $L(X)$.

Lema 3.1. *Sejam $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ dois subconjuntos de vetores linearmentes independentes de X. Então existe um operador invertível A de X tal que $Ax_k = y_k,\ k = 1, ..., n$.*

Demonstração. Seja $M = \text{span}\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\}$, que é um espaço de dimensão $m \leq 2n$. Podemos encontrar vetores $x_{n+1}, ..., x_m$ e $y_{n+1}, ..., y_m$ tal que tanto $x_1, ..., x_m$ e $y_1, ..., y_m$ são bases de M. Já que subespaços de dimensão finita são fechados, o Teorema de Hahn-Banach implica na existência de funcionais $x_k^* \in X^*$ tal que $x_k^*(x_j) = \delta_{j,k}$ para $j, k = 1, ..., m$.

Então definimos $A : X \to X$ por

$$Ax = \sum_{k=1}^{m} x_k^*(x) y_k + x - \sum_{k=1}^{m} x_k^*(x) x_k,$$

que está bem definida, pois, $x = y \Rightarrow x_k^*(x) = x_k^*(y) \Rightarrow Ax = Ay$ e a continuidade segue da continuidade de x_k^*. Logo, como $Ax_k = y_k$ para $k = 1, ..., m$, $A : M \to M$ é uma bijeção. Além disso, A é a identidade em $M' := \bigcap_{k=1}^{m} \ker\ x_k^*$. Já que, algebricamente, $X = M \oplus M'$, A é uma bijeção (em X). Pelo Teorema da Aplicação Inversa, A^{-1} é contínua já que A é invertível. □

Proposição 3.2. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Suponha que, para todo $n \geq 1$, existem n vetores $x_1, ..., x_n$ em X tal que*

$$x_1, ..., x_n, Tx_1, ..., Tx_n$$

são linearmente independentes. Então $S(T)$ é SOT-denso em $L(X)$.

Demonstração. A fim de mostrar que $S(T)$ é SOT-denso fixamos um operador $S \in L(X)$, vetores linearmente independentes $x_1, ..., x_n$, $n \geq 1$, de X, e $\varepsilon > 0$. Então definimos vetores $y_1, ..., y_n$ tais que $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ são linearmente independentes e $\|Sx_k - y_k\| < \varepsilon$, $k = 1, ..., n$; de fato, se $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{k-1}, Sx_k$ são linearmente independentes tomamos $y_k = Sx_k$, se não, escolhemos uma pequena pertubação apropriada de Sx_k.

Por outro lado, por hipótese, existem $z_1, ..., z_n, Tz_1, ..., Tz_n$ linearmente independentes. Pelo Lema 3.1 existe um operador invertível A em X tal que $Ax_k = z_k$ e $Ay_k = Tz_k$ para $k = 1, ..., n$. Assim $A^{-1}TAx_k = y_k$ e consequentemente

$$\|Sx_k - A^{-1}TAx_k\| < \varepsilon$$

para $k = 1, ..., n$. De outra forma, $A^{-1}TA \in U_{x_1,...,x_n}(S, \varepsilon)$, como desejado. □

Teorema 3.3. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então o conjunto de operadores hipercíclicos em X é SOT-denso em $L(X)$.*

Demonstração. Sabemos do Teorema de Ansari-Bernal que existem operadores hipercíclicos T em X. Por conjugação, a órbita similar $S(T)$ consiste inteiramente de operadores hipercíclicos. Assim o resultado segue da Proposição 3.2 uma vez que sabemos que, para todo $n \geq 1$, existem n vetores $x_1, ..., x_n \in X$ tais que $x_1, ..., x_n, Tx_1, ..., Tx_n$ são linearmente independentes. De fato, podemos facilmente encontrá-los: a órbita de todo vetor hipercíclico é linearmente independente e portanto é linearmente independente como queríamos.

$$x, T^2x, T^4x, ..., T^{2n-2}x, Tx, T^3x, T^5x, ..., T^{2n-1}x$$

□

3.2 Existem poucos operadores hipercíclicos

Mostraremos que o conjunto de operadores hipercíclicos definido em um espaço de Hilbert H é nunca denso no espaço $L(H)$ com respeito a topologia da norma. Para isso precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.4. *Sejam X, Y espaços de Banach complexos, e seja $S \in L(X \oplus Y)$. Assuma que S possui uma representação,*

$$S = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

com $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Então S é similar a $A \oplus B$.

Demonstração. Temos que encontrar um operador $P \in L(X \oplus Y)$ tal que $P^{-1}SP = A \oplus B$. Procuraremos um operador da forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando SP e $P(A \oplus B)$ obtemos

$$\begin{aligned} SP &= \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AV + C \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ P(A \oplus B) &= \begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & VB \\ 0 & B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

o que nos da $AV + C = VB$, chegando dessa forma na equação $AV - VB = -C$. Assim, introduzimos o operador $\tau_{A,B} : L(Y, X) \to L(Y, X)$ definido por

$$\tau_{A,B}(V) = AV - VB.$$

A demonstração estará completa quando mostrarmos que o operador $\tau_{A,B}$ é sobrejetor. Iremos de fato mostrar que $\tau_{A,B}$ é invertível.

Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ um contorno delimitando um domínio limitado Ω tal que $\sigma(B) \subset \Omega$ e $\sigma(A) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Então podemos definir um operador $\tau'_{A,B} : L(Y, X) \to L(Y, X)$ pela fórmula

$$\tau'_{A,B}(V') = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (A - \xi)^{-1} V' (\xi - B)^{-1} d\xi.$$

Afirmamos que $\tau'_{A,B}$ é a inversa que estamos procurando.

Um simples cálculo revela que se $V \in L(X)$ então

$$\begin{aligned}
(A-\xi)^{-1}\tau_{A,B}(V)(\xi-B)^{-1} &= (A-\xi)^{-1}(AV-VB)(\xi-B)^{-1}\\
&= (A-\xi)^{-1}((A-\xi)V-V(B-\xi))(\xi-B)^{-1}\\
&= V(\xi-B)^{-1}+(A-\xi)^{-1}V
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tau_{A,B}((A-\xi)^{-1}V'(\xi-B)^{-1}) &= A((A-\xi)^{-1}V'(\xi-B)^{-1})\\
&\quad -((A-\xi)^{-1}V'(\xi-B)^{-1})B\\
&= (A-\xi)((A-\xi)^{-1}V'(\xi-B)^{-1})\\
&\quad -((A-\xi)^{-1}V'(\xi-B)^{-1})(B-\xi)\\
&= V'(\xi-B)^{-1}+(A-\xi)^{-1}V'
\end{aligned}$$

para todo número complexo $\xi \notin \sigma(A)\cup\sigma(B)$. A partir disso, obtemos

$$\tau'_{A,B}\tau_{A,B}(V) = \left(\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma (A-\xi)^{-1}d\xi\right)V + V\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma (\xi-B)^{-1}d\xi\right).$$

Pela escolha de Γ, a primeira integral no lado direito é igual a 0 e a segunda integral é simplesmente $I \in L(Y)$. Assim, temos $\tau'_{A,B}\tau_{A,B}(V) = V$ para todo $V \in L(Y,X)$.

Similarmente, podemos calcular $\tau_{A,B}\tau'_{A,B}(V')$ como segue:

$$\begin{aligned}
\tau_{A,B}\tau'_{A,B}(V') &= \tau_{A,B}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma (A-\xi)^{-1}V'(\xi-B)^{-1}d\xi\right)\\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \tau_{A,B}((A-\xi)^{-1}V'(\xi-B)^{-1})d\xi\\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma V'(\xi-B)^{-1}+(A-\xi)^{-1}V'd\xi\\
&= V'.
\end{aligned}$$

Assim $\tau_{A,B}$ é de fato invertível, com inversa $\tau'_{A,B}$. □

Observação 3.5. *A demonstração do Lema 3.4 foi retirada de [BM09], uma outra demonstração pode ser obtida em [RH73, Corolário 0.15].*

Definição 3.6. *Seja $T : X \to X$ um operador. Um vetor $x \in X$ é dito cíclico se*

$$\mathrm{span}\{T^n x;\ n \geq 0\}$$

é denso em X.

Operadores que possuem vetor cíclico são chamados de operadores cíclicos.

Observação 3.7. *É imediato que operadores hipercíclicos são cíclicos. Em particular, o conjunto de operadores hipercíclicos está contido no conjunto de operadores cíclicos.*

Teorema 3.8. *Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Então o conjunto de todos operadores cíclicos é nunca denso em $L(H)$ com respeito a topologia da norma.*

Demonstração. Denotemos por $L_C(H)$ o conjunto de todos operadores cíclicos definidos em H. Para mostrar que $L_C(H)$ é nunca denso em $L(H)$ devemos provar que, $\mathrm{int}(\overline{L_C(H)}) = \emptyset$, isto é, dados $T \in L(H)$ e $\varepsilon > 0$, podemos achar $S \in L(H)$ tal que $\|S - T\| < \varepsilon$ e S não está em $\overline{L_C(H)}$.

Começamos com a seguinte afirmação.

Afirmação 2. *Se $R \in L(H)$ é um operador de Fredholm com índice -2 (ver Apêndice A.5) então R não é cíclico.*

Demonstração. Se R é cíclico com vetor cíclico e então $H = \mathbb{C}e + \overline{\mathrm{Im}(R)}$. De fato, $\mathbb{C}e + \overline{\mathrm{Im}(R)}$ é um subespaço fechado de H que contém $\mathrm{span}\{R^n(e);\ n \in \mathbb{N}\}$. Segue-se que $\mathrm{Ker}(R^*) = \mathrm{Im}(R)^\perp$ possui dimensão no máximo 1, de modo que R não pode ser Fredholm com índice ≤ -2. $\square$

Já que um operador $S \in L(H)$ é cíclico se, e somente se, $S - \mu I$ é cíclico para todo $\mu \in \mathbb{C}$, segue da afirmação anterior que

$$U := \{S \in L(H);\ \exists \mu \in \mathbb{C} : S - \mu I \text{ é Fredholm com índice } -2\}$$

não contêm operadores cíclicos. Além disso, U é um subconjunto aberto de $L(H)$ pela continuidade do índice de Fredholm (Proposição A.17). Consequentemente, a demonstração estará completa se mostrarmos que U é denso em $L(H)$.

Fixemos um operador arbitrário $T \in L(H)$ e $\varepsilon > 0$. Escolha um número complexo qualquer $\lambda \in \partial\sigma(T)$ tal que o operador $T - \lambda I$ não é Fredholm à esquerda, e fixe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $T - \mu I$ é invertível e $|\lambda - \mu| < \varepsilon/2$. Já que $T - \lambda I$ não é Fredholm à esquerda (Proposição A.20), podemos encontrar um operador $T_0 \in L(H)$ e um subespaço fechado de dimensão infinita $E \subset H$ tal que $\|T_0 - T\| < \alpha$, onde $\alpha < \varepsilon/2$ é muito pequeno, E é invariante sob T_0 e $(T_0)_{|E} = \lambda I_E$ (Corolário A.19). Então T_0 possui representação na forma

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda & C_0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix}$$

com respeito a decomposição ortogonal $H = E \oplus E^\perp$. Além disso, $T_0 - \mu I$ é invertível se α é suficientemente pequeno, que agora assumimos ser o caso. Portanto $\mu \notin \sigma(B_0)$.

Agora, vamos definir $S_0 \in L(H)$ por

$$S_0 := \begin{pmatrix} \mu & C_0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix}$$

onde a representação é dada com respeito a decomposição $H = E \oplus E^{\perp}$. Segue-se então que

$$\begin{aligned} \|S_0 - T\| &= \|S_0 - T_0 + T_0 - T\| \\ &< \|S_0 - T_0\| + \|T_0 - T\| \\ &< |\lambda - \mu| + \alpha \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Seja $A_0 \in L(E)$ um operador de Fredholm com índice -2. Se $\delta > 0$ é pequeno o suficiente então $\sigma(\mu I + \delta A_0) \cap \sigma(B_0) = \emptyset$ visto que $\mu \notin \sigma(B_0)$. Pelo Lema 3.4 o operador

$$S_\delta := \begin{pmatrix} \mu + \delta A_0 & C_0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix}$$

é similar a $(\mu I + \delta A_0) \oplus B_0$. Já que $B_0 - \mu I$ é invertível, pois, $\mu \notin \sigma(B_0)$, segue que $S_\delta - \mu I \sim \delta A_0 \oplus (B_0 - \mu I) = \delta A_0 \oplus B$ é Fredholm com índice -2. Portanto, como S_δ é próximo de T, isto conclui a demonstração. $\square$

Como uma simples consequência obtemos que:

Corolário 3.9. *Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Então o conjunto de todos os operadores hipercíclicos é nunca denso em $L(H)$ com respeito a topologia da norma.*

4 Propriedades espectrais de operadores hipercíclicos

Nessa seção apresentaremos resultados interessantes sobre o espectro de operadores hipercíclicos e através desses resultados poderemos dizer se um dado operador é hipercíclico ou não.

Proposição 4.1. *Seja T um operador hipercíclico em um espaço de Banach X (real ou complexo). Então:*

(*i*) *T^* não possui autovalores, isto é, $\sigma_p(T^*) = \emptyset$;*

(*ii*) *A órbita de cada $x^* \neq 0$ em X^* sob T^* é ilimitada.*

Demonstração. (*i*) Veja a demonstração no Lema 2.4 (*a*).

(*ii*) Suponha que existe algum $x^* \in X^*, x^* \neq 0$, e algum $M > 0$ tal que $\|(T^*)^n x^*\| \leq M$ para todo $n \geq 0$. Seja x um vetor hipercíclico para T. Então $\{x^*(T^n x),\ n \geq 0\}$, se trata de um conjunto denso em $\mathbb{K}$. Por outro lado,

$$|x^*(T^n x)| = |(T^*)^n x^*(x)| \leq M\|x\|, \quad n \geq 0,$$

o que é impossível. □

Lema 4.2. *Seja $r > 0$. Então:*

(*i*) *Se $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ então existem $\varepsilon > 0$ e $M > 0$ tais que $\|T^n x\| \leq M(r-\varepsilon)^n\|x\|$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}_0$;*

(*ii*) *Se $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ então existem $\varepsilon > 0$ e $M > 0$ tais que $\|T^n x\| \geq M(r+\varepsilon)^n\|x\|$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}_0$.*

Demonstração. (*i*) Já que $\sigma(T)$ é um conjunto compacto, da hipótese e da fórmula do raio espectral obtemos que $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = r(T) < r$. Consequentemente, se $\varepsilon < r - r(T)$ então existe algum $M > 0$ tal que $\|T^n\| \leq M(r-\varepsilon)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, e o resultado segue.

(*ii*) A hipótese implica que $0 \notin \sigma(T)$, de modo que T é invertível. Já que $\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1}$, obtemos que $\sigma(T^{-1}) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < \dfrac{1}{r}\}$. Por (1) existe algum $\eta > 0$ com $\eta < \dfrac{1}{r}$ e $M > 0$ tal que $\|(T^{-1})^n y\| \leq M(\dfrac{1}{r} - \eta)^n\|y\|$ para todo $y \in X$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Fazendo $y = T^n x$ e definindo ε por $\dfrac{1}{r} - \eta = \dfrac{1}{r+\varepsilon}$ obtemos o resultado. □

Proposição 4.3. *Seja T um operador hipercíclico. Então $\sigma(T)$ intersecta o círculo unitário:*

$$\sigma(T) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset.$$

Demonstração. Suponha, pelo contrário, que $\sigma(T)$ não intersecta o círculo unitário. Se $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ então, fazendo $r = 1$ no Lema 4.2 (i), vemos que toda órbita de T tende a 0, que é impossível. Similarmente, o Lema 4.2 (ii) mostra que $\sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ é impossível. Nós, portanto, temos que os conjuntos

$$\sigma_1 := \sigma(T) \cap \mathbb{D} \quad \text{e} \quad \sigma_2 := \sigma(T) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$$

formam uma partição de $\sigma(T)$ em conjuntos fechados não vazios. Pelo Teorema da decomposição de Riesz (Ver A.16), existem subespaços fechados invariantes por T não triviais M_1 e M_2 tais que $X = M_1 \oplus M_2, \sigma(T_{|M_1}) = \sigma_1$ e $\sigma(T_{|M_2}) = \sigma_2$. Como $T_{|M_1}$ é um operador hipercíclico com $\sigma(T_{|M_1}) \subset \mathbb{D}$, que é impossível, como vimos acima. □

Exemplo 4.4 (Operador de Volterra)**.** *Seja X o espaço $C[0,1]$ de funções contínuas no intervalo $[0,1]$, ou um dos espaços $L^p[0,1]$ de funções p-integráveis em $[0,1]$, onde $1 \leq p < \infty$. Para todo $f \in X$ definimos Vf por*

$$Vf(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Isto define um operador em $C[0,1]$ com $\|V\| \leq 1$.

Por outro lado, seja $p > 1$, e seja q o expoente conjugado de p definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^t |f(s)|ds \right)^p dt &\leq \int_0^1 \left(\int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{\frac{p}{p}} \left(\int_0^t 1^q ds \right)^{\frac{p}{q}} dt \\ &\leq \|f\|_p^p \int_0^1 t^{\frac{p}{q}} dt = \frac{1}{\frac{p}{q}+1} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Assim V é também um operador em $L^p[0,1]$, e já que $\frac{p}{q} + 1 = p$ obtemos que $\|V\| \leq p^{-\frac{1}{p}}$. Um argumento similar mostra que o mesmo vale para $p = 1$. O operador V é chamado de operador de Volterra.

Usando indução mostramos que a n-ésima iterada de V, $n \geq 1$, é dado por

$$V^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
V^{n+1}f(t) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t\int_0^x (x-s)^{n-1}f(s)dsdx \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1\int_0^1 \chi_{[0,t]}(x)\chi_{[0,x]}(s)(x-s)^{n-1}f(s)dsdx \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 \chi_{[0,t]}(s)f(s)\left(\int_0^1 \chi_{[s,t]}(x)(x-s)^{n-1}dx\right)ds \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(s)\left(\int_s^t (x-s)^{n-1}dx\right)ds \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n f(s)ds.
\end{aligned}$$

Em $*$ *usamos* $\chi_{[0,t]}(x)\chi_{[0,x]}(s) = \chi_{[0,t]}(s)\chi_{[s,t]}(x)$ *e Fubini para mudar a ordem de integração.*

No caso de $X = C[0,1]$ *obtemos que*

$$\|V^n f\| \leq \frac{1}{(n-1)!}\|f\| \max_{0\leq t\leq 1}\int_0^t (t-s)^{n-1}ds = \frac{1}{n!}\|f\|,$$

de modo que

$$\|V^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n!^{\frac{1}{n}}} \to 0.$$

A fórmula do raio espectral implica que $r(V) = 0$*, de modo que* $\sigma(V) = 0$*. O mesmo resultado vale para o espaço* $X = L^p[0,1],\ 1 \leq p < \infty$*. Pela Proposição 4.3,* V *não pode ser hipercíclico em todos espaços considerados. De fato, pelo mesmo motivo, nenhum múltiplo* $\lambda V,\ \lambda \in \mathbb{C}$*, pode ser hipercíclico.*

Exemplo 4.5. *Seja* B_w *o shift à esquerda com peso* $w = (1/n)_n$ *em um espaço de Banach complexo* ℓ^p *ou* c_0*. Já que*

$$(B_w)^n x = \left(\frac{x_{n+1}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n+1)},\ \frac{x_{n+2}}{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n+2)}, \ldots\right),$$

obtemos que $\|(B_w)^n\|^{1/n} \leq (n!)^{-1/n} \to 0$*. De modo que, a fórmula do raio espectral nos dá* $\sigma(B_w) = \{0\}$*. Em particular, segue da Proposição 4.3 que* B_w *não é hipercíclico. Por outro lado, segue do Corolário 1.45 que* $I + B_w$ *é hipercíclico. Além disso,* $\sigma(I + B_w) = 1$*. Em particular, existem operadores hipercíclicos cujo espectro intersecta* $\mathbb{T}$ *em apenas um ponto.*

Lema 4.6. *Sejam* A *e* B *subconjuntos compactos de um espaço métrico, onde* B *é conexo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Toda componente conexa de A *intersecta* B*;*

(ii) $A \cup B$ *é conexo.*

O próximo teorema generaliza a Proposição 4.3.

Teorema 4.7 (Kitai)**.** *Seja T um operador hipercíclico. Então toda componente conexa de $\sigma(T)$ intersecta o círculo unitário.*

Demonstração. Pelo lema anterior basta mostrarmos que o conjunto compacto $\sigma(T) \cup \mathbb{T}$ é conexo. Suponhamos por absurdo que $\sigma(T) \cup \mathbb{T}$ pode ser particionado em dois conjuntos fechados não vazios C_1 e C_2. Já que $\mathbb{T}$ é conexo, ele deve ficar inteiramente contido em um dos dois conjuntos, caso contrário

$$\begin{aligned} (\sigma(T) \cup \mathbb{T}) \cap \mathbb{T} &= (C_1 \cup C_2) \cap \mathbb{T} \\ \mathbb{T} &= (C_1 \cap \mathbb{T}) \cup (C_2 \cap \mathbb{T}). \end{aligned}$$

Donde segue que $\mathbb{T}$ seria particionado em dois fechados não vazios $C_1 \cap \mathbb{T}$ e $C_2 \cap \mathbb{T}$, o que é um absurdo. Podemos então supor que $\mathbb{T}$ está contido em C_2. Então definimos uma partição de $\sigma(T)$ em conjuntos fechados:

$$\sigma_1 := C_1 \cap \sigma(T) \quad \text{e} \quad \sigma_2 := C_2 \cap \sigma(T).$$

Já que $\mathbb{T}$ está contido em C_2, obtemos que $\sigma_1 = C_1$ é não vazio. Além disso, se $C_2 \cap \sigma(T)$ fosse vazio então $\sigma(T)$ estaria contido em C_1 e portanto disjunto de $\mathbb{T}$, que é impossível pela Proposição 4.3.

Agora, pelo Teorema da Decomposição de Riesz, existem subespaços fechados não triviais M_1 e M_2 invariantes por T tais que $X = M_1 \oplus M_2$, $\sigma(T_{|M_1}) = \sigma_1$ e $\sigma(T_{|M_2}) = \sigma_2$. Como T é hipercíclico, obtemos que $T_{|M_1}$ é também hipercíclico, e seu espectro não intersecta o círculo, o que é um absurdo pela Proposição 4.3. □

Corolário 4.8. *Nenhum operador compacto em um espaço de Banach complexo $X \neq \{0\}$ pode ser hipercíclico.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.27, podemos assumir que X tem dimensão infinita. Seja $T \in L(X)$ um operador compacto. Então o espectro de T é contável e contém o zero. Agora, como todo subconjunto contável de $\mathbb{C}$ é totalmente desconexo, segue que $\{0\}$ é uma componente conexa de $\sigma(T)$. Pelo Teorema 4.7, T não pode ser hipercíclico. □

5 Caracterizações de hiperciclicidade

Dividimos esse capítulo em três partes: na primeira tratamos do trabalho de Bourdon e Feldman [BF03] sobre órbitas densas em algum lugar enquanto que na segunda parte falamos de uma bonita caracterização de operadores hipercíclicos obtida por Charpentier, Ernst e Menet [CEM16] e por fim na terceira parte trazemos 3 problemas em aberto de [CEM16].

5.1 Órbitas densas em algum lugar e hiperciclicidade

O contexto do trabalho de Bourdon e Feldman [BF03] é devido a discussão envolvendo dois teoremas notáveis: Teorema de Ansari e o Teorema Multi-hipercíclico. Ansari [Ans95] respondeu à questão proposta por Kitai [Kit82, Observação 2.13], provando:

se T é hipercíclico, então para todo inteiro positivo n, o operador T^n é também hipercíclico. Além disso, T e T^n possuem a mesma coleção de vetores hipercíclicos.

Alguns anos antes do Teorema de Ansari ser anunciado, Domingo Herrero [Her92] levantou a seguinte conjectura intimamente relacionada:

se T é multi-hipercíclico, então T é hipercíclico.

Um operador $T : X \to X$ é multi-hipercíclico desde que haja um subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de X tal que $\cup_{k=1}^n \operatorname{Orb}(x_k, T)$ é denso em X. De forma independente George Costakis [Cos00] e Alfredo Peris [Per01] resolveram a Conjectura de Herrero. A prova de Peris para o Teorema Multi-hipercíclico explora um argumento de V. Miller [Mil97] que apontou que se $\cup_{k=1}^n \operatorname{Orb}(x_k, T)$ é denso em X, então para ao menos um índice k com $1 \leq k \leq n$, $\operatorname{Orb}(x_k, T)$ é densa em algum lugar em X. Peris [Per01, Problema 2] levantou a seguinte questão:

Se uma órbita de T é densa em algum lugar, então ela é densa.

Apresentamos a demonstração de Bourdon e Feldman para esse problema, bem como suas consequências.

Definição 5.1. *Um conjunto é chamado denso em algum lugar se seu fecho contém um conjunto aberto não vazio.*

Lema 5.2. *Se T admite uma órbita densa em algum lugar e p é um polinômio não nulo, então o operador $p(T)$ possui imagem densa.*

Demonstração. Seja x um vetor cuja órbita por T é densa em algum lugar e seja F o fecho de $\operatorname{Orb}(x, T)$. Suponha que para algum escalar α, o operador $T - \alpha I$ em X não possui imagem densa. Então existe um funcional linear não nulo x^* que anula a imagem de $T - \alpha I$, que produz

$$x^*(T^n x) = \alpha^n x^*(x)$$

para todo inteiro positivo n. Note que x^* não pode anular todos vetores no interior de F, consequentemente, o fecho de $\{x^*(T^n x);\ n \geq 1\}$ possui interior. Contudo, o fecho de $\{\alpha^n x^*(x);\ n \geq 1\}$ não possui. Essa contradição mostra que para todo escalar α, o operador $T - \alpha I$ possui imagem densa. Já que o produto de operadores com imagem densa tem imagem densa, a prova está completa. □

Lema 5.3. *Se* $\mathrm{Orb}(x, T)$ *é densa em algum lugar, então o conjunto* $\{p(T)x;\ p \neq 0$ *um polinômio*$\}$ *é conexo e denso em* X.

Demonstração. O conjunto $A := \{p(T)x;\ p \neq 0 \text{ um polinômio}\}$ é conexo por caminhos. De fato, sejam p, q polinômios não nulos. Se q não é um múltiplo de p então o caminho retilíneo $t \mapsto tp(T)x + (1-t)q(T)x,\ t \in [0,1]$ está contido em A. Caso contrário selecionemos um outro polinômio r que não é múltiplo de p e portanto nem de q e tomemos a união dos caminhos retilíneos conectando $p(T)x$ e $q(T)x$ com $r(T)x$. Isso nos mostra que A é conexo por caminhos portanto, é conexo.

Por outro lado, $\overline{A}$ é um subespaço de X que contêm $\overline{\mathrm{Orb}}(x, T)$. Segue da hipótese que existe $x_0 \in X$ e uma 0-vizinhança W tal que $x_0 + W \subset \overline{A}$. Assim, para todo $y \in X$, existe um escalar λ com $y \in \lambda W$. Consequentemente, $y \in \lambda(x_0 + W) - \lambda x_0 \subset \overline{A}$, o que nos dá $\overline{A} = X$, isto é, A é denso em X. □

Relembremos que um operador $T : X \to X$ é dito cíclico se possui uma órbita com span denso, isto é, se existir $x \in X$ tal que $\mathrm{span}\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ é denso em X (ver Definição 3.6).

O próximo lema segue do fato que todo subespaço de X que contém um conjunto aberto não vazio deve ser todo X.

Lema 5.4. *Suponha que* $\mathrm{Orb}(x, T)$ *é densa em algum lugar em* X. *Então para cada inteiro não negativo* j, $T^j x$ *é um vetor cíclico por* T.

Lema 5.5. *Suponha que* $x \in X$ *e que* U *é o interior do fecho da* $\mathrm{Orb}(x, T)$. *Então* $X \setminus U$ *é invariante por* T.

Demonstração. Denotemos por F o fecho de $\mathrm{Orb}(x, T)$ e U o interior de F. Observe que F é invariante por T.

Se U é vazio, não há nada a provar. Suponha que U é não vazio. Escolha um inteiro positivo j tal que $T^j x$ pertence a U e faça $x_j = T^j x$. Como $\{T^n x;\ n \geq j\}$ é denso no conjunto aberto U, x_j é um ponto de acumulação da $\mathrm{Orb}(x_j, T)$ e U é o interior do fecho de

$\mathrm{Orb}(x_j, T)$. Pelo Lema 5.4, x_j é um vetor cíclico para T, isto é, $\{p(T)x_j;\ p \text{ é um polinômio}\}$ é denso em X.

Suponha, com o propósito de obter uma contradição, que T aplica algum ponto y no complemento de U em U. Sem perda de generalidade, assumimos que y pertence ao complemento de F. Já que, $X \setminus F$ é aberto e $\{p(T)x_j;\ p \text{ é um polinômio}\}$ é denso em X, podemos encontrar um polinômio p de modo que $p(T)x_j$ está perto o suficiente de y para garantir (1) $p(T)x_j \in X \setminus F$ e (2) $T(p(T)x_j) \in U$. Já que U está contido no conjunto fechado T-invariante F, segue que o fecho da órbita por T de $T(p(T)x_j)$ pertence a F. Contudo, $\mathrm{Orb}(Tp(T)x_j, T) = \{p(T)T^{j+n}x;\ n \geq 1\}$. Como x_j é um ponto de acumulação de $\{T^{j+n}x;\ n \geq 1\}$, a continuidade de $p(T)$ nos da que $p(T)x_j \in F$. Assim $p(T)x_j$ está em F e seu complementar, uma contradição. □

Teorema 5.6 (Bourdon-Feldman)**.** *Seja T um operador em um espaço de Banach separável X e $x \in X$. Se $\mathrm{Orb}(x, T)$ é densa em algum lugar em X, então ela é densa em X.*

Demonstração. Seja F o fecho de $\mathrm{Orb}(x, T)$ e U denota o interior de F, que estamos assumindo não vazios. Assumimos também que F é subconjunto próprio de X, caso contrário, não há nada a provar.

O primeiro passo consiste em mostrar que para todo polinômio não nulo p, $p(T)x \notin \partial U$. Suponha, por absurdo, que existe um polinômio não nulo p tal que $p(T)x$ pertence à fronteira de U.

Como U é o interior do conjunto fechado F, $X \setminus U$ é o fecho de $X \setminus F$. Assim, como x é um vetor cíclico para T, escolhemos uma coleção Q de polinômios tal que $\{q(T)x;\ q \in Q\}$ é um subconjunto denso de $X \setminus U$. Pelo Lema 5.2, $p(T)$ deve aplicar um conjunto denso $D := U \cup \{q(T)x;\ q \in Q\}$ em um conjunto denso, contudo, vamos mostrar que $p(T)D \subseteq X \setminus U$.

Usando a T-invariância de $X \setminus U$ obtida do Lema 5.5 obtemos que para cada $q \in Q$, o conjunto $q(T)F$ pertence a $X \setminus U$. Novamente, usando a T-invariância do complementar de U, uma vez que $p(T)x \in \partial U \subseteq X \setminus U$, vemos que $p(T)F$ pertence a $X \setminus U$. Agora, todo ponto em $p(T)D$ está em $p(T)U \subset p(T)F \subseteq X \setminus U$ ou possui a forma $p(T)q(T)x = q(T)p(T)x$ para algum $q \in Q$. Contudo, $p(T)F$ é um subconjunto de $X \setminus U$ e $q(T)p(T)x$ pertence a $q(T)F$, que é também um subconjunto de $X \setminus U$. Assim, todo ponto de $p(T)D$ pertence ao complementar de U, contradizendo o Lema 5.2.

Assim, provamos que para todo polinômio não nulo p, $p(T)x$ não pertence à fronteira de U. Como $\{p(T)x;\ p \neq 0 \text{ é um polinômio}\}$ é conexo (Lema 5.3), contém pontos de U (como pontos em $\mathrm{Orb}(x, T)$), e não contém pontos da fronteira de U, vemos que $\{p(T)x;\ p \neq 0 \text{ é um polinômio}\}$ está inteiramente contido em U. Entretanto, U está contido propriamente no subconjunto fechado F de X, significando que $\{p(T)x;\ p \neq$

0 é um polinômio} não pode se denso em X, contradizendo o fato que x é um vetor cíclico para T. Assim, nossa hipótese que F é um subconjunto próprio de X levou a uma contradição, e concluímos que $\mathrm{Orb}(x, T)$ é denso em X, como desejado. □

Como consequência obtemos o Teorema Multi-hipercíclico (Costakis-Peris) e o Teorema de Ansari.

Teorema 5.7 (Costakis-Peris)**.** *Seja T um operador em um espaço de Banach separável X e $x_1, ..., x_n \in X$. Se*

$$\bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Orb}(x_j, T)$$

é denso em X, então existe algum $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $\mathrm{Orb}(x_j, T)$ é densa em X.

Demonstração. Da hipótese obtemos

$$\bigcup_{j=1}^{n} \overline{\mathrm{Orb}}(x_j, T) = \overline{\bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Orb}(x_j, T)} = X.$$

Pelo Teorema de Baire, existe um $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\overline{\mathrm{Orb}(x_k, T)}$ possui interior não vazio, ou seja, $\mathrm{Orb}(x_k, T)$ é densa em algum lugar e por Bourdon-Feldman x_k possui órbita densa em X. □

Teorema 5.8 (Ansari)**.** *Seja T um operador em um espaço de Banach separável. Então, para todo $p \in \mathbb{N}$, $HC(T) = HC(T^p)$. Em particular, se T é hipercíclico então T^p também é, para todo $p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $x \in HC(T)$ e $p \in \mathbb{N}$. Já que

$$\mathrm{Orb}(x, T) = \bigcup_{j=0}^{p-1} \mathrm{Orb}(T^j x, T^p)$$

é denso em X, o Teorema 5.7 implica que existe algum $j \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que $T^j x$ é hipercíclico para T^p. Já que T^{p-j} possui imagem densa e

$$T^{p-j}(\mathrm{Orb}(T^j x, T^p)) \subset \mathrm{Orb}(x, T^p)$$

obtemos que $x \in HC(T^p)$. □

5.2 Γ-Superciclicidade

Nessa seção caracterizamos os subconjuntos Γ de $\mathbb{C}$ onde a noção de hiperciclicidade coincide com a noção de Γ-superciclicidade, cuja definição apresentamos abaixo.

Definição 5.9. *Seja X um espaço de Banach complexo. Para T em $L(X)$, x em X, e Γ um subconjunto não vazio de $\mathbb{C}$, denotamos* $\mathrm{Orb}(\Gamma x, T) = \{\gamma T^n x; \gamma \in \Gamma,\ n \geq 0\}$*. Dizemos que x é Γ-supercíclico para T se* $\mathrm{Orb}(\Gamma x, T)$ *é denso em X e T será chamado Γ-supercíclico se admite um vetor Γ-supercíclico.*

Observação 5.10. *Note que se $\Gamma = \{1\}$ então Γ-superciclicidade é equivalente a hiperciclicidade.*

Um importante resultado devido a León-Müller [LM04] nos dá uma caracterização de Γ-superciclicidade no caso em que $\Gamma = \mathbb{T}$, isto é, Γ é o círculo unitário em $\mathbb{C}$.

Teorema 5.11 (León-Müller)**.** *Seja $T \in L(X)$. Então $x \in X$ é hipercíclico para T se, e só se, x é $\mathbb{T}$-supercíclico para T.*

Prosseguindo nessa direção, daremos uma caracterização devida a S. Charpentier, R. Ernst e Q. Menet retirada do artigo "Γ-supercyclicity" publicada em 2016 no Journal of Functional Analysis.

A fim de lidar com essa questão introduziremos as propriedades que um subconjunto de $\mathbb{C}$ deve ter ou não.

Definição 5.12. *Seja Γ um subconjunto de $\mathbb{C}$. Dizemos que Γ é um conjunto escalar hipercíclico se o seguinte valer: Para todo espaço de Banach complexo de dimensão infinita X, todo $T \in L(X)$ e todo $x \in X$*

$$\overline{\mathrm{Orb}}(\Gamma x, T) = X \text{ se, e somente se, } x \text{ é hipercíclico para } T.$$

De acordo com o Teorema de Léon-Müller o subconjunto $\mathbb{T}$ de $\mathbb{C}$ é um conjunto escalar hipercíclico.

Agora podemos enunciar a caracterização dada por Charpentier, Ernst e Menet.

Teorema 5.13 (Charpentier-Ernst-Menet)**.** *Um subconjunto não vazio Γ de $\mathbb{C}$ é um conjunto escalar hipercíclico se, e somente se, $\Gamma \setminus \{0\}$ é não vazio, limitado e limitado longe do 0.*

Para provar que se Γ é um conjunto escalar hipercíclico então $\Gamma \setminus \{0\}$ é limitado e limitado longe do 0, é suficiente exibir exemplos de operadores Γ-supercíclicos que não são hipercíclicos quando $\Gamma \setminus \{0\}$ não é limitado ou não limitado longe do 0. Note que se Γ é um conjunto escalar hipercíclico então $\Gamma \setminus \{0\}$ é não vazio.

Começamos mostrando que se Γ é um conjunto escalar hipercíclico então Γ é limitado.

Proposição 5.14. *Seja Γ um subconjunto ilimitado de $\mathbb{C}$. Então o shift à esquerda B em $\ell^2(\mathbb{N})$ é Γ-supercíclico mas não hipercíclico.*

Demonstração. Já vimos no Exemplo 1.31 que B não é hipercíclico. Seja Γ um subconjunto ilimitado de $\mathbb{C}$. Vamos contruir um vetor Γ-supercíclico para B.

Seja $\{y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto denso de c_{00} (ver definição de c_{00} no Apêndice A.2). Denotemos por F o shift à direita em $\ell^2(\mathbb{N})$ e fazemos $d(y_k) = \max\{j \geq 0;\ y_k(j) \neq 0\}$. Primeiro, construímos indutivamente uma sequência $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Gamma \setminus \{0\}$ e uma sequência de inteiros $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$:

(i) $\|\frac{1}{\gamma_k} y_k\| < 2^{-k}$;

(ii) para todo $i < k$, $\frac{|\gamma_i|}{|\gamma_k|}\|y_k\| < 2^{-k}$;

(iii) para todo $i < k$, $m_k > m_i + d(y_i)$.

Se $m_0, \ldots, m_{k-1}$ e $\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}$ foram escolhidos, observamos que é suficiente escolher γ_k suficientemente grande a fim de satisfazer (i) e (ii) e escolher m_k suficientemente grande a fim de satisfazer (iii).

Usando (i), fazemos $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} F^{m_i} y_i$. Já que $\|F^{m_i} y_i\| = \|y_i\|$, obtemos que

$$\|x\| = \|\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} F^{m_i} y_i\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\frac{1}{\gamma_i} F^{m_i} y_i\| = \|\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} y_i\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2$$

e portanto x está bem definido. Afirmamos agora que x é $\Gamma-$supercíclico para T.

Seja $k \in \mathbb{N}$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\|\gamma_k B^{m_k} x - y_k\| &= \|\gamma_k B^{m_k} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} F^{m_i} y_i \right) - y_k\| \\
&\leq \sum_{j<k} \|\frac{\gamma_k}{\gamma_j} B^{m_k}(F^{m_j} y_j)\| + \|\frac{\gamma_k}{\gamma_k} B^{m_k}(F^{m_k} y_k) - y_k\| \\
&\quad + \sum_{j>k} \|\frac{\gamma_k}{\gamma_j} B^{m_k}(F^{m_j} y_j)\| \\
&\leq \sum_{j<k} 0 + 0 + \sum_{j>k} \frac{\gamma_k}{\gamma_j} \|y_j\| \quad \text{por (iii)} \\
&\leq \sum_{j>k} 2^{-j} = 2^{-k} \to 0 \quad \text{por (ii).}
\end{aligned}$$

Portanto, como $\{y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ é denso em c_{00} e este último é denso em $\ell^2(\mathbb{N})$, segue o resultado. □

Proposição 5.15. *Seja Γ um subconjunto de $\mathbb{C}$ e assuma que $\Gamma \setminus \{0\}$ é não limitado longe do zero. Então, o operador shift B_w em $\ell^2(\mathbb{Z})$ com sequência peso $w_i = 2$ se $i > 0$ e $w_i = 1$ caso contrário é Γ-supercíclico mas não hipercíclico.*

Demonstração. É bem conhecido que B_w não é hipercíclico já que a órbita de todo vetor não nulo é limitado longe do zero. Seja Γ um subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que $\Gamma \setminus \{0\}$ não é limitado longe do zero. Iremos construir um vetor Γ-supercíclico para B_w.

Seja $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto denso de $c_{00}(\mathbb{Z})$. Definimos $d(y_k) = \max\{j \geq 0;\ y_k(j) \neq 0\}$ e denotamos por $F_{\frac{1}{w}}$ o inverso de B_w em $\ell^2(\mathbb{Z})$. Em outras palavras, $F_{\frac{1}{w}}$ é o shift com peso F_ν onde $\nu_i = \frac{1}{2}$ se $i \geq 0$ e $\nu_i = 1$ caso contrário. Primeiro, construímos indutivamente uma sequência $(\gamma_k)_{k\geq 1} \subset \Gamma \setminus \{0\}$ e uma sequência de inteiros $(m_k)_{k\geq 1}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$:

(i) $\|\frac{1}{\gamma_k} F_{\frac{1}{w}}^{m_k} y_k\| < 2^{-k}$;

(ii) para todo $i < k$, $\frac{|\gamma_i|}{|\gamma_k|}\|B_w^{m_i} F_{\frac{1}{w}}^{m_k} y_k\| < 2^{-k}$;

(iii) para todo $i < k$, $\frac{|\gamma_k|}{|\gamma_i|}\|B_w^{m_k} F_{\frac{1}{w}}^{m_i} y_i\| < 2^{-k}$.

Se $m_0, \ldots, m_{k-1}$ e $\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}$ foram escolhidos, primeiro observamos que podemos escolher γ_k suficientemente pequeno tal que para todo $i < k$, temos $\frac{|\gamma_k|}{|\gamma_i|}\|B_w^{m} F_{\frac{1}{w}}^{m_i} y_i\| < 2^{-k}$ para todo $m \geq 0$ já que

$$\frac{|\gamma_k|}{|\gamma_i|}\|B_w^{m} F_{\frac{1}{w}}^{m_i} y_i\| \leq \frac{|\gamma_k|}{|\gamma_i|} 2^{m_i + d(y_i)}\|y_i\|.$$

Podemos então escolher m_k suficientemente grande a fim de satisfazer (i) e (ii) já que para todo $y \in c_{00}(\mathbb{Z})$, obtemos $F^m y \to 0$ quando $m \to \infty$.

Segue de (i), que $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} F_{\frac{1}{w}}^{m_i} y_i$ está bem definido. Afirmamos agora que x é Γ-supercíclico para T.

Seja $k \in \mathbb{N}$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\|\gamma_k B_w^{m_k} x - y_k\| &\leq \sum_{j<k} \|\frac{\gamma_k}{\gamma_i} B_w^{m_k} F_{\frac{1}{w}}^{m_j} y_j\| + \|\frac{\gamma_k}{\gamma_k} B_w^{m_k} F_{\frac{1}{w}}^{m_k} y_k - y_k\| + \sum_{j>k} \|\frac{\gamma_k}{\gamma_j} B_w^{m_k} F_{\frac{1}{w}}^{m_j} y_j\| \\
&\leq \sum_{j<k} \frac{1}{2^k} + 0 + \sum_{j>k} \frac{1}{2^j} \quad \text{por (ii) e (iii)} \\
&\leq \frac{k+1}{2^k} \to 0.
\end{aligned}$$

Portanto, novamente como $\{y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ é denso em c_{00} e este último é denso em $\ell^2(\mathbb{Z})$, segue o resultado. □

Com isso demonstramos a ida do teorema. Para demonstrar a volta enunciaremos o seguinte teorema.

Teorema 5.16. *Seja $T \in L(X)$ e $\Gamma \subset \mathbb{C}$ tal que $\Gamma \setminus \{0\}$ é não vazio, limitado e limitado longe do zero. Se x é Γ-supercíclico para T então x é hipercíclico para T.*

Seja $T \in L(X)$ e seja $x \in X$ um vetor Γ-supercíclico para T. Notemos que o ponto zero não desempenha nenhum papel, pois, tomando por exemplo $\Gamma = \{0\}$ obtemos que $\mathrm{Orb}(\Gamma x, T) = \{0\}$, sendo assim, podemos supor que $0 \notin \Gamma$. Observemos também que Γ está contido em um anel da forma $[a, b]\mathbb{T}$, com $0 < a \leq b < \infty$, e que x é $[a, b]\mathbb{T}$-supercíclico sempre que x é Γ-supercíclico. Mais ainda, tomando uma dilatação vemos que x é $[a,b]\mathbb{T}$-supercíclico se, e somente se, x é $[1,b/a]\mathbb{T}$-supercíclico. Portanto, a demonstração do Teorema 5.16 se reduz a mostrarmos o seguinte

Teorema 5.17. *Sejam $T \in L(X)$ e $1 \leq b < \infty$. Se x é $[1,b]\mathbb{T}$-supercíclico para T então x é hipercíclico para T.*

A prova do Teorema 5.17 depende de vários lemas.

Lema 5.18. *Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ um conjunto não vazio limitado e limitado longe do zero, seja $T \in L(X)$ e seja x um vetor Γ-supercíclico para T. Então para todo $y \in X$, existe $\gamma \in \overline{\Gamma}$ e uma sequência crescente (n_k) de inteiros tal que $\gamma T^{n_k} x \to y$.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que o interior de $\mathrm{Orb}(\Gamma x, T)$ possui interior vazio. De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathrm{Orb}(\Gamma x, T) &= \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma T^n x\right) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma T^n x\right), \end{aligned}$$

onde $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma T^n x$ possui interior vazio para cada $n \in \mathbb{N}$, uma vez que está contido em um subespaço de dimensão finita. Como subespaços de dimensão finita em espaços de Banach são fechados e possuem interior vazio, temos pelo Teorema de Baire que a união enumerável desses subespaços fechados e de interior vazio possui interior vazio. Já que $\mathrm{Orb}(\Gamma x, T)$ está contido nessa união, ele também possui interior vazio.

Seja $y \in X$. Da afirmação anterior deduzimos que existe uma sequência $(y_k) \subset \overline{\mathrm{Orb}}(\Gamma x, T) \setminus \mathrm{Orb}(\Gamma x, T)$ convergindo para y. Notemos que se $z \in \overline{\mathrm{Orb}}(\Gamma x, T) \setminus \mathrm{Orb}(\Gamma x, T)$ então existe uma sequência crescente $(n_j) \subset \mathbb{N}$ e $(\gamma_j) \subset \Gamma$ tal que $\gamma_j T^{n_j} x \to z$. Podemos assim contruir uma sequência $(\gamma_k) \subset \Gamma$ e uma sequência crescente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tal que $\|y_k - \gamma_k T^{n_k} x\| < 2^{-k}$. Da compacidade de $\overline{\Gamma}$ obtemos que se (γ_j) não for convergente podemos extrair uma subsequência convergente, sendo assim podemos assumir que (γ_j) converge para γ. Mais ainda, como $\overline{\Gamma}$ é limitado longe do 0 segue que $\gamma \neq 0$. Agora,

$$\|y - \gamma T^{n_k} x\| \leq \|y - y_k\| + \|\gamma_k T^{n_k} x - \gamma T^{n_k} x\| + \|y_k - \gamma_k T^{n_k} x\|.$$

Portanto, como cada parcela no lado direito vai a zero quando $k \to \infty$, obtemos o resultado desejado. □

Deduzimos a partir do lema anterior o seguinte corolário.

Corolário 5.19. *Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ um conjunto não vazio, limitado e limitado longe do zero, seja $T \in L(X)$ e seja x um vetor Γ-supercíclico para T. Então para todo $n \geq 0$, temos que*

$$\bigcup_{\gamma \in \overline{\Gamma}} \overline{\mathrm{Orb}}(\gamma T^n x, T) = X.$$

O próximo lema é bem conhecido no caso de operadores hipercíclicos (ver Teorema 2.5) e também vimos outra versão onde consideramos operadores com órbita densa em algum lugar (ver Lema 5.2).

Lema 5.20. *Se T é Γ-supercíclico com $\Gamma \subset \mathbb{C}$ não vazio, limitado e limitado longe do zero, então $p(T)$ possui imagem densa para todo polinômio não nulo p.*

Demonstração. Segue das provas do Lema 2.4 (a) e do Teorema 2.5 que é suficiente mostrar que o espectro pontual $\sigma_p(T^*)$ da adjunta T^* de T é vazio. Seja x um vetor Γ-supercíclico para T. Por contradição, assuma que $\alpha \in \sigma_p(T^*)$ e seja $y^* \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $T^* y^* = \alpha y^*$. Uma vez que x é um vetor Γ-supercíclico para T, obtemos

$$\mathbb{C} = \overline{\{y^*(\gamma T^n x);\ \gamma \in \Gamma,\ n \geq 0\}} = \overline{\{\gamma \alpha^n;\ \gamma \in \Gamma,\ n \geq 0\}} y^*(x).$$

Se $|\alpha| \leq 1$ ou $y^*(x) = 0$ então o último conjunto é limitado e não pode ser denso em $\mathbb{C}$; se $|\alpha| > 1$ e $y^*(x) \neq 0$ então ele é limitado longe do zero, portanto uma contradição. $\square$

Lema 5.21. *Se x é Γ-supercíclico para T com $\Gamma \subset \mathbb{C}$ não vazio, limitado e limitado longe do zero, então $p(T)x$ é Γ-supercíclico para T para todo polinômio não nulo p.*

Demonstração. Já que x é Γ-supercíclico para T, segue do Lema 5.20 que $p(T)(\overline{\mathrm{Orb}}(\Gamma x, T))$ é denso e obtemos o resultado desejado observando que $p(T)(\overline{\mathrm{Orb}}(\Gamma x, T)) \subset \overline{\mathrm{Orb}}(\Gamma p(T)x, T)$. $\square$

Proposição 5.22. *Seja $b \geq 1$. Se x é $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico então uma das duas seguintes condições valem:*

(1) *x é hipercíclico para T;*

(2) *existe $1 < c \leq b$ tal que x é $[1, c]\mathbb{T}$-supercíclico e $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T) \cap [1, c]\mathbb{T}x = \mathbb{T}x \cup c\mathbb{T}x$. Em particular, T não é hipercíclico.*

Demonstração. Precisaremos de duas afirmações.

Afirmação 3. *Se existirem $\lambda \in (1, b]$ e $n \geq 0$ tal que $\lambda T^n x \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$, então x é $[1, \lambda]\mathbb{T}$-supercíclico para T.*

Demonstração. Se $\lambda T^n x \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$ então existe $(n_k) \subset \mathbb{N}$ e $\gamma \in \mathbb{T}$ tal que $\gamma T^{n_k} x \to \lambda T^n x$. Segue-se que para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $\mu > 0$,

$$\frac{\mu}{\lambda}\gamma T^{n_k+m}x = \frac{\mu}{\lambda}T^m(\gamma T^{n_k}x) \to \frac{\mu}{\lambda}T^m(\lambda T^n x) = \mu T^{m+n}x$$

e assim

$$\overline{\mathrm{Orb}}(\mu\mathbb{T}T^{n+m}x, T) \subset \overline{\mathrm{Orb}}(\frac{\mu}{\lambda}\mathbb{T}T^m x, T). \tag{5.1}$$

Seja agora $J \in \mathbb{N}$ tal que $(1/\lambda)^J \leq \lambda/b$. Então, para todo $\mu \in [1, b]$, existe $0 \leq j_\mu \leq J$ tal que $\frac{\mu}{\lambda^{j_\mu}} \in [1, \lambda]$. De fato, $1/\lambda^J \leq \lambda/b \Rightarrow b/\lambda^J \leq \lambda$ e consequentemente, para todo $\mu \in [1, b]$ temos $\mu/\lambda^J \leq \lambda$. Se $\mu/\lambda^J \geq 1$, tome $j_\mu = J$. Agora, se $\mu/\lambda^J < 1$ temos $\mu/\lambda^{J-1} < \lambda$. Portanto, se $\mu/\lambda^{J-1} \geq 1$ tome $j_\mu = J - 1$. Procedendo dessa forma obtemos j_μ tal que $\mu/\lambda^{j_\mu} \in [1, \lambda]$. Assim sendo, segue de (5.1) que

$$\overline{\mathrm{Orb}}(\mu\mathbb{T}T^{Jn}x, T) \subset \overline{\mathrm{Orb}}(\mu\mathbb{T}T^{j_\mu n}x, T) \subset \overline{\mathrm{Orb}}(\frac{\mu}{\lambda^{j_\mu}}\mathbb{T}x, T).$$

Usando o Corolário 5.19 obtemos

$$X = \bigcup_{\mu\in[1,b]} \overline{\mathrm{Orb}}(\mu\mathbb{T}T^{Jn}x, T) \subset \bigcup_{\nu\in[1,\lambda]} \overline{\mathrm{Orb}}(\nu\mathbb{T}x, T).$$

Concluímos assim que x é $[1, \lambda]\mathbb{T}$-supercíclico para T. □

Afirmação 4. *Seja $1 \leq c < b$. Se x é $[1, \lambda]\mathbb{T}$-supercíclico para todo $\lambda \in (c, b]$ então x é $[1, c]\mathbb{T}$-supercíclico.*

Demonstração. Sejam $y \in X$ e $c < b$. Já que x é $[1, c + 1/k]\mathbb{T}$-supercíclico para todo k grande o suficiente, existe $\mu_k \in [1, c + 1/k]\mathbb{T}$, e n_k tal que

$$\|\mu_k T^{n_k}x - y\| \leq \frac{1}{k}.$$

Tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $\mu_k \to \mu$ para algum $\mu \in [1, c]\mathbb{T}$. Deduzimos então que $\mu T^{n_k}x \to y$ e consequentemente x é $[1, c]\mathbb{T}$-supercíclico. □

Temos agora as ferramentas necessárias para concluirmos a prova da Proposição 5.22. Seja

$$c = \inf\{\lambda \in [1, b];\ x \text{ é } [1, \lambda]\mathbb{T}\text{-supercíclico}\}.$$

Se x não é hipercíclico então $c > 1$. De fato, se $c = 1$ então pela Afirmação 4 temos que x é $\mathbb{T}$-supercíclico e portanto hipercíclico pelo Teorema de León-Müller. Da Afirmação 3 segue que para todo $\lambda \in (1, c)$, $\lambda x \notin \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$ se não c não seria o ínfimo . Além disso, cx deve pertencer a $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$ caso contrário existe $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(x, (c+\varepsilon)x]$ está contido no complementar de $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$. Nesse caso $(c+\varepsilon)x \notin \overline{\mathrm{Orb}}([1, c]\mathbb{T}x, T)$ o que contradiz o fato de x ser $[1, c]\mathbb{T}$-supercíclico. Portanto, $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T) \cap [1, c]\mathbb{T}x = \mathbb{T}x \cup c\mathbb{T}x$ como queríamos.

Finalmente se estivermos em tal caso, então T não pode ser hipercíclico. De fato, se $y \in X$ é hipercíclico para T então, de acordo com o Corolário 5.19 deve existir $\lambda \in [1, c]$ tal que $y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda \mathbb{T} x, T)$. A partir disso e da hiperciclicidade de y deduzimos que

$$X = \overline{\mathrm{Orb}}(y, T) \subset \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda \mathbb{T} x, T).$$

Pelo Teorema de León-Müller novamente obtemos que λx é hipercíclico por T e assim x é hipercíclico por T. $\square$

Nosso objetivo a partir de agora é mostrar que não pode existir um operador $T \in L(X)$ que admite um vetor $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico x com $b > 1$ e tal que

$$\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T) \cap [1, c]\mathbb{T} x = \mathbb{T} x \cup c\mathbb{T} x.$$

Tendo em vista a Proposição 5.22 isso concluirá a prova do Teorema 5.17 e consequentemente a prova do Teorema 5.13. Iniciemos com alguns lemas auxiliares.

Lema 5.23. *Se x é $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico para T e $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T) \cap [1, b]\mathbb{T} x = \mathbb{T} x \cup b\mathbb{T} x$ então para todo vetor y que é $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico, obtemos $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} y, T) \cap [1, b]\mathbb{T} y = \mathbb{T} y \cup b\mathbb{T} y$*

Demonstração. Seja y um vetor $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico para T. Pela Proposição 5.22 existe $1 < c \leq b$ tal que y é $[1, c]\mathbb{T}$-supercíclico para T e $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} y, T) \cap [1, c]\mathbb{T} y = \mathbb{T} y \cup c\mathbb{T} y$. Basta então mostrar que $c = b$. Seja $\mu \in [1, b]$ tal que $y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mu \mathbb{T} x, T)$. Temos então que

$$X = \overline{\mathrm{Orb}}([1, c]\mathbb{T} y, T) \subset \overline{\mathrm{Orb}}([1, c]\mathbb{T} \mu x, T).$$

Logo, μx e consequentemente x são $[1, c]\mathbb{T}$-supercíclico para T o que é verdadeiro se, e somente se, $c = b$. $\square$

Lema 5.24. *Seja x $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico para T tal que $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T) \cap [1, b]\mathbb{T} x = \mathbb{T} x \cup b\mathbb{T} x$. Se, para algum $\mu > 0$, μx pertencer a $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T)$ então $\mu b^m x$ pertence a $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Já que $bx \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T)$, obtemos $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} b^m x, T) \subset \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} b^{m-1} x, T)$ para todo $m \geq 1$, assim, se $\mu x \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T)$ então deduzimos que $\mu b^m x \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} b^m x, T) \subset \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T)$ para todo $m \geq 0$. Similarmente, para provar que o mesmo vale para $m < 0$ é suficiente mostrar que $\frac{1}{b} x \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T)$. Agora observe que x é $[\frac{1}{b^2}, \frac{1}{b}]\mathbb{T}$-supercíclico para T. Assim $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T)$ deve conter um elemento de $[\frac{1}{b^2}, \frac{1}{b}]\mathbb{T} x$. Mas, pelo anterior, se $\lambda x \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T) \cap [\frac{1}{b^2}, \frac{1}{b}]\mathbb{T} x$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}_+$ então $\lambda b^2 x \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T) \cap [1, b]\mathbb{T} x$ e portanto, por hipótese, $\lambda = \frac{1}{b^2}$ ou $\lambda = \frac{1}{b}$. Finalmente, se $\lambda = \frac{1}{b^2}$ então $\frac{1}{b} x = \frac{1}{b^2} bx \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T)$. $\square$

Lema 5.25. *Se x é $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico para T e $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} x, T) \cap [1, b]\mathbb{T} x = \mathbb{T} x \cup b\mathbb{T} x$ então para todo vetor y $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico, obtemos $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T} y, T) \cap \mathbb{R}_+ y = \{b^n y;\ n \in \mathbb{Z}\}$.*

Demonstração. Dos Lemas 5.23 e 5.24, já que $y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}y, T)$,

$$\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}y, T) \cap \mathbb{R}_+ y \supset \{b^n y;\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Seja agora $\mu y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}y, T) \cap \mathbb{R}_+ y$ com $\mu \in \mathbb{R}_+$. Pelos Lemas 5.23 e 5.24, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu b^m y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}y, T) \cap [1, b]y$. Agora, se $\mu \neq b^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então obtemos uma contradição com o Lema 5.23. □

Proposição 5.26. *Se x é $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico para T e $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T) \cap [1, b]\mathbb{T}x = \mathbb{T}x \cup b\mathbb{T}x$ então para todo vetor y $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico, existe $\lambda \in [1, b]$ tal que*

$$\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T) \cap \mathbb{R}_+ y = \left\{\frac{b^n}{\lambda} y;\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Demonstração. Seja y um vetor $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico para T. Já que x é $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico para T existe $\lambda \in [1, b]$ tal que $y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda\mathbb{T}x, T)$. Em particular, $\frac{1}{\lambda} y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$. Então, o Lema 5.25 implica

$$\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\mathrm{Orb}}(b^n \mathbb{T}x, T) \supset \left\{\frac{b^n}{\lambda} y;\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Seja agora $\mu y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$. Já que y é $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico existe $\tau \in [1, b]$ tal que $x \in \overline{\mathrm{Orb}}(\tau\mathbb{T}y, T)$. Assim $\overline{\mathrm{Orb}}(\tau\mathbb{T}y, T) \supset \{\mu y,\ y/\lambda\}$. Portanto, pelo Lema 5.25 segue que $\mu = \tau b^n$ e $\frac{1}{\lambda} = \tau b^m$ para algum m, n e assim $\mu = b^{n-m}/\lambda$. □

Seja x um vetor $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico para T tal que $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T) \cap [1, b]\mathbb{T}x = \mathbb{T}x \cup b\mathbb{T}x$. Dado um vetor y que é $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico, observe que se o λ dado na proposição anterior pertencer a $(1, b)$ então ele é único (isso segue da igualdade entre os conjuntos dados na Proposição 5.26). Além disso, segue da prova que λ é tal que $y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda\mathbb{T}x, T)$. Mais ainda, $\lambda \in \{1, b\}$ se, e somente se, $y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$. Estes fatos serão usados na construção abaixo.

Seja $\varphi : [1, b] \to \mathbb{T}$ uma parametrização de $\mathbb{T}$ dada por $\varphi(t) = \exp(2i\pi \frac{t-1}{b-1})$. De acordo com as observações anteriores e graças ao Lema 5.21, podemos definir uma aplicação $\Lambda : \mathrm{span}\{\mathrm{Orb}(x, T)\} \setminus \{0\} \to \mathbb{T}$ por

$$\Lambda(y) = \begin{cases} \varphi(\lambda_y) & \text{se } y \notin \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T) \\ 1 & \text{se } y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T), \end{cases}$$

onde λ_y é dado unicamente pela Proposição 5.26. Essa aplicação Λ está bem definida pela observação anterior. Mais ainda, para todo $\lambda \in [1, b]$ temos que $y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda\mathbb{T}x, T) \cap \mathrm{span}\,\mathrm{Orb}(x, T) \setminus \{0\}$ se, e somente se, $\Lambda(y) = \varphi(\lambda)$.

Corolário 5.27. *Seja x um vetor $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico para T tal que $\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T) \cap [1, b]\mathbb{T}x = \mathbb{T}x \cup b\mathbb{T}x$. As seguintes propriedades valem:*

1. *Λ é contínua;*

2. *$\Lambda(\mu T^n x) = \varphi(\mu)$ para todo $n \geq 0$ e todo $\mu \in [1, b]$.*

Demonstração. (1) É suficiente mostrar que, para toda sequência $(u_n) \subset \operatorname{span}\{\operatorname{Orb}(x,T)\} \setminus \{0\}$ e todo $u \in \operatorname{span}\{\operatorname{Orb}(x,T)\} \setminus \{0\}$, se $u_n \to u$ então $\Lambda(u)$ é o único ponto de acumulação de $(\Lambda(u_n))_n$. Pela compacidade de $\mathbb{T}$, podemos assumir sem perda de generalidade que $\Lambda(u_n) \to \alpha \in \mathbb{T}$ e temos que mostrar que $\alpha = \Lambda(u)$. Se $\Lambda(u_n) = 1$ para infinitos n então primeiro $\alpha = 1$ e, segundo, infinitos u_n pertencem a $\overline{\operatorname{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$. Segue-se que $u \in \overline{\operatorname{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$ de modo a $\Lambda(u) = 1 = \alpha$. Se não estamos no caso anterior, então podemos assumir que $u_n \notin \overline{\operatorname{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$ para todo n e assim $\Lambda(u_n) = \varphi(\lambda_n),\ n \geq 0$, com $\lambda_n \in (1, b)$ e $u_n \in \overline{\operatorname{Orb}}(\lambda_n \mathbb{T}x, T)$. Pela compacidade podemos assumir que $\lambda_n \to \lambda \in [1, b]$ e pela continuidade da φ segue que $\varphi(\lambda) = \alpha$. Resta provar que $\varphi(\lambda) = \Lambda(u)$ o que é equivalente a mostrarmos que $u \in \overline{\operatorname{Orb}}(\lambda \mathbb{T}x, T)$. Sejam $0 < \varepsilon < 1$ e $K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| < \infty$. Uma vez que $u_n \to u$ e $\lambda_n \to \lambda$ então existem $n \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{T}$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|\lambda_n T^k(\mu x) - u_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \|u_n - u\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } |\lambda_n - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{3(1+K)}.$$

Além disso, aplicando a desigualdade triangular reversa na primeira desigualdade acima junto com o fato que $\lambda_n > 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{3} \geq \|\lambda_n T^k(\mu x) - u_n\| &\geq \big|\|\lambda_n \mu\| \|T^k x\| - \|u_n\|\big| \\ &\geq |\lambda_n| \|T^k x\| - \|u_n\| \\ &\geq \|T^k x\| - \|u_n\| \end{aligned}$$

o que nos garante

$$\|T^k x\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|u_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + K < K + 1.$$

Utilizando as desigualdades anteriores temos:

$$\begin{aligned} \|\lambda T^k(\mu x) - u\| &= \|\lambda T^k(\mu x) - \lambda_n T^k(\mu x) + \lambda_n T^k(\mu x) - u_n + u_n - u\| \\ &\leq \|\lambda T^k(\mu x) - \lambda_n T^k(\mu x)\| + \|\lambda_n T^k(\mu x) - u_n\| + \|u_n - u\| \\ &\leq |\lambda_n - \lambda| \|T^k(\mu x)\| + \|\lambda_n T^k(\mu x) - u_n\| + \|u_n - u\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3(1+K)}(K+1) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso prova que $u \in \overline{\operatorname{Orb}}(\lambda \mathbb{T}x, T)$.

(2) segue do fato que $T^n x \in \overline{\operatorname{Orb}}(\mathbb{T}x, T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e da definição de Λ. □

Agora temos as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema 5.17.

Demonstração do Teorema 5.17. Assumimos por contradição que x não é hipercíclico para T. Pela Proposição 5.22 podemos assumir que x é $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico para T tal que

$\overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T) \cap [1, b]\mathbb{T}x = \mathbb{T}x \cup b\mathbb{T}x$. Dessa forma a aplicação $\Lambda : \mathrm{span}\{\mathrm{Orb}(x, T)\} \setminus \{0\} \to \mathbb{T}$ introduzida anteriormente é bem definida.

Para todo $y_0, y_1 \in \mathrm{span}\{\mathrm{Orb}(x, T)\}$, definimos o segmento retilíneo $[y_0, y_1] := \{(1-t)y_0 + ty_1;\ t \in [0, 1]\}$ e se $0 \notin [y_0, y_1]$, definimos a curva (contínua) $\gamma_{[y_0,y_1]} : [0, 1] \to \mathbb{T}$ por $\gamma_{[y_0,y_1]} = \Lambda \circ \widetilde{\gamma_{[y_0,y_1]}}$ onde $\widetilde{\gamma_{[y_0,y_1]}} : [0, 1] \to \mathrm{span}\{\mathrm{Orb}(x, T)\}$ é dado por

$$\widetilde{\gamma_{[y_0,y_1]}}(t) = (1-t)y_0 + ty_1.$$

Note que 0 não pertence a imagem de $\widetilde{\gamma_{[T^n x, T^m x]}}$ para todos $n, m \geq 0$, e que $\gamma_{[T^n x, T^m x]}$ é uma curva fechada contínua pelo Corolário 5.27. Além disso, observamos que $\gamma_{[T^n x, T^{n+1} x]} = \gamma_{[x,Tx]}$ para todo $n \geq 0$. De fato, isso segue da definição de Λ e do fato que se $y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda\mathbb{T}x, T)$ então $T^n y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda\mathbb{T}x, T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo em particular, $\mathrm{Ind}_0\, \gamma_{[T^n x, T^{n+1} x]} = \mathrm{Ind}_0\, \gamma_{[x,Tx]}$ para todo $n \geq 0$, onde $\mathrm{Ind}_0\, \gamma$ representa o número de voltas de uma curva fechada contínua γ em torno do 0. Por outro lado, para cada $\theta \in [0, 2\pi)$ e cada $y \in \mathrm{span}\{\mathrm{Orb}(x, T)\} \setminus \{0\}$ definimos a curva fechada $\gamma_{\theta,y} : [0, 1] \to \mathbb{T}$ por $\gamma_{\theta,y} = \Lambda \circ \widetilde{\gamma_{\theta,y}}$ onde $\widetilde{\gamma_{\theta,y}} : [0, 1] \to \mathrm{span}\{\mathrm{Orb}(x, T)\} \setminus \{0\}$ é dado por

$$\widetilde{\gamma_{\theta,y}} = e^{i\theta t} y.$$

Notemos que como $y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda\mathbb{T}x, T)$ se, e somente se, $e^{i\theta t} y \in \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda\mathbb{T}x, T)$, segue da definição de Λ que a curva $\gamma_{\theta,y}$ é o caminho constante igual a $\Lambda(y)$ e portanto $\mathrm{Ind}_0\, \gamma_{\theta,y} = 0$. Similarmente, observemos que $\mathrm{Ind}_0\, \gamma_{[bx,x]} = -1$. Agora, usando o Lema 5.25 deduzimos que $bx \in \overline{\mathrm{Orb}}(\mathbb{T}x, T) \setminus \mathrm{Orb}(\mathbb{T}x, T)$ porque caso contrário $\mathrm{Orb}(\mathbb{T}x, T)$ estaria contido em um espaço de dimensão finita contradizendo que x é $[1, b]\mathbb{T}$-supercíclico. Então, pela compacidade de $\mathbb{T}$, existe algum $\theta \in [0, 2\pi)$ e $(n_k)_k \in \mathbb{N}$ crescente tal que $e^{i\theta} T^{n_k} x \to bx$ com k tendendo a ∞. Afirmamos que, tomando uma subsequência, $(n_k)_k$ pode ser escolhido de tal forma que $\mathrm{Ind}_0\, \gamma_{[e^{i\theta} T^{n_k} x, bx]} = 0$. De fato, se assumirmos pro contradição que para algum $N \geq 0$ e todo $k \geq N$ o número de voltas $\mathrm{Ind}_0\, \gamma_{[e^{i\theta} T^{n_k} x, bx]}$ é diferente de 0, então para todo $\lambda \in [1, b)$,

$$[e^{i\theta} T^{n_k} x, bx] \cap \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda\mathbb{T}x, T) \neq \emptyset$$

para todo $k \geq N$. Mais ainda para cada $\varepsilon > 0$ existe algum $N_\varepsilon \geq N$ tal que para todo $k \geq N_\varepsilon$ $[e^{i\theta} T^{n_k} x, bx] \subset B(bx, \varepsilon)$. Em outras palavras, para todo $\lambda \in [1, b)$, existe uma sequência (y_n) convergindo a bx tal que para todo $n \geq 0$, $y_n \in \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda\mathbb{T}x, T)$. Assim, $bx \in \overline{\mathrm{Orb}}(\lambda\mathbb{T}x, T)$ para todo $\lambda \in [1, b)$, uma contradição com a Proposição 5.26.

Para o restante da demonstração, seja $\theta \in [0, 2\pi)$ e $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ crescente tal que para todo $k \geq 0$, $\mathrm{Ind}_0\, \gamma_{[e^{i\theta} T^{n_k} x, bx]} = 0$.

Dado qualquer $n \geq 0$, definimos $\widetilde{\gamma_{n,\theta}} : [0,1] \to \operatorname{span}\{x, Tx, \ldots, T^n x\}$ por

$$\widetilde{\gamma_{n,\theta}}(s) = \begin{cases} \widetilde{\gamma_{[T^j x, T^{j+1}x]}}((n+3)s - j) & \text{se } \frac{j}{n+3} \leq s \leq \frac{j+1}{n+3},\ 0 \leq j \leq n-1 \\ \widetilde{\gamma_{\theta, T^n x}}((n+3)s - n) & \text{se } \frac{n}{n+3} \leq s \leq \frac{n+1}{n+3} \\ \widetilde{\gamma_{[e^{i\theta}T^n x, bx]}}((n+3)s - (n+1)) & \text{se } \frac{n+1}{n+3} \leq s \leq \frac{n+2}{n+3} \\ \widetilde{\gamma_{[bx,x]}}((n+3)s - (n+2)) & \text{se } \frac{n+2}{n+3} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Por construção, percebe-se facilmente que $\widetilde{\gamma_{n,\theta}}$ nunca assume o valor 0. Então podemos definir $\gamma_{n,\theta} = \Lambda \circ \widetilde{\gamma_{n,\theta}}$ para todo $n \geq 0$. Além disso, já que $\operatorname{span}\{\operatorname{Orb}(x,T)\}$ tem dimensão infinita podemos retrair, ficando em $\operatorname{span}\{\operatorname{Orb}(x,T)\} \setminus \{0\}$, a curva fechada $\widetilde{\gamma_{n,\theta}}$ para algum $T^m x \in \operatorname{span}\{\operatorname{Orb}(x,T)\} \setminus \operatorname{span}\{x, \ldots, T^n x\}$ para todo $n \geq 0$ e algum $m > n$, e assim construímos uma homotopia de curvas fechadas em $\mathbb{T}$ tal que $\gamma_{n,\theta}$ é homotópica ao caminho constante $\Lambda(T^m x)$. Assim, $\operatorname{Ind}_0 \gamma_{n,\theta} = 0$ para todo $n \geq 0$.

Por outro lado, com θ e $(n_k)_k$ como anteriormente e como consequência das observações feitas no início da demonstração, deduzimos que para todo $k \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Ind}_0 \gamma_{n_k,\theta} \\ &= \sum_{j=0}^{n_k-1} \operatorname{Ind}_0 \gamma_{[T^j x, T^{j+1}x]} + \operatorname{Ind}_0 \gamma_{\theta, T^{n_k}x} + \operatorname{Ind}_0 \gamma_{[e^{i\theta}T^{n_k}x, bx]} + \operatorname{Ind}_0 \gamma_{[bx,x]} \\ &= n_k \operatorname{Ind}_0 \gamma_{[x,Tx]} + 0 + 0 - 1, \end{aligned}$$

donde segue que $n_k \operatorname{Ind}_0 \gamma_{[x,Tx]} = 1$ para todo $k \geq 0$, que é impossível já que n_k tende a ∞ concluindo a prova do teorema. $\square$

5.3 Problemas em aberto

Tendo em vista a teoria desenvolvida neste último capítulo, apresentamos alguns problemas em aberto provenientes de [CEM16]. Iniciemos com uma definição: Dado $A \subset X$ definimos

$$\operatorname{Orb}(A,T) := \{T^n x;\ n \geq 0,\ x \in A\}.$$

Quando $\overline{\operatorname{Orb}}(A,T) = X$ para algum operador $T \in L(X)$ e $A \subset X$ dizemos que o operador T em X é A-hipercíclico.

Questão 1. *Existe alguma caracterização de subconjuntos A em algum espaço de Banach X tal que para todo $T \in L(X)$ (ou pelo menos para T em alguma classe específica), $\overline{\operatorname{Orb}}(A,T) = X$ se, e somente se, T é hipercíclico em X?*

Questão 2. *Dado um subespaço de dimensão finita F de X, podemos caracterizar os subconjuntos A de F para os quais $\overline{\operatorname{Orb}}(A,T) = X$ implica que T é hipercíclico?*

A próxima questão é uma mistura do Teorema de Bourdon-Feldman e o Teorema de Charpentier-Enst-Menet.

Questão 3. *Podemos caracterizar os conjuntos* $\Gamma \in \mathbb{C}$ *para os quais, para todo* T, *a densidade em algum lugar de* $\mathrm{Orb}(\Gamma x, T)$ *em* X *é equivalente a densidade da* $\mathrm{Orb}(\Gamma x, T)$ *em* X*?*

Referências

[Ans97] Ansari, S. I., Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces. J. Funct. Anal. 148 (1997), 384-390.

[Ans95] Ansari, S. I., Hypercyclic and cyclic vectors. J. Funct. Anal. 128 (1995), 374-383.

[AS54] Aronszajn, N. and Smith, K. T., Invariant subspaces of completely continuous operators. Annals of Math. 60 (1954), 345-350.

[BM07] Bayart, F. and Matheron, É., Hypercyclic operators failing the Hypercyclicity Criterion on classical Banach spaces. J. Funct. Anal. 250 (2007), 426-441.

[BM09] Bayart, F. and Matheron, É., Dynamics of Linear Operators. Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 2009.

[Bea86] Beauzamy, B., Un opérateur, sur l'espace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303 (1986), 923-925.

[Ber99] Bernal-González, L., On hypercyclic operators on Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 1003-1010.

[BR66] Bernstein, Allen R. and Robinson, Abraham, Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos. Pacific J. Math. 16 (1966), 421-431.

[Bir20] Birkhoff, G. D., Surface transformations and their dynamical applications. Acta Math. 43 (1920), 1-119.

[Bir29] Birkhoff, G. D., Demonstration d'un theoreme elementaire sur les fonctions entieres. C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473-475.

[BS88] Bourdon, P. S. and Shapiro, Joel H., Cyclic composition operators on H^2. Operator Theory: Operator Algebras and Applications, Part 2 (Proc. Summer Res. INst., Durham, NH, 1988), 43-53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[BF03] Bourdon, Paul S. and Feldman, Nathan S., Somewhere dense orbits are everiwhere dense. Indiana University Mathematics Journal, 2003.

[BPT15] Botelho, Geraldo, Pellegrino, Daniel e Teixeira, Eduardo, Fundamentos de Análise Funcional. Textos universitários SBM, 2015.

[CEM16] Charpentier, S.,Ernst, R. and Menet, Q., $\Gamma-$Supercyclicity. Journal of Functional Analysis 270 (2016), 4443-4465.

[Con73] Conway, John B., Functions of one complex variable. Springer-Verlarg, 1973.

[Cos00] Costakis, G., On a conjecture of D. Herrero concerning hypercyclic operators. C. R. Acad. Sci. Paris 330 (2000), 179-182.

[DR09] De La Rosa, M. and Read, C., A hypercyclic operator whose direct sum is not hypercyclic. J. Operator Theory 61 (2) (2009), 369-380.

[ENF87] Enflo, Per, On the invariant subspace problem for Banach spaces. Acta Math. 158 (1987), 213-313.

[Fel01] Feldman, Nathan S., Linear chaos? http://home.wlu.edu/ feldmann/research.html, 2001.

[GS91] Godefroy, G. and Shapiro, Joel H., Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. J. Funct. Anal. 98 (1991), 229-269.

[Gro99] Grosse-Erdmann, Karl-G., Universal families and hypercyclic vectors. Bull. Amer. Math. Soc., 36 (3) (1999), 345-381.

[GP11] Grosse-Erdmann, Karl-G. and Peris, A., Linear Chaos. Universitext series, Springer, 2011.

[Her91] Herrero, D. A., Limits of hypercyclic and supercyclic operators. J. Funct. Anal. 99 (1991) 179-190.

[Her92] Herrrero, D. A., Hypercyclic operators and chaos. J. Operator Theory 28 (1992), 93-103.

[Lim07] Lima, Elon Lages, Espaços métricos. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 2007.

[Kit82] Kitai, C., Invariant closed sets for linear operators. Tese de doutorado, University of Toronto, 1982.

[LM04] Léon-Saavedra, F. and Müller, V., Rotations of hypercyclic and supercyclic operators. Integral Equations Operator Theory 50 (3) (2004), 385-391.

[Mac52] MacLane, G. R., Sequences of derivatives and normal families. J. Anal. Math. 2 (1952), 72-78.

[Mil97] Miller V. G., Remarks on finitely hypercyclic and finitely supercyclic operators. Integr. Equ. Oper. Theory 29 (1997), 110-115.

[Per01] Peris, A., Multihypercyclic operators are hypercyclic. Math. Z. 236 (2001), 779-786.

[RH73] Radjavi, Heidar and Rosenthal, Peter, Invariant subspaces. Springer-Verlag, New York, 1973.

[Rea85] Read, Charles J., A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1. Bull. London Math. Soc. 17 (1985), 303-317.

[Rea86] Read, Charles J., A short proof concerning the invariant subspace problem. J. London Math. Soc. (2) 34 (1986), 335-348.

[Rol69] Rolewicz, S., On orbits of elements. Studia Math. 32 (1969), 17-22.

[Sha] Shapiro, Joel H., Notes on the dynamics of linear operators. Disponível em http://www.joelshapiro.org/Pubvit/lectures.html.

[Sha14] Shapiro, Joel H., The invariant subspace problem. Disponível em http://www.joelshapiro.org/Pubvit/lectures.html, 2014.

APÊNDICE A – Pré-Requisitos

Juntamos aqui vários resultados que servirão como ferramenta para várias das demonstrações feitas no texto.

A.1 Espaços métricos

Utilizamos como referência o livro do Elon L. Lima de espaços métricos [Lim07].

Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M. Na maioria das vezes, diremos simplesmente "o espaço métrico M", deixando subentendida qual métrica d está sendo usada.

Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Proposição A.1. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Diremos que um subconjunto X de um espaço métrico M é um G_δ em M quando X é interseção enumerável de subconjuntos abertos em M.

Um subconjunto X de um espaço métrico M, diz-se magro em M quando é uma reunião enumerável, $X = \cup X_n$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{int} \overline{X}_n = \emptyset$.

Teorema A.2 (Teorema de Baire)**.** *Seja M um espaço métrico completo. Todo conjunto magro em M tem interior vazio. Equivalentemente: se $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M e tem interior vazio, então $\operatorname{int} F = \emptyset$.*

Corolário A.3. *Seja M um espaço métrico completo. Se $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M, então existe pelo menos um n tal que $\operatorname{int} F_n \neq \emptyset$.*

Um espaço métrico M é separável quando contém um subconjunto enumerável e denso.

Proposição A.4. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

a) M é separável;

b) M possui uma base enumerável de abertos;

c) Toda cobertura aberta de M admite uma subcobertura enumerável.

Como consequência, todo espaço métrico compacto é separável pois cumpre a condição c).

A.2 Espaços de Banach

No estudo dos espaços de Banach e Hilbert nos baseamos no livro do Botelho, Pellegrino e Teixeira [BPT15] e também no apêndice de [BM09] e [GP11].

Um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é chamado espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma. Aprendemos em cursos introdutórios de análise que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ são espaços de Banach.

Exemplo A.5. *Por c_0 denotamos o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,*

$$c_0 = \{(a_k)_{k\geq 1}; a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \to 0\}.$$

É fácil mostrar que c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências (operações coordenada a coordenada). A expressão

$$\|(a_k)_{k\geq 1}\|_\infty = \sup\{|a_k| : \ k \in \mathbb{N}\}$$

define uma norma para o espaço c_0 tornando-o assim um espaço normado. Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de Cauchy em c_0. Digamos que $x_n = (a_k^n)_{k\geq 1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, a desigualdade

$$|a_n^j - a_m^j| \leq \sup\{|a_n^k - a_m^k|; \ k \in \mathbb{N}\} = \|x_n - x_m\|_\infty$$

deixa claro que a sequência $(a_n^j)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, logo convergente. Digamos $a_n^j \to a_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Chamando $x = (a_j)_{j\geq 1}$ não é difícil checar que $x \in c_0$ e que $x_n \to x$ em c_0. Concluímos então que c_0 é um espaço de Banach.

Chame agora de c_{00} o subespaço de c_0 formado pelas sequências quase-nulas, isto é,

$$c_{00} = \{(a_k)_{k\geq 1} \in c_0; \ \text{existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para todo } k \geq k_0\}.$$

Considere os seguintes vetores de c_{00}:

$$x_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \ x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots), \ldots, \ x_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots), \ldots.$$

É claro que $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em c_{00}. Tomando $x = (\frac{1}{k})_{k\geq 1} \in c_0$, de $\|x_n - x\|_\infty = \frac{1}{n+1} \to 0$, concluímos que $x_n \to x$ em c_0. Como $x \notin c_{00}$, resulta que c_{00} é um subespaço não-fechado de c_0. Portanto c_{00} é um espaço normado incompleto.

Exemplo A.6. *Para cada número real $p \geq 1$, definimos*

$$\ell^p = \left\{ (a_j)_{j\in\mathbb{N}};\ a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\}.$$

Esse espaço munido da norma

$$\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

se torna um espaço de Banach.

Sejam X e Y espaços de Banach. Uma aplicação linear contínua $T : X \to Y$ é dita um operador. O espaço de todos operadores é denotado por $L(X, Y)$. Quando $X = Y$ dizemos que T é um operador em X, com $L(X, X) = L(X)$.

O dual $X^* = L(X, \mathbb{K})$ de um espaço normado X é o conjunto de todos funcionais lineares contínuos em X.

A adjunta $T^* : X^* \to X^*$ de um operador T em X é definido por $T^*x^* = x^* \circ T$, isto é,

$$T^*x^*(x) = x^*(Tx), \quad x \in X,\ x^* \in X^*.$$

Teorema A.7 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** *Sejam X, Y espaços de Banach. Se $T : X \to Y$ é um operador sobrejetor, então T é uma aplicação aberta, isto é, para todo conjunto aberto $U \subset X$, $T(U)$ é aberto em Y.*

Como consequência, obtemos o seguinte.

Corolário A.8 (Teorema da Aplicação Inversa)**.** *Sejam X, Y espaços de Banach. Se $T : X \to Y$ é um operador bijetor, então T possui inversa linear contínua T^{-1}.*

Teorema A.9 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Sejam X, Y espaços de Banach. Se uma aplicação linear $T : X \to Y$ possui gráfico fechado, isto é, se $x_n \to x$ em X e $Tx_n \to y$ em Y implica que $Tx = y$, então T é contínua.*

Teorema A.10 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Seja X um espaço vetorial, M um subespaço de X, p uma seminorma em X e $u : M \to \mathbb{K}$ um funcional linear tal que $|u(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Então u possui uma extensão linear $\tilde{u}$ em X tal que $|\tilde{u}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Aplicaremos principalmente o Teorema de Hahn-Banach através de um dos seguintes corolários:

(i) *se p é uma seminorma em X e $x_0 \in X$ então existe um funcional linear u em X tal que $u(x_0) = p(x_0)$ e $|u(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$;*

se X é um espaço de Banach então

(*ii*) *todo funcional linear contínuo em um subespaço de X se estende a um funcional linear contínuo em X que preserva norma;*

(*iii*) *se M é um subespaço fechado de X e $x \notin M$ então existe um funcional linear contínuo x^* em X que se anula em M com $x^*(x) \neq 0$;*

(*iv*) *um subespaço M de X é denso em X se, e somente se, todo funcional linear contínuo que se anula em M também se anula em X;*

(*v*) *para todo $x \in X$, se $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in X^*$ então $x = 0$.*

A.3 Espaços de Hilbert

Um espaço H com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert.

Proposição A.11. *Um subespaço M de H é denso se, e somente se, o único vetor ortoganal a M for o zero.*

Teorema A.12 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Seja $y \in H$. Então*

$$x^*(x) = \langle x, y \rangle, \quad x \in H$$

define um funcional linear contínuo x^* em H com $\|x^*\| = \|y\|$. Reciprocamente, todo funcional linear contínuo em H pode ser representado dessa forma e o vetor y é unicamente determinado pelo funcional.

Seja T um operador em H. Como consequência do Teorema da representação de Riesz existe um único operador $T^* : H \to H$ tal que, para todos $x, y \in H$,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Chamamos T^* de adjunta de T.

A.4 Teoria espectral

Para o estudo da teoria espectral utilizamos o livro [BPT15] e o apêndice de [GP11]. Para a demonstração do Teorema da Decomposição de Riesz utilizamos também o livro [RH73].

Em dimensão finita, $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de um operador T se, e somente se, $\lambda I - T$ é não injetivo, ou equivalentemente, não invertível.

Definição A.13. *Seja T um operador em um espaço de Banach complexo X. O espectro $\sigma(T)$ de T é definido como*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - T \text{ é não invertível}\}.$$

O espectro pontual $\sigma_p(T)$ de T é o conjunto de autovalores de T.

Proposição A.14. *O espectro $\sigma(T)$ é um conjunto compacto não vazio contido no disco $\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq \|T\|\}$.*

O raio espectral de T é definido como $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

Proposição A.15 (Fórmula do raio espectral)**.** *Para o raio espectral temos*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Teorema A.16 (Teorema da Decomposição de Riesz)**.** *Seja $T \in L(X)$, assuma que o espectro de T pode ser decomposto como $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_N$, onde os conjuntos σ_i são fechados e dois a dois disjuntos. Então pode-se escrever $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_N$, onde cada X_i é um subespaço fechado invariante por T e $\sigma(T_{|X_i}) = \sigma_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$.*

Demonstração. Escolhamos conjuntos abertos Ω_i dois a dois disjuntos, tais que $\sigma_i \subset \Omega_i$ para cada i, e seja $\Omega := \cup_{i=1}^N \Omega_i$. Definimos uma função holomorfa $\chi_i \in H(\Omega)$ fazendo $\chi_i(z) = 1$ em Ω_i e $\chi_i(z) = 0$ caso contrário. Então os operadores $p_i := \chi_i(T)$ são projeções bem definidas (uma vez que $\chi_i^2 = \chi_i$), que satisfazem $p_i p_j = 0$ se $i \neq j$ (já que $\chi_i \chi_j = 0$ se $i \neq j$) e $\sum_i p_i = I$ (já que $\sum_i \chi_i = 1$). Assim obtemos $X = \bigoplus_i X_i$ onde $X_i = \mathrm{Im}(p_i)$. Além disso, cada subespaço X_i é $T-$invariante porque $p_i T = T p_i$ (que segue da identidade $\chi_i z = z \chi_i$). Definindo $T_i := T_{|X_i}$, mostraremos que $\sigma(T_i) = \sigma_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$. O ponto chave é o seguinte

Fato. *Seja $i \in \{1, \ldots, N\}$. Um número complexo λ não pertence a $\sigma(T_i)$ se, e somente se, pudermos encontrar um operador $R_i(\lambda) \in L(X)$ tal que $R_i(\lambda)(T - \lambda) = p_i = (T - \lambda) R_i(\lambda)$.*

Demonstração do Fato. Se $\lambda \notin \sigma(T_i)$ então pode-se definir $R_i(\lambda) := (T_i - \lambda)^{-1} p_i$, considerado como um operador de X em X: de fato, $(T - \lambda) R_i(\lambda) = (T_i - \lambda)(T_i - \lambda)^{-1} p_i = p_i$ e $R_i(\lambda)(T - \lambda) = (T_i - \lambda)^{-1} p_i (T_i - \lambda) = (T_i - \lambda)^{-1}(T_i - \lambda) p_i = p_i$. Reciprocramente, se pudermos encontrar tal operador $R_i(\lambda)$ então X_i é invariante por $R_i(\lambda)$, pois $R_i(\lambda) p_i = R_i(\lambda)(T - \lambda) R_i(\lambda) = p_i R_i(\lambda)$ nos da que $R_i(\lambda)$ comuta com p_i, segue disto que $p_i R_i(\lambda)(X_i) = R_i(\lambda) p_i(X_i) = R_i(\lambda)(X_i)$ que nos da $R_i(\lambda)(X_i) \subset X_i$ uma vez que p_i é uma projeção. Como $R_i(\lambda)_{|X_i}(T_i - \lambda)(X_i) = p_i(X_i) = (T_i - \lambda) R_i(\lambda)_{|X_i}(X_i)$ e $p_i(X_i) = X_i$ segue que $T_i - \lambda$ é invertível com inversa $R_i(\lambda)_{|X_i}$. □

Então vamos provar que $\sigma(T) = \cup_i \sigma(T_i)$. Primeiro suponha que $\lambda \notin \cup_i \sigma(T_i)$. Então, já que $\sum_i p_i = I$, segue do fato anterior que $T - \lambda$ é invertível com inversa $\sum_i R_i(\lambda)$. Isto mostra que $\sigma(T) \subset \cup_i \sigma(T_i)$.

Reciprocramente, se $\lambda \notin \sigma_i$ então pode-se encontrar alguma função holomorfa f tal que $(z-\lambda)f(z) = \chi_i(z)$ em uma vizinhança de $\sigma(T)$. Definindo $R := f(T)$, obtemos $(T-\lambda)R = p_i = R(T-\lambda)$, de modo à $\lambda \notin \sigma(T_i)$ pelo fato anterior. Assim, mostramos que $\sigma(T_i) \subset \sigma_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$. Uma vez que $\cup_i \sigma_i = \sigma(T) \subset \cup_i \sigma(T_i)$, isto conclui a demonstração. □

A.5 Operadores de Fredholm

Nessa seção nos baseamos nos apêndices dos livros [BM09] e [GP11].

Seja X um espaço de Banach. Um operador $T \in L(X)$ é dito um operador de Fredholm se $\mathrm{Ker}(T)$ possui dimensão finita e $\mathrm{Im}(T)$ é fechado com codimensão finita em X. Lembrando que a codimensão de um subespaço vetorial N de X é a dimensão do espaço quociente X/N. Equivalentemente, T é Fredholm se, e somente se, possui imagem fechada e $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Ker}(T^*)$ são de dimensão finita. O índice de Fredholm é definido por

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(T) &:= \dim \mathrm{Ker}(T) - \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}(T) \\ &= \dim \mathrm{Ker}(T) - \dim \mathrm{Ker}(T^*). \end{aligned}$$

Sejam X, Y espaços de Banach. Denotamos por $\mathrm{Fred}(X,Y)$ o conjunto de operadores de Fredholm de X em Y.

Teorema A.17. *Sejam X, Y espaços de Banach. Então $\mathrm{Fred}(X,Y)$ é aberto em $L(X,Y)$ e a função $T \mapsto \mathrm{ind}(T)$ é contínua em $\mathrm{Fred}(X,Y)$, portanto, constante em componentes conexas.*

Um operador T definido em um espaço de Banach X é dito Fredholm à esquerda se T possui imagem fechada e $\mathrm{Ker}(T)$ é de dimensão finita.

Proposição A.18. *Seja X um espaço de Banach, e seja $T \in L(X)$. Assuma que T não é Fredholm à esquerda. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um subespaço fechado de dimensão infinita $E_\varepsilon \subset X$ e um operador compacto $K_\varepsilon \subset L(X)$ tal que $\|K_\varepsilon\| < \varepsilon$ e $T \equiv K_\varepsilon$ em E_ε.*

Corolário A.19. *Sejam H um espaço de Hilbert, seja $T \in L(H)$ e seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Assuma que $T - \lambda$ não é Fredholm à esquerda. Então, para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um operador $T_0 \in L(H)$ tal que $\|T - T_0\| < \varepsilon$, E é invariante por T_0 e $(T_0)_{|E} = \lambda I_E$.*

Proposição A.20. *Seja X um espaço de Banach complexo de dimensão infinita. Dado qualquer operador $T \in L(X)$, podemos encontrar um número complexo $\lambda \in \partial\sigma(T)$ tal que $T - \lambda$ não é Fredholm à esquerda.*

A.6 Análise complexa

Para esta seção utilizamos o livro [Con73] bem como o apêndice de [GP11].

Teorema A.21. *Seja G um conjunto aberto e conexo e seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $f \equiv 0$;

(b) *existe um ponto a em G tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \geq 0$;*

(c) $\{z \in G;\ f(z) = 0\}$ *possui um ponto de acumulação em G.*

Denotamos por $\widehat{\mathbb{C}}$ o plano complexo estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Teorema A.22 (Teorema de Runge)**.** *Seja $K \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto e A um conjunto que contém ao menos um ponto de cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$.*

Seja f uma função que é holomorfa em uma vizinhança de K, e seja $\varepsilon > 0$. Então existe uma função racional h com polos somente em pontos de A tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z) - h(z)| < \varepsilon.$$

APÊNDICE B – Dinâmica Linear é complicada

O seguinte teorema demonstrado por Nathan S. Feldman [Fel01] nos diz que existe um operador linear definido em um espaço de Hilbert separável que se comporta como um sistema dinâmico não linear definido em um espaço métrico compacto. Em particular, podemos afirmar que a dinâmica de um operador linear pode ser tão complicada quanto um sistema dinâmico não linear.

Teorema B.1. *Existe um operador hipercíclico T agindo em um espaço de Hilbert separável H que possui a seguinte propriedade. Para todo espaço métrico compacto K e toda função contínua $f : K \to K$, existe um conjunto compacto $L \subset H$ T-invariante tal que f e $T_{|L}$ são topologicamente conjugados.*

Demonstração. Observemos primeiro que todo espaço métrico compacto K é homeomorfo a algum subconjunto compacto de $\ell^2(\mathbb{N})$. De fato, definamos $h : K \to \ell^2(\mathbb{N})$ por $h(x) = (2^{-n}d(x, x_n))_n$, onde d é uma métrica compatível em K e $(x_n)_n$ é uma sequência densa em K (espaços métricos compactos são separáveis Ver A.4). A aplicação h está bem definida, pois a métrica d é limitada, caso contrário poderíamos trocar por uma métrica equivalente $d'(x, y) = \min(1, d(x, y))$, e h é $1-1$ sobre sua imagem. De fato, $h(x) = h(y)$ implica que

$$2^{-n}d(x, x_n) = 2^{-n}d(y, x_n) \Rightarrow d(x, x_n) = d(y, x_n) \quad \forall n \geq 0.$$

Como $(x_n)_n$ é denso, tomamos uma subsequência $(x_{n_k})_k$ que converge a x. Dessa forma obtemos que

$$\begin{aligned} d(x, x_{n_k}) = d(y, x_{n_k}) \Rightarrow \lim d(x, x_{n_k}) &= \lim d(y, x_{n_k}) \\ d(x, x) &= d(y, x) \\ 0 &= d(y, x), \end{aligned}$$

e consequentemente $y = x$. A aplicação h também é contínua, sendo o limite uniforme de aplicações contínuas $h_n(x) := (d(x, x_0), 2^{-1}d(x, x_1), \ldots, 2^{-n}d(x, x_n), 0, 0, \ldots)$. Como K é compacto, h é um homeomorfismo sobre sua imagem. Assim, podemos e vamos assumir que K é um subconjunto compacto de $\ell^2(\mathbb{N})$.

O espaço de Hilbert H é definido como a soma direta contável de espaços de dimensão infinita ℓ^2, isto é, $H = \ell^2(\mathbb{N}, \ell^2)$. Explicitamente,

$$H = \{x = (x_0, x_1, \ldots);\ x_i \in \ell^2(\mathbb{N}) \text{ e } \|x^2\| := \sum_{i \geq 0} \|x_i\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})} < \infty\}.$$

Seja $T = 2B$ em H, isto é, $T(x_0, x_1, \ldots) = (2x_1, 2x_2, \ldots)$. Podemos provar que T é hipercíclico procedendo igual o Exemplo 1.31. Agora definamos $\phi : K \to H$ por $\phi(x) = (x, \frac{f(x)}{2}, \frac{f^2(x)}{4}, \ldots)$. Já que K é limitado, a aplicação ϕ é de fato bem definida, uma vez que $\mathrm{Orb}(x, f) \subset K$ implica que a órbita é limitada. Seque então que $\|\phi(x)\| < \infty$ e ϕ é $1-1$ sobre sua imagem. Além disso, por K ser limitado, ϕ é o limite uniforme de aplicações contínuas ϕ_n definidas por $\phi_n(x) = (x, \frac{f(x)}{2}, \ldots, \frac{f^n(x)}{2^n}, 0, 0, \ldots)$. Portanto ϕ é contínua.

Como K é compacto, ϕ é um homeomorfismo de K em $L := \phi(K)$. Além disso, $\phi \circ f = T \circ \phi$ pela definição de ϕ e T. Isto implica que L é T-invariante e que f é topologicamente conjugado a $T_{|L}$. $\square$