

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

PROJETO DE ESTRUTURAS INTELIGENTES PARA CONTROLE DE
VIBRAÇÕES UTILIZANDO O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

por

Juliano Fagundes Gonçalves

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Fevereiro de 2019

PROJETO DE ESTRUTURAS INTELIGENTES PARA CONTROLE DE
VIBRAÇÕES UTILIZANDO O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

por

Juliano Fagundes Gonçalves
Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Processos de Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Andre Perondi
Co-Orientador: Prof. Dr. Daniel Milbrath De Leon

Aprovada por:

Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva PPGEM/USP

Prof. Dr. Alexandre Molter PPGMMAT/UFPEL

Prof. Dr. Valner João Brusamarello PPGEE/UFRGS

Prof. Dr. Rogério José Marczak PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 27 de Fevereiro de 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço, inicialmente, aos professores Eduardo André Perondi e Daniel Milbrath De Leon pela orientação e pelo apoio em todas as etapas da realização deste trabalho.

A todos os professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), e também aos colegas que acompanharam e colaboraram com esse projeto ao longo destes quatro anos.

Ao Grupo de Mecânica dos Sólidos da Universidade Técnica da Dinamarca (DTU), em especial ao Professor Ilmar Ferreira Santos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro para a elaboração desta Tese.

RESUMO

Este trabalho aborda o projeto de atuadores piezoelétricos, por meio do método de otimização topológica, para aplicação em problemas de controle ativo de vibrações. Os modelos materiais isotrópico sólido com penalização (SIMP) e piezoelétrico com penalização e polarização (PEMAP-P) são empregados para interpolar as propriedades envolvidas nesse problema. A influência do perfil de polarização no desempenho do sistema de controle e os efeitos da dinâmica não modelada que resulta no problema de *spillover* associado ao controle por realimentação são analisados sob o ponto de vista da formulação do problema de otimização. Para isso, um modelo de elementos finitos para piezoeletricidade é adotado assumindo um material com três fases, sendo duas referentes aos atuadores com direções de polarização opostas, e este modelo estrutural é escrito na representação por espaço de estado. A formulação de otimização proposta visa à determinação da distribuição de material piezoelétrico que maximiza a capacidade de controle para um determinado modo de vibração por meio da maximização da sua controlabilidade. Os efeitos indesejáveis do controle por realimentação nos modos residuais são limitados pela inclusão de um termo de restrição de *spillover* que contém os autovalores residuais do Gramiano de controlabilidade. A otimização topológica dos atuadores piezoelétricos é realizada por meio de um algoritmo de Programação Linear Sequencial (SLP). Exemplos numéricos são apresentados considerando o controle dos modos de vibração de flexão para uma viga em balanço e bi-engastada, nos quais um controlador Linear-Quadrático (LQR) é projetado para cada caso de estrutura controlada a fim de avaliar a influência do perfil de polarização e da restrição adicional imposta para limitar a excitação dos modos residuais no desempenho do sistema de controle.

Palavras-chave: Método de otimização topológica; Controle ativo de vibrações; Atuadores piezoelétricos; Instabilidade de *spillover*

ABSTRACT

This work deals with the design of piezoelectric actuators, using the topology optimization method, for application in Active Vibration Control (AVC) problems. Both Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) and Piezoelectric Material with Penalization and Polarization (PEMAP-P) models are used to interpolate the properties involved in this problem. The influence of the polarization profile on the control performance and the effects of the unmodeled dynamics that result in the *spillover* problem associated with the feedback control are analyzed from the point of view of the formulation of the optimization problem. For this, a finite element model for piezoelectricity is adopted assuming a material with three phases, two related to the actuators with opposite polarization directions, and this structural model is written into the state-space representation. The proposed optimization formulation aims to determine the distribution of piezoelectric material that maximizes the control performance for a given vibration mode by maximizing its controllability. The undesirable effects of feedback control on the residual modes are limited by the inclusion of a spillover constraint term which contains the residual eigenvalues of the controllability Gramian. The topology optimization of the piezoelectric actuators is carried out by means of a Sequential Linear Programming (SLP) algorithm. Numerical examples are presented considering the control of bending vibration modes for a cantilever and a fixed beam, in which a Linear-Quadratic Regulator (LQR) is designed for each case of controlled structure, in order to analyze the influence of the polarization profile and the additional constraint, which is imposed to limit the excitation of the residual modes, on the control system performance.

Keywords: Topology optimization method; Active vibration control; Piezoelectric actuators; Spillover instability.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Descrição do Problema	2
1.2	Método de Otimização Topológica Aplicado ao Projeto de Estruturas Piezoelétricas	3
1.3	Atenuação dos Efeitos do Controle por Realimentação nos Modos Residuais	6
1.4	Objetivos	9
1.5	Contribuições Científicas	10
1.6	Organização da Tese	10
2	MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	12
2.1	Modelo Material	13
2.2	Instabilidades Numéricas	16
2.3	Método de Solução para o Problema de Otimização	19
3	PROJETO DE ATUADORES PIEZOELÉTRICOS ATRAVÉS DA MAXIMIZAÇÃO DA CONTROLABILIDADE	22
3.1	Definição do Problema	22
3.2	Estratégia de Controle	25
3.3	Índices de Controlabilidade	26
3.3.1	Definição de Controlabilidade	26
3.3.2	Problema de Mínima Energia de Controle	29
3.4	Formulação do Problema de Otimização	32
3.5	Análise de Sensibilidade	34
3.6	Projetos Otimizados de Atuadores Piezoelétricos	36
4	OTIMIZAÇÃO SIMULTÂNEA DA TOPOLOGIA E DO PERFIL DE POLARIZAÇÃO DO ATUADOR PIEZOELÉTRICO	43
4.1	Definição do problema	43

4.2	Formulação do Problema de Otimização Simultânea	45
4.3	Análise de Sensibilidade	47
4.4	Resultados numéricos	47
4.4.1	Projetos de Atuadores com Topologia e Polarização Otimizados	49
4.4.2	Desempenho do sistema de controle	55
5	FORMULAÇÃO COM LIMITE PARA A CONTROLABILIDADE DOS MODOS RESIDUAIS	60
5.1	Mecanismo de <i>spillover</i> em um sistema de controle	60
5.2	Projeto de estruturas controladas considerando um limite para a excitação dos modos residuais	61
5.3	Análise de sensibilidade	63
5.4	Resultados	64
5.4.1	Influência do expoente p na controlabilidade	64
5.4.2	Influência do limite C_λ na controlabilidade	65
5.4.3	Desempenho do Sistema de Controle	68
5.4.4	Otimização simultânea da topologia e polarização do atuador com limite de <i>Spillover</i>	71
6	CONCLUSÕES	73
6.1	Comentários Sobre a Otimização do Perfil de Polarização do Atuador Piezoelétrico	73
6.2	Comentários Sobre a Atenuação dos Efeitos de <i>Spillover</i> no Sistema de Controle	74
6.3	Trabalhos Futuros	75
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76
	APÊNDICE A Materiais Piezoelétricos e Piezeletricidade Linear	86
	APÊNDICE B Método dos Elementos Finitos com Acoplamento Piezoelétrico	93
	APÊNDICE C Sensibilidade do Modelo de Elementos Finitos e do Problema Modal	98

APÊNDICE D	Resposta do Sistema Representado no Espaço de Estados	100
------------	---	-----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Representação de uma estrutura com atuadores piezoelétricos de diferentes polarizações.	3
Figura 2.1	Exemplo das três abordagens de otimização estrutural: (a) paramétrica, (b) de forma e (c) topológica.	12
Figura 2.2	Domínio desconhecido Ω_d contido no domínio fixo estendido Ω . . .	13
Figura 2.3	Exemplos de instabilidades numéricas em um problema de mínima flexibilidade: (a) problema inicial, (b) solução com 1600 elementos e (c) solução com 6400 elementos.	17
Figura 2.4	Área de filtragem para diferentes valores de raio r_{min}	18
Figura 2.5	Soluções para o problema de mínima flexibilidade com: (a) $r_{min} = 1$ elemento e (b) $r_{min} = 2$ elementos	19
Figura 3.1	Representação de uma estrutura genérica com atuador piezoelétrico embutido.	22
Figura 3.2	Comportamento do atuador piezoelétrico na direção da espessura quando submetido a um campo elétrico externo.	23
Figura 3.3	Diagrama de blocos para o sistema representado no espaço de estados.	26
Figura 3.4	Conjunto de estados controláveis e alcançáveis.	27
Figura 3.5	Estrutura analisada: (a) dimensões e (b) malha.	36
Figura 3.6	Representação dos exemplos analisados: (a) Exemplo A e (b) Exemplo B.	36
Figura 3.7	Modos de vibração considerados no processo de otimização.	38
Figura 3.8	Fluxograma para o processo de otimização da topologia do atuador piezoelétrico.	39
Figura 3.9	Convergência da função objetivo para a maximização da controlabilidade do: (a) Exemplo A e (b) Exemplo B.	40
Figura 3.10	Solução do problema de otimização topológica para a maximização da controlabilidade do: (a) Exemplo A e (b) Exemplo B.	41

Figura 4.1	Representação de uma estrutura genérica com atuadores piezoelétricos de diferentes polarizações.	44
Figura 4.2	Comportamento dos atuadores piezoelétricos na direção da espessura quando submetido a um campo elétrico externo.	44
Figura 4.3	Comportamento dos atuadores piezoelétricos na direção da espessura quando submetido a um campo elétrico externo.	46
Figura 4.4	Representação dos exemplos analisados: (a) Exemplo A e (b) Exemplo B.	48
Figura 4.5	Fluxograma para o processo de otimização simultânea da topologia e polarização do atuador piezoelétrico.	49
Figura 4.6	Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do primeiro modo para o Exemplo A com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.	51
Figura 4.7	Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do segundo modo para o Exemplo A com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.	51
Figura 4.8	Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do terceiro modo para o Exemplo A com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.	52
Figura 4.9	Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do quarto modo para o Exemplo A com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.	52
Figura 4.10	Curvas de convergência das funções objetivo para o Exemplo A. . .	53
Figura 4.11	Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do primeiro modo para o Exemplo B com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.	54
Figura 4.12	Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do segundo modo para o Exemplo B com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.	54
Figura 4.13	Curvas de convergência das funções objetivo para o Exemplo B. . .	55
Figura 4.14	Localização das forças de excitação externas para: (a) Exemplo A e (b) Exemplo B.	56

Figura 4.15	Influência do ganho q no controle do primeiro modo para o Exemplo A: (a) sinal de controle e (b) deslocamento máximo. . . .	56
Figura 4.16	Respostas em termos de deslocamento para o Exemplo A utilizando atuadores projetados com: (a) φ uniforme e (b) φ otimizado.	57
Figura 4.17	Sinais de controle para o Exemplo A utilizando atuadores projetados com: (a) φ uniforme e (b) φ otimizado.	58
Figura 4.18	Influência do ganho q no controle do quarto modo para o Exemplo A: (a) sinal de controle e (b) deslocamento máximo. . . .	58
Figura 4.19	Influência do ganho q no controle do primeiro modo para o Exemplo B: (a) sinal de controle e (b) deslocamento máximo. . . .	59
Figura 5.1	Influência dos modos residuais em um sistema de controle por realimentação [Adaptado de Levine, 1999].	61
Figura 5.2	Solução do problema de otimização considerando a maximização da controlabilidade do primeiro modo para o Exemplo A.	64
Figura 5.3	Maximização da controlabilidade do primeiro modo para o Exemplo A: (a) curva de convergência e (b) função de restrição g_2 .	65
Figura 5.4	Solução da maximização da controlabilidade com restrição de <i>spillover</i> : (a) distribuição das variáveis de projeto e (b) topologia interpretada.	66
Figura 5.5	Maximização de $\tilde{\lambda}_1$ para o Exemplo A com restrição de <i>spillover</i> ativa: (a) curva de convergência e (b) função de restrição g_2	67
Figura 5.6	Influência do ganho q no controle do primeiro modo para o Exemplo B: (a) sinal de controle e (b) deslocamento máximo. . . .	68
Figura 5.7	Resposta em frequência do sistema utilizando o atuador projetado pela maximização de $\tilde{\lambda}_1$ com $C_\lambda = 100$	69
Figura 5.8	Respostas em frequência para: (a) primeiro, (b) terceiro e (c) quarto modos de vibração.	70
Figura 5.9	Soluções para topologia e polarização do atuador obtidas pela maximização de $\tilde{\lambda}_1$ com $C_\lambda = 0, 1$	71

Figura 5.10	Maximização de $\tilde{\lambda}_1$ com $C_\lambda = 0,1$ através da abordagem simultânea: (a) curva de convergência e (b) função de restrição g_2	72
Figura A.1	Estrutura cristalina de uma cerâmica piezolétrica antes e depois da polarização.	86
Figura A.2	Processo de polarização: (a) antes de polarização, (b) durante aplicação de um campo elétrico, (c) após a remoção do campo elétrico.	87
Figura A.3	Reações de uma cerâmica piezolétrica polarizada quando submetida a solicitações mecânicas e potenciais elétricos.	88
Figura B.1	Elemento hexaédrico de 8 nós e seu sistema de coordenadas.	95
Figura D.1	Aproximação do sinal de entrada por meio do método integral.	102

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Parâmetros utilizados na solução dos problemas numéricos.	40
Tabela 4.1	Parâmetros utilizados na solução dos problemas numéricos.	50
Tabela 4.2	Índices de controlabilidade para o Exemplo A.	53

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CGVF	<i>Classical Constant Gain Velocity Feedback</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MFC	<i>Macro Fiber Composite</i>
PBH	Popov-Belevitch-Hautus
PEMAP	<i>Piezoelectric Material with Penalization</i>
PEMAP-P	<i>Piezoelectric Material with Penalization and Polarization</i>
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
SLP	<i>Sequential Linear Programming</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

\mathbf{A}	Matriz do sistema, Matriz contendo coeficientes do problema LP
\mathbf{A}_d	Matriz do sistema discretizado
\mathbf{b}	Vetor contendo coeficientes da função restrição no problema LP
\mathbf{B}	Matriz de entradas genérica
\mathbf{B}_d	Matriz de entradas do sistema discretizado
\mathbf{B}_1	Matriz de entradas de forças mecânicas
\mathbf{B}_2	Matriz de entradas de potenciais elétricos
\mathbf{B}_u	Relação deslocamento-deformação
\mathbf{B}_ϕ	Relação potencial elétrico-campo elétrico
C_V	Limite para o volume do material piezoelétrico
C_λ	Limite para a norma dos índices de controlabilidade residuais
\mathbf{c}	Vetor contendo coeficientes da função objetivo no problema LP
\mathbf{C}	Matriz de saídas
\mathbf{C}_d	Matriz de saídas do sistema discretizado
\mathbf{C}_{uu}	Matriz de amortecimento
$c_{ij}, [\mathbf{c}]$	Constantes elásticas
\mathbb{C}	Tensor constitutivo elástico
\mathbb{C}_0	Tensor constitutivo elástico do material de referência
\mathbb{C}_a	Tensor constitutivo elástico do material piezoelétrico
\mathbb{C}_b	Tensor constitutivo elástico do material base
D_i, \mathbf{D}	Deslocamento elétrico
$d_{ij}, [\mathbf{d}]$	Constantes piezoelétricas
E_i, \mathbf{E}	Campo elétrico
e_i	Variáveis de estado genéricas
$e_{ij}, [\mathbf{e}]$	Constantes dielétricas
f	Função objetivo
F_0	Amplitude da força externa senoidal
\mathcal{F}	Energia de controle
\mathcal{F}_{\min}	Energia mínima de controle

\mathbf{f}	Vetor de forças externas
\mathbf{f}_c	Vetor de forças externas de corpo
\mathbf{f}_m	Vetor de forças modais
\mathbf{f}_p	Vetor de forças externas pontuais
\mathbf{f}_s	Vetor de forças externas de superfície
\mathbf{G}	Matriz de ganhos de realimentação
g_j	Restrições de desigualdade
h_j	Restrições de igualdade
$H(s)$	Função de transferência
H_j	Operador do filtro de sensibilidade
\mathcal{H}	Densidade de entalpia elétrica
\mathbf{I}	Matriz identidade
j	Unidade imaginária
J	Funcional de custo quadrático do controlador LQR
k	Iteração
\mathbf{K}_{uu}	Matriz de rigidez
$\mathbf{K}_{u\phi}$	Matriz de acoplamento piezoelétrico
$\mathbf{K}_{\phi\phi}$	Matriz de capacitância dielétrica
\mathcal{K}	Densidade de energia cinética
\mathbf{L}_o	Vetor para localização do grau de liberdade de saída
\mathcal{L}	Lagrangiano m
m_c	Número de modos considerados no sistema de controle
m_r	Número de modos residuais
\mathcal{M}_a	Indicador de material dos atuadores piezoelétricos
\mathcal{M}_b	Indicador de material da estrutura base
\mathbf{M}_{uu}	Matriz de massa
N	Número de elementos finitos da malha, Número de variáveis de projeto
N_S	Número de estados considerados no sistema
N_I	Número de entradas consideradas no sistema
N_O	Número de saídas consideradas no sistema
$\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_\phi$	Matrizes contendo as funções de interpolação
\mathbf{P}	Solução da equação algébrica de Riccati

\mathbf{P}_d	Vetor de polarização
p	Expoente da norma- p
p_0	Expoente de penalização para o modelo SIMP
p_1, p_2	Expoentes de penalização para o modelo PEMAP-P
P^+	Polarização positiva
P^-	Polarização negativa
q	Ganho escalar do controlador LQR
q_p	Cargas elétricas pontuais
q_s	Cargas elétricas de superfície
\mathbf{Q}	Matriz de pesos para o controlador LQR
R	Número de restrições do problema LP
\mathbf{R}	Matriz de pesos para o controlador LQR
\mathbb{R}^s	Espaço de estados
\mathbb{R}^c	Espaço de atuação
R_g	Número de restrições de desigualdade
R_h	Número de restrições de igualdade
r_{\min}	Raio de filtragem
S_ρ	Início do laço para otimização simultânea
S_i	Valores singulares do Gramiano de controlabilidade
t	Variável temporal
T	Intervalo de tempo
t_0	Instante de tempo inicial
t_1	Instante de tempo final
t_ρ	Tolerância para as variáveis de projeto
t_φ	Tolerância para as variáveis de projeto de polarização
t_f	Tolerância para a variação da função objetivo
$\mathcal{T}(\cdot)$	Matriz de transição de estados
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos nodais
u_o	Saída em termos de deslocamento
u_{\max}	Amplitude máxima do deslocamento de saída
\mathcal{U}	Densidade de energia armazenada
V	Volume

V	Entrada genérica no domínio s
V_i	Volume do i -ésimo elemento finito
v_i	i -ésima variável de projeto genérica
V_{\max}	Limite máximo para o volume
\mathbf{V}_i	i -ésimo autovetor do Gramiano de controlabilidade
\mathbf{v}	Vetor de entradas genérico
w_{ij}	Componentes do Gramiano de controlabilidade
\mathbf{W}^+	Gramiano de alcançabilidade
\mathbf{W}^-, \mathbf{W}	Gramiano de controlabilidade
\mathcal{W}	Trabalho virtual das forças externas
\mathbf{x}	Vetor de estados
\mathbf{X}	Vetor de estados no domínio s
\mathbf{x}_0	Vetor de estados inicial
\mathbf{x}_1	Vetor de estados final
\mathbf{y}	Vetor de saídas
Y	Saída genérica no domínio s

Símbolos Gregos

γ	Densidade
Γ	Contorno do domínio
Γ_u	Parcela do contorno com deslocamento prescrito
Γ_ϕ	Parcela do contorno com potencial elétrico prescrito
ε_{ij}	Campo de deformações
ε	Vetor de deformações
ζ_i	Razão de amortecimento do i -ésimo modo de vibração
$\boldsymbol{\eta}$	Vetor de deslocamentos modais
$\boldsymbol{\lambda}$	Matriz de autovalores do Gramiano de controlabilidade
$\boldsymbol{\lambda}_d$	Matriz de autovalores referente à controlabilidade dos deslocamentos modais
$\boldsymbol{\lambda}_v$	Matriz de autovalores referente à controlabilidade das velocidades modais
$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_c$	Vetor de índices de controlabilidade dos modos controlados
$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_r$	Vetor de índices de controlabilidade dos modos residuais
λ_i	i -ésimo autovalor do Gramiano de controlabilidade

$\tilde{\lambda}_i$	i -ésimo índice de controlabilidade
$\tilde{\lambda}_{\text{res}}$	Somatório dos autovalores residuais
$\mathbf{\Lambda}$	Matriz de amortecimento modal
μ_p	Função para lei de potência
ρ	Função espacial de projeto
ρ_i	i -ésima variável de projeto
ρ_i^l	Limite inferior para a i -ésima variável de projeto
ρ_i^u	Limite superior para a i -ésima variável de projeto
ρ_{0i}	i -ésima variável de projeto atual
ρ_{min}	Limite inferior para as variáveis de projeto
$\boldsymbol{\rho}$	Vetor contendo as variáveis de projeto
$\boldsymbol{\rho}_0$	Vetor de variáveis de projeto atual
σ_{ij}	Tensões mecânicas
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor de tensões mecânicas
$\tau, \tilde{\tau}$	Variáveis auxiliares de integração
$\boldsymbol{\phi}$	Vetor de potenciais elétricos nodais
ϕ_c	Potencial elétrico de controle
ϕ_{max}	Amplitude máxima do potencial elétrico de controle
φ	Função espacial de projeto referente a polarização
φ_i	i -ésima variável de projeto de polarização
χ^+	Espaços alcançável
χ^-	Espaços controlável
$\boldsymbol{\psi}_i$	i -ésimo autovetor do problema modal
$\boldsymbol{\Psi}$	Matriz modal
ω_i	i -ésima frequência natural
ω_0	Frequência da força externa senoidal
Ω	Domínio fixo estendido
$\boldsymbol{\Omega}$	Matriz diagonal de frequências naturais
Ω_a	Parcela do domínio ocupada por material dos atuadores
Ω_b	Parcela do domínio ocupada por material base
Ω_d	Parcela do domínio ocupada por material
Ω_n	Parcela do domínio ocupada por atuadores com polarização negativa

- Ω_p Parcela do domínio ocupada por atuadores com polarização positiva
- Ω_v Parcela do domínio ocupada por vazios

1 INTRODUÇÃO

Importantes avanços foram alcançados nas últimas décadas na área de projeto de estruturas inteligentes devido ao desenvolvimento de novos materiais e de tecnologias que possibilitam a manufatura a partir de projetos otimizados e mais complexos. A denominação inteligente se refere à capacidade de transformar um tipo de energia em outro, de forma controlada e mensurável, visando à execução uma determinada funcionalidade. Nessa área, destacam-se problemas como controle de forma [Irschik, 2002], atenuação de vibrações [Song et al., 2006] e ruído [Kim e Ko, 1998], monitoramento de integridade estrutural [Zou et al., 2000], coleta de energia [Priya, 2007], entre outros.

Materiais inteligentes como, por exemplo, ligas com efeito memória de forma [Jani et al., 2014], fluidos eletro-reológicos [Stanway et al., 1996], fluidos magneto-reológicos [Muhammad et al., 2006], e cerâmicas piezoelétricos [Gupta et al., 2010], são capazes de alterar suas propriedades de forma controlada devido ao acoplamento entre diferentes meios físicos e, conseqüentemente, caracterizam-se como materiais apropriados para aplicações que envolvem controle ativo. Dentre esses, destacam-se os materiais piezoelétricos, os quais são usualmente empregados como atuadores e/ou sensores em problemas de controle de vibrações devido principalmente à rápida resposta, fácil implementação e possibilidade de ser colado ou embutido em diversos tipos de estruturas [Bruant et al., 2001; Sohn et al., 2011].

A piezeletricidade é a capacidade que certos materiais têm de converter energia mecânica em energia elétrica (efeito direto) ou energia elétrica em mecânica (efeito inverso). O efeito piezelétrico direto consiste na geração interna de carga elétrica resultante de uma tensão mecânica aplicada. Esse efeito foi descoberto por Pierre e Jacques Curie [1880 *apud* Moheimani e Fleming, 2006]¹. Examinando alguns tipos de cristais, foi observado que os efeitos elétricos (direção e sinal da carga gerada) devido à compressão e tração eram semelhantes aos decorrentes de resfriamento e aquecimento, respectivamente. Uma revisão mais detalhada do início da história de cristais piezelétricos pode ser encontrada em Katzir, 2006. Como consequência desses estudos iniciais, percebeu-se que os materiais com essa capacidade poderiam também apresentar o efeito inverso: uma deformação geométrica resultante de um potencial elétrico aplicado, que é o princípio de funcionamento

¹J. Curie e P. Curie, "Sur les phénomènes électriques de la tourmaline des cristaux hémihédres à faces inclinées", OPC, pp. 18–21, 1880.

dos atuadores piezoelétricos.

No presente trabalho, aborda-se o projeto de atuadores piezoelétricos a partir do ponto de vista da formulação do problema de otimização topológica e sua influência no desempenho dos atuadores quando empregados em um sistema de controle por realimentação de estados. Aspectos como desempenho do sistema de controle e interação com os modos residuais da estrutura são incluídos na etapa de projeto, por meio de uma formulação baseada na maximização de um índice de controlabilidade modal.

1.1 Descrição do Problema

Atuadores piezoelétricos têm sido amplamente empregados em sistemas de controle ativo de vibrações nas áreas aeroespacial, automobilística e robótica. Entretanto, a aplicação desse tipo de transdutor não é restrita a essas áreas, sendo comum encontrar estudos sobre o projeto de atuadores piezoelétricos para as mais distintas funcionalidades como, por exemplo, escaneamento ótico [Filhol et al., 2005], atuação em micro bombas para aplicações médicas [Cui et al., 2008], estímulo mecânico para aceleração de formação óssea [Frias et al., 2010], entre outros.

Neste trabalho, estuda-se o problema de atuação modal no plano da estrutura, no qual o modo de atuação extensional do material piezoelétrico é responsável pelo amortecimento ativo que é induzido na estrutura, de acordo com uma lei de realimentação de estados. Para isso, assume-se que os atuadores piezoelétricos são embutidos em uma estrutura base, como representado na Figura 1.1, cujas superfícies superior e inferior são cobertas por uma fina camada de eletrodos. A diferença de potencial elétrico prescrita no par de eletrodos será responsável pela geração de campos de deformação nos atuadores, induzidos pelo efeito piezoelétrico.

De acordo com a combinação da direção do campo elétrico induzido no material piezoelétrico e da sua direção de polarização, campos de deformação de tração e compressão podem ser gerados na estrutura base. Assim, pode-se considerar o projeto de atuadores com diferentes direções de polarização, como representado na Figura 1.1 onde Atuador P^+ e P^- se referem à direção de polarização positiva e negativa, respectivamente. Espera-se que com a possibilidade de gerar campos de deformação trativos e compressivos em diferentes regiões da estrutura, por meio da aplicação do mesmo sinal de controle, resulte em um sistema de controle com melhor desempenho.

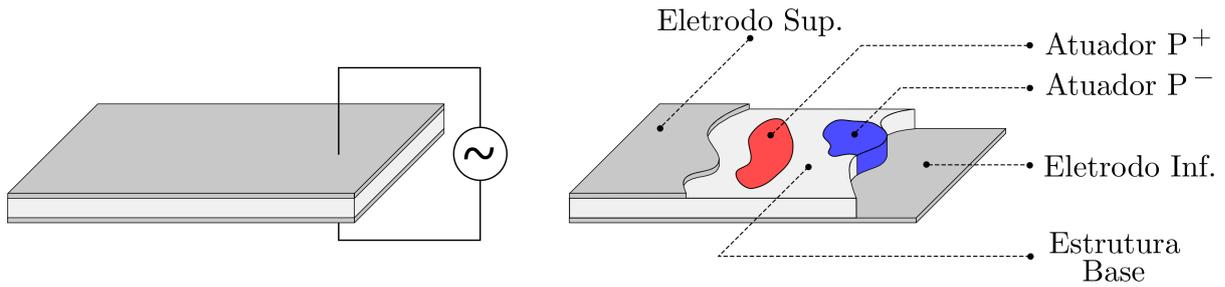


Figura 1.1 – Representação de uma estrutura com atuadores piezoelétricos de diferentes polarizações.

1.2 Método de Otimização Topológica Aplicado ao Projeto de Estruturas Piezoelétricas

A otimização estrutural de sistemas controlados tem sido objeto de pesquisa há algumas décadas [Onoda e Haftka, 1987], sendo que a otimização simultânea da estrutura e do sistema de controle tem recebido maior interesse devido ao desenvolvimento de novos materiais. Um trabalho pioneiro na área de projeto de estruturas controladas por meio de otimização topológica foi realizado por Ou e Kikuchi, 1996, no qual o Método de Homogeneização foi aplicado para projetar uma estrutura considerando os efeitos do controle. Além da topologia da estrutura, a localização das forças de atuação também são consideradas como variáveis em uma segunda etapa do problema de otimização, por meio do qual se busca minimizar a energia de controle. Embora não trate da aplicação de materiais inteligentes no processo de controle, esse trabalho fornece importantes fundamentos para formulação de problemas de otimização topológica envolvendo controle de vibrações. Alguns estudos iniciais na área de otimização com foco em projetos estruturais envolvendo materiais piezoelétricos tratavam do problema de maximização do desempenho de hidrofones, por meio da otimização de parâmetros do material piezoelétrico em um compósito [Gibiansky e Torquato, 1997] ou através da otimização da topologia para a célula unitária do material composto [Sigmund et al., 1998]. Considerando a aplicação do método de otimização topológica para projeto de estruturas com materiais piezoelétricos, deve-se destacar também alguns trabalhos pioneiros como Silva et al., 1997, e Silva et al., 1998, que, empregando o Método de Homogeneização, visavam ao projeto de microestruturas para materiais compósitos periódicos. Silva e Kikuchi, 1999, propuseram uma formulação baseada no fator de acoplamento eletromecânico para projetar transdutores e

ressonadores piezoelétricos através do método de otimização topológica, empregando uma extensão do modelo *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) que considera as propriedades efetivas para um meio piezoelétrico. Esse modelo material é usualmente referido como *Piezoelectric Material with Penalization* (PEMAP), e foi modificado por Kögl e Silva, 2005, visando a inclusão da polarização do material piezoelétrico na lei de interpolação. Para isso, uma segunda variável de projeto é adicionada ao problema para alterar o sinal do tensor de acoplamento piezoelétrico de acordo com a direção de polarização.

A polaridade dos eletrodos, assim como a polarização do material piezoelétrico, tem grande influência no desempenho dos atuadores. Assim, alguns trabalhos buscaram tratar dessa característica do problema na etapa de projeto. Por exemplo, Carbonari et al., 2009, consideraram a polarização do material piezoelétrico como variável no problema de otimização topológica no projeto de mecanismos piezo-atuados. Donoso e Bellido, 2009, apresentaram uma metodologia de projeto de sensores e atuadores modais para placas com condições de contorno arbitrárias visando à observação de uma forma modal específica sem influência das demais. Como extensão desse trabalho, Ruiz et al., 2016, consideraram o problema de projeto ótimo, tanto para a estrutura base como para a camada de eletrodos, de modo que a resposta para uma determinada forma modal seja maximizada ao mesmo tempo que a resposta de um conjunto, contendo outras formas modais, seja suprimida. Nesse trabalho, tanto a função objetivo como as restrições desse problema dependem explicitamente das formas modais. Para evitar o problema de curto-circuito em eletrodos no projeto de filtros modais, Donoso e Sigmund, 2016, propuseram uma metodologia para incluir no problema de otimização uma fase com polaridade uniforme nula, visando a separação de áreas do eletrodo com polaridades opostas. Além da polaridade dos eletrodos e da polarização do material piezoelétrico, o perfil no qual o sinal de controle é aplicado no eletrodo também pode ser incluído no problema de otimização, como proposto por Kang et al., 2011, onde uma variável de projeto foi incluída na formulação do problema para mapear a distribuição de potencial elétrico na estrutura.

Adotando um algoritmo de controle por realimentação CGVF, *Classical Constant Gain Velocity Feedback*, Zhang e Kang, 2014, abordaram o projeto de placas piezoelétricas sob o ponto de vista de mínima flexibilidade dinâmica para o caso de excitação externa harmônica. Uma formulação baseada em controlabilidade foi proposta por Silveira et al., 2015, na qual se maximiza o traço do Gramiano visando a melhoria do desempenho de

um sistema de controle LQR, *Linear-Quadratic Regulator*, para um conjunto de modos de vibração no processo de otimização topológica. Uma abordagem análoga pode ser empregada para o projeto de sensores piezoelétricos considerando a maximização de alguma medida baseada no Gramiano de observabilidade [Menuzzi et al., 2018]. Gonçalves et al., 2016, abordaram o problema de projeto otimizado de atuadores piezoelétricos com foco na controlabilidade total do sistema. Para isso, maximiza-se o menor autovalor do Gramiano de controlabilidade com objetivo de que nenhum modo de vibração considerado no sistema de controle esteja em uma condição próxima de ser não-controlável. O projeto simultâneo da estrutura e do atuador, baseado em controlabilidade, foi tratado por Padoin et al., 2018, onde se considera um modelo simplificado [Padoin et al., 2015] para representar as forças transmitidas de um atuador comercial tipo *Macro Fiber Composite* (MFC) para a estrutura. Molter et al., 2016, trataram do problema de projeto simultâneo da estrutura e atuadores piezoelétricos através da minimização de um funcional escrito em termos do trabalho das forças externas e das forças de atuação, as quais visam à compensação dos deslocamentos gerados pelas cargas externas. Uma metodologia baseada no Critério de Ótimo foi proposta em Molter et al., 2018, para solução desse problema simultâneo, o que proporciona menor custo computacional no processo de otimização se comparado com estratégias que empregam algoritmos como *Sequential Linear Programming* (SLP). Adotando uma estratégia de controle via LQR, Hu et al., 2018, projetaram atuadores e sensores piezoelétricos para minimização da flexibilidade dinâmica da estrutura. Uma conclusão importante se refere à relevante influência que a frequência da excitação externa tem na topologia otimizada, enquanto que a influência dos ganhos do controlador LQR é pouco significativa. Moretti et al., 2019, consideraram a influência dos graus de liberdade elétricos internos, na cerâmica piezoelétrica, em um problema de projeto de atuadores flexionais empregando o controle ativo de realimentação de velocidade. Nota-se que a consideração desses nós intermediários no modelo de elementos finitos intensifica os efeitos do amortecimento provenientes da realimentação.

O projeto de estruturas com material piezoelétrico para sistemas de coleta de energia também é uma área de relevante importância, na qual o método de otimização topológica foi amplamente empregado na última década por meio de formulações baseadas na maximização da energia elétrica armazenada na estrutura [Zheng et al., 2009], da resistência do circuito elétrico adotado no sistema de coleta [Rupp et al., 2009], do fator

de acoplamento eletromecânico [Takezawa et al., 2014], e da potência transferida para um circuito ressonante externo [Salas et al., 2018]. Recentemente, além dos problemas que visam ao controle ativo de vibrações e coleta de energia, o método de otimização topológica tem sido empregado na etapa de projeto de estruturas com materiais piezoelétricos para distintas aplicações como atenuação de pressão sonora [Zhang et al., 2014], identificação de dano [Nishizu et al., 2017], mecanismos piezo atuados [Ruiz e Sigmund, 2018], controle de forma [Yang et al., 2018], entre outros.

1.3 Atenuação dos Efeitos do Controle por Realimentação nos Modos Residuais

Estruturas flexíveis reais consistem de sistemas físicos de parâmetros distribuídos e, dessa forma, sistemas cujo espaço de estados modais possui dimensão infinita. Entretanto, para fins de análise, pode-se adotar estratégias de discretização considerando um conjunto finito de coordenadas como, por exemplo, através do método dos elementos finitos. Esse tipo de aproximação pode ser suficiente para representar o comportamento dinâmico de uma estrutura, dependendo do nível de discretização adotado, na maioria dos casos práticos. A partir disso, um modelo truncado que inclua apenas alguns modos de vibração representativos é usualmente empregado para projetar um controlador com ordem reduzida [Preumont, 2011], facilitando a aplicação do sistema de controle em tempo real. Embora excluídos do modelo truncado, os modos residuais podem interagir com o sistema de controle causando um fenômeno conhecido com *spillover* [Balas, 1978; Meirovitch et al., 1983]. Esse fenômeno pode ocorrer tanto no controle, quando os modos residuais são excitados pelo controlador, como na observação, quando esses modos causam perturbações nos sinais medidos pelos sensores. Em sistemas de controle por realimentação de estados, esses efeitos podem resultar em deterioração do desempenho do controlador, o que em casos extremos, pode até inviabilizar o processo de controle [Preumont, 2011].

A aplicação de técnicas de otimização visando ao projeto otimizado de atuadores e/ou sensores levam em consideração, usualmente, parâmetros de projeto como forma, tamanho e localização, que influenciam diretamente no desempenho do sistema de controle. Dentre esses problemas, a localização ótima de atuadores e/ou sensores teve maior importância inicialmente e, conseqüentemente, diversos métodos foram propostos base-

ados em diferentes premissas. Por exemplo, Hamdan e Nayfeh, 1989, propuseram uma medida de controlabilidade modal como uma norma de ortogonalidade por meio da interpretação geométrica para o teste de autovetores de Popov-Belevitch-Hautus (PBH), o qual especifica que o espaço de atuação não deve ser ortogonal ao espaço do sistema. Já Junkins e Kim, 1991, combinaram essa estratégia com a aplicação de um custo modal, considerando a resposta do sistema para um impulso unitário. Dessa forma, analisa-se o problema da localização ótima de atuadores levando em consideração a contribuição de cada modo através de uma função de custo modal normalizada. Além disso, Hać e Liu, 1993, analisaram a relação do Gramiano de controlabilidade com a energia de controle para um caso com perturbação transiente, e com a energia transmitida dos atuadores para a estrutura para um caso com perturbação persistente. A partir dessa análise, uma medida baseada no Gramiano de controlabilidade é proposta tendo em vista a maximização da performance do sistema de controle. Posteriormente, Gawronski e Lim, 1996, abordaram o estudo de medidas de controlabilidade e observabilidade baseadas na decomposição em valores singulares de Hankel para estruturas flexíveis balanceadas. Na sequência, a partir da relação entre as forças de atuação e a energia de controle, Wang e Wang, 2001, propuseram uma estratégia de otimização para a localização de atuadores. A minimização simultânea da energia mecânica e de controle para um sistema com realimentação de estados foi empregada por Bruant et al., 2001, para encontrar a localização ótima de atuadores em uma estrutura. Essas premissas e medidas de controlabilidade têm sido amplamente aplicadas no problema de localização ótima de atuadores e/ou sensores. Embora não considerem diretamente os efeitos de *spillover*, essas abordagens podem ser modificadas para incorporar os efeitos do controle nos modos residuais.

Os potenciais problemas de *spillover* podem ser parcialmente evitados pela correta localização de atuadores na estrutura, síntese apropriada do controlador e filtragem das entradas de controle [Kissel e Lin, 1982]. A maioria dos trabalhos encontrados na literatura negligenciam esta questão quando o problema é caracterizado pela busca da localização ótima de atuadores, uma vez que a eficiência do controle em malha fechada pode ser reduzida pela inclusão de restrições associadas a esses efeitos indesejáveis. Lim, 1992, propôs um método para a localização ótima de sensores e atuadores em estruturas baseado na projeção ortogonal de modos estruturais na intersecção dos subespaços controlável e observável. Esta abordagem baseia-se na razão entre a versatilidade (controlabilidade

e observabilidade de todos os modos) e a eficácia (controlabilidade e observabilidade de um modo particular). Como objetivo desse trabalho, buscou-se encontrar o subconjunto de transdutores de um conjunto inicial de candidatos para melhorar o desempenho do controle. No entanto, a razão versatilidade por eficácia tem uma interpretação física que pode ser empregada em problemas onde os efeitos de *spillover* são significativos. Collet, 2001, estudou a possibilidade de otimização do Gramiano de observação definindo sensores piezoelétricos semi-distribuídos, considerando um limite para efeito de sensoriamento residual para um conjunto de modos. Para isso, empregou uma norma do Gramiano como medida dos efeitos residuais que caracterizam o *spillover*, que foi tratado como incertezas e, portanto, poderia ser gerenciado empregando algum algoritmo de controle robusto. Liu e Hou, 2004, apresentaram uma abordagem baseada no conceito de espaço nulo para eliminar o *spillover* de controle e/ou observação em um sistema de controle de vibração por realimentação para um número fixo de modos residuais. As respostas em malha fechada usando este controlador modificado e o controlador H2 foram obtidas para o controle de vibração de uma placa com apenas uma aresta engastada sujeita a diversas condições de carregamento. Embora a instabilidade tenha sido evitada, as localizações ótimas dos atuadores e sensores não foram definidas, o que poderia melhorar o desempenho do controle e a eficácia deste método. Bruant et al., 2010, empregaram Algoritmos Genéticos para encontrar a localização ideal dos atuadores levando em consideração os modos residuais. A função objetivo foi definida como a energia mecânica normalizada transmitida para esses modos. A influência dos modos indesejáveis na dinâmica da estrutura pode ser mais ou menos importante, de acordo com a escolha de uma constante de ponderação. Uma abordagem de posicionamento ótimo de sensores baseada no Método de Independência Efetiva foi proposta por Hanis e Hromcik, 2012, considerando o *spillover*. A ideia principal desta estratégia é de maximizar a influência de alguns modos alvo, enquanto a influência dos modos residuais é simultaneamente minimizada na observação. Biglar e Mirdamadi, 2014, estudaram tanto a localização como a orientação de sensores e atuadores piezoelétricos acoplados a estruturas de placa. A solução ótima para este problema foi determinada com base na controlabilidade e observabilidade espacial considerando modos residuais. Cinquemani et al., 2015, empregaram Algoritmos Genéticos para minimizar os efeitos do controle de espaço modal independente em modos não modelados. Esses efeitos indesejáveis foram levados em consideração definindo uma função objetivo escrita em ter-

mos dos elementos não diagonais da matriz de amortecimento introduzida pelo controle. Foi demonstrado que esses elementos extra-diagonais dependem apenas da localização dos atuadores e sensores. No entanto, além de atenuar os efeitos de *spillover*, tanto a controlabilidade quanto a observabilidade devem ser asseguradas e a escolha da localização mais adequada para os transdutores se torna demasiadamente complexa para sistemas com um elevado número de modos residuais.

Recentemente, Jia e Shan, 2018, estudaram o problema de localização de atuadores em estruturas com distribuição de momento angular, onde os efeitos de *spillover* são considerados a partir de uma estratégia de decomposição em valores singulares da matriz de entrada. Já Khushnood et al., 2018, estudaram o problema da localização ótima de atuadores e sensores por meio da análise das funções de transferência para todos os possíveis candidatos à solução otimizada, no qual a inclinação entre os picos dos modos controlados e residuais é considerada como critério.

1.4 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é propor uma formulação para o problema de otimização topológica de atuadores piezoelétricos considerando, na própria etapa de projeto, alguns problemas práticos comuns, como instabilidade de *spillover*. Entretanto, espera-se que uma limitação para esse efeito indesejado acarrete em perda de desempenho desses atuadores quando empregados em um sistema de controle de vibrações, visto que esse limite no problema de otimização deve reduzir o espaço de projeto viável. Nesse contexto, define-se alguns objetivos específicos para o desenvolvimento da presente pesquisa:

- Formular um problema de otimização para projetar atuadores piezoelétricos utilizando um índice de controlabilidade modal;
- Modificar o modelo de interpolação do material para possibilitar a inclusão do material piezoelétrico em duas fases distintas, e com polarizações diferentes, para viabilizar a realização de projetos de atuadores otimizados com melhor desempenho de controle;
- Considerar um limite para os índices de controlabilidade dos modos residuais, visando à atenuação dos efeitos de *spillover* por meio do emprego dos atuadores projetados em um sistema de controle por realimentação.

Cada um desses objetivos específicos será tratado de forma individual, e apresentado em capítulos diferentes. Entretanto, todas as modificações propostas podem ser combinadas para formular de maneira mais genérica o problema de projeto otimizado para atuadores piezoelétricos.

1.5 Contribuições Científicas

As principais contribuições da presente Tese de Doutorado se referem aos dois últimos objetivos específicos apresentados anteriormente: a otimização simultânea da topologia e da polarização dos atuadores piezoelétricos e a formulação com limite para os efeitos de *spillover*. A consideração de um perfil de polarização otimizado possibilita a realização de projetos de atuadores com índices de controlabilidade superiores aos obtidos com polarização uniforme. Do ponto de vista de implementação do sistema de controle, atuadores com diferentes polarizações permitem que campos de deformação de tração e compressão sejam gerados em diferentes pontos da estrutura, a partir de apenas um sinal de controle e de um par de eletrodos. Quanto à estratégia desenvolvida para a atenuação dos efeitos de *spillover* na etapa de projeto, adota-se uma restrição adicional referente à norma dos índices de controlabilidade dos modos residuais. Entretanto, quando se trata de estruturas contínuas, o projeto de atuadores que tornem o sistema de controle insensível para um conjunto de modos residuais é praticamente inviável. Dessa forma, essa formulação busca apenas atenuar os efeitos de *spillover*, permitindo projetar atuadores com controlabilidade limitada para os modos residuais. No entanto, busca-se observar uma relação entre o limite imposto na etapa de projeto e a resposta em frequência para a estrutura controlada.

1.6 Organização da Tese

Algumas definições básicas sobre o problema de otimização estrutural são apresentados no Capítulo 2, assim como conceitos teóricos e práticos sobre o método de otimização topológica. No Capítulo 3, discute-se o projeto de atuadores piezoelétricos por meio de uma estratégia de otimização baseada em controlabilidade e alguns resultados iniciais são apresentados. Visando a uma melhoria no desempenho dos atuadores projetados, considera-se uma modificação no modelo material para possibilitar a inclusão de atuadores com diferentes polarizações. Assim, o Capítulo 4 trata do problema de otimi-

zação simultânea da topologia e polarização dos atuadores piezoelétricos. A interação do controlador com os modos residuais é discutida no Capítulo 5, onde um limite para esses efeitos é incorporado na formulação por meio de uma função de restrição. Por fim, as considerações finais são apresentadas no Capítulo 6, assim como algumas sugestões para continuidade da pesquisa.

2 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Uma etapa fundamental no processo de otimização é a formulação, que consiste em escrever o problema associado ao sistema físico real de forma matemática. Em um problema de otimização, busca-se minimizar ou maximizar uma determinada função objetivo que depende das variáveis de projeto, as quais consistem dos parâmetros do problema que podem ser alterados durante o processo de otimização. Geralmente, esse tipo de problema está sujeito a um conjunto de restrições que podem ser impostas devido a diversos fatores como, por exemplo, leis da física, requisitos legais, limitações orçamentárias, entre outros [Bendsøe e Kikuchi, 1988; Arora, 2004]. Na área de otimização estrutural, destacam-se três diferentes abordagens: otimização paramétrica, otimização de forma e otimização topológica (Figura 2.1).

Na abordagem paramétrica, assume-se que a estrutura possui uma forma fixa, definida a priori, como no exemplo representado na Figura 2.1(a), no qual a estrutura é discretizada por elementos de treliça. Assim, pode-se definir a área da seção transversal de cada barra como variável de projeto no processo de otimização [Vanderplaats, 1999].

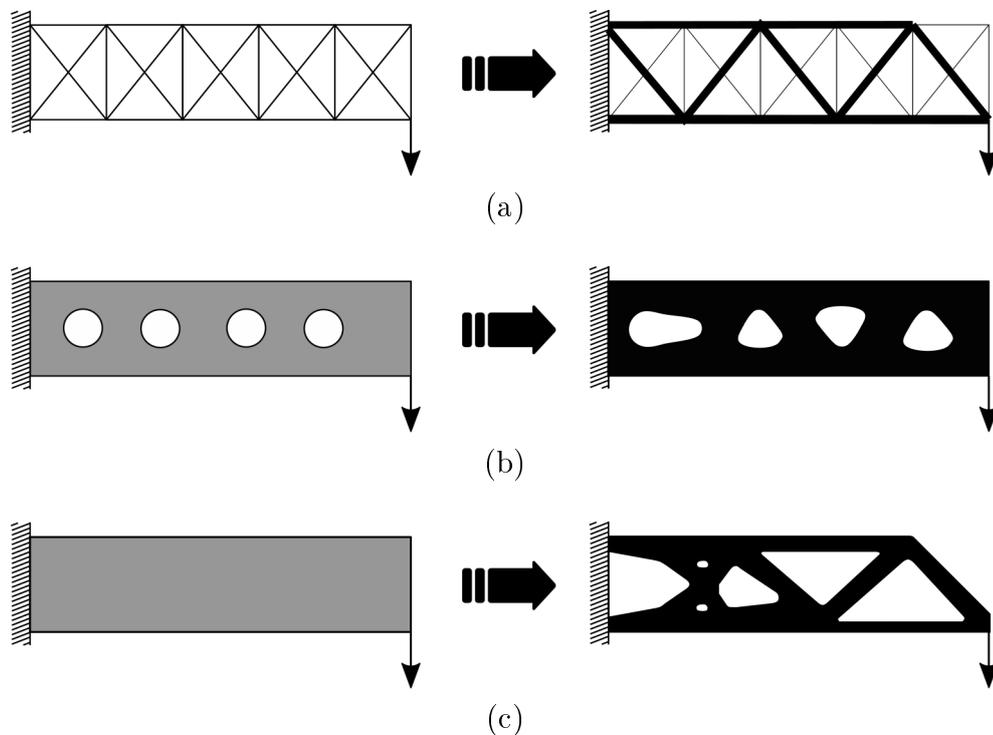


Figura 2.1 – Exemplo das três abordagens de otimização estrutural: (a) paramétrica, (b) de forma e (c) topológica.

Uma abordagem mais geral para o mesmo problema pode ser obtida através da parametrização das curvas que constituem os contornos externos e internos. Assim, os parâmetros que definem a geometria da estrutura são considerados como variáveis de projeto possibilitando que o processo de otimização altere a sua forma [Suzuki e Kikuchi, 1991; Haftka e Gürdal, 1992], como representado na Figura 2.1(b).

Por fim, a terceira abordagem, representada na Figura 2.1(c), refere-se à otimização topológica, na qual se distribui material dentro de um determinado domínio permitindo a criação de regiões com vazios. Quando o método de otimização topológica é combinado com o Método de Elementos Finitos, pode-se associar uma variável de projeto a cada elemento da malha. Como solução do problema de otimização topológica, são definidos os espaços sem material (vazios) e a conectividade da estrutura através da remoção ou adição de material. Entretanto, ao contrário da otimização de forma, a otimização topológica não altera a malha de elementos finitos durante o processo de otimização. A única alteração ocorre na distribuição de material nos elementos, sendo essa uma das principais vantagens desse tipo de otimização quando combinada com o Método de Elementos Finitos [Sigmund e Petersson, 1998; Bendsøe e Sigmund, 2003].

2.1 Modelo Material

Considerando um problema no qual apenas um material está envolvido, o objetivo do método de otimização topológica é definir a configuração ótima (domínio de projeto Ω_d e vazios Ω_v) de uma estrutura dentro de um domínio pré-definido (domínio fixo estendido de projeto Ω). A Figura 2.2 apresenta uma representação desse problema. As quantidades conhecidas no problema são as cargas aplicadas, as possíveis condições de apoio e vínculo, e o volume da estrutura a ser construída.

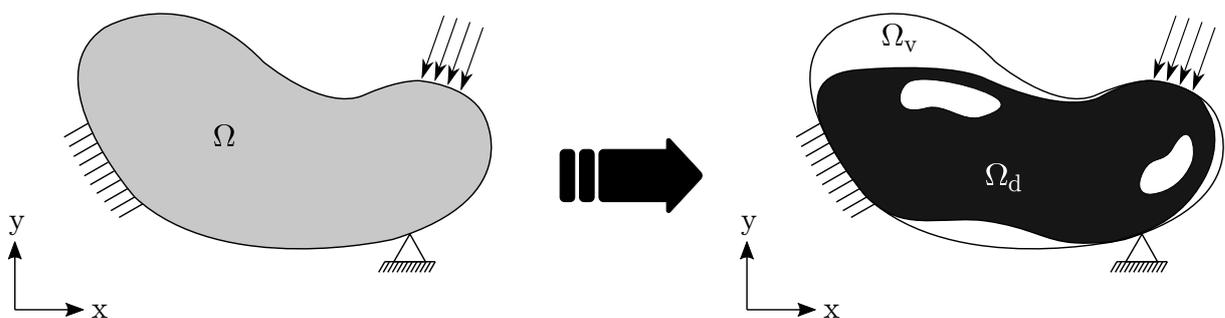


Figura 2.2 – Domínio desconhecido Ω_d contido no domínio fixo estendido Ω .

Dessa forma, o domínio fixo estendido pode ser definido como um domínio de forma fixa cujos limites são determinados pelos pontos de apoio e vínculo da estrutura e pelos pontos de aplicação de carregamento [Bendsøe e Sigmund, 2003]. De forma matemática, esse problema pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} : & f(\rho) \\ \text{sujeito a : } & V = \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq V_{\max} \\ & : \rho = 0 \text{ ou } 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde ρ é a variável de projeto que, nesse caso, atua como pseudo-densidade volumétrica do problema, $f(\rho)$ é a função objetivo, V é o volume da estrutura e V_{\max} é o limite máximo para o volume da estrutura otimizada.

Tipicamente, o problema de otimização topológica é tratado dividindo o domínio Ω em N elementos finitos. Considerando que as variáveis de projeto (geralmente associadas à densidades dos elementos) são constantes em cada elemento finito, o problema apresentado na Equação 2.1 pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} : & f(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{sujeito a : } & V = \sum_{i=1}^N \rho_i V_i \leq V_{\max} \\ & : \rho_i = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $\boldsymbol{\rho}$ é o vetor de variáveis de projeto, contendo as variáveis ρ_i e V_i é volume do i -ésimo elemento.

Ao restringir o espaço de projeto para $\rho_i \in \{0, 1\}$, incorre-se no problema de perda da diferenciabilidade e, dessa forma, o esforço computacional necessário para resolver esse tipo de problema inteiro se torna extremamente elevado [Stolpe e Svanberg, 2003]. Baseado no método de homogeneização, uma das primeiras abordagens para solução desse problema foi proposta por Bendsøe e Kikuchi, 1988, onde as variáveis de projeto definem a microestrutura do material. Bendsøe, 1989, apresenta o conceito de pseudo densidade, inicialmente sem interpretação física, para representar as variáveis de projeto de forma contínua, onde:

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1 \quad (2.3)$$

onde ρ_{\min} é um valor mínimo para as variáveis de projeto imposto para evitar problemas de condicionamento da matriz de rigidez no modelo de elementos finitos.

Pela definição do problema, deseja-se obter uma solução que contenha apenas material ($\rho_i = 1$) ou vazios ($\rho_i = \rho_{\min}$). Entretanto, ao considerar a forma contínua para as variáveis de projeto, pode-se obter uma solução com valores intermediários para as pseudo densidades. Para evitar esse tipo de problema, as variáveis de projeto com valores intermediários são penalizadas por meio de uma função μ_p escrita em termos da lei de potência:

$$\mu_p(\rho_i) = \rho_i^{p_0} \quad (2.4)$$

onde p_0 é o expoente de penalização. Assim, pode-se escrever propriedades efetivas do material, como o tensor constitutivo elástico \mathbb{C} , por exemplo, como:

$$\mathbb{C} = \mu_p(\rho_i) \mathbb{C}_0 = \rho_i^{p_0} \mathbb{C}_0 \quad (2.5)$$

onde \mathbb{C}_0 é o tensor constitutivo elástico do material de referência. A utilização de um expoente de penalização maior que 1 induz um maior custo para as variáveis de projeto com valores intermediários no processo de otimização. Dessa forma, esses valores são evitados no projeto ótimo [Bendsøe e Sigmund, 2003]. Essa abordagem conhecida como SIMP é amplamente empregada em problemas de otimização topológica. Embora o SIMP seja o método mais difundido, outras abordagens podem ser adotadas como, por exemplo, *Rational Approximation of Material Properties* (RAMP) [Stolpe e Svanberg, 2001]. A abordagem por meio do método RAMP evita que a rigidez assuma valores próximos a zero, sendo assim muito útil para evitar problemas numéricos como a presença de modos localizados [Pedersen, 2000]. Entretanto, como o problema proposto nesse trabalho não considera a existência de vazios, apenas a distribuição otimizada do material base da estrutura e do material piezoelétrico, o modelo SIMP é adotado.

Como apresentado na Figura 1.1, a formulação do problema de otimização para o projeto de atuadores piezoelétricos proposta nesse trabalho considera três fases distintas, sendo uma referente ao material da estrutura base e as outras duas referentes aos atuadores com polarizações positiva e negativa. Assim, o modelo para interpolação do material deve levar em consideração a interação entre essas três fases. Como as propriedades elásticas das duas fases piezoelétricas são iguais, considera-se uma extensão do método SIMP escrita

como [Bendsøe e Sigmund, 1999]:

$$\mathbb{C} = \rho_i^{p_0} \mathbb{C}_a + (1 - \rho_i^{p_0}) \mathbb{C}_b \quad (2.6)$$

onde \mathbb{C}_a e \mathbb{C}_b são os tensores constitutivos elásticos para os materiais dos atuadores e base, respectivamente. Assim, elementos com $\rho_i = 0$ apresentam propriedades da estrutura base enquanto que elementos com $\rho_i = 1$ possuem propriedades do material piezoelétrico.

Por se tratar de um problema que envolve diferentes problemas físicos e suas interações, torna-se necessário também a interpolação das propriedades dielétricas e piezoelétricas [Sigmund e Torquato, 1999]. Uma extensão do modelo SIMP para aplicação em materiais piezoelétricos, como apresentada em Silva e Kikuchi, 1999, pode ser empregada para a efetiva interpolação dessas propriedades. Por fim, a consideração da polarização do material piezoelétrico pode ser realizada por meio do modelo *Piezoelectric Material with Penalization and Polarization* (PEMAP-P) proposto por Kögl e Silva, 2005.

2.2 Instabilidades Numéricas

Alguns problemas numéricos são inerentes ao processo de otimização topológica, destacando-se a dependência da malha e padrão tabuleiro de xadrez. Duas soluções com diferentes tamanhos de malha para o problema de mínima flexibilidade com restrição de volume (50%) são apresentadas na Figura 2.3, onde esses dois problemas podem ser observados. A dependência da malha é um problema numérico comum em problemas de otimização topológica, que se caracteriza por diferentes soluções ótimas para diferentes níveis de discretização do domínio de projeto. O padrão tabuleiro de xadrez consiste em regiões na solução ótima com alternância de elementos sólidos e vazios. Inicialmente, acreditava-se que essas regiões representavam algum tipo de microestrutura ótima. Entretanto, Diaz e Sigmund, 1995, mostraram que estruturas com padrão de tabuleiro apresentam rigidez artificialmente elevada. Jog e Haber, 1996, analisaram testes para identificação de elementos finitos instáveis. Desde então, diversos métodos foram propostos com objetivo de evitar ou amenizar esses problemas numéricos através, por exemplo, da suavização da solução, utilização de elementos de alta ordem, filtragem, entre outros. Além disso, a maioria dos métodos de restrição utilizados para tratar o problema de dependência de malha reduzem também, simultaneamente, o padrão de tabuleiro [Sigmund e Petersson, 1998].

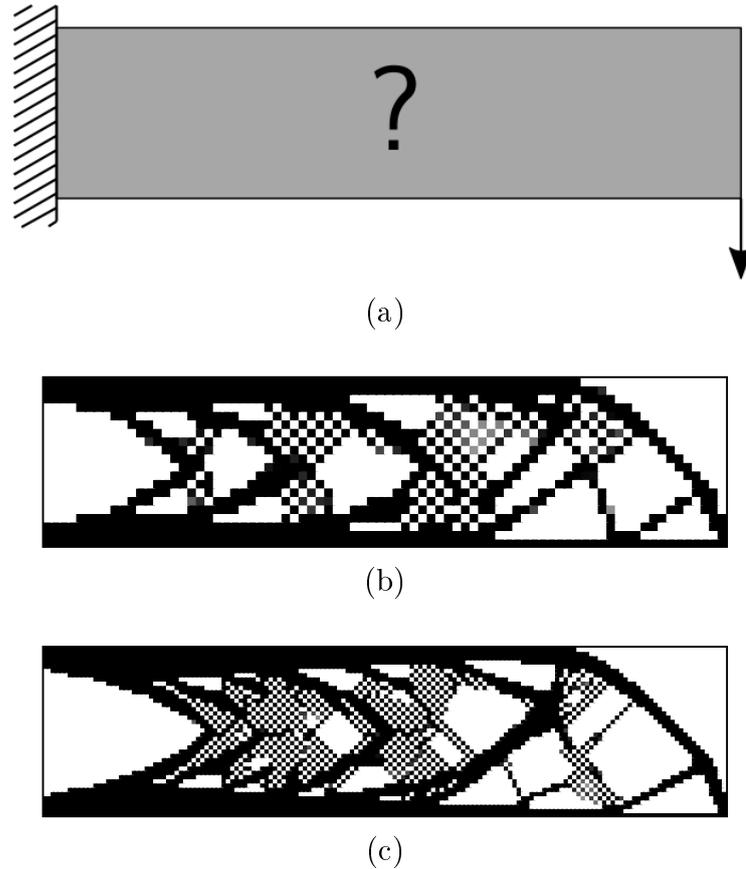


Figura 2.3 – Exemplos de instabilidades numéricas em um problema de mínima flexibilidade: (a) problema inicial, (b) solução com 1600 elementos e (c) solução com 6400 elementos.

Para esses problemas numéricos, alguns métodos buscam restringir as variações das densidades, obtendo assim soluções macroscópicas do tipo 0-1 [Sigmund e Petersson, 1998]. Métodos de restrição como controle de perímetro [Ambrosio e Buttazzo, 1993], restrição global do gradiente [Bendsøe, 1995] e restrição local do gradiente [Petersson e Sigmund, 1998] tiveram a existência das soluções provadas. O problema de dependência de malha também pode ser tratado através da aplicação de filtros de sensibilidade, que é um método puramente heurístico e produz resultados similares aos obtidos por restrição local do gradiente. Esse filtro modifica a sensibilidade da função objetivo com respeito a uma variável de projeto de acordo com uma média ponderada das sensibilidades em uma vizinhança fixa [Sigmund, 1997], como:

$$\frac{\widetilde{\partial f}}{\partial v_i} = \frac{1}{v_i} \frac{\sum_{j=1}^n H_j v_j \frac{\partial f}{\partial v_j}}{\sum_{j=1}^n H_j} \quad (2.7)$$

onde f é a função objetivo, v_i é a i -ésima variável de projeto, e H_j é um operador definido como:

$$H_j = r_{min} - \text{dist}(i, j), \{i \in N \mid \text{dist}(i, j) \leq r_{min}\} \quad (2.8)$$

onde $\text{dist}(i, j)$ é a distância entre os centroides dos elementos i e j . Assim, o operador H_j é nulo fora da área definida pelo raio de filtragem, como representado na Figura 2.4, a qual apresenta as áreas de filtragem para raios $r_{min} = 1$, $r_{min} = 1\sqrt{2}$ e $r_{min} = 2$ elementos.

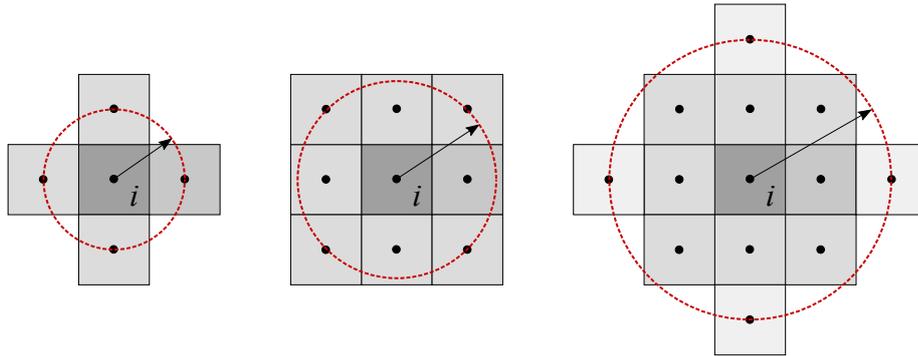
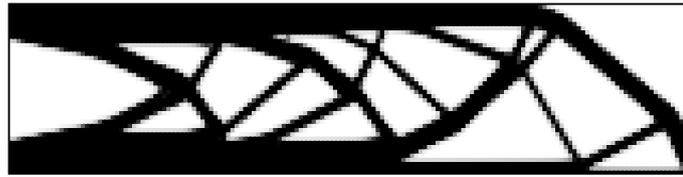


Figura 2.4 – Área de filtragem para diferentes valores de raio r_{min} .

A aplicação do filtro de sensibilidade atenua os problemas de dependência de malha e padrão de tabuleiro. Entretanto, ao invés do nível de refino da malha, a solução do problema de otimização se torna dependente da escolha do raio de filtragem, ou seja, diferentes soluções serão obtidas para diferentes valores de r_{min} , como apresentado na Figura 2.5.

Além das instabilidades numéricas discutidas, a existência de mínimos locais pode prejudicar o processo de otimização topológica, visto que a não convexidade de um problema propicia que métodos baseados em gradiente encontrem diferentes soluções de acordo com a escolha das variáveis de projeto iniciais ou de outros parâmetros de otimização. Dessa forma, métodos de continuação podem ser empregados na tentativa de garantir a convergência global da solução. Esses métodos alteram gradualmente o problema de uma forma convexa (artificial) para uma forma não convexa (original) durante o processo de otimização [Sigmund e Petersson, 1998]. Existem diferentes procedimentos para continuação como, por exemplo, aumento gradual do fator de penalização [Haber et al., 1996] ou do custo para elementos com densidade intermediária [Guedes e Taylor, 1997], entre outros. Uma revisão mais completa sobre as instabilidades numéricas



(a)



(b)

Figura 2.5 – Soluções para o problema de mínima flexibilidade com: (a) $r_{min} = 1$ elemento e (b) $r_{min} = 2$ elementos

mais comuns em problemas de otimização topológica pode ser encontrada em Sigmund e Petersson, 1998 e Bendsøe e Sigmund, 2003.

2.3 Método de Solução para o Problema de Otimização

A programação matemática busca a minimização ou maximização de uma função objetivo f definida em um espaço N -dimensional de projeto e limitada por um conjunto de restrições, que podem assumir a forma linear ou não-linear. A função f , juntamente com o conjunto de restrições, é definida como um problema de programação matemática que pode ser classificado de acordo com a natureza e a forma das variáveis de projeto, restrições e função objetivo [Haftka e Gürdal, 1992], como por exemplo:

- Programação Linear (LP): função objetivo e restrições lineares;
- Programação Quadrática (QP): função objetivo quadrática e restrições lineares;
- Programação Não-Linear (NLP): função objetivo e/ou restrições não-lineares;
- Programação Inteira (IP): busca da solução ótima dentro de um conjunto de valores discretos.

O termo programação linear descreve uma classe particular de problemas nos quais a função objetivo e as restrições são funções que dependem linearmente das variáveis de projeto. Uma programação linear na forma padrão é dada por [Haftka e Gürdal, 1992]:

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{\rho}} : \quad & f(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\rho} \\
\text{sujeito a :} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \\
& : \quad \boldsymbol{\rho} \geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $\boldsymbol{\rho}$ é o vetor de variáveis de projeto com dimensão $N \times 1$, \mathbf{c} é um vetor com dimensão $N \times 1$, \mathbf{A} é uma matriz com dimensão $R \times N$, e \mathbf{b} é um vetor com dimensão $R \times 1$; sendo N o número de variáveis de projeto e R o número de restrições do problema. Qualquer programação linear que inclua restrições de desigualdade pode ser posta na forma padrão através da inclusão de variáveis de folga [Haftka e Gürdal, 1992].

Mesmo que o problema envolva funções que não sejam lineares, pode-se realizar a linearização dessas funções e tratar o problema como uma sequência de programações lineares. Essa abordagem chamada de programação linear sequencial (SLP) é uma forma mais simples para a solução de problemas não-lineares, na forma:

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{\rho}} : \quad & f(\boldsymbol{\rho}) \\
\text{sujeito a :} \quad & g_j(\boldsymbol{\rho}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, R_g \\
& : \quad h_k(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad k = 1, \dots, R_h
\end{aligned} \tag{2.10}$$

onde g_j são as R_g restrições de desigualdade e h_k são as R_h restrições de igualdade. As funções não-lineares do problema de otimização podem ser aproximadas, na vizinhança de $\boldsymbol{\rho}_0$, através de uma expansão em séries de Taylor truncada na primeira derivada. Assim, o problema se torna:

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{\rho}} : \quad & f(\boldsymbol{\rho}_0) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_{0i}) \left. \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \right|_{\boldsymbol{\rho}_0} \\
\text{sujeito a :} \quad & g_j(\boldsymbol{\rho}_0) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_{0i}) \left. \frac{\partial g_j}{\partial \rho_i} \right|_{\boldsymbol{\rho}_0} \geq 0, \quad j = 1, \dots, R_g \\
& : \quad h_k(\boldsymbol{\rho}_0) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_{0i}) \left. \frac{\partial h_k}{\partial \rho_i} \right|_{\boldsymbol{\rho}_0} = 0, \quad k = 1, \dots, R_h
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Além disso, é introduzida uma nova restrição, chamada de limites móveis, que define o intervalo no qual a aproximação é aceitável

$$\rho_i^l \leq \rho_i \leq \rho_i^u, \quad i = 1, \dots, N \tag{2.12}$$

onde ρ_i^l e ρ_i^u são os limites inferior e superior, respectivamente. A escolha dos limites móveis é um fator importante para o desempenho do algoritmo SLP, podendo ser atualizados sistematicamente ao longo do processo de otimização. Além disso, o intervalo definido por esses limites deve ser reduzido conforme a solução da programação linear se aproxima do ótimo [Haftka e Gürdal, 1992].

3 PROJETO DE ATUADORES PIEZOELÉTRICOS ATRAVÉS DA MAXIMIZAÇÃO DA CONTROLABILIDADE

Neste capítulo, apresenta-se a formulação inicial baseada em controlabilidade para o projeto de atuadores piezoelétricos por meio do método de otimização topológica. Inicialmente, esse problema é definido em termos do domínio e das variáveis de projeto para, em seguida, descrever as equações do movimento para a estrutura controlada considerando a discretização por elementos finitos. A estratégia de controle é apresentada utilizando a representação no espaço de estados, assim como as medidas de controlabilidade para cada modo de vibração da estrutura. A formulação para o problema de otimização é discutida e as equações necessária para a análise de sensibilidade, e posterior solução empregando um algoritmo de primeira ordem, são deduzidas de forma analítica. Por fim, projetos otimizados de atuadores modais são apresentados para dois exemplos numéricos: uma viga em balanço e uma viga bi-engastada.

3.1 Definição do Problema

Nesta etapa inicial, busca-se projetar atuadores piezoelétricos da forma mais adequada para que os efeitos de vibração, de um determinado modo, sejam minimizados. Para isso, o atuador é considerado embutido em uma estrutura, cujo contorno do domínio é fixo, como representado na Figura 3.1.

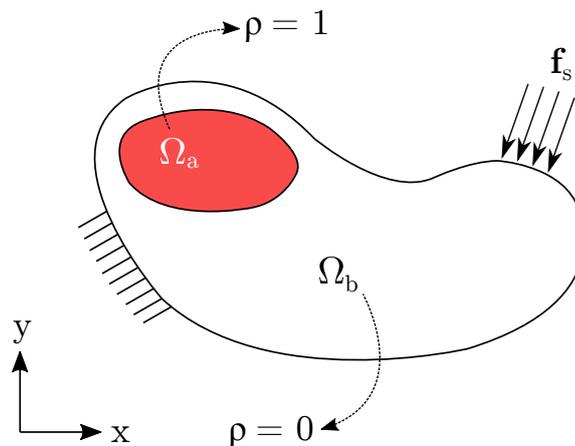


Figura 3.1 – Representação de uma estrutura genérica com atuador piezoelétrico embutido.

O domínio físico, $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_a$, é dividido em duas partes:

- Domínio base Ω_b : indica a presença de material base que desempenha apenas papel estrutural;
- Domínio de projeto Ω_a : indica a presença de material piezoelétrico que é responsável pela atuação, quando submetido a um campo elétrico.

A definição desses domínios é realizada com auxílio de uma variável de projeto, designada por $\rho(x, y)$. Há presença de material piezoelétrico em pontos nos quais $\rho = 1$, enquanto que $\rho = 0$ indica a presença de material base da estrutura.

A estrutura tem suas superfícies superior e inferior cobertas por finas camadas de eletrodos, nos quais, os potenciais elétricos são prescritos, como representado na Figura 3.2, onde \mathbf{P}_d indica a direção de polarização do material piezoelétrico. Considera-se um modelo simplificado ideal no qual o campo elétrico induzido pelo par de eletrodos no atuador piezoelétrico é uniforme.

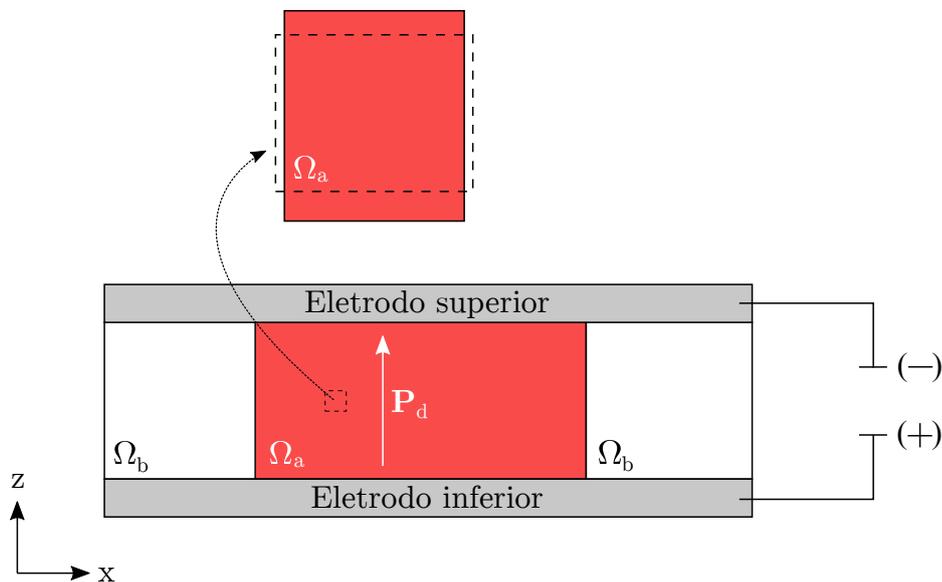


Figura 3.2 – Comportamento do atuador piezoelétrico na direção da espessura quando submetido a um campo elétrico externo.

Conforme destacado na Figura 3.2, alongamento do material piezoelétrico na direção z será observado se um campo elétrico for aplicado na mesma direção de \mathbf{P}_d , comprimindo a estrutura no plano xy em decorrência do efeito Poisson. Analogamente, o material piezoelétrico será comprimido na direção z se o campo elétrico for aplicado na

direção oposta de \mathbf{P}_d , induzindo um estado de deformação trativo no plano xy da estrutura em decorrência do efeito Poisson. Essas respostas mecânicas caracterizam o efeito piezoelétrico inverso, que é utilizado para introduzir amortecimento ativo na estrutura, visando à atenuação dos efeitos indesejados de vibrações.

A mesma relação constitutiva pode ser empregada para todos os pontos no domínio Ω se as propriedades materiais das duas fases (base e piezoelétrica) forem adequadamente interpoladas pela variável de projeto ρ . Para isso, considera-se o domínio Ω_b preenchido com material linear isotrópico e o domínio Ω_a preenchido com material piezoelétrico. Então, uma relação constitutiva baseada na piezoeletricidade linear é empregada para relacionar as tensões mecânicas σ_i e os deslocamentos elétricos D_i com o campo de deformações ε_i e campo elétrico E_i , escrita como:

$$\sigma_i = c_{ij}\varepsilon_j - d_{ki}E_k \quad (3.1)$$

$$D_i = d_{ij}\varepsilon_j + e_{ik}E_k \quad (3.2)$$

onde $c_{ij}(\rho(x, y))$, $d_{ij}(\rho(x, y))$ e $e_{ij}(\rho(x, y))$ são, respectivamente, as constantes elásticas, piezoelétricas e dielétricas interpoladas de forma que a Equação 3.1 resulte na equação da elasticidade linear quando $\rho = 0$. Mais detalhes sobre a relação constitutiva para piezoeletricidade linear podem ser encontrados no Apêndice A.

Uma aproximação através do método dos elementos finitos pode ser escrita empregando do princípio variacional de Hamilton [Lerch, 1990], que é uma descrição equivalente ao problema de valor de contorno. Assim, a equação que governa o movimento para a estrutura discretizada é escrita como:

$$\mathbf{M}_{uu}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{uu}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\phi}\phi = \mathbf{f} \quad (3.3)$$

onde \mathbf{u} e ϕ são, respectivamente, os vetores de deslocamentos e potenciais elétricos nodais; \mathbf{M}_{uu} , \mathbf{C}_{uu} , \mathbf{K}_{uu} e $\mathbf{K}_{u\phi}$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento, rigidez e acoplamento piezoelétrico. O vetor de forças externas \mathbf{f} leva em consideração as forças de superfície \mathbf{f}_s e pontuais \mathbf{f}_p . Mais detalhes sobre o princípio variacional de Hamilton estendido para o meio piezoelétrico e a subsequente formulação do modelo de elementos finitos para piezoeletricidade podem ser encontrados nos apêndices A e B.

3.2 Estratégia de Controle

Como o objetivo do sistema de controle é atenuar as vibrações de um determinado modo da estrutura, torna-se conveniente escrever a equação do movimento em termos de variáveis modais. Assumindo resposta dinâmica livre e atuadores piezoelétricos configurados em curto circuito [Becker et al., 2006], o problema de autovalores e autovetores generalizado considerando apenas os modos mecânicos é escrito como:

$$(\mathbf{K}_{uu} - \omega_i^2 \mathbf{M}_{uu}) \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

onde ω_i e $\boldsymbol{\psi}_i$ são, respectivamente, a i -ésima frequência natural e seu correspondente autovetor. A equação do movimento pode ser reescrita em termos de coordenadas modais $\boldsymbol{\eta}$ utilizando a aproximação $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\eta}$, onde $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1 \ \boldsymbol{\psi}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\psi}_m]$ é a matriz modal contendo m modos representativos tal que $\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I}$. Se o sistema completo (contendo todos os modos da estrutura) for estável, esse tipo de truncamento produzirá um sistema que também será estável pois os polos do modelo reduzido são um subconjunto dos polos do modelo completo [Gawronski, 2004]. Conseqüentemente, um modelo estrutural truncado considerando um número reduzido de modos de vibração representativos pode ser empregado para compor a resposta dinâmica da estrutura, como:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Lambda}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{K}_{u\phi} \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f} \quad (3.5)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}$ é a matriz $m \times m$ diagonal de frequências naturais e a matriz de amortecimento modal é dada por:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag} \left(2\zeta_i \omega_i \right)_{i=1, \dots, m} \quad (3.6)$$

na qual ζ_i é a razão de amortecimento do i -ésimo modo de vibração.

A equação do movimento é escrita como um sistema linear de equações através da representação no espaço de estados, na forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{f}(t) + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\phi}(t) \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de estados, \mathbf{A} é a matriz do sistema, \mathbf{B}_1 é a matriz de entradas de forças mecânicas e \mathbf{B}_2 é a matriz de entradas de potenciais elétricos. A resposta do

sistema pode ser escrita em termos do vetor de estados como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.8)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de saídas. Esse sistema é representado por meio de um diagrama de blocos na Figura 3.3.

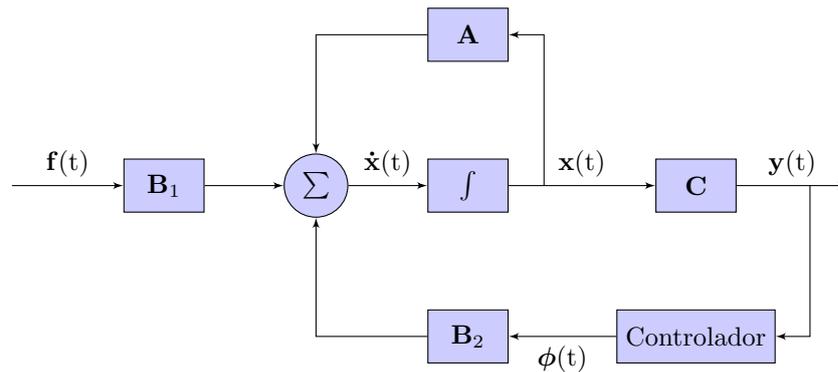


Figura 3.3 – Diagrama de blocos para o sistema representado no espaço de estados.

Considerando o vetor de estados escrito em termos dos deslocamentos e velocidade modais, as matrizes do sistema e de entradas são definidas como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -\Lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Psi^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Psi^T \mathbf{K}_u \phi \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{0}$ e \mathbf{I} são matrizes de zeros e identidade, respectivamente, com dimensões apropriadas ao sistema. A matriz de saída \mathbf{C} é escrita de acordo com o tipo de resposta que se deseja obter da estrutura.

As Equações de estado (3.7) e de saída (3.8) podem ser resolvidas por meio da discretização do sistema contínuo no tempo, como apresentado de forma detalhada no Apêndice D.3.

3.3 Índices de Controlabilidade

3.3.1 Definição de Controlabilidade

A análise de controlabilidade depende exclusivamente das matrizes do sistema e de entrada. Para o problema proposto neste capítulo, considera-se apenas as entradas do

sistema de controle. Assim, a equação de estados é reduzida para:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\phi(t) \quad (3.10)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s$ e $\phi \in \mathbb{R}^c$. A solução única para o sistema linear não homogêneo descrito na Equação 3.10 considerando a condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ é dada por [Brockett, 1970]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{T}(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{T}(t, \tau)\mathbf{B}_2\phi(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

onde $\mathcal{T}(\cdot)$ é a matriz de transição de estados do sistema. Assim, pode-se definir os espaços alcançável χ^+ e controlável χ^- para esse sistema, como representado na Figura 3.4. Para facilitar a interpretação gráfica da transição dos estados no tempo, utiliza-se uma representação simplificada contendo apenas duas variáveis de estado (e_1 e e_2).

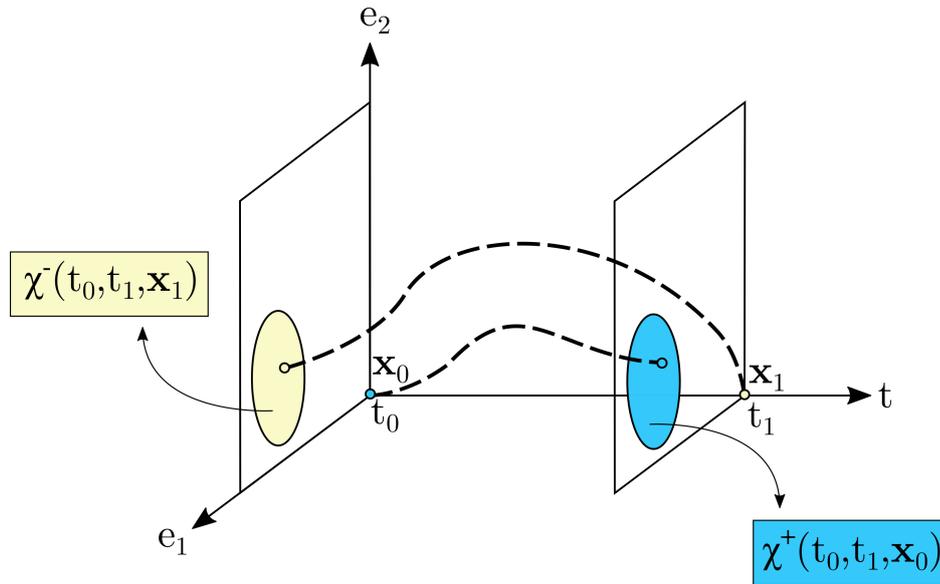


Figura 3.4 – Conjunto de estados controláveis e alcançáveis.

Considerando dois instantes de tempo $t_1 > t_0 \geq 0$, o espaço alcançável $\chi^+(t_0, t_1, \mathbf{x}_0)$ é definido pelo conjunto de todos estados \mathbf{x}_1 para os quais existe uma entrada $\phi(\cdot) \in \mathbb{R}^c$ que transfira o sistema da origem $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ para $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$, ou seja:

$$\chi^+(t_0, t_1, \mathbf{x}_0) = \left\{ \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^s : \exists \phi(\cdot), \mathbf{x}_1 = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{T}(t_1, \tau)\mathbf{B}_2\phi(\tau) d\tau \right\} \quad (3.12)$$

De forma análoga, considerando dois instantes de tempo $t_1 > t_0 \geq 0$, o espaço controlável $\chi^-(t_0, t_1, \mathbf{x}_1)$ é definido pelo conjunto de todos estados \mathbf{x}_0 para os quais existe uma entrada $\phi(\cdot) \in \mathbb{R}^c$ que transfira o sistema de $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ para a origem $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$, ou seja:

$$\chi^-(t_0, t_1, \mathbf{x}_1) = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^s : \exists \phi(\cdot), \mathcal{T}(t_1, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{T}(t_1, \tau) \mathbf{B}_2 \phi(\tau) d\tau = \mathbf{0} \right\} \quad (3.13)$$

Uma forma para se caracterizar esses espaços (alcançável e controlável) é através de Gramianos, definidos matematicamente como [Hespanha, 2015]:

$$\mathbf{W}^+(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{T}(t_1, \tau) \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathcal{T}(t_1, \tau)^T d\tau \quad (3.14)$$

$$\mathbf{W}^-(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{T}(t_0, \tau) \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathcal{T}(t_0, \tau)^T d\tau \quad (3.15)$$

Assim, se os Gramianos são conhecidos, pode-se calcular os espaços alcançável e controlável por meio de seus respectivos conjuntos imagem. Além disso, esses Gramianos são equivalentes quando se trata de sistemas contínuos e invariantes no tempo. Ou seja, se um sistema no qual o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ constante é alcançável, ele também será controlável [Chen, 1998; Hespanha, 2015]. A condição para que o sistema seja considerado controlável ou não está diretamente relacionada à existência do espaço χ^- . De forma matemática, o sistema é controlável se $\mathbf{W}^-(t_0, t_1)$ for não-singular para todo o intervalo de tempo analisado [Chen, 1998].

O fato de um sistema ser controlável indica apenas que as entradas são capazes de transferir as variáveis de um estado para outro em um intervalo finito de tempo. A trajetória realizada durante esse processo não influencia nessa condição de controlabilidade do sistema. Isso ocorre devido ao fato de que nenhuma restrição é imposta às entradas para a realização dessa transição de estados [Chen, 1998]. Assim, mesmo que um sistema seja considerado controlável, pode-se encontrar dificuldades (ou até mesmo impossibilidade) de realizar a transição de estados se a magnitude das entradas necessárias para esse processo for excessivamente grande. A definição de um sistema em termos desse teste de controlabilidade é útil para muitos casos, porém, quando se deseja trabalhar com a otimização de parâmetros desse sistema para garantir o máximo desempenho do controle, torna-se necessário a utilização de medidas quantitativas de controlabilidade. Porém, os Gramianos definidos nas Equações 3.14 e (3.15) também fornecem informações quantitativas referentes à controlabilidade do sistema, como será discutido na sequência da presente seção.

Como já discutido anteriormente, os espaços alcançável e controlável para sistemas

invariantes no tempo são equivalentes, como é o caso do problema proposto no presente capítulo. Quando o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ é constante ou invariável no tempo, pode-se escrever a matriz de transição de estados como [Hespanha, 2015]:

$$\mathcal{T}(t_0, \tau) = e^{\mathbf{A}(\tau-t_0)} \quad (3.16)$$

Considerando $t_0 = 0$ e a matriz de transição da Equação 3.16, pode-se escrever o Gramiano de controlabilidade $\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}^-(0, t)$ como:

$$\mathbf{W}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau \quad (3.17)$$

Além da forma integral, o Gramiano também pode ser convenientemente determinado através da seguinte equação diferencial [Gawronski, 2004]:

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{W}(t) + \mathbf{W}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \quad (3.18)$$

Para o sistema invariante no tempo, pode-se obter a solução estacionária para esse problema assumindo $\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{0}$. Assim, o Gramiano de controlabilidade $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\infty)$ pode ser calculado a partir de uma equação algébrica na forma de uma equação de Lyapunov, dada por [Gawronski, 2004]:

$$\mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

O sistema é considerado controlável se todos os estados do sistema podem ser excitados pelos atuadores. Essa condição é satisfeita se, e somente se, o Gramiano de controlabilidade \mathbf{W} for positivo definido [Gawronski, 2004; Preumont, 2011].

3.3.2 Problema de Mínima Energia de Controle

O problema de configuração ótima para os atuadores (ou de parâmetros do controlador) depende de como o movimento da estrutura é gerado. Na maioria das aplicações, a estrutura pode ser excitada por dois tipos de perturbação [Hać e Liu, 1993]:

- (i) Transiente: no qual o objetivo do sistema de controle é transferir as variáveis do estado perturbado para um dado estado desejado (em repouso, por exemplo) em um determinado intervalo de tempo;

- (ii) Persistente: no qual o sistema de controle deve minimizar os efeitos da perturbação no movimento da estrutura.

Considerando o projeto de atuadores para aplicações sob condição de perturbação transiente, deve-se maximizar alguma norma do Gramiano de controlabilidade para que a energia de controle seja minimizada. Por outro lado, para aplicações sob perturbação persistente, a energia transmitida dos atuadores para o sistema, em estado permanente, deve ser maximizada para que o sistema de controle apresente o máximo desempenho possível. Entretanto, para sistemas com baixo amortecimento e frequências naturais bem espaçadas, qualquer um desses critérios pode ser empregado para o projeto de atuadores, independente do tipo de perturbação [Hać e Liu, 1993; Leleu et al., 2001].

Considerando que ao sistema descrito na Equação 3.10 seja imposta uma condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ em decorrência de alguma perturbação, o projeto ótimo para um atuador será aquele com o qual a energia de controle \mathcal{F} necessária para transferir o sistema a um estado desejado $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$, em um intervalo de tempo t_1 , seja minimizada. Essa condição pode ser satisfeita considerando o seguinte problema de mínima energia [Middleton e Goodwin, 1990]:

$$\begin{aligned} \min : \quad & \mathcal{F}(\phi(t)) = \int_0^{t_1} \phi^T(t)\phi(t) dt \\ \text{sujeito a :} \quad & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\phi(t) \\ & : \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ & : \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Esse é um problema de controle ótimo Linear Quadrático (LQ) com solução conhecida [Hać e Liu, 1993]. Dessa forma, utilizando a definição de Gramiano de controlabilidade, a energia de controle pode ser escrita como:

$$\mathcal{F}_{\min} = (e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)^T \mathbf{W}^{-1}(t_1) (e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1). \quad (3.21)$$

A partir dessa solução, observa-se que alguma norma de \mathbf{W}^{-1} deve ser minimizada para que a energia de controle necessária para transferir o sistema do estado \mathbf{x}_0 para \mathbf{x}_1 em um intervalo de tempo t_1 seja a mínima. Entretanto, esse problema depende do intervalo de tempo t_1 , relacionado com velocidade de resposta desejada, que é, provavelmente, desconhecida nessa etapa inicial de projeto. Para eliminar a dependência do tempo,

considera-se a solução do Gramiano para o estado estacionário:

$$\mathbf{W}(\infty) = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau = \mathbf{W}(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau \quad (3.22)$$

Assim, o Gramiano de controlabilidade para o intervalo de tempo até t_1 pode ser escrito como [Hać e Liu, 1993]:

$$\mathbf{W}(t_1) = \mathbf{W}(\infty) - e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{W}(\infty) e^{\mathbf{A}^T t_1} \quad (3.23)$$

Nota-se que o termo $e^{\mathbf{A}t_1}$ não depende da natureza do atuador que é empregado nesse problema. Além disso, para um sistema assintoticamente estável, tem-se que $\|e^{\mathbf{A}t_1}\| \rightarrow \mathbf{0}$ quando $t_1 \rightarrow \infty$ [Hać e Liu, 1993]. Essa é uma característica de sistemas dinâmicos homogêneos de segunda ordem, cujas respostas apresentam componentes oscilatórios envoltos sob funções exponenciais decrescentes. Conseqüentemente, pode-se afirmar que a norma de $\mathbf{W}(t_1)$ também é maximizada ao se maximizar a norma de $\mathbf{W}(\infty)$, resultando assim em uma solução de mínima energia de controle \mathcal{F}_{\min} . A norma de Frobenius para o Gramiano de controlabilidade pode ser escrita como:

$$\|\mathbf{W}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2m} |w_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2m} S_i^2(\mathbf{W})} \quad (3.24)$$

onde $S_i(\mathbf{W})$ são os valores singulares de \mathbf{W} . Cada valor singular S_i se refere à controlabilidade de uma variável de espaço específica. Como o Gramiano de controlabilidade é uma matriz simétrica e positiva definida, seus autovalores são $\lambda_i = S_i$.

Tendo como objetivo o controle de um modo de vibração específico, pode-se definir índices de controlabilidade modal a partir do Gramiano $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\infty)$. Para isso, considera-se o seguinte problema de autovalores e autovetores:

$$\mathbf{W}\mathbf{V}_i = \lambda_i \mathbf{V}_i \quad (3.25)$$

onde λ_i é o i -ésimo autovalor do Gramiano de controlabilidade, \mathbf{V}_i é o autovetor associado à λ_i e \mathbf{I} é a matriz identidade. Como o vetor de estados foi definido em termos de deslocamentos e velocidades modais, a solução desse problema fornece uma matriz diagonal na forma:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda}_v \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

onde:

$$\boldsymbol{\lambda}_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\lambda}_v = \begin{bmatrix} \lambda_{m+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{m+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{2m} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

contêm os índices de controlabilidade para os deslocamentos e velocidades modais, respectivamente. Tendo em vista a solução apresentada na Equação 3.21, espera-se que a energia de controle necessária para levar a i -ésima variável de estado para a origem, ou seja, $e_i(t_1) = 0$, seja minimizada ao se maximizar o i -ésimo autovalor de \mathbf{W} .

Se o modelo modal truncado considerar m modos de vibração representativos, o Gramiano de controlabilidade terá dimensão $2m \times 2m$ e, conseqüentemente, $2m$ autovalores. Seguindo a notação apresentada na Equação 3.26, os autovalores λ_i com $i = 1, \dots, m$ são organizados na matriz $\boldsymbol{\lambda}_d$ que representa os índices de controlabilidade para os deslocamentos nodais. Esses termos têm uma relação direta com a energia potencial do sistema, enquanto que a matriz $\boldsymbol{\lambda}_v$ que contém os autovalores λ_i com $i = m + 1, \dots, 2m$ tem uma relação direta com a energia cinética. Dessa forma, índices modais são definidos em termos dos autovalores contidos em $\boldsymbol{\lambda}_v$ e, doravante no presente texto, o autovalor $\tilde{\lambda}_i = \boldsymbol{\lambda}_v(i, i)$ será denominado como índice de controlabilidade para o i -ésimo modo de vibração da estrutura.

3.4 Formulação do Problema de Otimização

Como discutido anteriormente, o problema de mínima energia de controle está diretamente relacionado com a maximização de alguma norma do Gramiano de controlabilidade. Entretanto, o objetivo do projeto de atuadores piezoelétricos proposto neste trabalho busca garantir que o desempenho do sistema de controle seja maximizado considerando a atenuação das vibrações para um modo de vibração específico. Assim, a formulação do problema de otimização é escrita em termos do autovalor $\tilde{\lambda}_i(\mathbf{W})$, que é:

- inversamente proporcional à energia de controle necessária para realizar a transição

de um estado inicial perturbado $e_i(0) = e_0$ para a origem $e_i(t_1) = 0$ em um intervalo finito de tempo t_1 ;

- diretamente proporcional à energia transmitida dos atuadores para a estrutura considerando os estados individuais [Hać e Liu, 1993].

Essas características indicam que a utilização desses índices de controlabilidade é adequada para o projeto de atuadores, considerando ambos os problemas de vibrações livres e forçadas.

A solução do problema de otimização é formada por um conjunto de variáveis de projeto que maximizam uma determinada função objetivo. Após a discretização do domínio em elementos finitos, a variável de projeto $\rho = \rho(x, y)$, que indica a presença de material piezoelétrico, se torna ρ_e na qual o índice se refere ao e -ésimo elemento. Baseado no método SIMP [Bendsøe e Sigmund, 1999], as constantes elásticas $c_{ij}(\rho_e)$ e a densidade $\gamma(\rho_e)$, interpoladas para o e -ésimo elemento, são expressas por:

$$c_{ij}(\rho_e) = \rho_e^{p_0} \overline{c}_{ij}(\mathcal{M}_a) + (1 - \rho_e^{p_0}) \overline{c}_{ij}(\mathcal{M}_b) \quad (3.28)$$

$$\gamma(\rho_e) = \rho_e \overline{\gamma}(\mathcal{M}_a) + (1 - \rho_e) \overline{\gamma}(\mathcal{M}_b) \quad (3.29)$$

onde $\overline{c}_{ij}(\mathcal{M}_a)$ e $\overline{\gamma}(\mathcal{M}_a)$ são, respectivamente, as constantes elásticas e densidade para o material piezoelétrico; $\overline{c}_{ij}(\mathcal{M}_b)$ e $\overline{\gamma}(\mathcal{M}_b)$ são, respectivamente, as constantes elásticas e densidade para o material base da estrutura. De forma análoga, as propriedades piezoelétricas $d_{ij}(\rho_e)$ e dielétricas $e_{ij}(\rho_e)$ são escritas de acordo com o modelo PEMAP [Silva e Kikuchi, 1999], como:

$$d_{ij}(\rho_e) = \rho_e^{p_1} \overline{d}_{ij}(\mathcal{M}_a) \quad (3.30)$$

$$e_{ij}(\rho_e) = \rho_e^{p_2} \overline{e}_{ij}(\mathcal{M}_a) \quad (3.31)$$

onde $\overline{d}_{ij}(\mathcal{M}_a)$ e $\overline{e}_{ij}(\mathcal{M}_a)$ são, respectivamente, as propriedades piezoelétricas e dielétricas do material piezoelétrico; p_0 , p_1 e p_2 são expoentes de penalização do modelo material.

Considerando o vetor de solução $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_N\}$, o problema de otimização topológica deve calcular $\boldsymbol{\rho}$ de forma que maximize uma função objetivo f , sujeita a restrições de desigualdade representadas por funções g_i e restrições laterais para as variáveis

de projeto. Assim, o problema de otimização pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\rho}} : \quad & f = \tilde{\lambda}_i(\mathbf{W}) \\ \text{sujeito a :} \quad & g_1 = \frac{\sum_{e=1}^N \rho_e}{V} - C_V \leq 0 \\ & : \quad 0 \leq \rho_e \leq 1 \quad e = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $\tilde{\lambda}_i(\mathbf{W})$ é o índice de controlabilidade para a i -ésimo modo de vibração, C_V é o limite para o volume do material piezoelétrico e N é o número de elementos.

Deve-se notar que todos os autovalores de \mathbf{W} são números reais positivos visto que o Gramiano de controlabilidade é uma matriz positiva definida. Entretanto, como essa formulação visa à maximização da controlabilidade para um modo de vibração específico, pode-se encontrar soluções com as quais algum outro modo seja pouco controlável. Caso se deseje contornar esse problema, alterações na formulação como, por exemplo, maximizar o traço [Silveira et al., 2015] ou o menor autovalor [Gonçalves et al., 2016] do Gramiano podem aumentar a eficiência do sistema de controle para uma banda de frequência mais larga. Outro problema que pode prejudicar o desempenho do sistema de controle é a interação do controlador com os modos residuais da estrutura. Esse fenômeno, usualmente chamado de *spillover* [Preumont, 2011], pode levar, em casos extremos, à instabilidade do sistema tornando impossível a aplicação do controle ativo para atenuar as vibrações de uma estrutura. Esse problema será discutido com mais detalhes Capítulo 5, onde uma restrição visando à limitação desses efeitos em um sistema com realimentação de estados é incorporada à formulação proposta para o projeto de atuadores piezoelétricos.

3.5 Análise de Sensibilidade

Nesta seção, deduz-se expressões matemáticas que permitem realizar o cálculo analítico da sensibilidade para a função objetivo com respeito às variáveis de projeto e, conseqüentemente, a obtenção da solução do problema de otimização através de algoritmos de primeira ordem.

Inicialmente, considera-se o problema de autovalores e autovetores apresentado na Equação 3.25. Pré-multiplicando essa equação por $\tilde{\mathbf{V}}_i^T = \mathbf{V}_{i+m}^T$, obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{V}}_i^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{V}}_i = \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{V}}_i^T \tilde{\mathbf{V}}_i \quad (3.33)$$

Assim, a sensibilidade da função objetivo $f = \tilde{\lambda}_i$, com respeito à e -ésima variável de projeto, é dada por:

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_i}{\partial \rho_e} = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \rho_e} \right) \tilde{\mathbf{V}}_i}{\tilde{\mathbf{V}}_i^T \tilde{\mathbf{V}}_i} \quad (3.34)$$

onde $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \rho_e}$ é a solução de uma nova equação de Lyapunov, escrita como:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \rho_e} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_d = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

com:

$$\mathbf{Q}_d = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_e} \mathbf{W} + \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \rho_e} \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \mathbf{B}_2^T}{\partial \rho_e} \quad (3.36)$$

Todos os termos das Equações 3.35 e 3.36 são obtidos a partir da solução da análise modal e subsequente representação no espaço de estados, com exceção das derivadas do par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$, que são facilmente calculadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \Omega^2}{\partial \rho_e} & -\frac{\partial \Lambda}{\partial \rho_e} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \rho_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \Psi^T}{\partial \rho_e} \mathbf{K}_{u\phi} - \Psi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_e} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Nessa etapa da análise de sensibilidade, necessita-se do conhecimento das derivadas do problema de elementos finitos e da análise modal, cujas deduções estão apresentadas com detalhes no Apêndice C. A sensibilidade com relação a esses termos depende diretamente do modelo material que foi adotado para interpolar as propriedades dos elementos finitos, de acordo a distribuição das variáveis de projeto. Assim, o ponto de partida para o cálculo da sensibilidade do problema de otimização proposto é a avaliação das derivadas das Equações 3.28 a 3.31 com respeito às variáveis de projeto:

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial \rho_e} = p_0 \rho_e^{p_0-1} (\overline{c_{ij}}(\mathcal{M}_a) - \overline{c_{ij}}(\mathcal{M}_b)) \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho_e} = \overline{\gamma}(\mathcal{M}_a) - \overline{\gamma}(\mathcal{M}_b) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial \rho_e} = p_1 \rho_e^{p_1-1} \overline{d_{ij}}(\mathcal{M}_a) \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial \rho_e} = p_2 \rho_e^{p_2-1} \overline{e_{ij}}(\mathcal{M}_a) \quad (3.41)$$

3.6 Projetos Otimizados de Atuadores Piezoelétricos

Nesta seção, a formulação proposta para o projeto de atuadores piezoelétricos é analisada por meio de um numérico. A geometria da estrutura analisada no problema de otimização é apresentada na Figura 3.5(a), na qual as dimensões estão em milímetros. A estrutura é discretizada em 1600 ($80 \times 20 \times 1$) elementos finitos hexaédricos de 8 nós, como apresentado na Figura 3.5(b). Como cada nó possui 4 graus de liberdade (três deslocamentos e um potencial elétrico), o problema apresenta um total de 20200 graus de liberdade antes da aplicação das condições de contorno, sendo 5050 referentes aos potenciais elétricos do problema.

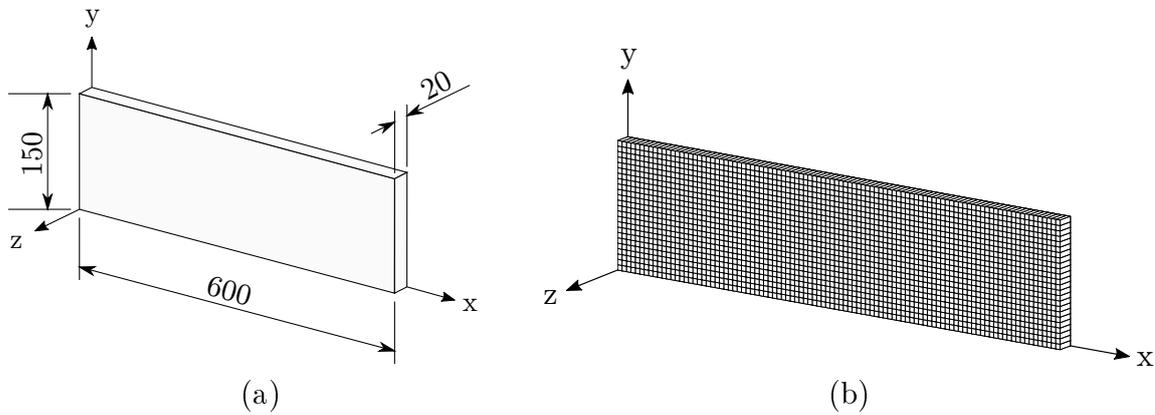


Figura 3.5 – Estrutura analisada: (a) dimensões e (b) malha.

As condições de contorno para os dois exemplos estudados, (A) viga em balanço e (B) viga bi-engastada, são representadas na Figura 3.6.

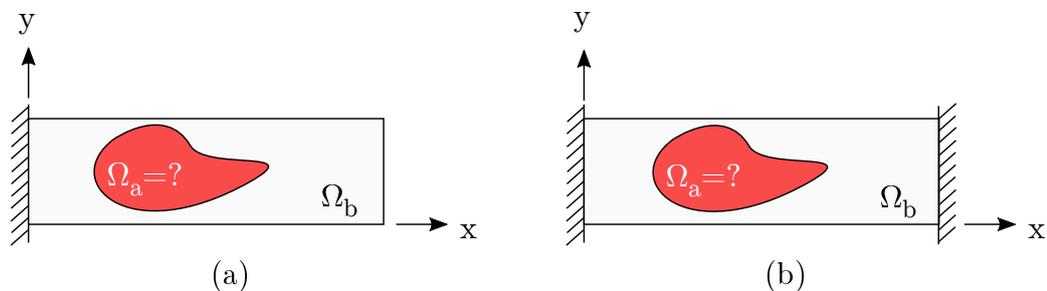


Figura 3.6 – Representação dos exemplos analisados: (a) Exemplo A e (b) Exemplo B.

A face com coordenadas $z = 0$ é considerada como aterrada. Dessa forma, os graus de liberdade elétricos dos nós presentes nessa face são nulos e, por praticidade, são

retirados do problema. A face com coordenadas $z = 20$ mm é denominada de potencial, na qual o potencial elétrico é prescrito de acordo com o sinal calculado por meio da lei de controle. Assume-se que todos os nós dessa face tenham o mesmo valor de potencial elétrico prescrito. Assim, considera-se apenas um nó de referência para o problema de elementos finitos, e o valor prescrito nesse nó é simplesmente replicado para os demais. Dessa forma, reduz-se significativamente as dimensões das matrizes de acoplamento piezoelétrico e dielétrica.

O material dos atuadores piezoelétricos é uma cerâmica PZT, abreviação para titanato zirconato de chumbo, do tipo 5A, que apresenta alta sensibilidade, permissividade e estabilidade. Para essa fase material, o tensor constitutivo é considerado como [Rubio et al., 2009]:

$$\bar{c}_{ij}(\mathcal{M}_a) = \begin{bmatrix} 1,210 & 0,754 & 0,752 & 0 & 0 & 0 \\ 0,754 & 1,210 & 0,752 & 0 & 0 & 0 \\ 0,752 & 0,752 & 1,110 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,211 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,211 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,226 \end{bmatrix} \times 10^{11} \text{N/m}^2 \quad (3.42)$$

As propriedades de acoplamento piezoelétrico e dielétricas são, respectivamente, consideradas como [Rubio et al., 2009]:

$$\bar{d}_{ij}(\mathcal{M}_a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12,3 & 0 & 0 \\ -5,4 & -5,4 & 15,8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{C/m}^2 \quad (3.43)$$

$$\bar{e}_{ij}(\mathcal{M}_a) = \begin{bmatrix} 0,811 & 0 & 0 \\ 0 & 0,811 & 0 \\ 0 & 0 & 0,735 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{F/m} \quad (3.44)$$

Para o material dos atuadores, considera-se densidade $\bar{\gamma}(\mathcal{M}_a) = 7750 \text{ kg/m}^3$.

O material base da estrutura é alumínio com módulo de elasticidade $E = 71 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$. Dessa forma, pode-se calcular o tensor constitutivo $\bar{c}_{ij}(\mathcal{M}_b)$ para um material linear isotrópico. Para a estrutura base, considera-se densidade

$$\bar{\gamma}(\mathcal{M}_b) = 2700 \text{ kg/m}^3.$$

Apenas os modos de flexão no plano xy são considerados no processo de otimização, como apresentado na Figura 3.7. Os valores das frequências naturais incluídos nessa figura se referem à análise modal da estrutura base, ou seja, estrutura formada apenas por alumínio sem a presença de material piezoeétrico.

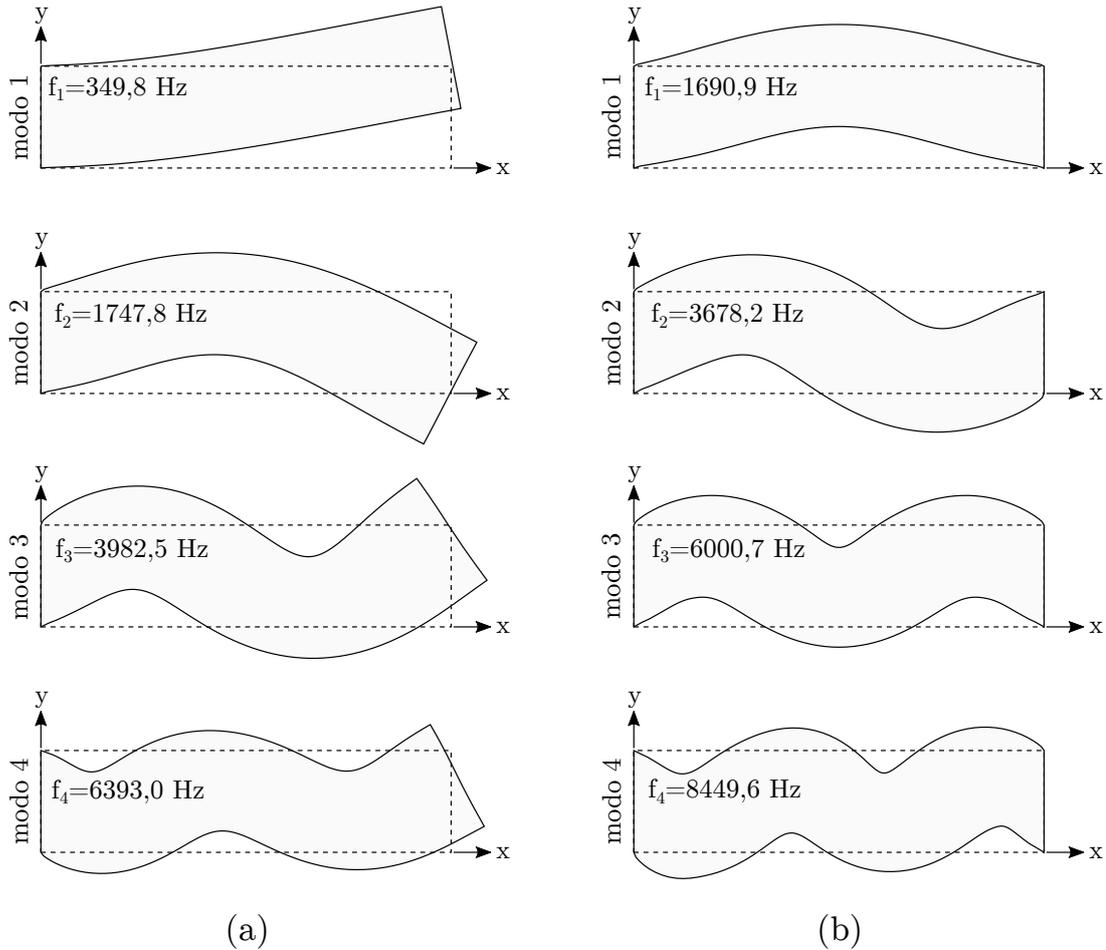


Figura 3.7 – Modos de vibração considerados no processo de otimização.

O objetivo do problema de otimização é encontrar o domínio Ω_a que maximize a controlabilidade para cada um dos quatro primeiros modos de vibração da estrutura. Esse domínio pode ser definido por meio da interpretação do conjunto de variáveis de projeto $\boldsymbol{\rho}$, levando variáveis de projeto intermediárias para 0 ou 1. Os critérios de parada para o processo de otimização levam em consideração os valores das variáveis de projeto e da função objetivo para a iteração atual (k) e anterior ($k - 1$), da seguinte forma:

$$\max \{ |\boldsymbol{\rho}^{(k)} - \boldsymbol{\rho}^{(k-1)}| \} \leq t_\rho \quad (3.45)$$

$$\left| \frac{f^{(k)}}{f^{(k-1)}} - 1 \right| \leq t_f \quad (3.46)$$

onde t_ρ é a tolerância para a máxima variação das variáveis de projeto e t_f é a tolerância para a variação da função objetivo. O problema de otimização é considerado como tendo convergido apenas se ambos os critérios são satisfeitos de forma simultânea. O fluxograma para esse processo de otimização é apresentado na Figura 3.8.

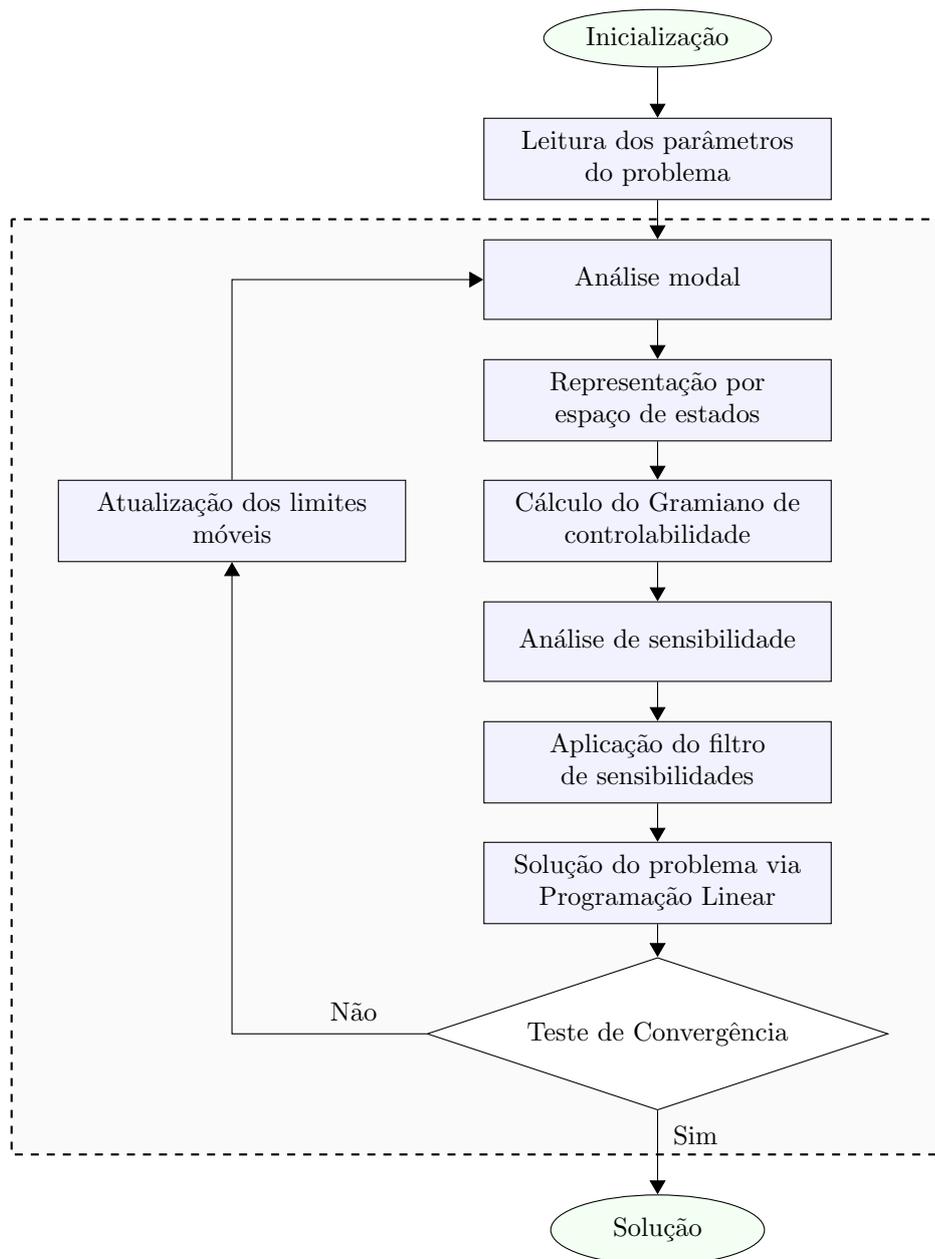


Figura 3.8 – Fluxograma para o processo de otimização da topologia do atuador piezoelétrico.

Na Tabela 3.1, são apresentados os parâmetros utilizados para resolver o problema de otimização topológica.

Tabela 3.1 – Parâmetros utilizados na solução dos problemas numéricos.

Malha de elementos finitos	
N	1600
Parâmetros do problema de otimização	
C_V	0,12
r_{min} [m]	0,012
p_0	3
p_1	3
p_2	3
t_ρ	0,02
t_f	0,0005
Inicialização das variáveis de projeto	
ρ_e (para $e = 1, 2, \dots, N$)	C_V

Na Figura 3.9, as convergências dos índices de controlabilidade $\tilde{\lambda}_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ são apresentadas considerando o projeto dos atuadores piezoelétricos para os dois exemplos.

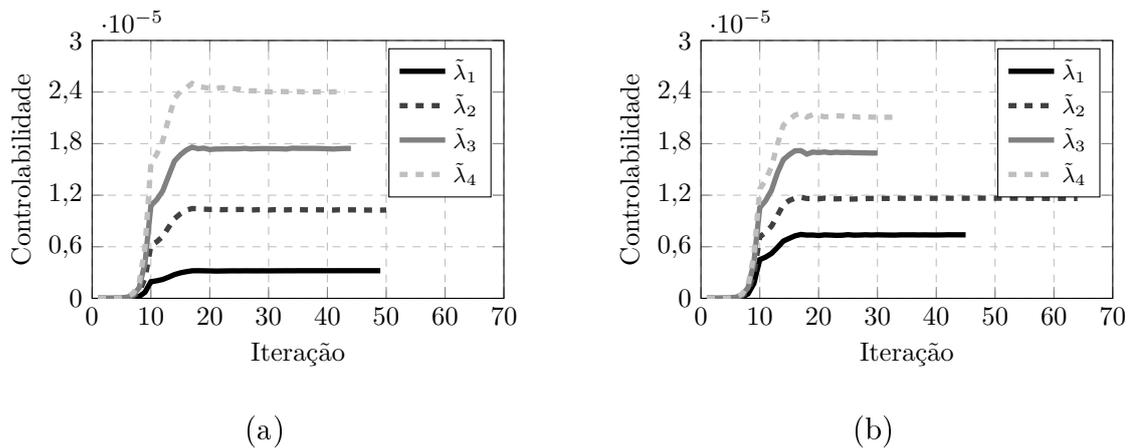


Figura 3.9 – Convergência da função objetivo para a maximização da controlabilidade do: (a) Exemplo A e (b) Exemplo B.

As topologias otimizadas para os atuadores piezoelétricos considerando a controlabilidade para os quatro primeiros modos de vibração da estrutura são apresentadas na Figura 3.10.

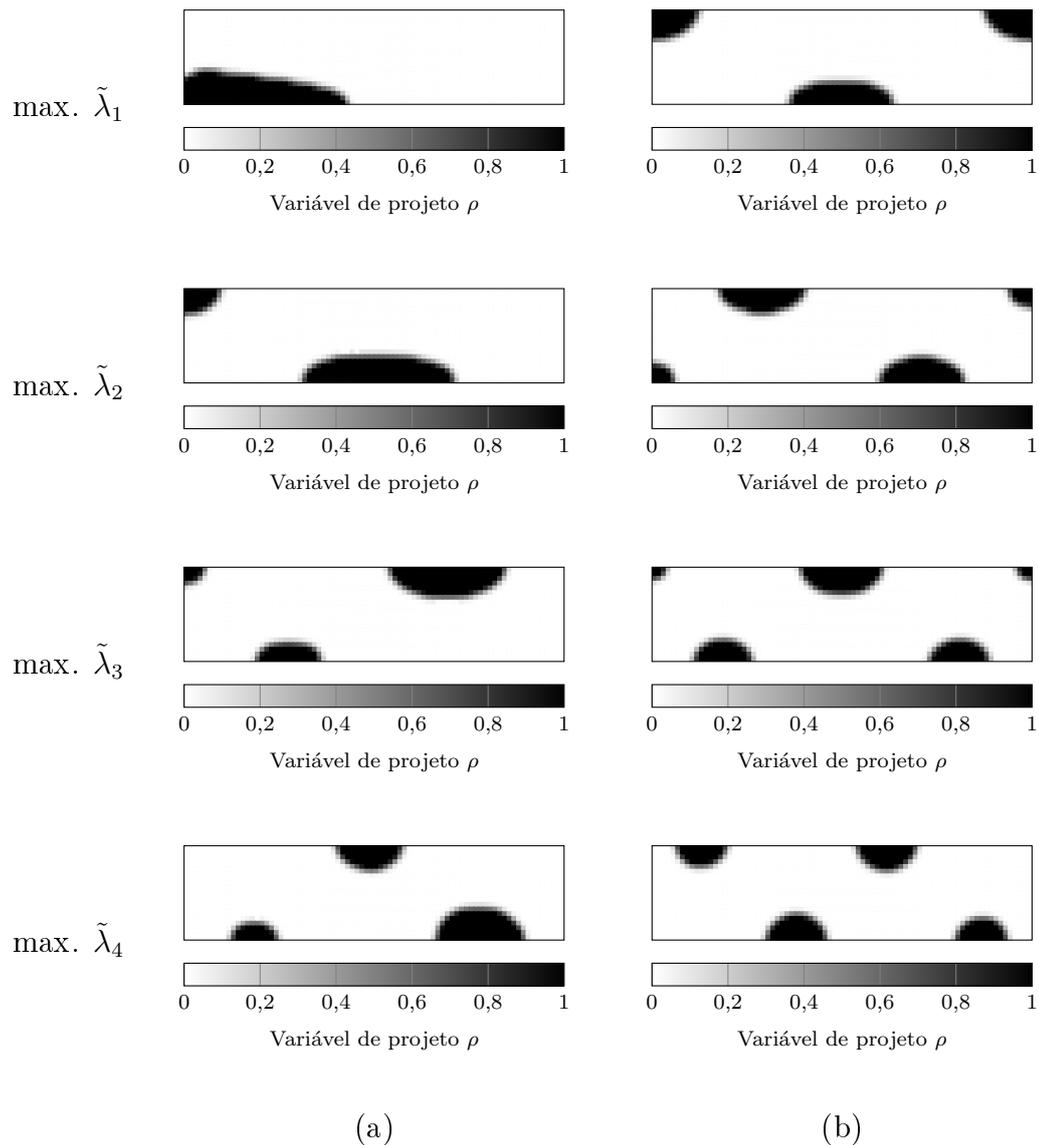


Figura 3.10 – Solução do problema de otimização topológica para a maximização da controlabilidade do: (a) Exemplo A e (b) Exemplo B.

Os resultados referentes ao desempenho do sistema de controle quando empregando os atuadores piezoelétricos projetados através dessa formulação serão apresentados e discutidos nos dois capítulos subsequentes. Assim, esses resultados serão tratados como referência para futuras comparações.

A partir da formulação proposta e analisada no presente capítulo, duas modificações serão apresentadas e discutidas a seguir:

- Inclusão do perfil de polarização dos atuadores como variável no processo de otimização;

- Análise e limitação dos efeitos de *spillover* para os atuadores projetados.

A primeira proposta de modificação tem como objetivo alcançar uma melhoria no desempenho dos atuadores, através da definição de um perfil de polarização otimizado para o material piezoelétrico. Assim, torna-se possível a geração de campos de deformação tanto de compressão como de tração, em diferentes pontos da estrutura, através da aplicação do mesmo sinal de controle para o conjunto de atuadores. A consideração de um limite para excitação dos modos residuais, considerando um sistema de controle por realimentação de estados, será o escopo da segunda modificação nessa formulação. Limitando a controlabilidade dos modos residuais, pretende-se amenizar seus efeitos na resposta dinâmica do sistema realimentado.

4 OTIMIZAÇÃO SIMULTÂNEA DA TOPOLOGIA E DO PERFIL DE POLARIZAÇÃO DO ATUADOR PIEZOELÉTRICO

Nesta etapa do trabalho, busca-se incluir a otimização do perfil de polarização do material piezoelétrico na etapa de projeto dos atuadores por meio do método de otimização topológica. Tendo como base a formulação proposta no capítulo anterior, o modelo material é modificado para levar em consideração uma variável adicional, utilizada para designar a direção de polarização do atuador. São apresentadas as adequações necessárias para reescrever o problema de otimização, assim como as modificações que precisam ser consideradas na análise de sensibilidade para a solução do problema de otimização simultânea. Por fim, os desempenhos dos atuadores projetados por meio da formulação simultânea são analisados e comparados, tendo como referência os projetos otimizados apresentados no Capítulo 3.

4.1 Definição do problema

Para formular o problema de otimização simultânea da topologia e polarização dos atuadores piezoelétricos, considera-se, inicialmente, o problema definido no Capítulo 3. Assim, a relação do domínio físico $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_a$ se mantém válida, porém a parcela Ω_a também é dividida em duas partes:

- Domínio Ω_p : indica a presença de material piezoelétrico com polarização na direção z positiva;
- Domínio Ω_n : indica a presença de material piezoelétrico com polarização na direção z negativa.

A definição desses domínios é realizada com auxílio de dois tipos de variável de projeto, designados por ρ e φ , como representado na Figura 4.1. A variável de projeto ρ continua indicando a presença de material piezoelétrico ou base, como definidos anteriormente.

Analisando o comportamento do material na direção da espessura, como representado na Figura 4.2, observa-se o alongamento do material piezoelétrico na direção z se um campo elétrico for aplicado na mesma direção de \mathbf{P}_d , comprimindo a estrutura no plano xy em decorrência do efeito Poisson. Considerando o mesmo sinal de controle aplicado no par de eletrodos, o material piezoelétrico com polarização negativa será comprimido

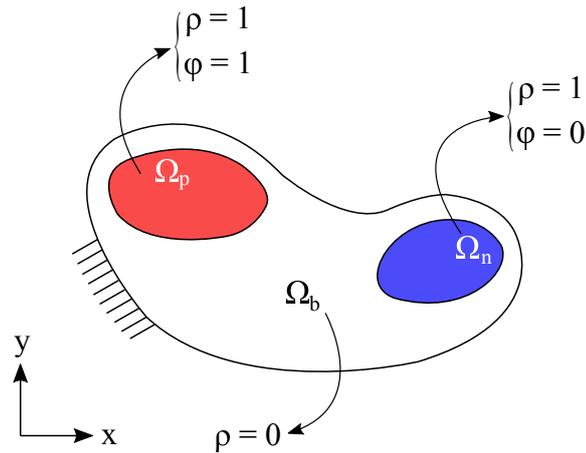


Figura 4.1 – Representação de uma estrutura genérica com atuadores piezoelétricos de diferentes polarizações.

na direção z , induzindo trações no plano xy da estrutura. Dessa forma, campos de deformação de tração e compressão são gerados em diferentes pontos do domínio, com apenas uma entrada no sistema de controle.

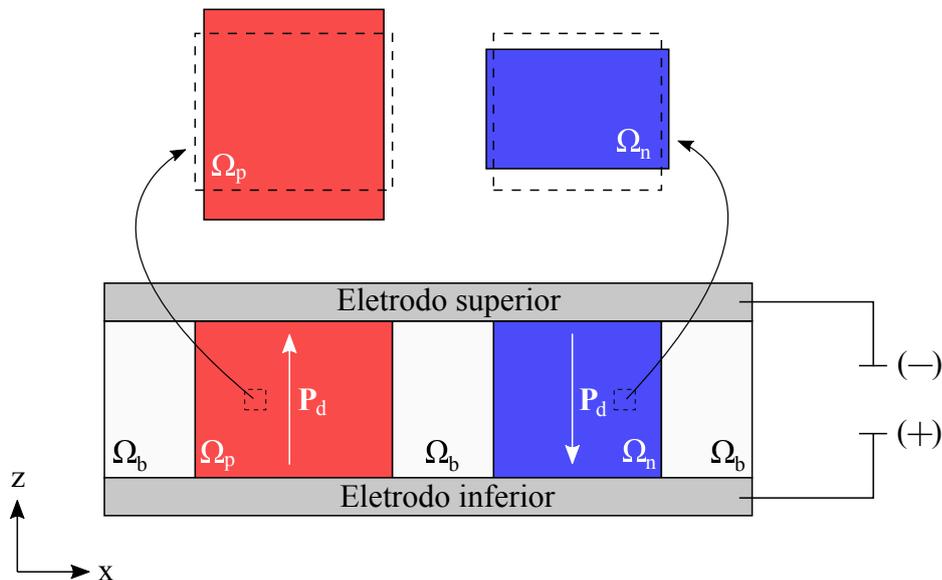


Figura 4.2 – Comportamento dos atuadores piezoelétricos na direção da espessura quando submetido a um campo elétrico externo.

A relação constitutiva anteriormente empregada no problema proposto no Capítulo 3 pode ainda ser considerada para relacionar as tensões mecânicas σ_i e os deslocamentos elétricos D_i com o campo de deformações ε_i e campo elétrico E_i . Entretanto, as propriedades elásticas, piezoelétricas e dielétricas devem ser escritas também em termos

da nova variável de projeto, ou seja:

$$c_{ij}(\rho(x, y)) \quad d_{ij}(\rho(x, y), \varphi(x, y)) \quad e_{ij}(\rho(x, y), \varphi(x, y)) \quad (4.1)$$

Como não houve alteração na lei constitutiva, o princípio variacional de Hamilton estendido para o meio piezoelétrico e a subsequente formulação do modelo de elementos finitos para piezoelectricidade seguem o mesmo procedimento anteriormente discutido, estando apresentado com mais detalhes nos apêndices A e B.

4.2 Formulação do Problema de Otimização Simultânea

Todas as premissas discutidas anteriormente sobre a relação do Gramiano de controlabilidade com a energia mínima de controle continuam válidas para o presente problema. Dessa forma, apenas pequenas adequações devem ser realizadas para incorporar a dependência da segunda variável de projeto acrescentada ao problema.

A solução do problema de otimização é formada por dois conjuntos de variáveis de projeto que maximizam uma determinada função objetivo. Após a discretização do domínio em elementos finitos, as variáveis de projeto $\rho(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ se tornam ρ_e e φ_e , com o índice e se referindo ao e -ésimo elemento. O mesmo modelo material baseado no SIMP pode ser empregado para interpolar as constantes elásticas $c_{ij}(\rho_e)$ e a densidade $\gamma(\rho_e)$, como apresentado nas Equações 3.28 e 3.29. Entretanto, para a interpolação das propriedades piezoelétricas e dielétricas, torna-se necessário considerar as variáveis de projeto φ_e . Para isso, considera-se o modelo *Piezoelectric Material with Penalization and Polarization* (PEMAP-P) proposto por Kögl e Silva, 2005. Essa abordagem constitui uma extensão do modelo PEMAP, na qual a polarização do material piezoelétrico é incluída na interpolação como:

$$d_{ij} = \rho_e^{p_0} (2\varphi_e - 1)^{p_1} \overline{d_{ij}}(\mathcal{M}_a) \quad (4.2)$$

$$e_{ij} = \rho_e^{p_0} (2\varphi_e - 1)^{p_2} \overline{e_{ij}}(\mathcal{M}_a) \quad (4.3)$$

onde p_0 , p_1 e p_2 são expoentes de penalização do modelo material. Na Figura 4.3, apresenta-se graficamente a interpolação de d_{ij} , em função da variável de projeto de polarização φ_e , através do modelo PEMAP-P para diferentes expoentes de penalização, considerando que o material é totalmente piezoelétrico, ou seja, $\rho_e = 1$. Comportamento

similar ocorre na interpolação de e_{ij} se os mesmos valores forem considerados para o expoente p_2 .

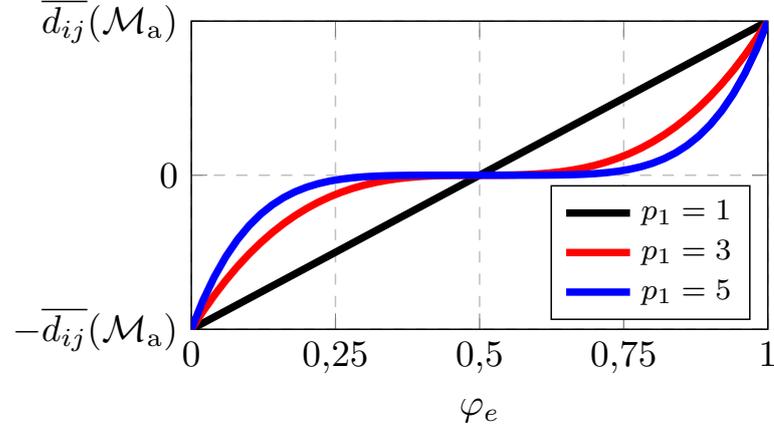


Figura 4.3 – Comportamento dos atuadores piezoelétricos na direção da espessura quando submetido a um campo elétrico externo.

Considerando os vetores de solução $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_N\}$ e $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_N\}$, o problema de otimização topológica deve fornecer $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\varphi}$ que maximizem uma função objetivo f , sujeito a restrições de desigualdade representadas por funções g_i e restrições laterais para as variáveis de projeto. Assim, o problema de otimização pode ser escrito como [Gonçalves et al., 2018a]:

$$\begin{aligned}
 \max_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}} : \quad & f = \tilde{\lambda}_i(\mathbf{W}) \\
 \text{sujeito a :} \quad & g_1 = \frac{\sum_{e=1}^N \rho_e}{V} - C_V \leq 0 \\
 & : 0 \leq \rho_e \leq 1 \quad e = 1, 2, \dots, N \\
 & : 0 \leq \varphi_e \leq 1 \quad e = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $\tilde{\lambda}_i(\mathbf{W})$ é o índice de controlabilidade para o i -ésimo modo de vibração, C_V é o limite para o volume do material piezoelétrico e N é o número de elementos. Nenhuma restrição é imposta para a distribuição de $\sum_{e=1}^N \varphi_e$. Entretanto, os valores de φ_e para elementos com $\rho_e = 0$ não têm significado físico, visto que não é necessário definir uma direção de polarização para elementos com propriedades piezoelétricas e dielétricas nulas.

4.3 Análise de Sensibilidade

As sensibilidades para os índices de controlabilidade $\tilde{\lambda}_i$, Gramiano de controlabilidade \mathbf{W} e parâmetros da representação no espaço de estados $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ com respeito às variáveis de projeto φ_e são equivalentes às relações apresentadas nas Equações 3.33-3.37 para as sensibilidades $\frac{\partial(\cdot)}{\partial\rho_e}$. Como apenas o modelo material foi modificado, as derivadas das propriedades interpoladas devem ser deduzidas novamente considerando a inclusão da variável de projeto incluída para indicar a polarização do material piezoelétrico.

Para facilitar a apresentação das sensibilidades do modelo material, define-se uma variável v que pode representar tanto ρ_e ou φ_e . Assim, a derivada das propriedades elásticas e densidade com respeito às variáveis de projeto são dadas por:

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial v} = \begin{cases} p_0 \rho_e^{p_0-1} (\overline{c}_{ij}(\mathcal{M}_a) - \overline{c}_{ij}(\mathcal{M}_b)) & \text{se } v = \rho_e \\ 0 & \text{se } v = \varphi_e \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v} = \begin{cases} \overline{\gamma}(\mathcal{M}_a) - \overline{\gamma}(\mathcal{M}_b) & \text{se } v = \rho_e \\ 0 & \text{se } v = \varphi_e \end{cases} \quad (4.6)$$

Para o modelo PEMAP-P, as sensibilidades das propriedades piezoelétricas e dielétricas são obtidas por:

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial v} = \begin{cases} p_0 \rho_e^{p_0-1} (2\varphi_e - 1)^{p_1} \overline{d}_{ij}(\mathcal{M}_a) & \text{se } v = \rho_e \\ 2p_1 \rho_e^{p_0} (2\varphi_e - 1)^{p_1-1} \overline{d}_{ij}(\mathcal{M}_a) & \text{se } v = \varphi_e \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial v} = \begin{cases} p_0 \rho_e^{p_0-1} (2\varphi_e - 1)^{p_2} \overline{e}_{ij}(\mathcal{M}_a) & \text{se } v = \rho_e \\ 2p_2 \rho_e^{p_0} (2\varphi_e - 1)^{p_2-1} \overline{e}_{ij}(\mathcal{M}_a) & \text{se } v = \varphi_e \end{cases} \quad (4.8)$$

4.4 Resultados numéricos

Nesta seção, a formulação proposta para o projeto simultâneo da topologia e polarização dos atuadores piezoelétricos é analisada por meio de dois exemplos numéricos: (A) viga em balanço e (B) viga bi-engastada, como representado na Figura 4.4. Os domínios

Ω_p e Ω_n representam a fase piezoelétrica (PZT-5A) com polarizada na direção z positiva e negativa, respectivamente, enquanto que Ω_b representa a estrutura base (Alumínio).

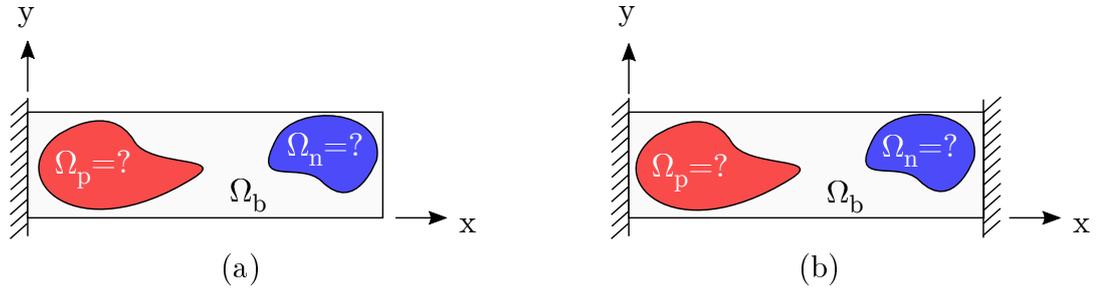


Figura 4.4 – Representação dos exemplos analisados: (a) Exemplo A e (b) Exemplo B.

O objetivo do problema de otimização é encontrar os domínios Ω_a e Ω_b que maximizem a controlabilidade para um determinado modo de vibração da estrutura. Esses domínios são definidos por meio da interpretação dos conjuntos de variáveis de projeto ρ_e e φ_e , levando variáveis intermediárias para 0 ou 1, como:

$$\rho_e = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_e \geq 0,5 \\ 0 & \text{se } \rho_e < 0,5 \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\varphi_e = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_e \geq 0,5 \\ 0 & \text{se } \varphi_e < 0,5 \end{cases} \quad (4.10)$$

Além dos critérios de parada apresentados nas Equações 3.45 e 3.46, considera-se ainda a condição de convergência para as variáveis de projeto φ_e , através da variação na iteração atual (k) e anterior ($k - 1$):

$$\max \{ |\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}| \} \leq t_\varphi \quad (4.11)$$

onde t_φ é a tolerância para a máxima variação de φ .

O fluxograma para esse processo de otimização é apresentado na Figura 4.5. A variável S_p indica a iteração na qual se inicia o processo simultâneo. Antes dessa iteração, apenas as variáveis de projeto φ_e são consideradas no processo de otimização. Assim, o material piezoelétrico começa a ser distribuído quando se tiver um melhor indicativo das regiões da estrutura que terão polarização positiva ou negativa, evitando que o otimizador encontre um mínimo local do problema.

Na Tabela 4.1, são apresentados os parâmetros utilizados para resolver o problema

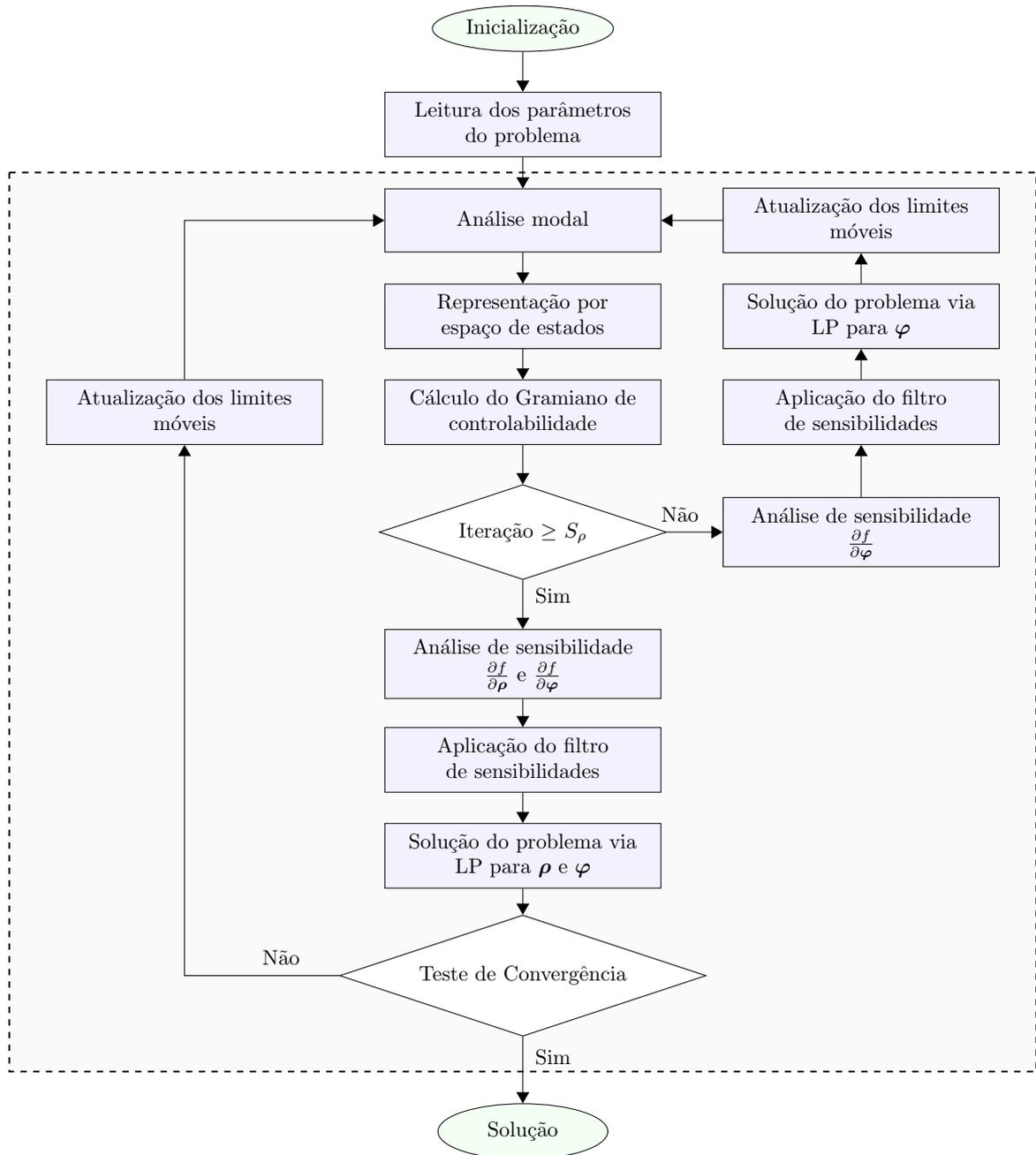


Figura 4.5 – Fluxograma para o processo de otimização simultânea da topologia e polarização do atuador piezoelétrico.

de otimização topológica.

4.4.1 Projetos de Atuadores com Topologia e Polarização Otimizados

As soluções obtidas pelo procedimento de otimização topológica proposto são apresentadas e discutidas nesta subseção. Para isso, as distribuições das variáveis de projeto

Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados na solução dos problemas numéricos.

Malha de elementos finitos	
N	1600
Parâmetros do problema de otimização	
C_V	0,16
r_{min} [m]	0,012
p_0	3
p_1	3
p_2	3
t_ρ	0,04
t_φ	0,04
t_f	0,0005
S_ρ	3
Inicialização das variáveis de projeto	
ρ_e (para $e = 1, 2, \dots, N$)	C_V
φ_e (para $e = 1, 2, \dots, N$)	0,5

φ_e e ρ_e são dispostas juntamente com uma representação discreta da solução, obtida por meio de uma interpretação das variáveis de projeto com valores intermediários. Dessa forma, os sub-domínios que indicam a presença de material base (Ω_b) e material piezoelétrico com polarização negativa (Ω_n) ou positiva (Ω_p) podem ser claramente identificados na topologia interpretada.

Na Figura 4.6, as soluções obtidas considerando a maximização da controlabilidade do primeiro modo de vibração para o Exemplo A (viga em balanço) são apresentadas. Nota-se que uma solução simétrica, em torno de um eixo horizontal na altura média da viga, é obtida quando o perfil de polarização é calculado de forma simultânea com a distribuição do material piezoelétrico. Esse padrão de solução é esperado visto que a localização ótima dos atuadores é próxima da face engastada. Assim, o projeto simétrico possibilita que campos de deformação de tração e compressão sejam induzidos de forma simultânea na estrutura pelos atuadores piezoelétricos em decorrência da aplicação do mesmo sinal de controle.

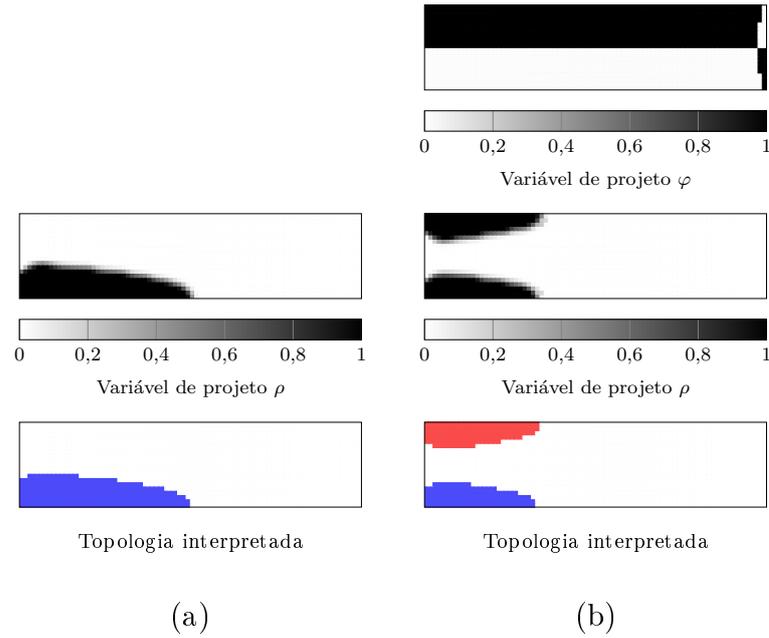


Figura 4.6 – Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do primeiro modo para o Exemplo A com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.

As soluções obtidas considerando a maximização da controlabilidade do segundo, terceiro e quarto modos de vibração para o Exemplo A (viga em balanço) são apresentadas nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9, respectivamente.

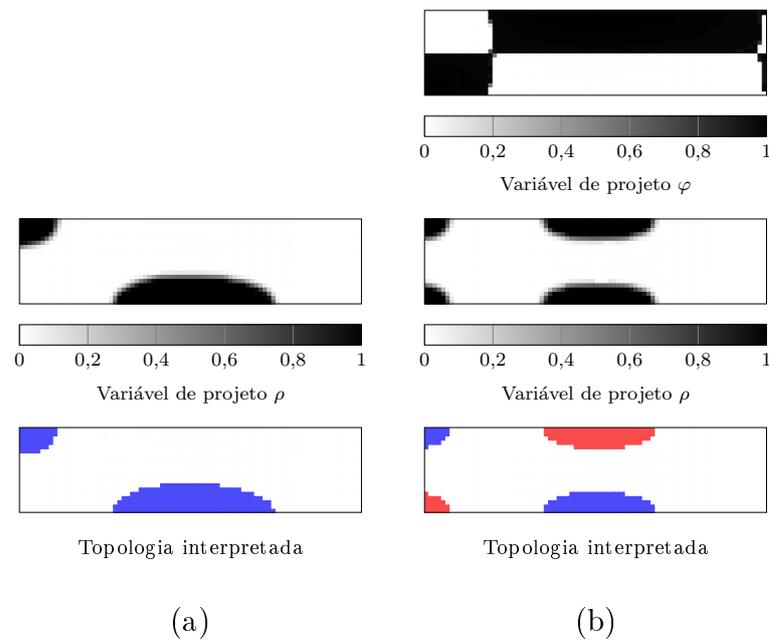


Figura 4.7 – Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do segundo modo para o Exemplo A com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.

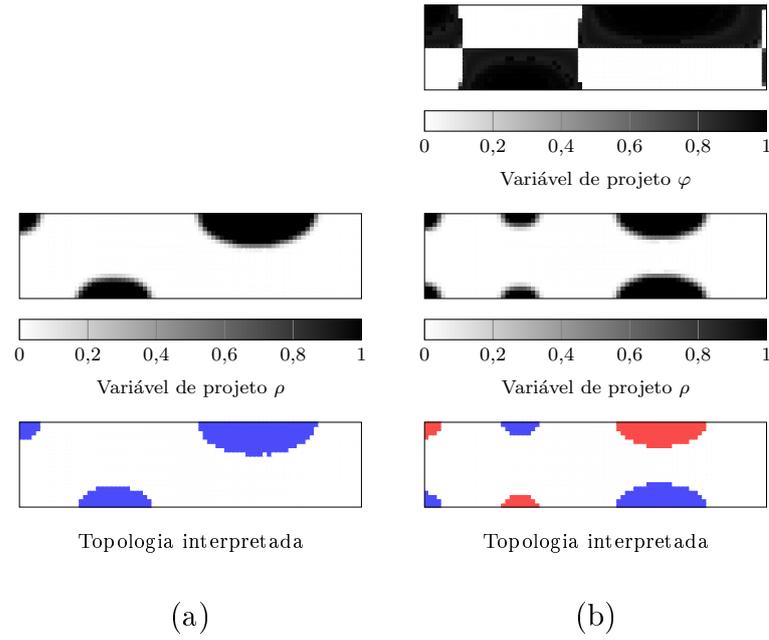


Figura 4.8 – Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do terceiro modo para o Exemplo A com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.

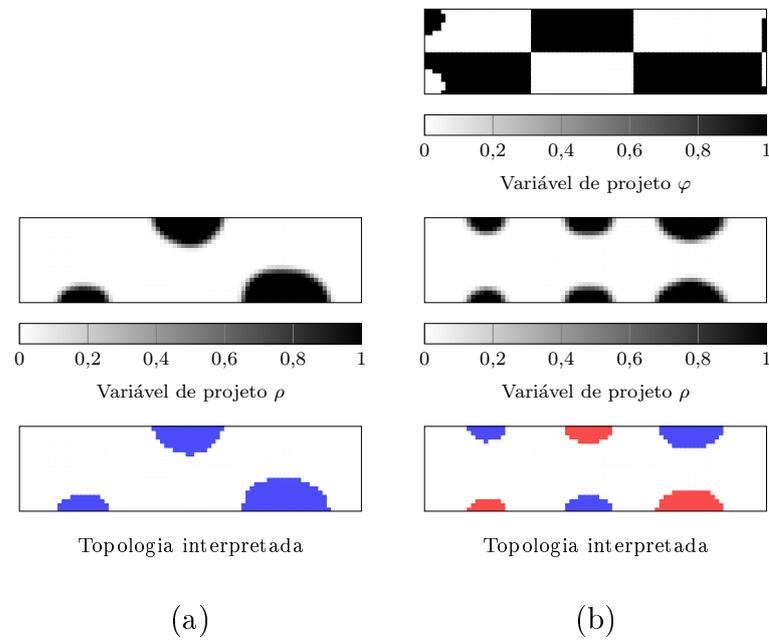


Figura 4.9 – Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do quarto modo para o Exemplo A com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.

Analisando as curvas de convergência apresentadas na Figura 4.10, nota-se que uma melhora nos índices de controlabilidade foi alcançada para todos os casos projetados com polarização otimizada.

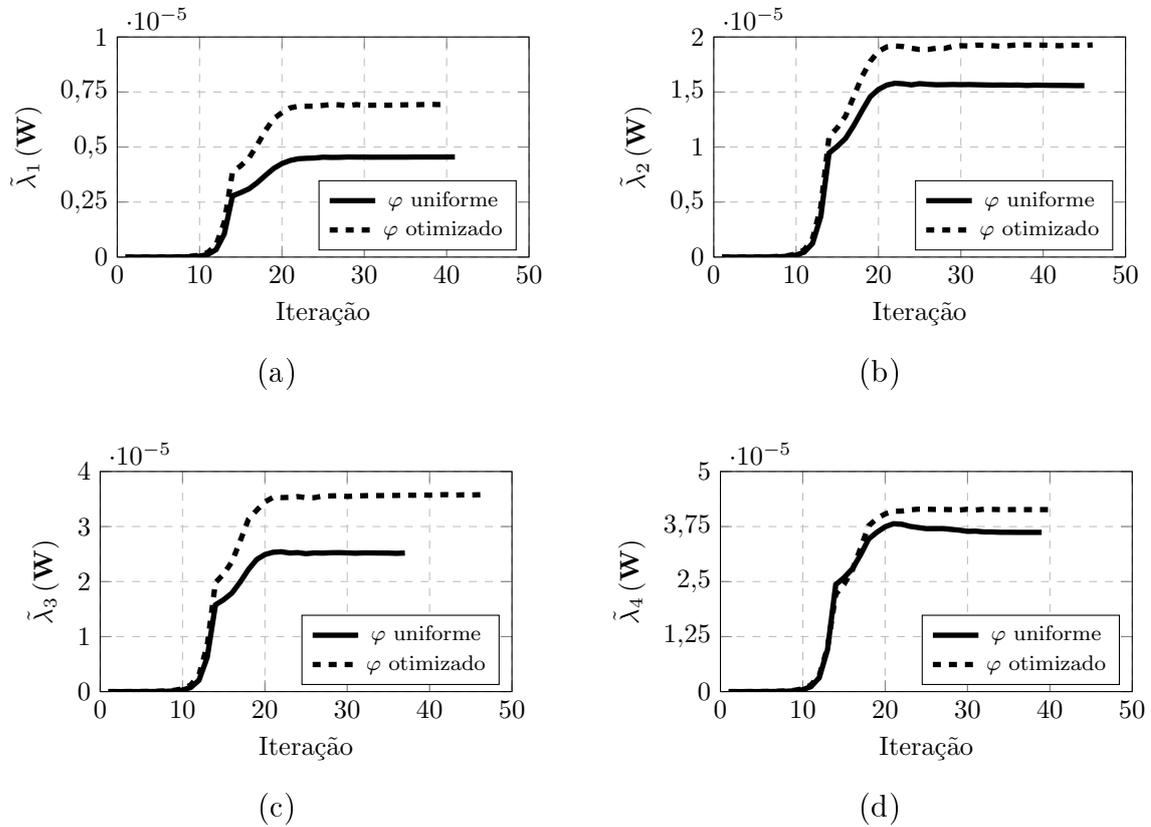


Figura 4.10 – Curvas de convergência das funções objetivo para o Exemplo A.

As maiores diferenças são observadas para os índices $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_3$, como pode ser analisado através dos resultados apresentados na Tabela 4.2. Embora menores, os aumentos obtidos para os índices $\tilde{\lambda}_2$ e $\tilde{\lambda}_4$ também são significativos, visto que ambos os resultados comparados se referem a soluções otimizadas para o projeto dos atuadores.

Tabela 4.2 – Índices de controlabilidade para o Exemplo A.

	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$	$\tilde{\lambda}_4$
φ uniforme	0,455	1,558	2,519	3,613
φ otimizado	0,695	1,928	3,582	4,135
Aumento [%]	52,7	23,7	42,2	14,4

As soluções obtidas considerando a maximização da controlabilidade do primeiro

e segundo modos de vibração para o Exemplo B (viga bi-engastada) são apresentadas nas Figuras 4.11 e 4.12, respectivamente.

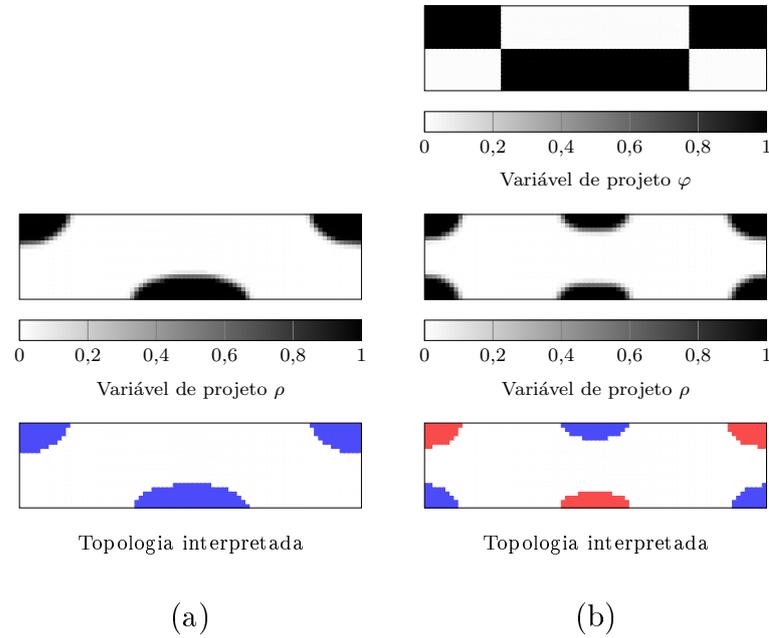


Figura 4.11 – Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do primeiro modo para o Exemplo B com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.

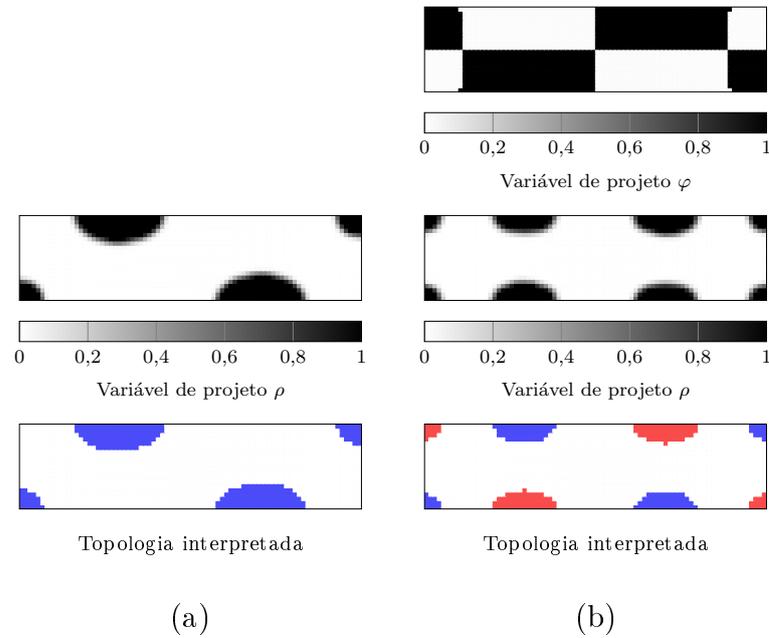


Figura 4.12 – Soluções obtidas pela maximização da controlabilidade do segundo modo para o Exemplo B com perfil de polarização: (a) uniforme e (b) otimizado.

Novamente, observa-se melhoria nos índices de controlabilidade quando empregando a formulação simultânea, como apresentado através das curvas de convergência na Figura 4.13. Para o índice $\tilde{\lambda}_1$, nota-se um aumento de 40,9%, enquanto que para o índice $\tilde{\lambda}_2$ o aumento é de 27,7%.

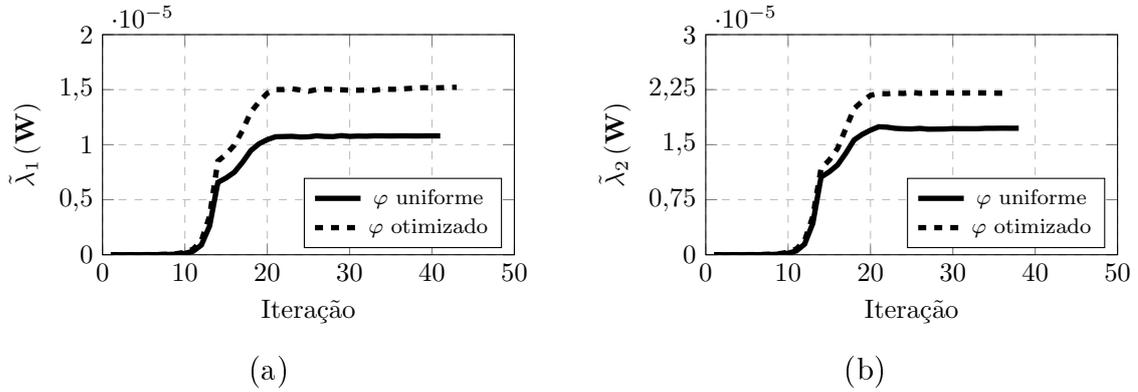


Figura 4.13 – Curvas de convergência das funções objetivo para o Exemplo B.

4.4.2 Desempenho do sistema de controle

A teoria de controle ótimo é aplicada para analisar e comparar o desempenho dos atuadores piezoelétricos projetados considerando perfil de polarização uniforme e otimizado. Para isso, utiliza-se uma abordagem de controle ótimo LQR, na qual a dinâmica do sistema a ser controlado é descrita por um conjunto de equações diferenciais lineares enquanto que o funcional que representa o custo do processo de controle é descrito por uma função quadrática. A descrição matemática desse controlador é apresentada de forma detalhada no Apêndice D.2. Considera-se que o eletrodo inferior da estrutura seja mantido aterrado, ou seja, com potencial elétrico nulo, enquanto que o sinal de controle $\phi_c(t)$ é prescrito no eletrodo superior.

A viga em balanço é considerada inicialmente em repouso, ou seja, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, e então uma força pontual na forma $f(t) = F_0 \text{sen}(\omega_0 t)$ é aplicada na sua extremidade livre. Para o Exemplo B, essa força é aplicada no centro da viga bi-engastada, como representado na Figura 4.14. A resposta em termos de deslocamentos é calculada para o mesmo ponto de aplicação da força considerando a equação de saída $u_o(t) = \mathbf{L}_o^T \mathbf{x}(t)$, onde \mathbf{L}_o é um vetor auxiliar utilizado para localizar o componente vertical do deslocamento nodal para esse ponto de avaliação. Como cada atuador foi projetado para atenuar as

vibrações para um modo de vibração específico, assume-se uma condição de ressonância na qual a frequência de excitação seja equivalente às frequências naturais da estrutura. Portanto, para analisar o desempenho dos atuadores projetados por meio da maximização de $\tilde{\lambda}_1$, considera-se uma força externa com $\omega_0 = \omega_1$.

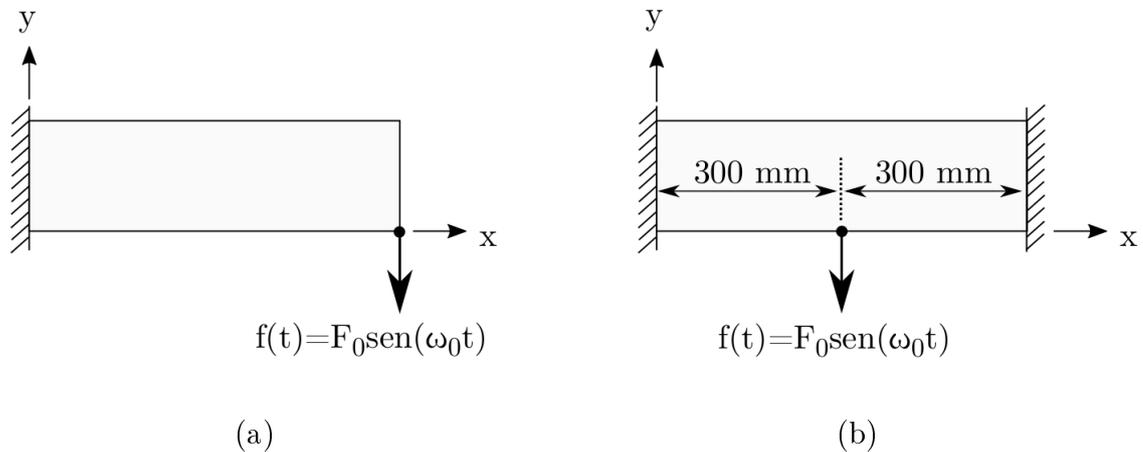


Figura 4.14 – Localização das forças de excitação externas para: (a) Exemplo A e (b) Exemplo B.

Do ponto de vista do controlador, o desempenho do sistema de controle depende do ganho escalar q , como definido no Apêndice D.2. Na Figura 4.15, apresenta-se os valores de $\phi_{\max} = \max \{|\phi_c(t)|\}$ e $u_{\max} = \max \{|u_o(t)|\}$ em função do ganho q do controlador LQR.

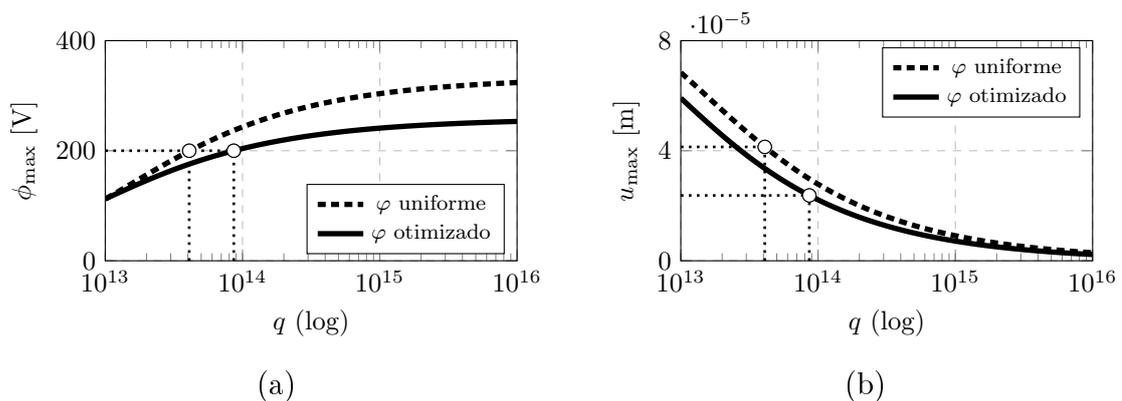


Figura 4.15 – Influência do ganho q no controle do primeiro modo para o Exemplo A: (a) sinal de controle e (b) deslocamento máximo.

Inicialmente, observa-se que para o mesmo ganho q , o atuador projetado com polarização otimizada é capaz de reduzir de forma mais acentuada a amplitude da resposta

do que o atuador com polarização uniforme. Além disso, nota-se também que os valores para amplitude máxima do sinal de controle são menores para o atuador projetado com polarização otimizada.

A imposição de um limite máximo para a diferença de potencial elétrica aplicada nos eletrodos é uma condição de operação usual para atuadores, visando à prevenção de problemas como despolarização [Ikeda, 1982] ou outros danos irreversíveis no material piezoelétrico [Ikeda, 1996]. Assim, considerando-se um limite $-200 \text{ V} < \phi_c(t) < 200 \text{ V}$, ganhos de valores $q = 4,091 \times 10^{13}$ e $q = 8,636 \times 10^{13}$ poderiam ser aplicados no controlador LQR para o controle do primeiro modo de vibração utilizando os atuadores com polarização uniforme e otimizada, respectivamente. Esses dois pontos de operação são representados por marcadores circulares na Figura 4.15(a). Ao avaliar esses pontos de operação em termos de amplitudes de deslocamento máximas, na Figura 4.15(b), percebe-se o melhor desempenho de controle para o atuador com polarização otimizada.

As respostas de deslocamento no tempo para os dois atuadores são apresentadas na Figura 4.16, onde se observa amplitudes máximas de $4,139 \times 10^{-5} \text{ m}$ e $2,375 \times 10^{-5} \text{ m}$, respectivamente, para os atuadores com polarização uniforme e otimizada.

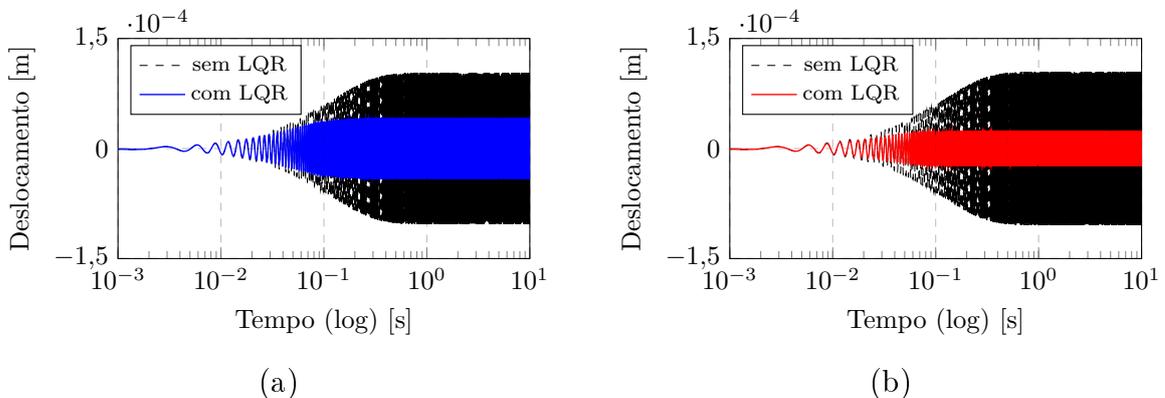


Figura 4.16 – Respostas em termos de deslocamento para o Exemplo A utilizando atuadores projetados com: (a) φ uniforme e (b) φ otimizado.

Os respectivos sinais de controle $\phi_c(t)$ para esses dois casos são apresentados na Figura 4.17, onde se pode verificar que os limites de operação foram satisfeitos.

Essas relações entre ganho q do controlador LQR e valores máximos de deslocamento e sinal de controle também são observadas para os demais casos. Por exemplo, para os atuadores projetados através da maximização de $\tilde{\lambda}_4$ (caso no qual o aumento no

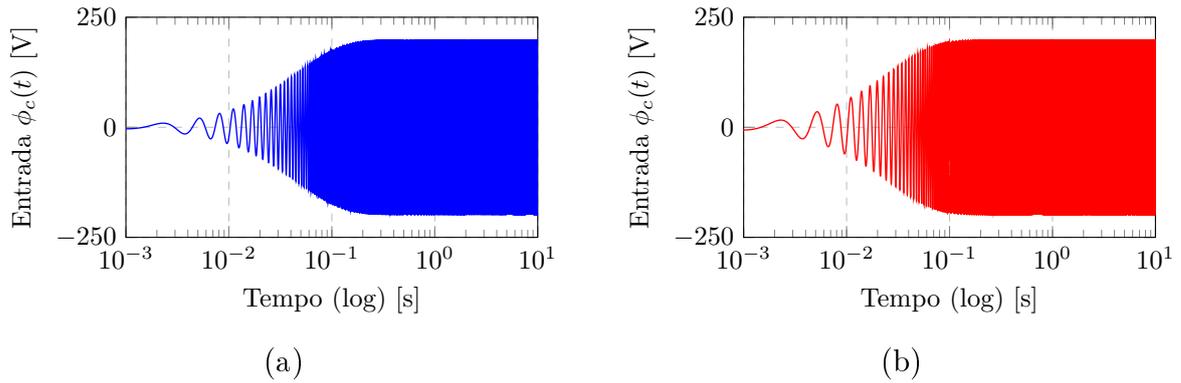


Figura 4.17 – Sinais de controle para o Exemplo A utilizando atuadores projetados com:
(a) φ uniforme e (b) φ otimizado.

índice de controlabilidade foi o menor obtido para o Exemplo A quando empregando a formulação simultânea), o desempenho na atenuação da amplitude de deslocamento foi aprimorado, como mostra a Figura 4.18, principalmente para ganhos maiores.

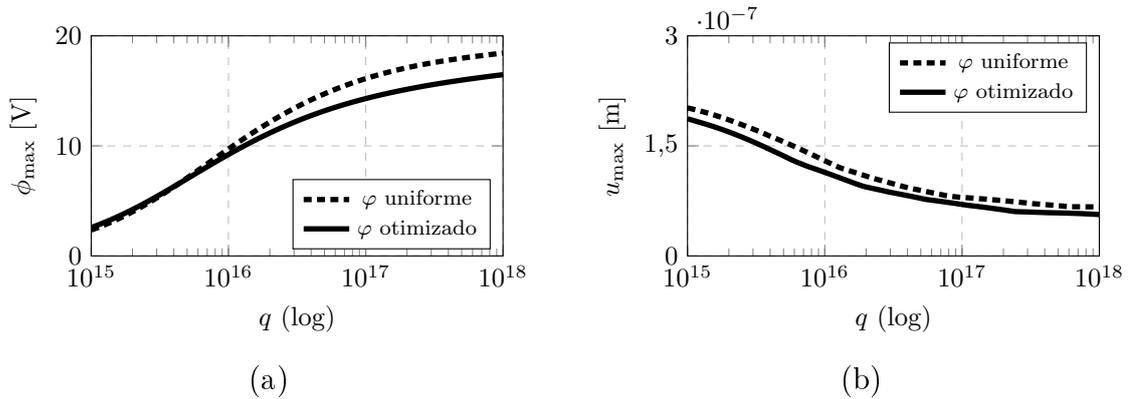


Figura 4.18 – Influência do ganho q no controle do quarto modo para o Exemplo A: (a) sinal de controle e (b) deslocamento máximo.

Na Figura 4.19, apresenta-se os valores de sinal de controle e deslocamento máximos em função do ganho q para os atuadores projetados através da maximização de $\tilde{\lambda}_1$ da viga bi-engastada (Exemplo B), onde o mesmo padrão obtido para os resultados do Exemplo A também é observado.

De forma geral, os atuadores projetados com perfil de polarização otimizado apresentam melhores desempenho no sistema de controle LQR para os casos com perturbação persistente analisados na presente seção. Entretanto, melhorias também devem ser observadas no desempenho do controle para perturbações transientes. Os resultados apresen-

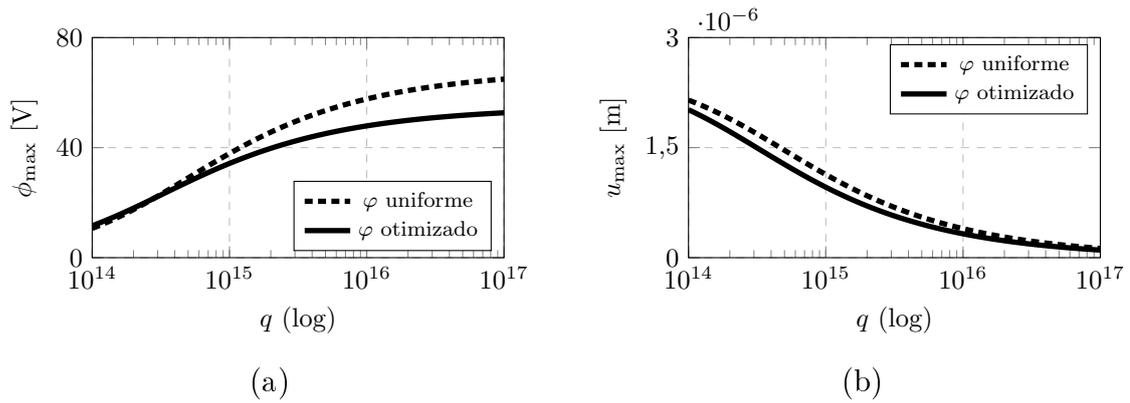


Figura 4.19 – Influência do ganho q no controle do primeiro modo para o Exemplo B:
 (a) sinal de controle e (b) deslocamento máximo.

tados em Gonçalves et al., 2018a mostram que, para casos com excitação externa nula e condições iniciais não-nulas, os atuadores projetados com perfil de polarização otimizado apresentam melhores desempenhos em termos de deslocamentos máximo e RMS. Assim como observado na presente seção para as respostas sob perturbação persistente, para os casos com excitação transiente se observa também que as maiores diferenças ocorrem quando elevados ganhos são empregados no controlador LQR. Além disso, a formulação simultânea pode ser combinada com o projeto da estrutura, como apresentado em Gonçalves et al., 2018b, no qual o problema de mínima flexibilidade com restrição de volume é resolvido juntamente com a maximização da controlabilidade.

5 FORMULAÇÃO COM LIMITE PARA A CONTROLABILIDADE DOS MODOS RESIDUAIS

Apresenta-se neste capítulo a formulação proposta para o projeto de estruturas controladas considerando um limite na excitação dos modos residuais. Inicialmente, uma breve discussão sobre as dinâmicas associadas ao mecanismo de *spillover* em um sistema de controle por realimentação é apresentado, visando a justificativa para a formulação do problema de otimização. Posteriormente, a função objetivo e as restrições para o problema de otimização são apresentadas juntamente com a análise de sensibilidade para as equações envolvidas nessa formulação. Por fim, o desempenho dos atuadores piezoelétricos projetados por meio dessa formulação é analisado, com foco na interação do sistema de controle com os modos residuais.

5.1 Mecanismo de *spillover* em um sistema de controle

Usualmente, um modelo modal truncado pode representar adequadamente o comportamento dinâmico de uma estrutura flexível. Entretanto, problemas associados ao *spillover* podem ocorrer quando esse tipo de modelo é adotado para projetar um sistema de controle para uma estrutura contínua. A Figura 5.1 ilustra, por meio de um diagrama de blocos simplificado, os efeitos da utilização de um modelo modal truncado juntamente com um sistema de controle por realimentação.

Considerando, por exemplo, um sistema de controle por realimentação projetado a partir de um modelo modal contendo m_c modos de vibração. Se não houver instrumentação de todos os graus de liberdade, um observador deve reconstruir os estados usados pelo controlador para viabilizar o cálculo da entrada de controle. O *spillover* no controle ocorre quando a entrada excita modos de vibração que não estão incluídos no modelo modal truncado, ou seja, os modos residuais $m_c + 1$, $m_c + 2$, etc. Por outro lado, o efeito de *spillover* na observação dos estados se refere à contaminação da saída do observador pelos modos de vibração residuais.

Apenas os modos residuais que são observáveis, controláveis e próximos à largura de banda do controlador são considerados como potencialmente críticos para causar esse comportamento [Preumont, 2011]. Conseqüentemente, uma forma de se eliminar os efeitos da excitação dos modos residuais pelo controlador é forçar que esses modos sejam não-

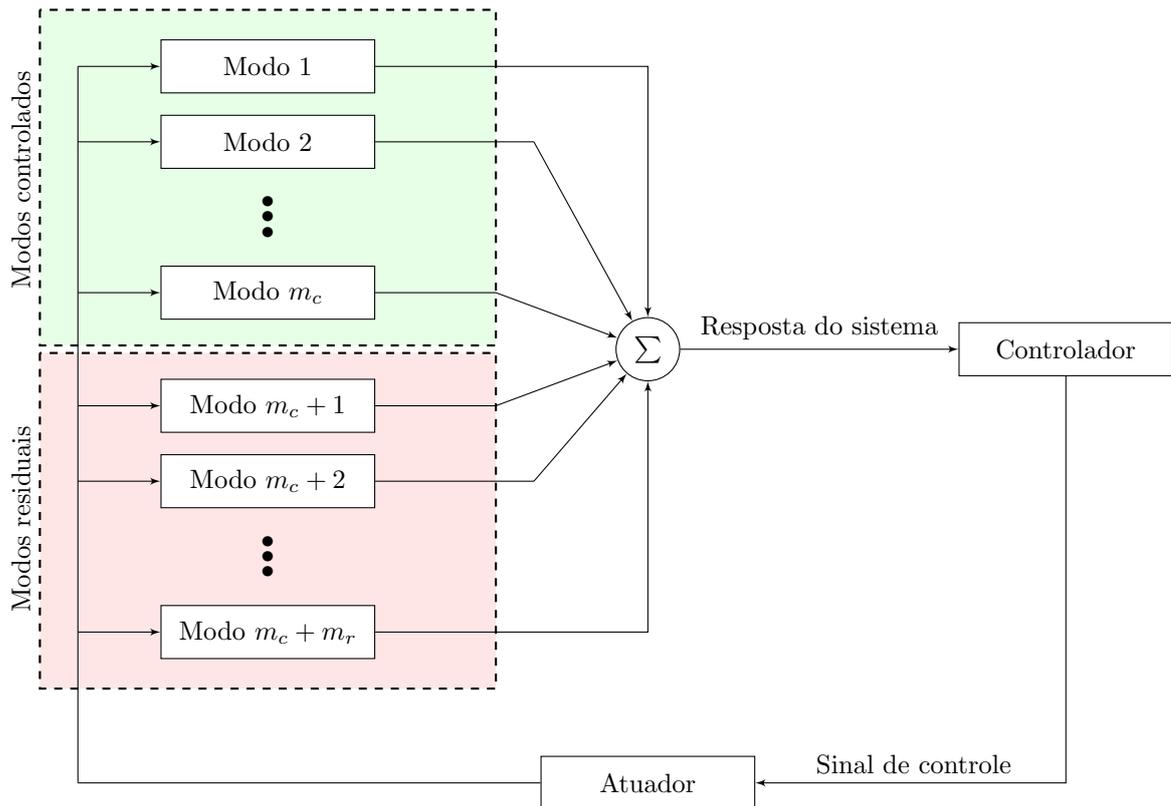


Figura 5.1 – Influência dos modos residuais em um sistema de controle por realimentação [Adaptado de Levine, 1999].

controláveis. Entretanto, essa condição se torna muito difícil de ser satisfeita quando se trata de estruturas contínuas. Assim, a formulação proposta neste trabalho busca limitar a controlabilidade dos modos residuais, sem causar perda significativa de desempenho no sistema de controle, minimizando os efeitos indesejados de *spillover* no controle.

5.2 Projeto de estruturas controladas considerando um limite para a excitação dos modos residuais

Considerando o Gramiano de controlabilidade \mathbf{W} para um conjunto de parâmetros da representação por espaço de estados $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$, seus autovalores podem ser obtidos através do problema formulado como:

$$(\mathbf{W} - \tilde{\lambda}_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{V}}_i = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_i^T \tilde{\mathbf{V}}_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.2)$$

onde $m = m_c + m_r$ é o número de modos do modelo truncado, \mathbf{I} é a matriz identidade, $\tilde{\lambda}_i$ é o índice de controlabilidade para o primeiro modo de vibração e $\tilde{\mathbf{V}}_i$ é o seu respectivo autovetor.

A formulação para o problema de otimização proposta neste capítulo busca maximizar a controlabilidade para um determinado modo de vibração e, simultaneamente, reduzir os efeitos do sistema de controle nos modos residuais. Dessa forma, pretende-se atenuar os efeitos do *spillover* quando os atuadores projetados forem empregados em um sistema de controle por realimentação. Para isso, adota-se um limite para os valores dos índices de controlabilidade dos modos residuais, na forma:

$$\frac{\max(\tilde{\lambda}_r)}{\min(\tilde{\lambda}_c)} \leq C_\lambda \quad (5.3)$$

onde $\tilde{\lambda}_r = \{\tilde{\lambda}_{m_c+1} \ \tilde{\lambda}_{m_c+2} \ \dots \ \tilde{\lambda}_m\}$ é um vetor contendo os índices de controlabilidade dos modos residuais, $\tilde{\lambda}_c = \{\tilde{\lambda}_1 \ \tilde{\lambda}_2 \ \dots \ \tilde{\lambda}_{m_c}\}$ é um vetor contendo os índices de controlabilidade dos modos controláveis, e C_λ é um limite para essa relação.

Como os índices de controlabilidade são números reais positivos, visto que o Gramiano de controlabilidade \mathbf{W} é positivo definido durante todo o processo de otimização, o limite proposto na Equação 5.3 pode ser reescrito por meio da norma- p , como:

$$\frac{\left(\sum_{i=m_c+1}^m \tilde{\lambda}_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{m_c} \tilde{\lambda}_j^{-p}\right)^{\frac{1}{-p}}} \leq C_\lambda \quad (5.4)$$

onde p é o expoente da norma. Assim, as Equações 5.3 e (5.4) são equivalentes se $p = \infty$. Para valores finitos de p , essa relação sempre fornecerá um resultado mais conservador, visto que:

$$\left(\sum_{i=m_c+1}^m \tilde{\lambda}_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{i=m_c+1}^m \tilde{\lambda}_i^4\right)^{\frac{1}{4}} \geq \dots \geq \max(\tilde{\lambda}_r) \quad (5.5)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m_c} \tilde{\lambda}_j^{-2}\right)^{\frac{1}{-2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{m_c} \tilde{\lambda}_j^{-4}\right)^{\frac{1}{-4}} \leq \dots \leq \min(\tilde{\lambda}_c) \quad (5.6)$$

Assim, o valor do expoente adotado deve ser grande o suficiente para aproximar adequadamente as funções máximo e mínimo.

Partindo dessa definição de limite para a controlabilidade dos modos residuais, o problema de otimização topológica considerando um sistema de controle projetado para controlar apenas um determinado modo de vibração pode ser escrito como [Gonçalves et al., 2017b]:

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\rho}} : \quad & f = \tilde{\lambda}_i(\mathbf{W}) \\
\text{sujeito a :} \quad & g_1 = \frac{\sum_{e=1}^N \rho_e}{V} \leq C_V \\
& : g_2 = \frac{\tilde{\lambda}_{\text{res}}^{\frac{1}{p}}}{\tilde{\lambda}_{\text{con}}^{\frac{1}{-p}}} \leq C_\lambda \\
& : 0 \leq \rho_e \leq 1 \quad e = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{5.7}$$

onde $\tilde{\lambda}_i$ é o índice de controlabilidade para o i -ésimo modo de vibração, C_V e C_λ são limites para, respectivamente, o volume do atuador e a norma dos autovalores residuais, $\tilde{\lambda}_{\text{res}}$ é dado pelo somatório dos autovalores residuais:

$$\tilde{\lambda}_{\text{res}} = \sum_{j=m_c+1}^m \tilde{\lambda}_j^p \tag{5.8}$$

e $\tilde{\lambda}_{\text{con}}$ é dado pelo somatório dos autovalores referentes aos modos controlados:

$$\tilde{\lambda}_{\text{con}} = \sum_{j=1}^{m_c} \tilde{\lambda}_j^{-p} \tag{5.9}$$

onde p é o expoente da norma ($p \geq 1$). Nesta formulação, a restrição de *spillover* é proposta para limitar a excitação de todos os modos residuais devido à atuação do controlador de acordo com o valor de C_λ escolhido.

5.3 Análise de sensibilidade

As modificações propostas neste capítulo devem ser incluídas na análise de sensibilidade. Entretanto, todo procedimento apresentado nas Equações 3.35-3.37 para o cálculo das sensibilidades $\frac{\partial \tilde{\lambda}_i}{\partial \rho_e}$ continua válido. Conhecendo as derivadas de todos os índices de controlabilidade, a sensibilidade da função de restrição g_2 pode ser obtida por meio da regra do quociente, que resulta em:

$$\frac{\partial g_2}{\partial \rho_e} = \frac{1}{p \tilde{\lambda}_{\text{con}}^{\frac{1}{-p}}} \tilde{\lambda}_{\text{res}}^{\left(\frac{1}{p}-1\right)} \frac{\partial \tilde{\lambda}_{\text{res}}}{\partial \rho_e} - \frac{1}{-p \tilde{\lambda}_{\text{con}}^{\frac{2}{-p}}} \tilde{\lambda}_{\text{res}}^{\frac{1}{p}} \tilde{\lambda}_{\text{con}}^{\left(\frac{1}{-p}-1\right)} \frac{\partial \tilde{\lambda}_{\text{con}}}{\partial \rho_e} \tag{5.10}$$

com:

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_{\text{res}}}{\partial \rho_e} = \sum_{j=m_c+1}^m p \tilde{\lambda}_j^{(p-1)} \frac{\partial \tilde{\lambda}_j}{\partial \rho_e} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_{\text{con}}}{\partial \rho_e} = - \sum_{j=1}^{m_c} p \tilde{\lambda}_j^{-(p+1)} \frac{\partial \tilde{\lambda}_j}{\partial \rho_e} \quad (5.12)$$

5.4 Resultados

A formulação com restrição de *spillover* é avaliada nesta seção por meio de um exemplo numérico. Inicialmente, trata-se da escolha do expoente p das Equações 5.7 e 5.8, de forma que a norma- p consiga aproximar a função máximo da restrição de *spillover*. Uma vez escolhido o valor para p , analisa-se os projetos de atuadores otimizados e seus desempenhos em um sistema de controle ativo por realimentação de estados. Por fim, essa formulação com restrição de *spillover* é combinada com a otimização simultânea para encontrar a topologia e a polarização dos atuadores piezoelétricos.

5.4.1 Influência do expoente p na controlabilidade

Inicialmente, considera-se a solução apresentada no Capítulo 3 para a maximização de $\tilde{\lambda}_1$ do Exemplo A, como representado na Figura 5.2. Esse projeto otimizado de atuador foi obtido por meio da formulação sem restrição de *spillover* e será utilizado apenas para analisar o comportamento dos índices de controlabilidade durante o processo de otimização.

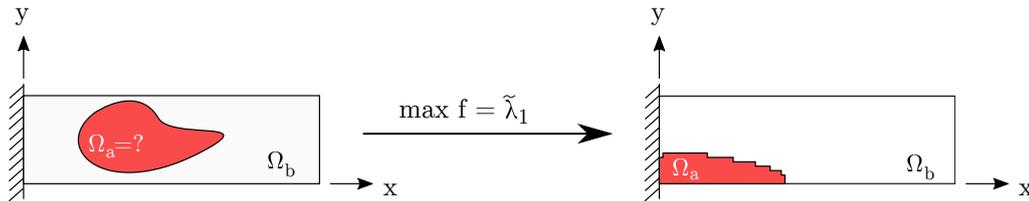


Figura 5.2 – Solução do problema de otimização considerando a maximização da controlabilidade do primeiro modo para o Exemplo A.

A curva de convergência para o índice de controlabilidade é apresentada na Figura 5.3(a). Considerando um sistema de controle projetado para controlar o primeiro

modo de vibração, ou seja, $m_c = 1$, o conjunto de índices de controlabilidade dos modos residuais é dado por $\tilde{\lambda}_r = \{\tilde{\lambda}_2 \ \tilde{\lambda}_3 \ \dots \ \tilde{\lambda}_m\}$. Pela definição, a restrição de *spillover* visa à limitação do valor máximo dos autovalores residuais $\tilde{\lambda}_r$. Na Figura 5.3(b), apresenta-se uma comparação desses valores máximos calculados de forma aproximada através da norma $g_2 = \tilde{\lambda}_{\text{res}}^{\frac{1}{p}}/\tilde{\lambda}_1$ e através da função máximo $g_2 = \max(\tilde{\lambda}_r)/\tilde{\lambda}_1$ considerando $m = 5$. Nota-se que para $p = 8$, a norma- p é capaz de produzir uma boa aproximação para a função máximo, considerando esse conjunto de índices $\tilde{\lambda}_r$.

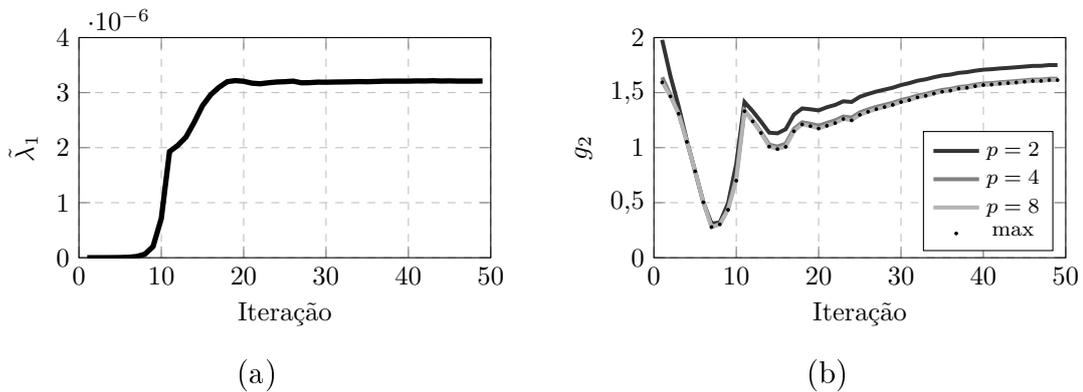


Figura 5.3 – Maximização da controlabilidade do primeiro modo para o Exemplo A: (a) curva de convergência e (b) função de restrição g_2 .

Quanto maior o valor do expoente p , melhor será a aproximação para a função máximo. Entretanto, quanto maior o valor de p , maior o grau de não linearidade do problema, o que pode induzir o otimizador a cair em mínimos locais. Para a formulação tratada neste trabalho e exemplos analisados, não se encontrou problemas desse tipo para os casos nos quais se empregou $p \leq 8$. Assim, adotou-se $p = 8$ para os exemplos que seguem, visto também que a norma- p superestima o valor máximo, como apresentado na Equação 5.5. Dessa forma, não há necessidade de empregar um valor mais elevado de p para garantir que a restrição g_2 seja respeitada.

5.4.2 Influência do limite C_λ na controlabilidade

As topologias otimizadas obtidas para os atuadores piezoelétricos através da formulação com limite para excitação dos modos residuais são apresentadas na Figura 5.4 considerando a maximização de $\tilde{\lambda}_1$.

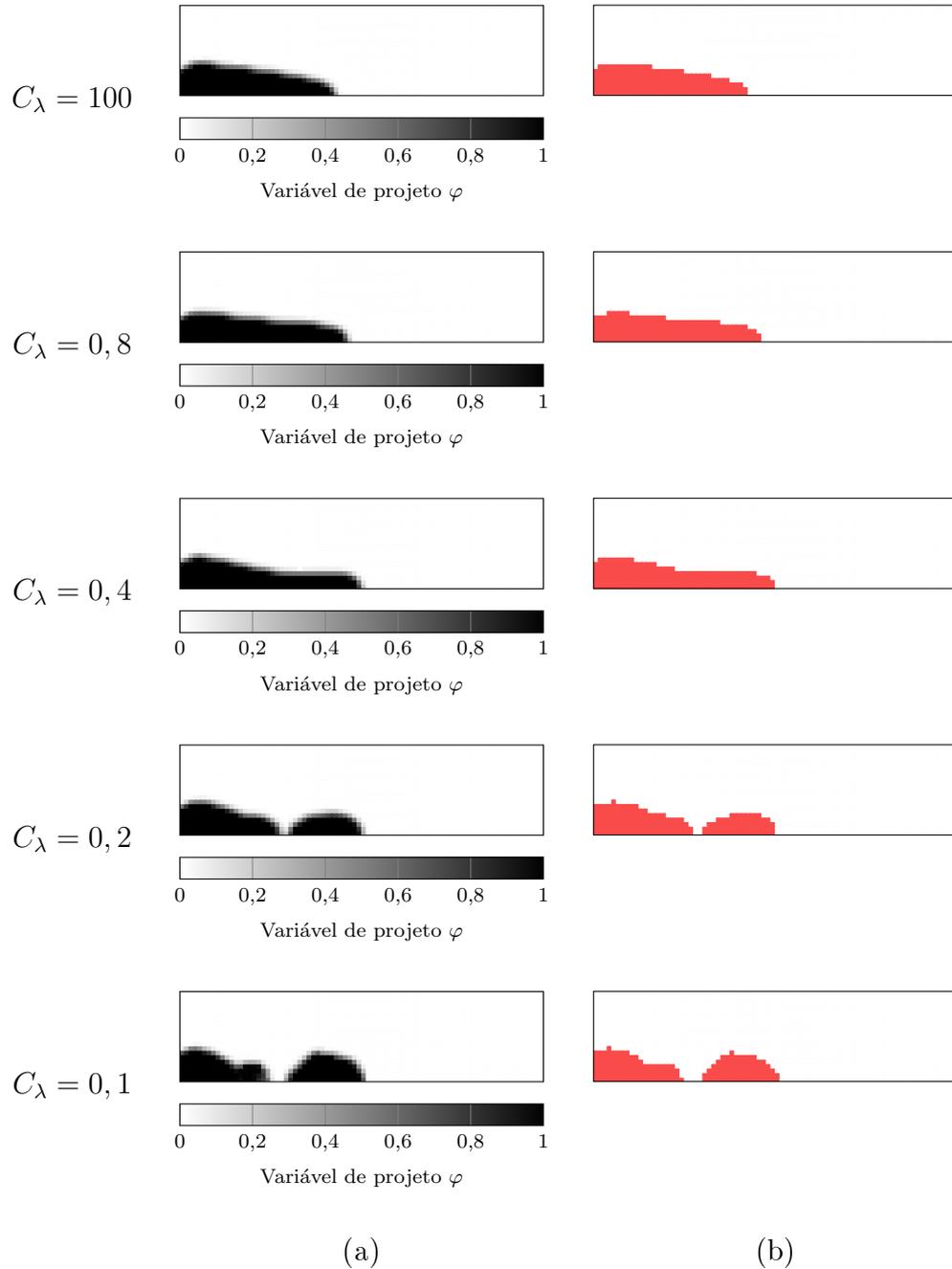


Figura 5.4 – Solução da maximização da controlabilidade com restrição de *spillover*: (a) distribuição das variáveis de projeto e (b) topologia interpretada.

Os parâmetros utilizados durante o processo de otimização foram os mesmo adotados no Capítulo 3, apresentados na Tabela 3.1. Um caso com $C_\lambda = 100$ foi simulado para ser usado como referência na comparação do desempenho no sistema de controle. A solução para esse caso é a mesma que a obtida anteriormente no Capítulo 3, o que é esperado visto que g_2 não ultrapassa esse valor limite durante a otimização como pode

ser observado na Figura 5.3(b). Ou seja, esse caso com $C_\lambda = 100$ se refere a uma solução na qual a restrição g_2 não está ativa. Outros quatro casos com restrição g_2 ativa são analisados, com C_λ variando de 0,8 a 0,1. Para todos os casos, adota-se $p = 8$ e nenhuma técnica de continuação é empregada durante do processo de otimização.

A escolha do conjunto de modos residuais tem papel importante na solução do problema de otimização e, conseqüentemente, no desempenho do sistema de controle, como discutido em Gonçalves et al., 2017a. Dessa forma, modos de vibração que não tenham uma significativa importância para uma determinada aplicação podem ser removidos do espaço residual, aumentando o espaço de projeto viável e, conseqüentemente, proporcionando o projeto de atuadores com melhor desempenho de controle.

As curvas de convergência para a função objetivo e restrição g_2 são apresentadas nas Figuras 5.5(a) e (b), respectivamente. Como esperado, ocorre uma redução no valor do índice de controlabilidade $\tilde{\lambda}_1$ conforme o espaço de projeto se torna mais restrito. Comparando os casos com $C_\lambda = 100$ e $C_\lambda = 0,1$, há uma redução de $\tilde{\lambda}_1 = 3,211 \times 10^{-6}$ para $\tilde{\lambda}_1 = 2,553 \times 10^{-6}$, ou seja, de 20,49%.

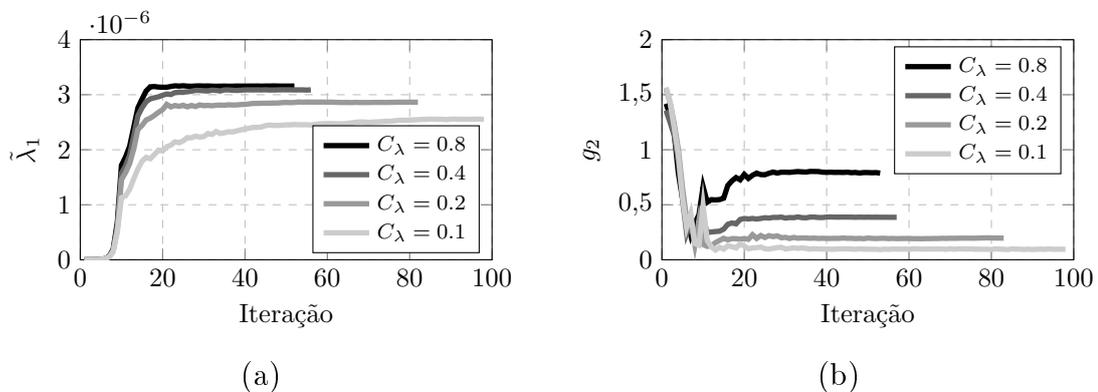


Figura 5.5 – Maximização de $\tilde{\lambda}_1$ para o Exemplo A com restrição de *spillover* ativa: (a) curva de convergência e (b) função de restrição g_2 .

Para facilitar a visualização, o gráfico da Figura 5.6 apresenta todos os valores dos índices $\tilde{\lambda}_i$, considerando todos os casos analisados. Nota-se que o terceiro e o quarto modo de vibração são os que apresentam índices de controlabilidade mais elevados para o caso com $C_\lambda = 100$. Além do índice $\tilde{\lambda}_1$, os índices referentes à controlabilidade desses modos residuais são os mais afetados pela restrição de *spillover*. Na Figura 5.6, a linha horizontal tracejada representa o limite para os índices residuais para o caso com $C_\lambda = 0,1$. Observa-se que, para esse caso, nenhum dos índices ultrapassa o limite.

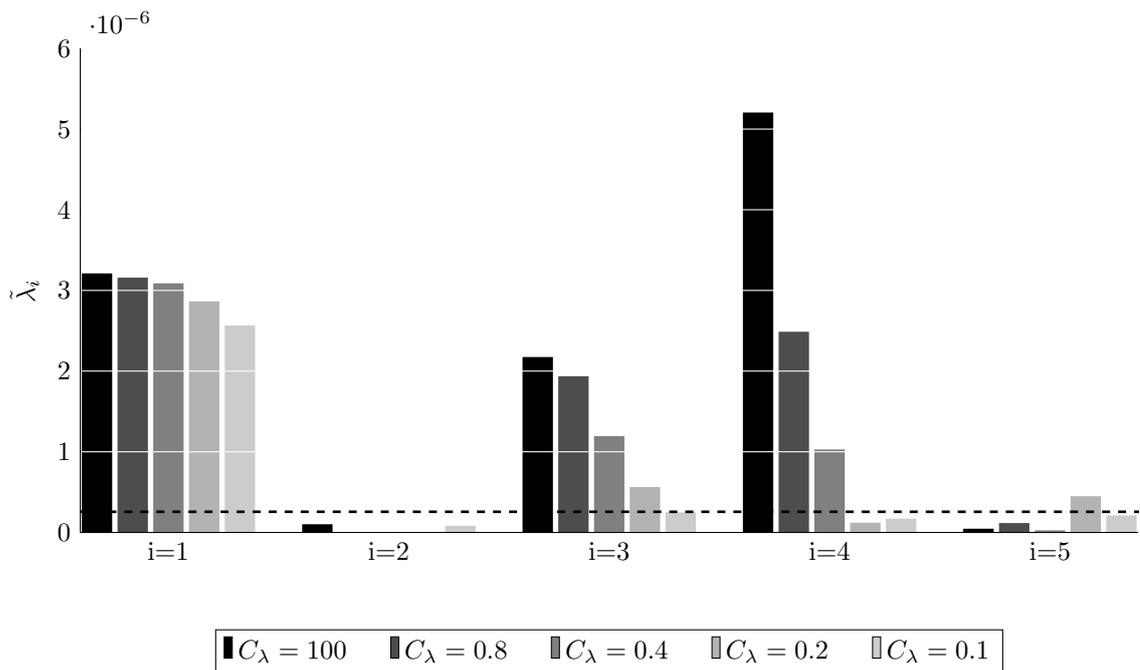


Figura 5.6 – Influência do ganho q no controle do primeiro modo para o Exemplo B: (a) sinal de controle e (b) deslocamento máximo.

5.4.3 Desempenho do Sistema de Controle

Um sistema de controle baseado na realimentação de estados é utilizado para analisar o desempenho dos atuadores projetados. Para isso, considera-se uma estratégia de controle ótimo utilizando o controlador LQR, detalhado no Apêndice D. A dinâmica do sistema em malha fechada pode ser representada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{G})\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{f} \quad (5.13)$$

onde \mathbf{G} é uma matriz de ganho para a realimentação de estados, que depende do valor do ganho escalar q .

Para o sistema representado pela matriz \mathbf{A} , dois ganhos podem ser observados: um devido à excitação externa, relacionado com $\mathbf{B}_1\mathbf{f}$, e outro em decorrência do controlador, relacionado com o termo $-\mathbf{B}_2\mathbf{G}\mathbf{x}$. Para separar esses ganhos e melhor visualizar o efeito do controlador nos modos residuais, adota-se uma força de excitação modal na forma:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_m \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{f}_m = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

Assim, apenas o primeiro modo η_1 é excitado pelas forças externas e todo ganho observado nos demais modos será devido apenas à sua interação com o controlador.

A resposta em frequência do sistema utilizando o atuador piezoelétrico projetado pela maximização de $\tilde{\lambda}_1$ com $C_\lambda = 100$ é apresentada na Figura 5.7, onde os picos referentes ao primeiro, terceiro e quarto modos são apresentados em detalhe. A curva mais clara se refere a um caso no qual o controlador LQR não está ativo. Para esse caso, observa-se apenas um pico referente à ressonância do primeiro modo. Para os casos com LQR ativo, nota-se que a magnitude desse pico é reduzida conforme se aumenta o ganho q do controlador. Entretanto, o sistema de controle interage com os modos residuais, causando aumentos na amplitude principalmente no terceiro e quarto modos de vibração. Ao contrário do que ocorre com o primeiro modo, quanto maior o ganho q do controlador, maior o ganho de magnitude observado.

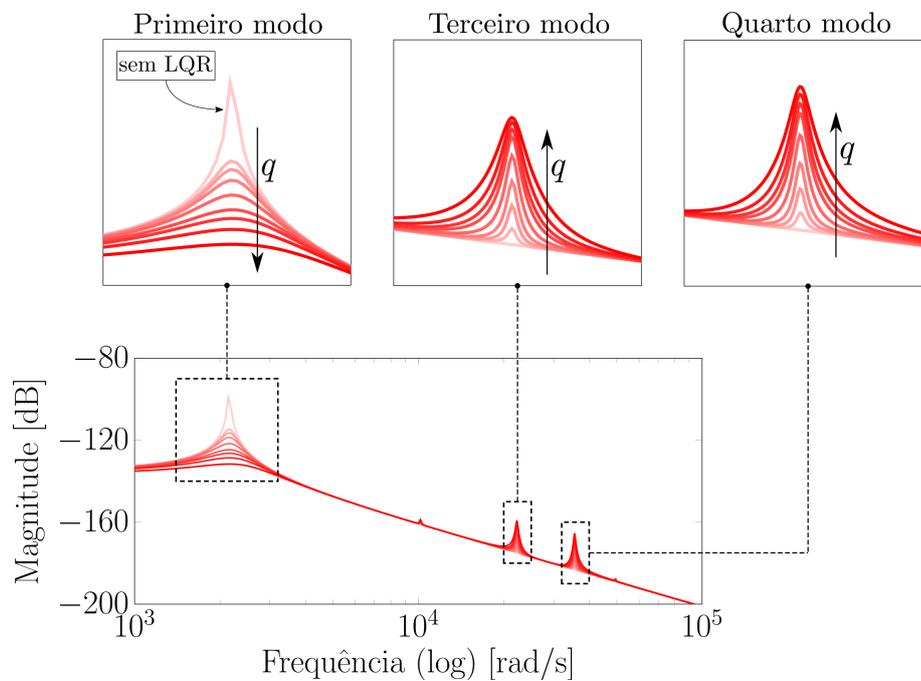


Figura 5.7 – Resposta em frequência do sistema utilizando o atuador projetado pela maximização de $\tilde{\lambda}_1$ com $C_\lambda = 100$.

Quanto menor o limite C_λ escolhido na etapa de projeto, menor será a interação do controlador com os modos residuais. Por isso, os dois casos extremos, com $C_\lambda = 100$ e $C_\lambda = 0,1$, são considerados para fins de comparação. Na Figura 5.8, apresenta-se as respostas em frequência para os sistemas de controle utilizando esses dois atuadores otimizados. Para ambos os casos, assume-se o mesmo ganho para o controlador LQR, de $q = 1 \times 10^{-16}$.

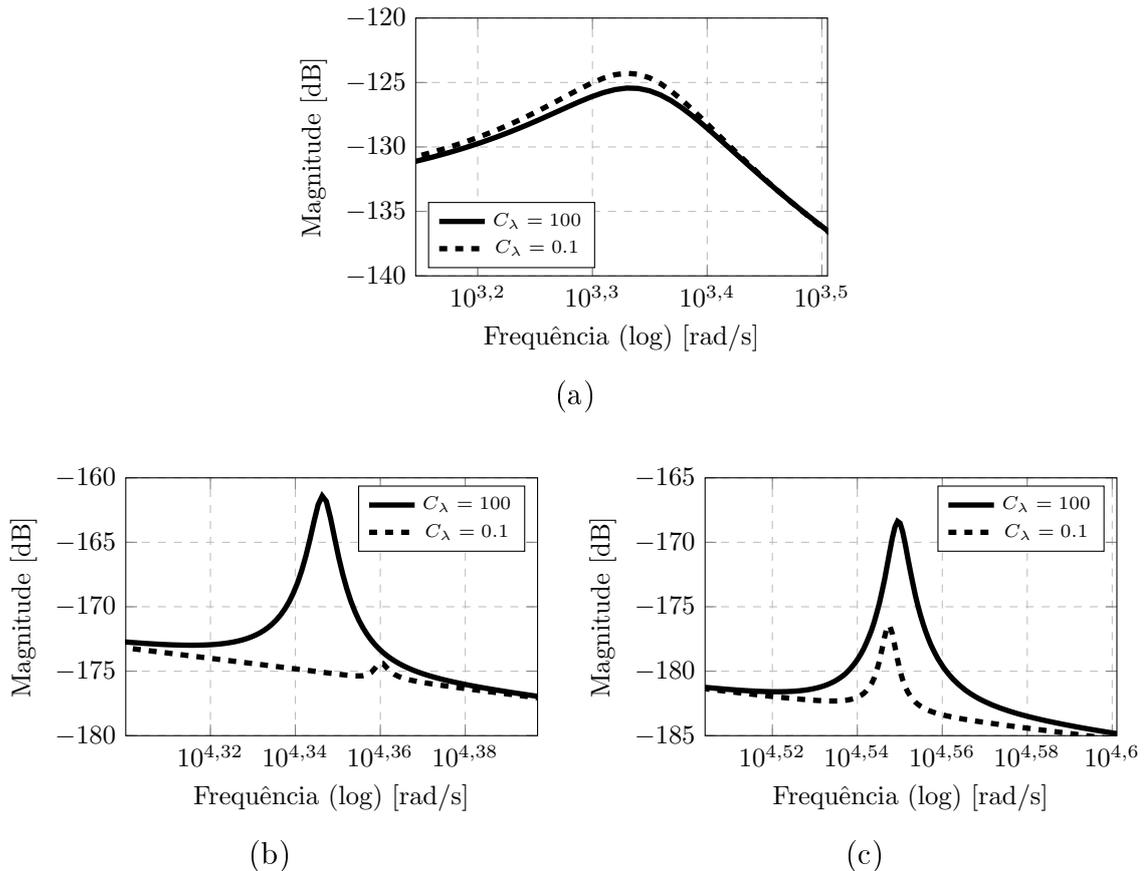


Figura 5.8 – Respostas em frequência para: (a) primeiro, (b) terceiro e (c) quarto modos de vibração.

O desempenho do atuador projetado com $C_\lambda = 0,1$ é levemente inferior quando se analisa apenas a atenuação da magnitude do primeiro modo de vibração. A diferença, em termos de ganho para os dois casos analisados, é de aproximadamente 1 dB. Por outro lado, a excitação do terceiro modo é significativamente atenuada quando se utiliza o atuador projetado com $C_\lambda = 0,1$, observando-se uma diferença de aproximadamente 13 db. Para o quarto modo de vibração, observa-se uma redução na magnitude do pico de ressonância de aproximadamente 8 dB. Esses resultados mostram que, para a formulação

proposta, existe uma relação de compromisso entre o desempenho do sistema de controle e os efeitos indesejados de *spillover*, os quais ocorrem devido à interação do sistema de controle com os modos residuais.

5.4.4 Otimização simultânea da topologia e polarização do atuador com limite de *Spillover*

Como visto anteriormente, a restrição de *spillover*, quando ativa, acarreta em uma limitação do espaço de projeto e, conseqüentemente, em uma redução do índice de controlabilidade para o atuador otimizado. Dessa forma, o desempenho do sistema de controle em termos de atenuação dos deslocamentos também sofre uma redução, como apresentado na Figura 5.8(a). Uma compensação desses efeitos negativos decorrentes da inclusão dessa restrição g_2 pode ser obtida por meio da combinação dessa formulação com a abordagem simultânea para otimização da topologia e polarização do atuador piezoelétrico, proposta e discutida no Capítulo 4. Na Figura 5.9, os resultados referentes à otimização simultânea do perfil de polarização e da topologia dos atuadores piezoelétricos são apresentados, para a maximização de $\tilde{\lambda}_1$ com $C_\lambda = 0, 1$.

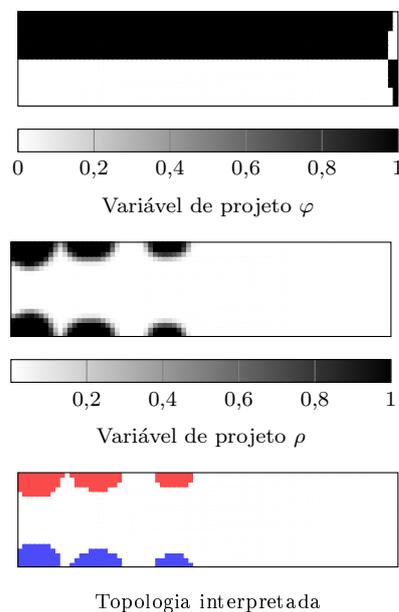


Figura 5.9 – Soluções para topologia e polarização do atuador obtidas pela maximização de $\tilde{\lambda}_1$ com $C_\lambda = 0, 1$.

Nesse caso, adotou-se o mesmo conjunto de índices $\tilde{\lambda}_r$ dos casos apresentados na Figura 5.4, assim como o mesmo expoente $p = 8$ para aproximar a função máximo.

As curvas de convergência para a função objetivo e restrição g_2 são apresentadas nas Figuras 5.10(a) e (b), respectivamente. Como esperado, ocorre um aumento no valor do índice de controlabilidade $\tilde{\lambda}_1$ quando é empregada a abordagem simultânea. Comparando com o atuador projetado com $C_\lambda = 100$ e polarização uniforme, há um aumento de $\tilde{\lambda}_1 = 3,211 \times 10^{-6}$ para $\tilde{\lambda}_1 = 3,471 \times 10^{-6}$, ou seja, de 8,10%.

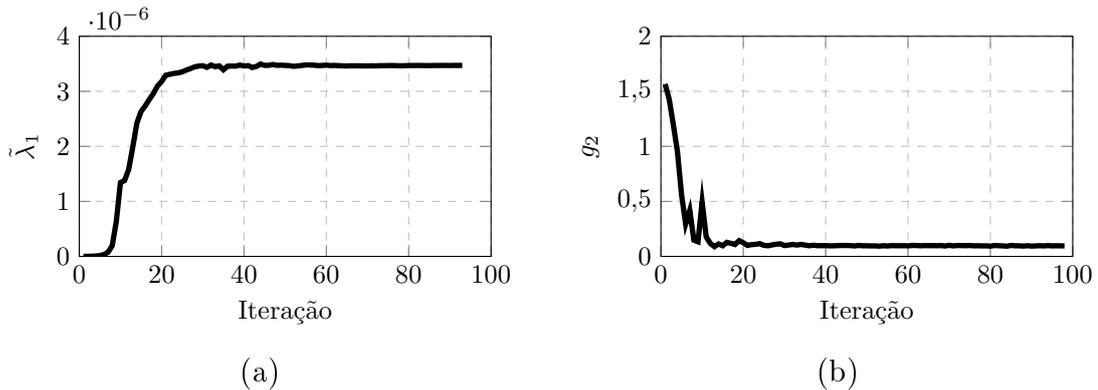


Figura 5.10 – Maximização de $\tilde{\lambda}_1$ com $C_\lambda = 0,1$ através da abordagem simultânea: (a) curva de convergência e (b) função de restrição g_2 .

Na etapa de projeto, uma forma de se assegurar que não ocorram efeitos indesejados ocasionados pelo *spillover* para os atuadores otimizados em um sistema de controle por realimentação é através da certificação que os modos residuais não sejam controláveis. Entretanto, quando se trata de estruturas contínuas, como as dos exemplos analisados no presente trabalho, o projeto de atuador que seja insensível para um conjunto de modos residuais é praticamente inviável. Assim, a formulação proposta e analisada neste capítulo busca apenas atenuar os efeitos de *spillover*, projetando atuadores com controlabilidade limitada para os modos residuais. Os resultados mostram que é possível relacionar, embora de forma qualitativa, o limite C_λ com os ganhos do controlador na resposta em frequência.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, o método de otimização topológica foi empregado no projeto de atuadores piezoelétricos modais, por meio de uma formulação baseada na controlabilidade do sistema de controle. Inicialmente, a formulação proposta no Capítulo 3 visa o projeto de atuadores com polarização uniforme. Nessa etapa, o método SIMP foi empregado em conjunto com o PEMAP para interpolar as propriedades elásticas, dielétricas e piezoelétricas do material efetivo. Ao escrever a função objetivo desse problema em termos dos autovalores do Gramiano de controlabilidade, identifica-se mais facilmente a contribuição referente à atuação de cada modo de vibração. A partir dessa formulação, duas modificações foram propostas visando aprimorar o desempenho do sistema de controle e atenuar a excitação do atuador projetado nos modos residuais. A primeira modificação foi realizada no modelo material para incluir o perfil de polarização do atuador piezoelétrico no problema de otimização. Essa formulação permite que os atuadores embutidos na estrutura tenham diferentes direções de polarização e, conseqüentemente, campos de deformação trativos e compressivos podem ser gerados em diferentes regiões da estrutura por meio do mesmo sinal de controle. A segunda modificação visa a atenuação dos efeitos de *spillover* no controle por realimentação, e foi realizada por meio da inclusão de uma restrição que limita a controlabilidade dos modos de vibração residuais. Na sequência desse capítulo, serão apresentados alguns comentários específicos referentes à essas duas formulações e, por fim, algumas sugestões para a continuidade dessa linha de pesquisa.

6.1 Comentários Sobre a Otimização do Perfil de Polarização do Atuador Piezoelétrico

O perfil de polarização foi incluído no problema de otimização por meio do método PEMAP-P no Capítulo 4, no qual um novo conjunto de variáveis de projeto é adicionado no modelo material para possibilitar a inversão da direção de polarização do material piezoelétrico. Analisando as topologias interpretadas, observa-se um padrão simétrico para os projetos com perfil de polarização otimizados. Esses projetos apresentaram maiores índices de controlabilidade e melhores desempenhos quando empregados em um sistema de controle LQR. Para todos os casos analisados com força externa senoidal, os atuadores com polarização otimizada são capazes de reduzir a magnitude do deslocamento de

forma mais efetiva, com menores diferenças de potenciais elétricos aplicados nos eletrodos. Quando uma restrição de operação é considerada para limitar os potenciais elétricos aplicados, observa-se que maiores ganhos podem ser empregados no controlador LQR. Assim, o aprimoramento no desempenho do sistema de controle utilizando o atuador com polarização otimizada se torna ainda mais evidente.

Referente a formulação do problema de otimização simultânea da topologia e do perfil de polarização dos atuadores piezoelétricos, os seguintes trabalhos foram publicados em periódicos e anais de congressos:

- GONÇALVES, J. F.; DE LEON, D. M.; PERONDI, E. A. Simultaneous optimization of piezoelectric actuator topology and polarization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 53(8), p. 1139–1154, 2018.
- GONÇALVES, J. F.; DE LEON, D. M.; PERONDI, E. A. Topology Optimization for Compliance Minimization and Actuator Layout to Vibration Suppress. In: Rodrigues H. et al. (eds) **Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization**. Springer, Cham, 2019.

6.2 Comentários Sobre a Atenuação dos Efeitos de *Spillover* no Sistema de Controle

A interação do sistema de controle com os modos residuais foi tratada no Capítulo 5, onde um limite foi imposto à controlabilidade desses modos visando a atenuação dos efeitos indesejados de *spillover*. Uma função de restrição foi adicionada ao problema de otimização para impedir que algum índice de controlabilidade residual exceda um determinado limite. Para isso, adota-se uma norma p para aproximar a função máximo. As respostas em frequência obtidas quando empregando o controlador LQR mostram que a excitação dos modos residuais é atenuado. Entretanto, por se tratar de uma estrutura contínua, o projeto de um atuador também contínuo que seja insensível a um conjunto de modos de vibração residuais é praticamente impossível. Para isso, todos os modos residuais deveriam ser não-controláveis, ou seja, possuírem índices de controlabilidade nulos. Dessa forma, apenas a atenuação dos efeitos de *spillover* pode ser garantida, e não a eliminação completa desses efeitos. Além disso, ao limitar o espaço de projeto, menores valores são obtidos para as funções objetivos e, conseqüentemente, alguma perda do de-

sempenho do sistema de controle deve ser observada. A combinação dessa formulação com a otimização simultânea da polarização e topologia do atuador pode compensar eventuais perdas que a restrição adicional de *spillover* acarreta.

Referente a formulação do problema de otimização topológica com restrição de *spillover*, os seguintes trabalhos foram publicados em periódicos:

- GONÇALVES, J. F.; DE LEON, D. M.; PERONDI, E. A. Topology optimization of embedded piezoelectric actuators considering control spillover effects. **Journal of Sound and Vibration**, v. 388, p. 20–41, 2017.
- GONÇALVES, J. F.; DE LEON, D. M.; PERONDI, E. A. Piezoelectric actuator design considering spillover effects. **Procedia Engineering**, v. 199, p. 1665–1670, 2017.

6.3 Trabalhos Futuros

Na continuidade dessa pesquisa, os procedimentos de otimização serão testados para problemas mais complexos, assim como em conjunto com o projeto de estruturas via minimização de flexibilidade ou restrição de tensão mecânica. Do ponto de vista do modelo eletromecânico, pode-se aprimorar o modelo numérico para que os modos piezoelétricos sejam considerados. Esse comportamento não foi considerado ao se assumir campo elétrico uniforme entre os eletrodos da estrutura. Além disso, a análise da não-linearidade do problema é uma continuidade que surge naturalmente para o problema proposto. Para isso, sugere-se três abordagens que podem inclusive ser combinadas em trabalhos futuros: (i) a representação do comportamento não-linear dos atuadores piezoelétricos em função do campo elétrico e da tensão mecânica, (ii) a análise do problema de reversão de polarização e como projetar um atuador que seja menos propício a esse problema, e (iii) a compensação do comportamento histerético dos atuadores piezoelétricos através do sistema de controle. Esses três problemas serão brevemente discutidos a seguir.

(i) Consideração dos Efeitos de Não-Linearidade do Material Piezoelétrico

A descrição linear fornece uma aproximação razoável das características funcionais de cerâmicas piezoelétricas sob baixos níveis de campo elétrico aplicado e de tensão mecânica. Entretanto, torna-se mais imprecisa conforme esses níveis de campo elétrico e de

tensão aumentam. Sob tais condições, o coeficiente efetivo de acoplamento piezoelétrico para uma cerâmica PZT tipo *soft* pode alcançar valores até 100% maiores do que o valor nominal [Hall, 2001]. Dessa forma, para aplicações nas quais são necessárias elevadas potências, os coeficientes $\overline{c_{ij}}(\mathcal{M}_a)$, $\overline{d_{ij}}(\mathcal{M}_a)$ e $\overline{e_{ij}}(\mathcal{M}_a)$ não são constantes e apresentam comportamento não-linear que depende do campo elétrico e da tensão mecânica.

(ii) Análise do Problema de Despolarização

Para a realização do projeto estrutural de atuadores piezoelétricos para aplicações em elevados níveis de campo elétrico aplicado, torna-se necessária a utilização de modelos que representem o comportamento macroscópico não-linear devido à reversão de polarização. Como consequência, uma restrição pode ser considerada no problema de otimização visando diminuir a possibilidade de despolarização do atuador, ou de partes do atuador, quando submetido à determinadas condições de operação. Para isso, pode-se levar em consideração a reversão de polarização por meio de modelos que incorporem os efeitos de carregamentos externos, tanto mecânicos como elétricos, utilizando o princípio da mínima energia potencial, ou ainda a aplicação de modelos fenomenológicos para representar esse comportamento.

(iii) Abordagens de Controle para Compensação de Efeitos Não-Lineares

A histerese ferroelétrica é um problema de não-linearidade comum em atuadores piezoelétricos, que pode ser tratado pelo ponto de vista da teoria de controle. Nesse campo de estudos, busca-se compensar os efeitos da não-linearidade na saída do sistema por meio de modelos e leis de controle que levam em consideração esses efeitos. O modelo de Bouc-Wen, por exemplo, é uma abordagem simplificada que representa esse comportamento não-linear e pode ser combinado com alguma teoria de controle. Outra alternativa é o emprego de técnicas de linearização por realimentação, propondo uma relação diferencial linear entre as saídas e entradas do sistema de forma que as parcelas não-lineares encontradas durante o processo de controle sejam canceladas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ambrosio, L. e Buttazzo, G. An optimal design problem with perimeter penalization, **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, vol. 1(1), p. 55–69, 1993.

Arnold, W. F. e Laub, A. J. Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic Riccati equations, **Proceedings of the IEEE**, vol. 72(12), p. 1746–1754, 1984.

Arora, J. S. **Introduction to Optimum Design**. San Diego: Elsevier Academic Press, 2004.

Arunakirinathar, K. e Reddy, B. Further results for enhanced strain methods with isoparametric elements, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 127(1-4), p. 127–143, 1995.

Balas, M. J. Active control of flexible systems, **Journal of Optimization theory and Applications**, vol. 25(3), p. 415–436, 1978.

Becker, J., Fein, O., Maess, M., e Gaul, L. Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping, **Computers & Structures**, vol. 84(31-32), p. 2340–2350, 2006.

Bendsøe, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem, **Structural Optimization**, vol. 1(4), p. 193–202, 1989.

Bendsøe, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape, and Material**. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

Bendsøe, M. P. e Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71(2), p. 197–224, 1988.

Bendsøe, M. P. e Sigmund, O. Material interpolation schemes in topology optimization, **Archive of Applied Mechanics**, vol. 69(9-10), p. 635–654, 1999.

Bendsøe, M. P. e Sigmund, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

Biglar, M. e Mirdamadi, H. R. Integrated and consistent active control formulation and piezotransducer position optimization of plate structures considering spillover effects, **Shock and Vibration**, vol. 2014, 2014.

Brockett, R. W. **Finite dimensional linear systems**. New York: John Wiley & Sons, 1970.

Bruant, I., Coffignal, G., Lene, F., e Verge, M. A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 243(5), p. 861–882, 2001.

Bruant, I., Gallimard, L., e Nikoukar, S. Optimal piezoelectric actuator and sensor location for active vibration control, using genetic algorithm, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 329(10), p. 1615–1635, 2010.

Carbonari, R. C., Silva, E. C., e Paulino, G. H. Multi-actuated functionally graded piezoelectric micro-tools design: A multiphysics topology optimization approach, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 77(3), p. 301–336, 2009.

Chen, C.-T. **Linear system theory and design**. 3 ed. New York: Oxford University Press, 1998.

Cinquemani, S., Ferrari, D., e Bayati, I. Reduction of spillover effects on independent modal space control through optimal placement of sensors and actuators, **Smart Materials and Structures**, vol. 24(8), p. 085006, 2015.

Collet, M. Shape optimization of piezoelectric sensors dealing with spill-over instability, **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, vol. 9(4), p. 654–662, 2001.

Cui, Q., Liu, C., e Zha, X. F. Simulation and optimization of a piezoelectric micropump for medical applications, **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, vol. 36(5-6), p. 516–524, 2008.

Diaz, A. e Sigmund, O. Checkerboard patterns in layout optimization, **Structural Optimization**, vol. 10(1), p. 40–45, 1995.

Donoso, A. e Bellido, J. Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 38(4), p. 347, 2009.

Donoso, A. e Sigmund, O. Topology optimization of piezo modal transducers with null-polarity phases, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 53(2), p. 193–203, 2016.

Filhol, F., Defay, E., Divoux, C., Zinck, C., e Delaye, M.-T. Resonant micro-mirror excited by a thin-film piezoelectric actuator for fast optical beam scanning, **Sensors and Actuators A: Physical**, vol. 123, p. 483–489, 2005.

Frias, C., Reis, J., e Silva, F. C., Potes, J., Simões, J., e Marques, A. Polymeric piezoelectric actuator substrate for osteoblast mechanical stimulation, **Journal of biomechanics**, vol. 43(6), p. 1061–1066, 2010.

Gajic, Z. **Linear Dynamic Systems and Signals**. Prentice Hall/Pearson Education, 2003.

Gawronski, W. **Advanced structural dynamics and active control of structures**. 1 ed. New York: Springer-Verlag, 2004.

Gawronski, W. e Lim, K. Balanced actuator and sensor placement for flexible structures, **International Journal of Control**, vol. 65(1), p. 131–145, 1996.

Gibiansky, L. e Torquato, S. Optimal design of 1-3 composite piezoelectrics, **Structural Optimization**, vol. 13(1), p. 23–28, 1997.

Gonçalves, J. F., De Leon, D. M., e Perondi, E. A. Piezoelectric actuator design considering spillover effects, **Procedia Engineering**, vol. 199, p. 1665 – 1670, 2017a.

Gonçalves, J. F., De Leon, D. M., e Perondi, E. A. Topology optimization of embedded piezoelectric actuators considering control spillover effects, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 388, p. 20 – 41, 2017b.

Gonçalves, J. F., De Leon, D. M., e Perondi, E. A. Simultaneous optimization of piezoelectric actuator topology and polarization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 58(3), p. 1139–1154, 2018a.

Gonçalves, J. F., De Leon, D. M., e Perondi, E. A. **Topology Optimization for Compliance Minimization and Actuator Layout to Vibration Suppress**. In International Conference on Engineering Optimization, p. 523–530. Springer, 2018b.

Gonçalves, J. F., Fonseca, J. S. O., e Silveira, O. A. A controllability-based formulation for the topology optimization of smart structures, **Smart Structures and Systems**, vol. 17, p. 773 – 793, 2016.

Guedes, J. e Taylor, J. On the prediction of material properties and topology for optimal continuum structures, **Structural Optimization**, vol. 14(2-3), p. 193–199, 1997.

Gupta, V., Sharma, M., e Thakur, N. Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: a technical review, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. 21(12), p. 1227–1243, 2010.

Haber, R. B., Jog, C. S., e Bendsøe, M. P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter, **Structural Optimization**, vol. 11(1-2), p. 1–12, 1996.

Hać, A. e Liu, L. Sensor and actuator location in motion control of flexible structures, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 167(2), p. 239–261, 1993.

Haftka, R. T. e Gürdal, Z. **Elements of Structural Optimization**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

Hall, D. Review nonlinearity in piezoelectric ceramics, **Journal of Materials Science**, vol. 36(19), p. 4575–4601, 2001.

Hamdan, A. e Nayfeh, A. Measures of modal controllability and observability for first-and second-order linear systems, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, vol. 12(3), p. 421–428, 1989.

Hanis, T. e Hromčík, M. Optimal sensors placement and spillover suppression, **Mechanical Systems and Signal Processing**, vol. 28, p. 367–378, 2012.

Hespanha, J. P. **Linear systems theory**. 2 ed. New Jersey: Princeton University Press, 2015.

Hu, J., Zhang, X., e Kang, Z. Layout design of piezoelectric patches in structural linear quadratic regulator optimal control using topology optimization, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, p. 1–18, 2018.

Hughes, T. J. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. New York: Dover Publications, 2012.

Ikeda, T. Depolarizing-field effect in piezoelectric resonators, **Ferroelectrics**, vol. 43(1), p. 3–15, 1982.

Ikeda, T. **Fundamentals of Piezoelectricity**. New York: Oxford University Press, 1996.

Irschik, H. A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation, **Engineering Structures**, vol. 24(1), p. 5–11, 2002.

Jani, J. M., Leary, M., Subic, A., e Gibson, M. A. A review of shape memory alloy research, applications and opportunities, **Materials & Design (1980-2015)**, vol. 56, p. 1078–1113, 2014.

Jia, S. e Shan, J. Optimal Actuator Placement for Constrained Gyroelastic Beam Considering Control Spillover, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, p. 1–9, 2018.

Jog, C. S. e Haber, R. B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 130(3-4), p. 203–226, 1996.

Junkins, J. L. e Kim, Y. Measure of controllability for actuator placement, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, vol. 14(5), p. 895–902, 1991.

Kang, Z., Wang, R., e Tong, L. Combined optimization of bi-material structural layout and voltage distribution for in-plane piezoelectric actuation, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 200(13-16), p. 1467–1478, 2011.

Katzir, S. **The Beginnings of Piezoelectricity: A Study in Mundane Physics**. vol. 246. 1 ed. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2006.

Keviczky, L., Bars, R., Hetthéssy, J., Barta, A., e Bányász, C. **Control Engineering: MATLAB Exercises**. Springer, 2011.

Khushnood, M. A., Xiaogang, W., e Naigang, C. A criterion for optimal sensor placement for minimizing spillover effects on optimal controllers, **Journal of Vibration and Control**, vol. 24(8), p. 1469–1487, 2018.

Kim, J. e Ko, B. Optimal design of a piezoelectric smart structure for noise control, **Smart Materials and Structures**, vol. 7(6), p. 801, 1998.

Kissel, G. e Lin, J. **Spillover prevention via proper synthesis/placement of actuators and sensors**. In American Control Conference, 1982, p. 1213–1218. IEEE, 1982.

Kögl, M. e Silva, E. C. Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shell actuators, **Smart Materials and Structures**, vol. 14(2), p. 387, 2005.

Leleu, S., Abou-Kandil, H., e Bonnassieux, Y. Piezoelectric Actuators and Sensors Location for Active Control of Flexible Structures, **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, vol. 50(6), p. 1577–1582, 2001.

Lerch, R. Simulation of piezoelectric devices by two-and three-dimensional finite elements, **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control**, vol. 37(3), p. 233–247, 1990.

Levine, W. S. **Control system applications**. 1 ed. Boca Raton: CRC press, 1999.

Lim, K. Method for optimal actuator and sensor placement for large flexible structures, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, vol. 15(1), p. 49–57, 1992.

Liu, W. e Hou, Z. A new approach to suppress spillover instability in structural vibration control, **Structural Control and Health Monitoring**, vol. 11(1), p. 37–53, 2004.

Meirovitch, L., Baruh, H., e OZ, H. A comparison of control techniques for large flexible systems, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, vol. 6(4), p. 302–310, 1983.

Menuzzi, O., Fonseca, J. S., Perondi, E. A., Gonçalves, J. F., Padoin, E., e Silveira, O. A. Piezoelectric sensor location by the observability Gramian maximization using topology optimization, **Computational and Applied Mathematics**, vol. 37(1), p. 237–252, 2018.

Middleton, R. H. e Goodwin, G. C. **Digital Control and Estimation: A Unified Approach**. New Jersey: Prentice-Hall, 1990.

Moheimani, S. R. e Fleming, A. J. **Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping**. 1 ed. London: Springer-Verlag, 2006.

Molter, A., dos Santos Fernandez, L., e Lauz, J. B. An optimality criteria-based method for the simultaneous optimization of the structural design and placement of piezoelectric actuators, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 1–17, 2018.

Molter, A., Fonseca, J. S. O., e dos Santos Fernandez, L. Simultaneous topology optimization of structure and piezoelectric actuators distribution, **Applied Mathematical Modelling**, vol. 40(9-10), p. 5576–5588, 2016.

Moretti, M., Silva, E. C., e Reddy, J. Topology optimization of flextensional piezoelectric actuators with active control law, **Smart Materials and Structures**, 2019.

Muhammad, A., Yao, X.-l., e Deng, Z.-c. Review of magnetorheological (MR) fluids and its applications in vibration control, **Journal of Marine Science and Application**, vol. 5(3), p. 17–29, 2006.

Nishizu, T., Takezawa, A., e Kitamura, M. Eigenfrequency-based damage identification method for non-destructive testing based on topology optimization, **Engineering Optimization**, vol. 49(3), p. 417–433, 2017.

Onoda, J. e Haftka, R. T. An approach to structure/control simultaneous optimization for largeflexible spacecraft, **AIAA Journal**, vol. 25(8), p. 1133–1138, 1987.

Ou, J.-S. e Kikuchi, N. Integrated optimal structural and vibration control design, **Structural Optimization**, vol. 12(4), p. 209–216, 1996.

Padoin, E., Fonseca, J. S. O., Perondi, E. A., e Menuzzi, O. Optimal placement of piezoelectric macro fiber composite patches on composite plates for vibration suppression, **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 12(5), p. 925–947, 2015.

Padoin, E., Santos, I. F., Perondi, E. A., Menuzzi, O., e Gonçalves, J. F. Topology optimization of piezoelectric macro-fiber composite patches on laminated plates for vibration suppression, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2018.

Pedersen, N. L. Maximization of eigenvalues using topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 20(1), p. 2–11, 2000.

Petersson, J. e Sigmund, O. Slope constrained topology optimization, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 41(8), p. 1417–1434, 1998.

Piefort, V. **Finite element modelling of piezoelectric active structures**. PhD thesis, Ph. D. thesis. Bruxelles, Belgium: Université Libre de Bruxelles, 2001.

Preumont, A. **Vibration control of active structures**. 3 ed. Berlin: Springer-Verlag, 2011.

Priya, S. Advances in energy harvesting using low profile piezoelectric transducers, **Journal of Electroceramics**, vol. 19(1), p. 167–184, 2007.

Qi, H., Fang, D., e Yao, Z. FEM analysis of electro-mechanical coupling effect of piezoelectric materials, **Computational Materials Science**, vol. 8(4), p. 283–290, 1997.

Reddy, B. e Simo, J. Stability and convergence of a class of enhanced strain methods, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, vol. 32(6), p. 1705–1728, 1995.

Rubio, W. M., Silva, E. C., e Paulino, G. H. Toward optimal design of piezoelectric transducers based on multifunctional and smoothly graded hybrid material systems, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. 20(14), p. 1725–1746, 2009.

Ruiz, D., Bellido, J., e Donoso, A. Design of piezoelectric modal filters by simultaneously optimizing the structure layout and the electrode profile, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 53(4), p. 715–730, 2016.

Ruiz, D. e Sigmund, O. Optimal design of robust piezoelectric microgrippers undergoing large displacements, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 57(1), p. 71–82, 2018.

Rupp, C. J., Evgrafov, A., Maute, K., e Dunn, M. L. Design of piezoelectric energy harvesting systems: a topology optimization approach based on multilayer plates and shells, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. 20(16), p. 1923–1939, 2009.

Salas, R., Ramírez, F., Montealegre-Rubio, W., Silva, E., e Reddy, J. A topology optimization formulation for transient design of multi-entry laminated piezocomposite energy harvesting devices coupled with electrical circuit, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 113(8), p. 1370–1410, 2018.

Sigmund, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization, **Journal of Structural Mechanics**, vol. 25(4), p. 493–524, 1997.

Sigmund, O. e Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, **Structural Optimization**, vol. 16(1), p. 68–75, 1998.

Sigmund, O. e Torquato, S. Design of smart composite materials using topology optimization, **Smart Materials and Structures**, vol. 8(3), p. 365, 1999.

Sigmund, O., Torquato, S., e Aksay, I. A. On the design of 1–3 piezocomposites using topology optimization, **Journal of Materials Research**, vol. 13(4), p. 1038–1048, 1998.

Silva, E. C. N., Fonseca, J. S. O., e Kikuchi, N. Optimal design of periodic piezocomposites, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 159(1-2), p. 49–77, 1998.

Silva, E. C. N. e Kikuchi, N. Design of piezoelectric transducers using topology optimization, **Smart Materials and Structures**, vol. 8(3), p. 350–364, 1999.

Silva, E. N., Fonseca, J. O., e Kikuchi, N. Optimal design of piezoelectric microstructures, **Computational Mechanics**, vol. 19(5), p. 397–410, 1997.

Silveira, O. A. A., Fonseca, J. S. O., e Santos, I. F. Actuator topology design using the controllability Gramian, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 51(1), p. 145–157, 2015.

Sohn, J. W., Choi, S.-B., e Kim, H. S. Vibration control of smart hull structure with optimally placed piezoelectric composite actuators, **International Journal of Mechanical Sciences**, vol. 53(8), p. 647–659, 2011.

Song, G., Sethi, V., e Li, H.-N. Vibration control of civil structures using piezoceramic smart materials: A review, **Engineering Structures**, vol. 28(11), p. 1513–1524, 2006.

Stanway, R., Sproston, J., e El-Wahed, A. Applications of electro-rheological fluids in vibration control: a survey, **Smart Materials and Structures**, vol. 5(4), p. 464, 1996.

Stolpe, M. e Svanberg, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 22(2), p. 116–124, 2001.

Stolpe, M. e Svanberg, K. Modelling topology optimization problems as linear mixed 0–1 programs, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 57(5), p. 723–739, 2003.

Suzuki, K. e Kikuchi, N. A homogenization method for shape and topology optimization, **Computer methods in applied mechanics and engineering**, vol. 93(3), p. 291–318, 1991.

Takezawa, A., Kitamura, M., Vatanabe, S. L., e Silva, E. C. N. Design methodology of piezoelectric energy-harvesting skin using topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 49(2), p. 281–297, 2014.

Taylor, R. L., Beresford, P. J., e Wilson, E. L. A non-conforming element for stress analysis, **International Journal for numerical methods in Engineering**, vol. 10(6), p. 1211–1219, 1976.

Tiersten, H. Hamilton’s principle for linear piezoelectric media, **Proceedings of the IEEE**, vol. 55(8), p. 1523–1524, 1967.

Vanderplaats, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design**. 3 ed. Colorado Springs: Vanderplaats Research and Development, Inc., 1999.

Wang, Q. e Wang, C. M. A controllability index for optimal design of piezoelectric actuators in vibration control of beam structures, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 242(3), p. 507–518, 2001.

Wilson, E., Taylor, R., Doherty, W., e Ghaboussi, J. **Incompatible displacement models**. In Numerical and computer methods in structural mechanics, p. 43–57. Elsevier, 1973.

Wu, B., Xu, Z., e Li, Z. A note on computing eigenvector derivatives with distinct and repeated eigenvalues, **Communications in Numerical Methods in Engineering**, vol. 23(3), p. 241–251, 2007.

Yang, K., Zhu, J., Wu, M., e Zhang, W. Integrated optimization of actuators and structural topology of piezoelectric composite structures for static shape control, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 334, p. 440–469, 2018.

Zhang, X. e Kang, Z. Topology optimization of piezoelectric layers in plates with active vibration control, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. 25(6), p. 697–712, 2014.

Zhang, X., Kang, Z., e Li, M. Topology optimization of electrode coverage of piezoelectric thin-walled structures with CGVF control for minimizing sound radiation, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 50(5), p. 799–814, 2014.

Zheng, B., Chang, C.-J., e Gea, H. C. Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 38(1), p. 17–23, 2009.

Zou, Y., Tong, L., e Steven, G. P. Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures—a review, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 230(2), p. 357–378, 2000.

APÊNDICE A – Materiais Piezelétricos e Piezeletricidade Linear

O termo piezeletricidade tem como origem a combinação da palavra grega *piezein*, que significa pressionar, com eletricidade. Dessa forma, esse termo retrata a característica mais importante dos materiais piezoelétricos que é a relação entre respostas mecânicas (pressão, tensão, etc) e elétricas. Esse fenômeno, descoberto por Pierre e Jacques Curie em 1880, consiste na transformação de energia de origem mecânica em elétrica, e vice-versa. Neste capítulo, descreve-se alguns conceitos básicos e as principais características das cerâmicas piezoelétricas. A seguir, apresenta-se as equações constitutivas para esse tipo de material assumindo comportamento linear, válido para casos envolvendo baixos níveis de tensão mecânica e de campos elétricos. Por fim, o problema de valor de contorno para um meio piezoelétrico é escrito através do princípio de Hamilton, o que será base para a aproximação do problema por meio do método dos elementos finitos.

A.1 Cerâmicas Piezoelétricas

Cerâmica piezoelétrica é uma massa de cristais, na qual cada cristal é composto por um pequeno íon metálico tetravalente localizado dentro de uma rede de íons metálicos bivalentes e de oxigênio, como representado na Figura A.1. A preparação de uma cerâmica piezoelétrica consiste na mistura dos óxidos metálicos, em proporções específicas, e no posterior aquecimento, combinado com um aglutinante orgânico, visando a formação de uma mistura uniforme. Assim, pode-se produzir elementos com formas específicas como, por exemplo, discos, barras, placas, etc. Por fim, esses elementos são aquecidos por um tempo específico, e sob uma temperatura pré-determinada, resultando em um material com estrutura cristalina densa [Moheimani e Fleming, 2006].

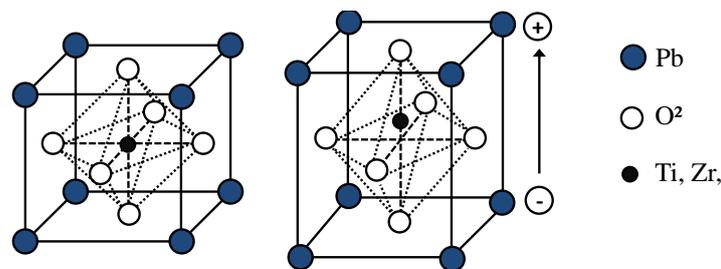


Figura A.1 – Estrutura cristalina de uma cerâmica piezoelétrica antes e depois da polarização.

Acima de uma temperatura crítica, conhecida como a temperatura de Curie, cada cristal na cerâmica aquecida exibe uma simetria cúbica simples sem momento de dipolo. No entanto, abaixo da temperatura de Curie, cada cristal tem simetria tetragonal e, associado a isso, um momento de dipolo. Dipolos adjacentes formam regiões de alinhamento local chamadas de domínios. A direção de polarização entre domínios vizinhos é aleatória, ou seja, a cerâmica não apresenta uma direção de polarização macroscópica, como representado na Figura A.2(a). O alinhamento dos domínios em um elemento cerâmico é realizado através de um processo conhecido como polarização, que ocorre usualmente logo abaixo da temperatura de Curie. Esse alinhamento se deve à exposição da cerâmica a um forte campo elétrico contínuo como representado na Figura A.2 (b). Com a remoção do campo elétrico, a maioria dos dipolos mantém uma configuração próxima ao alinhamento, ou seja, o elemento cerâmico apresenta uma polarização permanente, como representado na Figura A.2 (c).

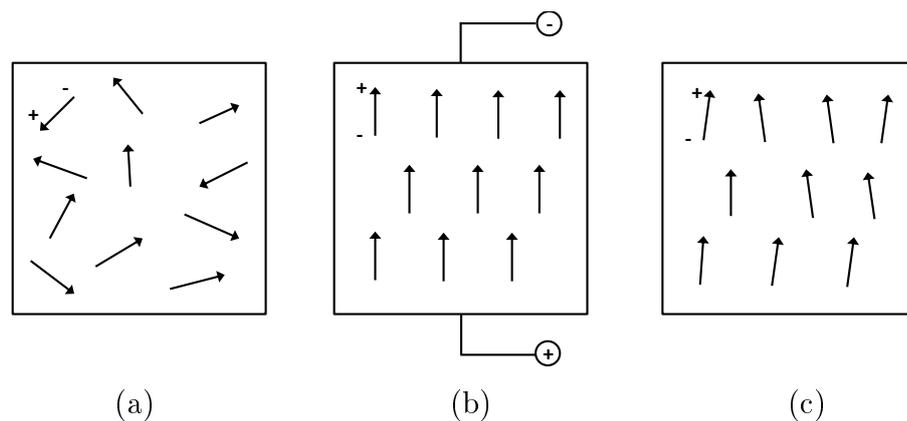


Figura A.2 – Processo de polarização: (a) antes de polarização, (b) durante aplicação de um campo elétrico, (c) após a remoção do campo elétrico.

O comportamento de uma cerâmica piezoeétrica polarizada é apresentado na Figura A.3. A compressão do material, ao longo da direção de polarização, gera diferença de potencial elétrico com mesma polaridade da tensão de polarização, como representado na Figura A.3 (b). De forma análoga, a tração ao longo da direção de polarização gera diferença de potencial elétrico com polaridade oposta (Figura A.3 (c)). Para esses casos citados acima, ocorre o efeito direto no qual energia mecânica é convertida em elétrica, o que permite a utilização dos materiais piezoelétricos como sensores [Moheimani e Fleming, 2006].

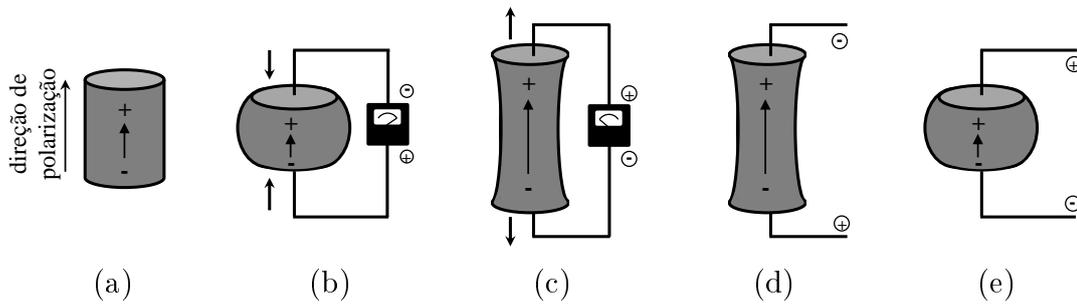


Figura A.3 – Reações de uma cerâmica piezolétrica polarizada quando submetida a solicitações mecânicas e potenciais elétricos.

Se uma diferença de potencial elétrico com mesma polaridade da tensão de polarização for aplicada no material, o elemento será alongado nessa direção, como representado na Figura A.3 (d). De forma análoga, se uma diferença de potencial elétrico com polaridade oposta for aplicada, o elemento será comprimido nessa direção (Figura A.3 (e)). Para esses últimos dois casos, ocorre o efeito inverso no qual energia elétrica é convertida em mecânica, o que permite a utilização dos materiais piezoelétricos como atuadores [Moheimani e Fleming, 2006].

A.2 Equações Constitutivas

Nesta seção, as equações que descrevem o comportamento eletromecânico de materiais piezolétricos são apresentadas assumindo uma relação linear, o que é válido para baixos níveis de tensão mecânica e de campos elétricos. As equações constitutivas piezolétricas são obtidas partindo do pressuposto de que a deformação total é composta pela deformação mecânica induzida por tensão mecânica e pela deformação gerada devido à aplicação de um potencial elétrico externo [Moheimani e Fleming, 2006].

A densidade de entalpia elétrica é definida como [Tiersten, 1967]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{U} - E_i D_i \quad (\text{A.1})$$

onde \mathcal{U} é a densidade de energia armazenada, E_i é o vetor de campo elétrico e D_i é o vetor de deslocamento elétrico. A conservação da energia para um meio contínuo piezolétrico linear resulta em [Tiersten, 1967]:

$$\dot{\mathcal{U}} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + E_i\dot{D}_i \quad (\text{A.2})$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensão mecânica, ε_{ij} é o tensor de deformação mecânica e o ponto superior indica derivada temporal. Derivando a Equação A.1 com respeito ao tempo e introduzindo a definição apresentada na Equação A.2, obtém-se:

$$\dot{\mathcal{H}} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - D_i\dot{E}_i \quad (\text{A.3})$$

Isso indica que $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\varepsilon_{ij}, E_i)$, ou seja, a deformação mecânica e o campo elétrico são variáveis independentes do problema. Portanto, assume-se que a densidade de entalpia elétrica tenha a forma [Tiersten, 1967]:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - d_{kij}E_k\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}e_{ij}E_iE_j \quad (\text{A.4})$$

onde c_{ijkl} , d_{ikl} e e_{ij} são os tensores de constantes elásticas (sob condição de campo elétrico constante), piezelétricas e dielétricas (sob condição de campo de deformação constante), respectivamente. As derivadas parciais de \mathcal{H} com respeito às variáveis independentes resultam nas duas relações constitutivas:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - d_{kij}E_k \quad (\text{A.5})$$

$$D_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_i} = d_{ikl}\varepsilon_{lk} + e_{ij}E_j \quad (\text{A.6})$$

As equações acima descrevem o acoplamento eletromecânico para um material piezelétrico linear.

A.3 Princípio de Hamilton Estendido para um Meio Contínuo Piezelétrico

As equações constitutivas apresentadas na seção anterior relacionam, da forma mais genérica, as quantidades mecânicas e elétricas em um meio piezelétrico linear. Entretanto, as simetrias dos tensores mecânicos possibilitam reescrever as equações constitutivas de forma compactada. Assim, essas relações podem ser escritas, em notação matricial, como:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{c}]\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{d}]^T\mathbf{E} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{d}]\boldsymbol{\varepsilon} + [\mathbf{e}]\mathbf{E} \quad (\text{A.8})$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são os vetores de tensão e deformação mecânica, respectivamente, escritas de acordo com a notação de Voigt; \mathbf{D} e \mathbf{E} são os vetores de deslocamento e campo elétrico, respectivamente; $[\mathbf{c}]$, $[\mathbf{d}]$ e $[\mathbf{e}]$ são, respectivamente, as matrizes de constantes elásticas, dielétricas e de acoplamento piezoeletrico.

O campo elétrico \mathbf{E} é relacionado com o potencial elétrico ϕ e a deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ é relacionada com o deslocamento espacial \mathbf{u} pelas equações:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathbf{u} \quad (\text{A.9})$$

onde ∇ e \mathcal{D} são operadores de derivação, definidos como:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \end{bmatrix} \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Considerando um problema dinâmico, o comportamento elástico de um meio piezoeletrico é governado pela Lei de Newton:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \gamma \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (\text{A.11})$$

onde $\text{div}(\bullet)$ é o operador divergente e γ é a densidade do material. Além disso, o comportamento elétrico é descrito pela equação de Maxwell considerando que o meio piezoeletrico é isolante:

$$\text{div}(\mathbf{D}) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Essas equações formam um conjunto completo de equações diferenciais que podem ser resolvidas com condições de contorno (mecânicas e elétricas) apropriadas. Uma descrição equivalente desse problema de valor de contorno é o princípio variacional de Hamilton estendido para um meio contínuo piezoeletrico, dado por [Lerch, 1990]:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{W} dt = 0 \quad (\text{A.13})$$

onde o operador δ denota a primeira variação, t_0 e t_1 definem o intervalo de tempo analisado, \mathcal{L} é o Lagrangiano e \mathcal{W} é o trabalho virtual das forças externas (mecânicas e elétricas). O termo Lagrangiano é determinado pelas energias disponíveis no meio piezelétrico, ou seja, esse termo é definido como a diferença entre a energia cinética \mathcal{K} e a entalpia elétrica \mathcal{H} , ao invés da diferença entre energia cinética e interna como em elasticidade pura [Tiersten, 1967], então:

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} (\mathcal{K} - \mathcal{H}) d\Omega \quad (\text{A.14})$$

A primeira variação da densidade de energia cinética é dada por:

$$\delta\mathcal{K} = \gamma \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{A.15})$$

onde $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor campo de velocidades. Integrando-se por partes a Equação A.15, sobre o intervalo de tempo de t_0 a t_1 , obtém-se:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta\mathcal{K} dt = \gamma \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \gamma \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dt \quad (\text{A.16})$$

onde a variação $\delta \mathbf{u}$ deve ser nula em $t = t_0$ e $t = t_1$ [Tiersten, 1967]. Dessa forma, o primeiro termo da integração por partes será nulo e a variação da densidade de energia cinética é escrita simplesmente como:

$$\delta\mathcal{K} = -\gamma \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{A.17})$$

A primeira variação da densidade de entalpia elétrica é dada por [Piefort, 2001]:

$$\delta\mathcal{H} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T ([\mathbf{c}]\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{d}]^T \mathbf{E}) - \delta \mathbf{E}^T ([\mathbf{d}]\boldsymbol{\varepsilon} + [\mathbf{e}]\mathbf{E}) \quad (\text{A.18})$$

Considerando um problema no qual as condições de contorno essenciais são o campo de deslocamento prescrito em Γ_u e o potencial elétrico em Γ_ϕ , o termo referente ao trabalho virtual das forças externas é dado por:

$$\delta\mathcal{W} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_c d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_s d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta \phi q_s d\Gamma + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_p - \delta \phi q_p \quad (\text{A.19})$$

onde \mathbf{f}_c , \mathbf{f}_s e \mathbf{f}_p são, respectivamente, as forças de corpo, de superfície e pontuais; q_s e q_p são as cargas elétrica na superfície do corpo e pontuais, respectivamente.

Substituindo esse termo de trabalho virtual e a primeira variação do Lagrangiano, utilizando as variações apresentadas nas Equações A.17 e A.18, no princípio variacional de Hamilton, apresentado na Equação A.13, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\gamma \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbf{c}] \boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbf{d}]^T \mathbf{E} + \delta \mathbf{E}^T [\mathbf{d}] \boldsymbol{\varepsilon} + \delta \mathbf{E}^T [\mathbf{e}] \mathbf{E} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_c) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_s d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta \phi q_s d\Gamma + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_p - \delta \phi q_p = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

que descreve o equilíbrio das energias internas e externas, tanto de origem mecânica como elétrica, para o meio piezoelétrico.

APÊNDICE B – Método dos Elementos Finitos com Acoplamento Piezoelétrico

O campo de deslocamentos e os potenciais elétricos podem ser aproximados como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_n \quad (\text{B.1})$$

$$\phi = \mathbf{N}_\phi \phi_n \quad (\text{B.2})$$

onde \mathbf{N}_u e \mathbf{N}_ϕ são matrizes contendo as funções de interpolação com suporte compacto; \mathbf{u}_n e ϕ_n são os deslocamentos e potenciais elétricos nodais. Assim, pode-se reescrever as relações das Equação A.9 como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathbf{N}_u \mathbf{u}_n = \mathbf{B}_u \mathbf{u}_n \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{N}_\phi \phi_n = -\mathbf{B}_\phi \phi_n \quad (\text{B.4})$$

onde \mathbf{B}_u e \mathbf{B}_ϕ são as matrizes que expressam as relações deformação-deslocamento e campo-potencial elétrico, respectivamente. Dessa forma, é possível reescrever o princípio variacional (Equação A.20) em termos das funções de interpolação e suas derivadas, assim

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_n^T \int_{\Omega} \gamma \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u \, d\Omega \, \ddot{\mathbf{u}}_n + \delta \mathbf{u}_n^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{c}] \mathbf{B}_u \, d\Omega \, \mathbf{u}_n + \delta \mathbf{u}_n^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{d}]^T \mathbf{B}_\phi \, d\Omega \, \phi_n + \\ + \delta \phi_n^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi^T [\mathbf{d}] \mathbf{B}_u \, d\Omega \, \mathbf{u}_n - \delta \phi_n^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi^T [\mathbf{e}] \mathbf{B}_\phi \, d\Omega \, \phi_n - \delta \mathbf{u}_n^T \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_c \, d\Omega + \\ - \delta \mathbf{u}_n^T \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_s \, d\Gamma + \delta \phi_n^T \int_{\Gamma} \mathbf{N}_\phi^T q_s \, d\Gamma - \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_p + \delta \phi_n^T \mathbf{N}_\phi^T q_p = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Essa equação deve ser satisfeita para qualquer escolha de $\delta \mathbf{u}_n$ e $\delta \phi_n$ que respeite as condições de contorno essenciais do problema. Portanto, isolando os termos referentes à cada variação (de deslocamentos e de potenciais elétricos) e utilizando as escolhas naturais para essas variações, a Equação B.5 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{M}_{uu} \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u}_n + \mathbf{K}_{u\phi} \phi_n = \mathbf{f}_n \quad \text{para } \delta \mathbf{u}_n = 1 \text{ e } \delta \phi_n = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^T \mathbf{u}_n + \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi_n = \mathbf{q}_n \quad \text{para } \delta \mathbf{u}_n = 0 \text{ e } \delta \phi_n = 1 \quad (\text{B.7})$$

onde \mathbf{M}_{uu} é a matriz de massa; \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\phi}$ e $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ são as matrizes de rigidez, de acoplamento piezoelétrico e de capacitância dielétrica, respectivamente; as forças mecânicas externas \mathbf{f}_n e cargas elétricas aplicadas \mathbf{q}_n , em termos nodais, são dadas por:

$$\mathbf{f}_n = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_c \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_s \, d\Gamma + \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_p \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{q}_n = - \int_{\Gamma} \mathbf{N}_{\phi}^T q_s \, d\Gamma - \delta \phi_n^T \mathbf{N}_{\phi}^T q_p \quad (\text{B.9})$$

O princípio de Hamilton deve ser verificado para toda a estrutura por meio de equações em termos de matrizes globais, como deduzido acima. Entretanto, a aplicação de funções de forma com suporte compacto para interpolar os campos de deslocamento e potencial elétrico da estrutura permite o cálculo das matrizes para cada elemento da malha, de forma independente, e suas subsequentes superposições para formar as matrizes globais. Considerando uma malha com N elementos finitos, podemos escrever as matrizes globais em termos das matrizes de cada elemento:

$$\mathbf{M}_{uu} = \mathop{\bigvee}\limits_{e=1}^N \mathbf{M}_{uu}^{(e)} \quad \mathbf{K}_{uu} = \mathop{\bigvee}\limits_{e=1}^N \mathbf{K}_{uu}^{(e)} \quad \mathbf{K}_{u\phi} = \mathop{\bigvee}\limits_{e=1}^N \mathbf{K}_{u\phi}^{(e)} \quad \mathbf{K}_{\phi\phi} = \mathop{\bigvee}\limits_{e=1}^N \mathbf{K}_{\phi\phi}^{(e)} \quad (\text{B.10})$$

onde $\mathop{\bigvee}\limits_{e=1}^N (\bullet)$ é o operador de superposição e o sobrescrito (e) se refere ao e -ésimo elemento da malha. As matrizes de cada elemento são calculados por:

$$\mathbf{M}_{uu}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \gamma \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u \, d\Omega \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{K}_{uu}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{c}] \mathbf{B}_u \, d\Omega \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{d}]^T \mathbf{B}_{\phi} \, d\Omega \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{(e)} = - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{\phi}^T [\mathbf{e}] \mathbf{B}_{\phi} \, d\Omega \quad (\text{B.14})$$

onde Ω_e é o domínio do e -ésimo elemento da malha.

Como as funções de interpolação são as mesmas para todos os elementos, as matrizes \mathbf{B}_{ϕ} e \mathbf{B}_u também serão. A relação entre potencial e campo elétrico é calculada como:

$$\mathbf{B}_{\phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

enquanto que a relação entre deslocamento e deformação é dada por:

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

para um problema tri-dimensional.

B.1 Elemento não-conforme de Taylor

Neste trabalho, o modelo de elementos finitos foi implementado considerando um elemento finito hexaédrico de 8 nós com modos incompatíveis. Esse elemento apresenta formas quadráticas para aproximar os deslocamento, o que produz um melhor resultado para comportamento de flexão do que o elemento isoparamétrico. Na Figura B.1, representa-se o elemento hexaédrico em coordenadas cartesianas (x, y, z) e naturais (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

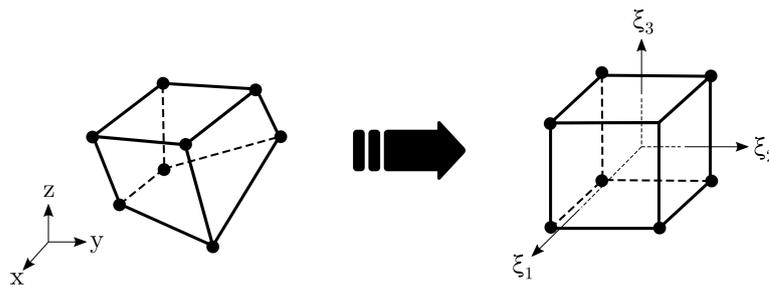


Figura B.1 – Elemento hexaédrico de 8 nós e seu sistema de coordenadas.

As funções de interpolação lineares para um elemento isoparamétrico, em termos das coordenadas naturais, são:

$$N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{8}(1 + \xi_{1i}\xi_1)(1 + \xi_{2i}\xi_2)(1 + \xi_{3i}\xi_3) \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (\text{B.17})$$

onde ξ_{1i} , ξ_{2i} e ξ_{3i} são as coordenadas do i -ésimo elemento no espaço natural, que assumem valores -1 ou 1 [Hughes, 2012]. As funções de interpolação referentes aos modos quadráticos são:

$$N_9(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 1 - \xi_1^2 \quad (\text{B.18})$$

$$N_{10}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 1 - \xi_2^2 \quad (\text{B.19})$$

$$N_{11}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 1 - \xi_3^2 \quad (\text{B.20})$$

Não existem nós geométricos associados aos modos adicionais. Os deslocamentos referentes a esses modos são chamados de generalizados, e podem ser considerados como graus de liberdade internos do elemento. Como os deslocamentos generalizados são independentes para cada elemento, eles podem ser eliminados através de condensação estática [Hughes, 2012]. Para isso, a matriz de rigidez do elemento pode ser considerada como:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{da} \\ \mathbf{K}_{ad} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

onde \mathbf{K}_{dd} é a matriz de rigidez usual para o elemento isoparamétrico, $\mathbf{K}_{da} = \mathbf{K}_{ad}^T$ é uma matriz retangular, e \mathbf{K}_{aa} é uma matriz quadrada com termos referentes à rigidez generalizada [Wilson et al., 1973; Hughes, 2012]. A matriz de rigidez condensada $\tilde{\mathbf{K}}^{(e)}$ é obtida por:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(e)} = \mathbf{K}_{dd} - \mathbf{K}_{da} \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ad} \quad (\text{B.22})$$

Embora essa formulação induza significativa melhora nos resultados para casos com flexão, quando o elemento toma a forma de um cubo arbitrário ocorre um comportamento errático. Dessa forma, os modos quadráticos devem ser modificados para corrigir essa deficiência. Para isso, as derivadas das funções de interpolação referentes aos modos adicionais devem ser calculadas em $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Com essa modificação, o elemento satisfaz o teste para configurações arbitrárias do elemento [Taylor et al., 1976]. Análise de estabilidade e convergência para esse tipo de elemento que incorpora um campo de deformação quadrático foi realizada através de formulação variacional [Reddy e Simo, 1995] e resultados numéricos comprovam uma menor estimativa de erro [Arunakirinathar e Reddy, 1995] quando empregando esse tipo de formulação.

B.2 Problemas Acoplados

Pelo fato de envolver problemas físicos diferentes, a magnitude dos graus de liberdade mecânicos e elétricos são muito distintas. Além disso, problemas de mal condicionamento da matriz acoplada ocorrem na análise por elementos finitos envolvendo materiais piezoelétricos, devido à diferença da ordem de grandeza dos tensores constitutivos. O escalonamento da unidade básica de força é um procedimento que pode ser empregado para eliminar esse problema de condicionamento [Qi et al., 1997]. Para isso, adota-se um múltiplo da unidade de força, como:

$$1\bar{N} = 10^{p_a} N \quad (\text{B.23})$$

onde p_a é um número inteiro positivo que depende da magnitude dos tensores constitutivos envolvidos. Dessa forma, o tensor constitutivo $[\mathbf{c}]$ deve ser alterado para:

$$[\bar{\mathbf{c}}] = 10^{-p_a} [\mathbf{c}] \quad (\text{B.24})$$

De forma análoga, o tensor de capacitância dielétrica $[\mathbf{e}]$ é redefinido:

$$[\bar{\mathbf{e}}] = 10^{p_a} [\mathbf{e}] \quad (\text{B.25})$$

Como consequência, o potencial elétrico passa a ter magnitude:

$$\bar{\phi} = 10^{-p_a} \phi \quad (\text{B.26})$$

Dessa forma, é possível reduzir ou eliminar o problema de mal condicionamento das matrizes envolvidas no modelo de elementos finitos, além de tornar a ordem de grandeza dos graus de liberdade elétricos mais próxima aos deslocamentos. Para cerâmicas piezoelétricas do tipo PZT-5A, a utilização de um expoente $p_a = 10$ é suficiente para eliminar o problema de mal condicionamento da matriz acoplada.

APÊNDICE C – Sensibilidade do Modelo de Elementos Finitos e do Problema Modal

Assim como para as matrizes globais envolvidas na análise por elementos finitos, suas sensibilidades podem ser montadas a partir da superposição das sensibilidades de cada elemento da malha. Para o e -ésimo elemento, as derivadas das matrizes de massa, rigidez, acoplamento e dielétrica, com respeito a uma variável de projeto v , são dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{uu}^{(e)}}{\partial v} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \gamma}{\partial v} \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u \, d\Omega \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}^{(e)}}{\partial v} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial [\mathbf{c}]}{\partial v} \mathbf{B}_u \, d\Omega \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}^{(e)}}{\partial v} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial [\mathbf{d}]^T}{\partial v} \mathbf{B}_\phi \, d\Omega \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}^{(e)}}{\partial v} = - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_\phi^T \frac{\partial [\mathbf{e}]}{\partial v} \mathbf{B}_\phi \, d\Omega \quad (\text{C.4})$$

onde as sensibilidades das propriedades dependem do modelo material adotado.

O cálculo da sensibilidade de autovalores e autovetores utilizado nesse trabalho é baseado na metodologia proposta por Wu et al., 2007, na qual é considerada a possibilidade de ocorrência de autovalores repetidos. Para isso, considera-se o problema de autovalores real e simétrico:

$$(\mathbf{K}_{uu} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{uu}) \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{0} \quad (\text{C.5})$$

$$\boldsymbol{\psi}_j^T \mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\psi}_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, N_{\text{gdl}} \quad (\text{C.6})$$

onde \mathbf{K}_{uu} e \mathbf{M}_{uu} são as matrizes de rigidez estrutural e de massa, respectivamente, ω_j^2 é o j -ésimo autovalor do problema, $\boldsymbol{\psi}_j$ é o autovetor associado à ω_j^2 e N_{gdl} é o número total de graus de liberdade.

Partindo do pressuposto que o problema possui N_r autovalores distintos ω_j^2 , $j = 1, 2, \dots, N_r$, sendo que $N_r \leq N_{\text{gdl}}$, define-se uma matriz $\boldsymbol{\Psi}_r$ com os respectivos autovetores $\boldsymbol{\Psi}_r = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_{N_r}]$. Dessa forma, a derivada dos autovalores repetidos pode ser obtida resolvendo-se um novo problema [Wu et al., 2007]:

$$\left[\boldsymbol{\Psi}_r^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial v} - \omega_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial v} \right) \boldsymbol{\Psi}_r - \frac{\partial \omega_j^2}{\partial v} \mathbf{I} \right] \boldsymbol{\gamma}_j = \mathbf{0} \quad (\text{C.7})$$

Assumindo que os autovalores desse problema, ou seja, $\partial \omega_j^2 / \partial v$, são distintos, a ma-

triz ortogonal $\mathbf{\Gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N_r}]$ pode ser utilizada para definir autovetores únicos $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{N_r}]$ através da relação $\mathbf{H} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}$. Por conveniência, denota-se $\mathbf{F}_j = (\mathbf{K}_{uu} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{uu})$. Utilizando essa definição e derivando a Equação C.5 com respeito às variáveis de projeto, obtém-se:

$$\mathbf{F}_j \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial v} = -\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial v} \boldsymbol{\psi}_j \quad (\text{C.8})$$

onde:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial v} - \omega_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial v} - \frac{\partial \omega_j^2}{\partial v} \mathbf{M}_{uu} \quad (\text{C.9})$$

e $\partial \omega_j^2 / \partial v$ é determinado pela Equação C.7.

Assumindo que as derivadas dos autovetores $\partial \mathbf{h}_j / \partial v$ têm a forma [Wu et al., 2007]:

$$\frac{\partial \mathbf{h}_j}{\partial v} = \mathbf{z}_j + \mathbf{H}\mathbf{w} \quad (\text{C.10})$$

onde \mathbf{z}_j é uma solução particular da Equação C.8 e satisfaz:

$$\mathbf{F}_j \mathbf{z}_j = -\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial v} \mathbf{h}_j \quad (\text{C.11})$$

Por fim, define-se um sistema estendido de equações, com incógnitas \mathbf{z}_j e μ_{kj} , na forma [Wu et al., 2007]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_j & \mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\psi}_1 & \mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\psi}_2 & \dots & \mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\psi}_{N_r} \\ (\mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\psi}_1)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (\mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\psi}_2)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\psi}_{N_r})^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_j \\ \mu_{1j} \\ \mu_{2j} \\ \vdots \\ \mu_{N_r j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial v} \mathbf{h}_j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

onde \mathbf{z}_j é uma solução particular da Equação C.11 e $\mu_{kj} = 0$ para $j, k = 1, 2, \dots, N_r$. O vetor \mathbf{w} da Equação C.10 pode ser determinado por [Wu et al., 2007]:

$$\mathbf{w}_j = -\frac{1}{2} \mathbf{h}_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial v} \mathbf{h}_i + 2 \mathbf{M}_{uu} \mathbf{z}_j \right) \quad (\text{C.13})$$

permitindo, assim, o cálculo da sensibilidade dos autovetores do problema. O mesmo procedimento pode ser empregado para os casos com autovalores distintos e repetidos.

APÊNDICE D – Resposta do Sistema Representado no Espaço de Estados

D.1 Representação no Espaço de Estados

Considere um sistema físico descrito pelo vetor N_S -dimensional de estados $\mathbf{x}(t)$, no qual os conjuntos de variáveis de entrada e de saída são representados, respectivamente, pelo vetor N_I -dimensional de entradas $\mathbf{v}(t)$ e pelo vetor N_S -dimensional de saídas $\mathbf{y}(t)$. Assim, a representação desse sistema no espaço de estados é dada por meio de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem [Gawronski, 2004]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (\text{D.2})$$

onde \mathbf{A} é a matriz $N_S \times N_S$ do sistema, \mathbf{B} é a matriz $N_S \times N_I$ de entrada e \mathbf{C} é a matriz $N_O \times N_S$ de saída.

D.2 Controle Ótimo utilizando Regulador Linear-Quadrático

Considera-se uma realimentação linear de estados por meio de uma matriz de ganho constante \mathbf{G} [Preumont, 2011]:

$$\mathbf{v}(t) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(t) \quad (\text{D.3})$$

tal que o funcional de custo quadrático J seja minimizado:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v}) dt \quad (\text{D.4})$$

onde \mathbf{R} é a matriz (definida positiva) de pesos para a contribuição das entradas de controle $\mathbf{v}(t)$ e \mathbf{Q} é a matriz (positiva semi-definida) de pesos para a contribuição das variáveis de estado $\mathbf{x}(t)$, dada por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

onde \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ são as matrizes identidade e zeros, respectivamente, e q é um ganho escalar para o sistema de controle. Assumindo que todos os estados são conhecidos durante o

intervalo de tempo analisado, a matriz de ganho para esse problema de mínimo custo é [Preumont, 2011]:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (\text{D.6})$$

onde \mathbf{P} é a solução da equação de Riccati [Preumont, 2011]:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (\text{D.7})$$

que pode ser resolvida de forma iterativa por meio de algoritmos baseados em decomposição de Schur [Arnold e Laub, 1984].

D.3 Discretização do Sistema Contínuo no Tempo

As equações de estado, apresentadas na forma contínua nas Equações D.1 e D.2, podem ser discretizadas no tempo, possibilitando o cálculo da resposta do sistema por meio de um processo iterativo. Inicialmente, define-se as equações de estado na forma discreta para a k -ésima iteração, como:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}_d\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{B}_d\mathbf{v}^{(k)} \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{C}_d\mathbf{x}^{(k)} \quad (\text{D.9})$$

onde \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d e \mathbf{C}_d são as matrizes do sistema, de entrada e de saída, respectivamente, para o sistema discretizado. A forma dessas matrizes dependerá do método empregado na discretização do sistema. Nesse trabalho, aplica-se o método da aproximação integral, no qual se assume que as entradas \mathbf{v} são constantes durante o período de amostragem analisado, como representado na Figura D.1.

Para encontrar uma forma de representar as matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d , considera-se as soluções do sistema para os instantes de tempo $(k+1)T$ e kT , dadas por [Brockett, 1970]:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}(k+1)T}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{v}(\tau)d\tau \quad (\text{D.10})$$

$$\mathbf{x}(kT) = e^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}kT} \int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{v}(\tau)d\tau \quad (\text{D.11})$$

Multiplicando a Equação D.11 por $e^{\mathbf{A}T}$ e isolando o termo que depende das condições

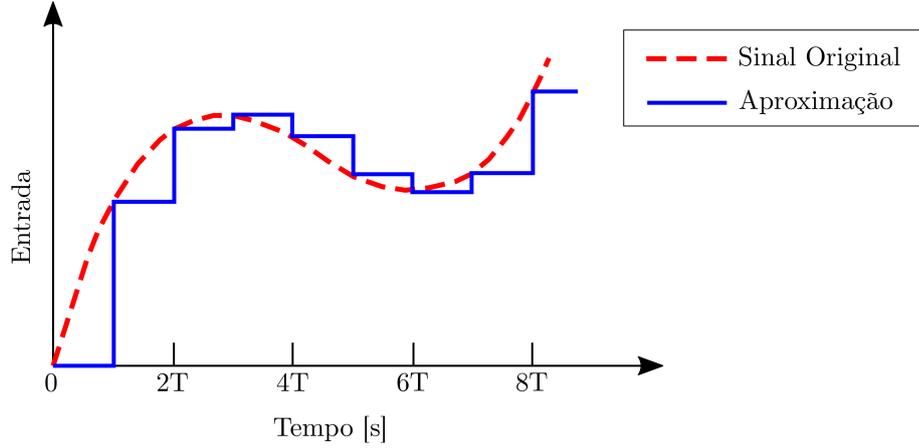


Figura D.1 – Aproximação do sinal de entrada por meio do método integral.

iniciais, obtém-se:

$$e^{\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) - e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) d\tau \quad (\text{D.12})$$

Substituindo o termo $e^{\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{x}(0)$ na Equação D.10, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) - e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) d\tau + \\ &+ e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

que pode ser reescrito como:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) d\tau \quad (\text{D.14})$$

Como tanto as entradas \mathbf{v} como a matriz de entrada \mathbf{B} são constantes no período de amostragem, o termo $\mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{B}\mathbf{v}(kT)$ pode ser retirado da integral. Por outro lado, o termo $e^{\mathbf{A}(k+1)T}$ pode ser inserido dentro da integral, resultando em:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}[(k+1)T-\tau]} d\tau \mathbf{B}\mathbf{v}(kT) \quad (\text{D.15})$$

que é válida para o intervalo $\tau \in [kT, (k+1)T)$. Uma nova variável pode ser definida como $\tilde{\tau} = (k+1)T - \tau$, alterando o intervalo para $\tilde{\tau} \in [0, T)$. Como $d\tilde{\tau} = -d\tau$, obtém-se:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \mathbf{B}\mathbf{v}(kT) \quad (\text{D.16})$$

ou ainda, na notação discreta:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}^{(k)} + \int_0^T e^{\mathbf{A}\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \mathbf{B} \mathbf{v}^{(k)} \quad (\text{D.17})$$

Comparando as Equações D.8 e D.17, nota-se que

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} \quad (\text{D.18})$$

$$\mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \mathbf{B} \quad (\text{D.19})$$

Utilizando as propriedades de integração de matrizes, a matriz de entrada na forma discreta pode ser obtida por [Gajic, 2003]:

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \mathbf{B} \quad (\text{D.20})$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Por fim, a matriz de saída, que se refere à avaliação dos estados no instante de tempo analisado, tem a mesma forma do sistema contínuo, ou seja, $\mathbf{C}_d = \mathbf{C}$.

D.4 Resposta do Domínio da Frequência

As equações de estado podem ser escritas no domínio da frequência por meio da aplicação da transformada de Laplace. Considerando um caso particular no qual apenas uma entrada e uma saída estão envolvidas no problema, o vetor de estados é dado por:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}V(s) \quad (\text{D.21})$$

enquanto que a saída é dada por:

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \quad (\text{D.22})$$

A Equação D.21 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}V(s) \quad (\text{D.23})$$

Substituindo o termo $\mathbf{X}(s)$ na Equação D.22, obtém-se:

$$Y(s) = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}V(s) \quad (\text{D.24})$$

Dessa forma, pode-se isolar o termo referente à função de transferência como [Keviczky et al., 2011]:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (\text{D.25})$$

que resulta em uma expressão analítica para $H(s)$. A partir dessa função, a resposta em termos de frequência (ω) pode ser determinada ao se assumir $s \rightarrow j\omega$, onde j é a unidade imaginária. Por fim, a magnitude da resposta em frequência é dada em dB por:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)| \quad (\text{D.26})$$