

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E RELAÇÕES  
INTERNACIONAIS

MAICON DANIEL ROSA RIBEIRO

**APREÇAMENTO DE AÇÕES POR MEIO DO MODELO DE  
FAMA-FRENCH-CARHART ACRESCIDO DE FATOR DE  
ILIQUIDEZ**

Porto Alegre  
2018

MAICON DANIEL ROSA RIBEIRO

**APREÇAMENTO DE AÇÕES POR MEIO DO MODELO DE  
FAMA-FRENCH-CARHART ACRESCIDO DE FATOR DE  
ILÍQUIDEZ**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. João Fróis Caldeira

Porto Alegre  
2018

### CIP - Catalogação na Publicação

Ribeiro, Maicon Daniel Rosa

Análise, por meio de ferramenta robusta, de modelo fatorial / Maicon Daniel Rosa Ribeiro. -- 2018.

46 f.

Orientador: João Fróis Caldeira.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Curso de Ciências Econômicas, Porto Alegre, BR-RS, 2018.

1. Mercado financeiro. 2. Precificação de ativos.  
3. GMM. I. Caldeira, João Fróis, orient. II. Título.

MAICON DANIEL ROSA RIBEIRO

**APREÇAMENTO DE AÇÕES POR MEIO DO MODELO DE  
FAMA-FRENCH-CARHART ACRESCIDO DE FATOR DE  
ILIQUIDEZ**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Ciências Econômicas.

Aprovado em: Porto Alegre, 04 de Dezembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. João Frois Caldeira - Orientador  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

---

Prof. Dr. Marcelo Scherer Perlin  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

---

Prof. Dr. Sabino Porto Junior  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Este trabalho é dedicado aos meus irmãos:  
Alexsandra, Lucas e Samuel.

## AGRADECIMENTOS

A parte mais difícil de um trabalho científico, pode-se pensar, é a dos elementos pré-textuais. Esse porém não é o caso. Muito tempo escrevendo de maneira direta vicia o lado pragmático na hora da escrita.

Confesso, sem sinais de vergonha alguma, que li algumas monografias para ter uma ideia de sobre o que escrever aqui como agradecimento e, como que por um estalo, me veio à mente a seguinte frase de Carl Jung: Qualquer árvore que queira tocar os céus precisa ter raízes tão profundas a ponto de tocar os infernos. A frase molda-se perfeitamente bem às pessoas que desejo agradecer. Agradeço a todos que sempre me incentivaram a ter raízes profundas.

Aprender não é saber; há sabidos e sábios; é a memória que faz os primeiros, é a filosofia que faz os segundos.

Alexandre Dumas - O Conde de Monte Cristo

## RESUMO

O presente trabalho versa sobre precificação de ativos bursáteis brasileiros. Propõe-se a utilização de um fator que capture a Iliquidez para, com o auxílio de outros fatores já utilizados na literatura, se melhore a precificação de ações. Para se verificar o poder de explicatividade do novo fator de risco proposto são realizadas comparações com outros métodos de precificação sendo esses métodos: o *Capital Asset Pricing Model*(CAPM) proposto por Sharp(1964), o modelo a três fatores proposto por Fama e French(1992) e o modelo de quatro fatores proposto por Carhart(1997).

Na presente investigação se fará uso do estimador GMM. O estimador possui a vantagem de ser robusto na presença de autocorrelação e heterocedasticidade.

O fator de Iliquidez possui poder de explicação para determinados setores e seu fator de carregamento médio (prêmio de risco) para a Iliquidez é negativo; Conclui-se, portanto, que não há prêmio de risco associado à Iliquidez.

Palavras-chaves: CAPM, Fama e French, Carhart, Hipótese de Eficiência de Mercado, GMM, Tamanho, Valor, Momento, Iliquidez.

## ABSTRACT

The present work is about the pricing of Brazilian securities. It is proposed to use a factor that captures Illiquidity, with the help of other factors already used in the literature, to improve stock pricing. In order to verify the explanatory power of the proposed new risk factor, comparisons are made with other methods of pricing: the Capital Asset Pricing Model (CAPM) proposed by Sharp (1964), the proposed three-factor model by Fama and French (1992) and the four-factor model proposed by Carhart (1997).

In the present investigation we will use the GMM estimator. The estimator has the advantage of being robust in the presence of autocorrelation and heteroscedasticity.

The Illiquidity factor has explanatory power for certain sectors and its average load factor (risk premium) for Illiquidity is negative; It is concluded, therefore, that there is no risk premium associated with Illiquidity.

Key-words:CAPM, Fama and French, Carhart, Market Efficiency Hypothesis, GMM, Size, Value, Moment, Illiquidity.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Ativos por setor 1 a 7.....	25
Tabela 2 - Ativos por setor 8 a 14.....	26
Tabela 3 - Estatística descritiva dos Setores.....	27
Tabela 4 - Estatística descritiva dos Fatores.....	28
Tabela 5 - Resultado de Regressão para os setores de 1 a 7.....	30
Tabela 6 - Resultado de Regressão para os setores de 8 a 14.....	31
Tabela 7 - Coeficientes médios dos fatores explicativos.....	33
Tabela 8 - Coeficientes médios para setores.....	34

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>12</b>
2.1	ANOMALIAS . . . . .	12
2.1.1	Efeito Tamanho . . . . .	13
2.1.2	Efeito Valor . . . . .	13
2.1.3	Efeito Ímpeto . . . . .	14
2.1.4	Efeito Liquidez . . . . .	15
2.1.5	Efeito Investimento . . . . .	15
2.1.6	Efeito Lucratividade . . . . .	15
2.2	HIPÓTESE DE EFICIÊNCIA DE MERCADO . . . . .	16
2.3	TEORIA DE PRECIFICAÇÃO POR ARBITRAGEM . . . . .	17
2.4	MODELOS FATORIAIS . . . . .	18
2.4.1	O modelo inicial de Fama-French . . . . .	18
2.4.2	Fama-French aplicado ao Brasil . . . . .	19
2.4.3	Fama-French-Carhart . . . . .	19
2.4.4	O modelo final de Fama-French . . . . .	20
2.5	MÉTODO DOS MOMENTOS GENERALIZADOS . . . . .	21
2.6	ESTATÍSTICA GRS . . . . .	23
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>24</b>
3.1	CONSTRUÇÃO DOS FATORES . . . . .	24
3.2	OS SETORES . . . . .	25
3.3	AS REGRESSÕES . . . . .	26
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>27</b>
4.1	ESTATÍSTICA DESCRITIVA . . . . .	27
4.2	RESUMO DOS TESTES ESTATÍSTICOS . . . . .	29
4.3	UM OLHAR SOBRE AS ANOMALIAS . . . . .	32
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>36</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>37</b>
	<b>APÊNDICE A - O MODELO DE MARKOWITZ</b>	<b>42</b>
	<b>APÊNDICE B - O MODELO CAPM</b>	<b>45</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é explorar um fator de risco até então pouco explorada no mercado brasileiro (a Iliquidez). Para tanto se utilizará, como *Benchmark*, os modelos: *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), de Rogers e Securato (2009), de Fama e French (1992), de Carhart(1997) e o de Carhart acrescido do fator de Iliquidez. Denomina-se, por simplificação, os modelos respectivamente como: CAPM, Dois Fatores (DF), Três Fatores (TF), Quatro Fatores(QF) e Cinco Fatores(CF). Ao invés de se modelar carteiras irá-se modelar ativos individuais (ações) divididos em setores. Além disso se verificará se há diferença, quanto aos resultados da modelagem, entre ativos contidos e não contidos no índice ibovespa. Espera-se que seja possível se verificar se há relação entre a Iliquidez e os retornos de ações brasileiras.

A precificação de ativos, no mercado brasileiro, apresenta padrões nos resíduos como autocorrelação e heterocedasticidade (LUCENA; PINTO, 2008). Para se contornar as dificuldades encontradas, presença de autocorrelação e heterocedasticidade, utilizar-se-á o estimador GMM. Esse estimador é robusto na presença de heterocedasticidade e autocorrelação o que torna a modelagem mais confiável, principalmente para amostras grandes, devido às suas propriedade assintóticas.

O trabalho que segue está dividido em quatro partes. Sendo a primeira referente a uma revisão de literatura, que englobará das anomalias aos testes estatísticos utilizados no desenvolvimento do trabalho, a segunda à Metodologia utilizada, a terceira à apresentação dos resultados principais e a última representando a conclusão. Nos Apêndices, após as referências, são expostas - de maneira mais minuciosa - a prova matemática do efeito da diversificação e da relação entre risco e retorno.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Nessa seção se fará uma breve revisão sobre os trabalhos anteriormente publicados bem como os principais instrumentos utilizados nesses trabalhos.

Para melhor fluidez esta seção está dividida em seis partes. Sendo que as quatro primeiras dizem respeito a parte financeira e as duas últimas aos instrumentos utilizados.

As quatro primeiras referem-se às Anomalias, à Hipótese de Eficiência de Mercado (HEM), à Teoria de Precificação por Arbitragem (APT) e aos Modelos fatoriais. A quinta e sexta parte tem como objetivo principal apresentar uma revisão breve da parte estatística utilizada. Iniciando-se pelo estimador GMM e estatística J e finalizando com a estatística GRS.

### 2.1 ANOMALIAS

Embora o trabalho de Markowitz(1952), sobre a formação de carteiras de média variância<sup>1</sup>, seja um marco na literatura sobre finanças, pode-se considerar o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM)<sup>2</sup> proposto, independentemente, por Sharpe(1964) e Lintner(1965), como o ponto inicial para a teoria de apreçamento de ativos moderna.

Segundo o CAPM os ativos tendem a se alinhar, com o passar do tempo, à reta dada pela Equação 1.

$$E(R_i) - R_f = \beta_i \cdot (E(R_m) - R_f) \quad (1)$$

onde  $E(R_i) - R_f$  é o excesso de retorno do ativo  $i$  com relação à taxa livre de risco e  $E(R_m) - R_f$  é o retorno em excesso da carteira de mercado com relação à taxa de juros livre de risco.

Visto que não são necessários o cálculo de todas as correlações envolvidas na estimação de uma carteira de mínima variância, o CAPM apresenta maior simplicidade, nos cálculos, por só ser necessário a estimação de uma variável. Essa variável que representa o nível de sensibilidade do excesso de retorno do ativo (dado por  $E(R_i) - R_f$ ) com relação ao excesso de retorno de mercado (dado por  $E(R_m) - R_f$ ) é representada pelo  $\beta$ . Essa variável é suficiente para se medir o risco associado àquele ativo<sup>3</sup>.

Sendo assim tem-se como resultado o "peso" (no quesito retorno médio e risco) que cada ativo "fornece" à carteira que se pretende criar. Isto é, ativos mais rentáveis (e, por consequência, com maior risco) tendem a acompanhar a carteira de mercado (rendendo  $\beta$  estimado maior do que 1) neutros não possuem relação com a carteira de mercado (possuindo  $\beta$  igual a zero) e com baixo risco (apresentam  $\beta$  menor do que 1) apresentam pouca relação com a carteira de mercado.

Nas duas décadas posteriores a sua publicação o CAPM passaria a ser objeto de estudo em finanças.

Um dos primeiros a notar que essa relação, entre o retorno em excesso do ativo e o retorno em excesso da carteira de mercado, se assemelha a uma regressão linear foi Jensen (1968). Sendo a representação linear dada pela Equação 2.

$$E(R_i) - R_f = \alpha_i + \beta_i \cdot (E(R_m) - R_f) + \varepsilon_i \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Verificar o Apêndice A.

<sup>2</sup>Verificar o Apêndice B.

<sup>3</sup>Chiah et al(2016) argumenta que a principal contribuição por trás desse modelo é o conceito de como o retorno esperado de um ativo se move em relação ao retorno esperado da carteira de mercado.

onde  $\varepsilon_i$  é denominado termo de erro.

Além do fato de se encarar o CAPM como uma regressão de série temporal vê-se que agora se faz uso de uma constante como variável explicativa.

Jensen(1968) argumenta que: se o responsável pela gerência da carteira tem boa competência irá escolher sistematicamente investimentos que dão retornos positivos. Sendo assim o  $\alpha$  que aparece na nova formulação (Equação 2) teria essa capacidade de "medir" o grau de competência do responsável pela carteira.

Há padrões nos retornos médios dos ativos que não são explicáveis pelo CAPM. Esse comportamento se verificou no mercado estadunidense, por Fama e French (1996, 2008), e no mercado brasileiro, por Lucena e Pinto (2008). Convencionou-se chamar esses padrões de anomalias.

Com o auxílio das anomalias conclui-se que é possível se obter retornos a cima daqueles previstos pelo CAPM, mesmo com o auxílio de Jensen(1968). Pode-se alcançar um retorno acima daquele de mercado simplesmente se utilizando uma dessas anomalias; o  $\alpha$  de Jensen, portanto, pode ser conseguido por acaso e não necessariamente pela capacidade de predição do *Manager* da carteira.

Muito se tem escrito sobre essas anomalias. Alguns autores postulam que são provas da ineficiência de mercado outros que é justamente o contrário; as anomalias, no entanto, podem ser compreendidas como variáveis *proxy* para o fluxo de caixa esperado (FAMA;FRENCH,2008).

A utilização conjunta das anomalias leva à vantagem de ser possível se computar o risco marginal associado. E, portanto, o risco associado àquele ativo pode se dar pelo somatório desses riscos marginais (ROSS,1976).

### 2.1.1 Efeito Tamanho

A primeira anomalia, e a mais robustas(HU et al., 2018), é a referente ao Tamanho, descoberta por Banz(1981). Banz ao examinar o retorno de empresas, no mercado Norte Americano, se depara com o fato de que empresas que são menores (menor valor de mercado)apresentam retornos médios maiores do que aqueles previstos pelo CAPM. Essa anomalia ficou conhecida como "Efeito Tamanho" (*Size effect*).

Embora o efeito exista não se dá, em Banz(1981), uma justificativa para tal efeito. Visto que, como dito na introdução do artigo de 1981 "*It is not known whether size per se is responsible for the effect or whether size is just a proxy for one or more true unknown factors correlated with size.*"<sup>4</sup> Huberman e Kandel (1987) chegam a conclusão de que firmas que apresentam mesmo tamanho tem mais chance de serem correlacionadas entre si.

### 2.1.2 Efeito Valor

Ao investigar a Hipótese de Eficiência de Mercado(HEM), no mercado estadunidense, Rosenberg, Reid e Lanstein (1985) percebem que utilizando-se de estratégias de compra e venda, de ativos subvalorizados e sobrevalorizados, conseguiria-se obter resultados superiores àqueles previstos pelo CAPM. Segundo sua análise isso se deveria à ineficiência de mercado.

---

<sup>4</sup>Não se sabe se o tamanho *per se* é responsável pelo efeito ou se o tamanho é somente uma proxy para um ou mais verdadeiros fatores desconhecidos correlacionados com tamanho.(tradução nossa)

A anomalia em questão mede a relação que há entre o valor patrimonial (Patrimônio Líquido) e o Valor de Mercado (*Book-to-Market*) com seu retorno esperado. Mostrando que quanto maior o índice *Book-to-market* maior é o retorno esperado do ativo.

Bhandari (1988) encontra resultados semelhantes com a ressalva de que há sazonalidade nos retornos nos meses de Janeiro.

O índice criado, *Book-to-Market*, é a relação que há entre o valor patrimonial da empresa (Patrimônio Líquido) com relação ao seu valor de mercado (preço do ativo multiplicado pela quantidade de ativos) de modo que caso esse índice seja igual a 1 significa que o valor de mercado está correspondendo diretamente ao valor patrimonial da empresa; caso a razão seja maior do que 1 significa que o valor patrimonial excede o valor de mercado o que, por consequência, significa que o mercado está subvalorizando a firma. Visto que o índice mede a sobrevalorização de um ativo convencionou-se chamar essa anomalia de "Efeito Valor".

### 2.1.3 Efeito Ímpeto

Jegadeesh e Titman(1993), assim como Bhandari(1988), encontram sazonalidade no retorno dos ativos no mês de Janeiro (uma sazonalidade negativa) e outras sazonalidades positivas fora do mês de Janeiro (notadamente em Agosto, Abril, Novembro e Dezembro). Sendo que performance negativa de Janeiro mostra-se inversamente proporcional ao Tamanho.

Essa anomalia não está relacionada a um tipo de ação específica mas à tendência de valorização do ativo, isto é, se uma firma obtém seguidamente retornos positivos (denominada *Winner*) ou obtém retornos seguidamente negativos (denominada *Loser*).

Segundo a análise de Jegadeesh e Titman(1993) e Piotroski (2000) firmas que são *Winners* permanecem *Winners* e firmas que são *Losers* ou permanecem *Losers* ou desaparecem. Porém, como aponta Carhart(1997), firmas que há um ano foram consideradas *Winners* frequentemente se tornam *Losers* no próximo ano.

A justificativa para esse comportamento é, segundo Jegadeesh e Titman(1993), devido ao fato de o ganho proveniente da anomalia estar relacionado à reação demorada e exagerada dos agentes às informações disponibilizadas pelo mercado. Isto é, os agentes movem os preços para longe de suas trajetórias de longo prazo. Ou os ganhos obtidos podem estar relacionados à compensação por se manter o ativo frente ao risco sistemático ou à ineficiência de mercado.

Piotroski (2000), porém, defende que o mercado incorpora informações de forma lenta e, portanto, o ganho relacionado à anomalia repousa no fato de se conseguir reconhecer a performance futura das firmas e a inabilidade de o mercado de reconhecer esses padrões. E, conjuntamente com essa justificativa, analistas financeiros são menos propensos a recomendar firmas com fraco desempenho (o que acaba por potencializar a tendência de compra de firmas com bom desempenho no passado e de venda de firmas com fraco ou péssimo desempenho no passado).

Embora haja duas interpretações distintas os dois autores, Jegadeesh e Titman(1993) e Piotroski (2000), concordam que a estratégia de se comprar *Winners* e vender *Losers* dá bons resultados quando associada a período de tempo de um ano e pode ser utilizada em conjunto a estratégias alternativas.

#### 2.1.4 Efeito Liquidez

Os relatos referentes a essa anomalia são bastante recentes comparadas com as outras. A principal motivação por trás dessa anomalia é a hipótese simplificadora de que há sempre liquidez no mercado. Sendo assim certo prêmio deve estar associado a ativos menos líquidos.

Liquidez pode ser conceituada na seguinte maneira: facilidade que há de se comprar ou vender um determinado ativo com facilidade e sem grandes custos. Alguns autores utilizam o volume ou a diferença entre compra e venda de determinado ativo ou ainda a quantidade de negócios para contabilizá-la. Um índice que faça uso: dos dias cotados do ativo, do volume e da capitalização do mercado é o que será utilizado no desenvolvimento dos resultados.

Embora não haja muito consenso sobre a relação exata entre a liquidez de um ativo e seu retorno; para o mercado brasileiro a maioria das evidências apontam que a liquidez está relacionada a retornos positivos e, portanto, ao fato de que não haja um prêmio de risco associado à baixa liquidez (SANVICENT; MINARDI,1998). Correia e Amaral (2012) evidenciam que o grau de liquidez está relacionado a algumas características da firma tais como: governança, folga financeira, pagamento de dividendos e rentabilidade das vendas.

Correia, Amaral e Bressan (2008) argumentam que uma das explicações de haver um prêmio pela liquidez se deva ao fato de haver baixa integração entre os mercados emergentes globais; argumentação também utilizada por Vieira, Justen Junior e Righi (2015).

A liquidez se torna um fator relevante, principalmente, quando a economia está ou há uma expectativa de que entre em recessão (VIEIRA; JUSTEN JUNIOR; RIGHI, 2015).

#### 2.1.5 Efeito Investimento

Titman, Wei e Xie (2004) encontram evidências de uma anomalia relacionada ao grau de investimento da firma. Firmas que substancialmente aumentam seus investimentos em capital tendem a ganhar retornos negativos pelos subseqüentes 5 anos. A justificativa, dada pelos autores, para esse tipo de anomalia nos retornos é devido ao comportamento de aversão *Empire Building* da firma.

Há ganhos substanciais nos anos anteriores ao aumento do investimento da firma. E, portanto, os retornos futuros negativos são mais a causa do que o efeito de aumentos no investimento, visto que firmas que investem mais tendem a ter uma tendência de investir demais, mesmo quando não há oportunidades rentáveis de investimento. Portanto o que gera os retornos negativos no futuro não é o ato de investir mas o de ter tendência de investir demais (mesmo quando a rentabilidade é baixa).

#### 2.1.6 Efeito Lucratividade

Novy-Marx(2013) argumenta encontrar padrões nos retornos de firma quanto ao grau de Lucratividade. Além disso argumenta que há certa correlação entre a lucratividade e o *Book-to-market* e relação alguma com a estratégia de Momento.

Controlando-se a variável Lucratividade tem-se uma melhora na previsão usando-se a variável *Book-to-market*. A anomalia está relacionada ao fato de que firmas mais lucrativas tendem a gerar retornos positivos maiores do que as firmas que são menos lucrativas.

## 2.2 HIPÓTESE DE EFICIÊNCIA DE MERCADO

Como salientado por Lucena e Pinto (2008) um dos principais pressupostos do CAPM, e da grande maioria das teorias econômicas, é a Hipótese de Eficiência de Mercado (HEM), a qual vem gerando grandes discussões nos últimos trinta anos.

Pode-se definir um mercado eficiente como aquele em que os agentes rapidamente assimilam informações disponíveis; não possibilitando, portanto, ganhos anormais proveniente da compra de empresas específicas (FAMA, 1970). Isto é, as informações devem ser simétricas entre todos os indivíduos que fazem parte do mercado.

Segundo Fama(1970), no longo prazo, os mercados tenderiam a eficiência. Os mercados podem ser agrupados, segundo o grau de eficiência, em três grupos distintos: Fraco, Semiforte e Forte.

Um mercado é eficiente na forma Fraca quando não são possíveis ganhos provenientes de informação passada. Pela fácil disponibilidade desses dados espera-se que não sejam mais possíveis ganhos utilizando-se técnicas econométricas autorregressivas (notadamente as relacionadas a metodologia ARIMA de Box e Jenkins); a série temporal dos retornos do ativo seria dada, portanto, por um comportamento de ruído branco (*White Noise*) e a do preço do ativo por um comportamento *Random Walk*. Isto é, sendo  $P_t$  o preço do ativo em  $t$ ,  $\mu$  a constante e  $\varepsilon$  um ruído branco, o comportamento do preço de um ativo poderia ser descrito como a Equação 3.

$$\ln P_t = \mu + \ln P_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3)$$

Ou seja, informações passadas já haveriam sido devidamente assimiladas pelos preços do título.

Em um mercado eficiente na forma Semiforte, não haveria ganho anormal advindo de privilégios de informação pública<sup>5</sup> referentes às informações contábeis. Todos os agentes seriam capazes de identificar a oportunidade e o ganho anormal sumiria. Pois as informações seriam rapidamente incorporadas aos preços dos ativos negociados.

O mercado eficiente na forma Forte está relacionado à impossibilidade de ganhos anormais relacionados a quaisquer tipos de informações, sejam elas públicas, privadas ou decorrentes do próprio histórico das cotações. O ganho, nesse tipo de mercado, estaria relacionado ao ganho de eficiência e à abertura de novos mercados.

Rosenbert, Reid e Lanstein(1985) apontam que o mercado é ineficiente, visto que é possível se alcançar ganhos anormais utilizando-se estratégias simples de compra e venda. Torres, Bonomo e Fernandes (2002) refutam a hipótese de *Random Walk* para os ativos cotados no Bovespa e Lo e Mackinlay (1988) para os dados semanais do mercado estadunidense; Lucena e Pinto (2008) argumentam, porém, que a rejeição das hipóteses de *Random Walk* e da eficácia das estratégias baseadas nas anomalias não, necessariamente, levam a um mercado ineficiente. Mas reforça a ideia de que não há nem evidência de eficiência na forma Fraca.

Fama e French (1992) fazem a seguinte observação : *If asset-pricing is irrational and size and BE/ME do not proxy for risk, our results might still be used to evaluate portfolio performance and measure the expected returns from alternative investment strategies.*<sup>6</sup>

<sup>5</sup>Notadamente as anomalias citadas acima

<sup>6</sup>Se a precificação de ativos é irracional e tamanho e *Book-to-market* não são *proxies* para risco, nossos resultados podem ainda ser usados para avaliar performance de carteira e medir o retorno esperado de diferentes estratégias de investimento. (tradução nossa)

Sendo assim os resultados obtidos possuem utilidade a despeito de não haver eficiência de mercado nas formas Fraca, Semiforte e Forte.

### 2.3 TEORIA DE PRECIFICAÇÃO POR ARBITRAGEM

O artigo de Ross(1976) representou uma mudança de paradigma científico, nos moldes do que foi escrito por Kuhn (1962), no quesito precificação de ativos financeiros (HUYNH, 2017).

Sua teoria de precificação por arbitragem é ponto crucial na atual literatura financeira. Em relação ao CAPM a mudança básica apresenta, por Ross(1976), se dá pela visão alternativa da relação entre risco e retorno. O *Arbitrage Pricing Theory*(APT)<sup>7</sup> se baseia na premissa do "preço único", isto é, o mesmo ativo não pode ser negociado a preços diferentes.

As evidências empíricas do APT sugerem que: fatores que mensuram respostas sistemáticas a variáveis macroeconômicas e a características das empresas são muito relevantes para explicar retornos esperados (ROGERS; SECURATO, 2009).

Os retornos de quaisquer ativos negociados no mercado financeiro são formado por duas partes: uma parte esperada e uma inesperada. A parte esperada é função de todas as informações possuídas pelos investidores, já a inesperada é função de informações novas que serão reveladas com o tempo.

A parte inesperada pode ser dividida em duas partes: uma sistemática e uma não-sistemática. O lado direito da Equação 4 é composto de duas partes. Sendo a primeira referente a parte esperada e a segunda à soma do risco sistemático e do risco não-sistemático.

$$R_i = \mu_i + (\lambda + \varepsilon_i) \quad (4)$$

sendo  $R_i$  o retorno do ativo,  $\mu_i$  o que se espera do ativo,  $\lambda$  a parcela sistemática do risco e  $\varepsilon_i$  a parcela não-sistemática do risco do ativo.

Há dois pontos a serem analisados com cuidado. O primeiro diz respeito a encontrar quais (e quantos) fatores comuns que influenciam o risco sistemático. E, o segundo, mensurar a sensibilidade de cada um dos ativos em relação a esses fatores. O método mais utilizado, segundo Huberman e Kandel (1987), para se contabilizar os fatores necessários é por meio da construção de carteiras fatoriais, isto é, construir carteiras específicas que tem por objetivo final imitar as características dos fatores utilizados.

Talvez um dos pontos principais no APT seja quanto ao risco: sob a análise do CAPM o risco é uma variável unidimensional e sob a análise do APT o risco passa a ser multidimensional (COSTA JUNIOR; NEVES, 2000); o APT se baseia, além disso, no princípio da não-arbitragem então a exploração da "má-precificação" entre dois ou mais ativos para ganhar lucros econômicos livres de risco (arbitragem) não deve perdurar por muito tempo (ROGERS; SECURATO, 2009).

A relação proposta pelo APT pode ser descrita como exposto na Equação 5. Sendo  $F_i$  um fator i associado ao risco sistemático  $\lambda$  e  $\beta_i$  o parâmetro de sensibilidade (ou de carregamento) do retorno em excesso, do ativo i, em relação ao fator i.

$$R_i - \mu_i = \beta_1 \cdot F_1 + \beta_2 \cdot F_2 + \dots + \beta_n \cdot F_n + \varepsilon_i \quad (5)$$

Semelhantemente à Equação 4 a Equação 5 tem por objetivo "explicar" o retorno em excesso com relação a fatores (cujo objetivo é "absorver" a parcela do risco sistemático).

---

<sup>7</sup>Teoria de Precificação por Arbitragem

## 2.4 MODELOS FATORIAIS

Nessa seção expõem-se os principais modelos de precificação utilizados, com excessão do CAPM que já foi mostrado anteriormente e pode ser visto com mais detalhes no Apêndice B.

Modelos fatoriais são aqueles que tem como base teórica o APT. Isto é, determinam-se fatores que afetam o risco sistemático comum a todos os ativos; é natural, portanto, que munido do APT, e a par da existência de certas anomalias, tente-se criar modelos mais eficazes na precificação de ativos. Apresenta-se, nessa seção, os principais modelos já utilizados para a precificação.

### 2.4.1 O modelo inicial de Fama-French

Talvez o mais famoso modelo que tente explicar o retorno em excesso dos ativos seja o modelo de três fatores (3F)<sup>8</sup> (FAMA; FRENCH, 1992).

Com base nas anomalias descobertas sobre tamanho (BANZ, 1981) e de valor (ROSENBERG; REID; LANTEIN, 1985), e a evidência encontrada em Chan, Hamao e Lakonishok (1991)<sup>9</sup>, Fama e French(1992,1996) argumentam que um modelo que leve em consideração essas anomalias é útil para explicar boa parte do excesso de retorno de ativos.

A utilização dessas anomalias, representadas respectivamente por SMB e HML, se faz de forma conjunta ao excesso de retorno do mercado. A Equação 6 representa essa relação.

$$E(R_i) - R_f = \beta_i \cdot (E(R_m) - R_f) + \gamma_i \cdot E(SMB) + \delta_i \cdot E(HML) \quad (6)$$

onde cada um das variáveis de risco tem seu valor de carregamento específico (seu risco marginal associado).

Caso o modelo, na Equação 6, descreva bem o fenômeno (todo o risco sistemático) então a regressão, quando efetuada, renderá variáveis de carregamento estatisticamente diferentes de zero e uma constante estatisticamente igual a zero.

Sua análise do mercado estadunidense confirmou a existência das duas anomalias, a anomalia referente ao Tamanho e ao Valor.

Algumas características podem ser destacadas sobre o fator tamanho e o valor. Como, por exemplo, firmas com menor tamanho tendem a ter maior retorno esperado do que firmas com maior tamanho<sup>10</sup>. Já indústrias, em tempos difíceis, tem positivo  $\delta_i$  e, em tempos bons, tem  $\delta_i$  negativo. Firmas fracas, com ganhos positivamente baixos, tendem a ter alto *Book-to-market* e um  $\gamma_i$  positivo.

Mesmo não conseguindo explicar a anomalia Momento (não incluída no modelo) notou-se que firmas *Losers* tendem a ter maiores carregamentos em SMB e HML do que *Winners*. Porém a conclusão sobre *Winners* e *Losers* foi que: *future return on long-term losers load more on SMB and HML, so the three factor model incorrectly predicts return reversal*.<sup>11</sup>

No geral o modelo foi bem sucedido, segundo Fama e French(1996), visto que muito da variação observada nos retornos em excesso foi explicada pelo modelo. O que leva a crer que há certo viés no mercado, isto é, que é possível se obter ganhos excessivos ao se

<sup>8</sup>Considerado, por Chiah et al(2016), como um *Benchmark* na literatura financeira.

<sup>9</sup>Evidência encontrada para o mercado japonês.

<sup>10</sup>Para o mercado Chinês a variável tamanho foi considerada a mais importante, no quesito grau de explicação dos retornos, no trabalho desenvolvido por Hu et al. (2018)

<sup>11</sup>Retornos futuros em perdedores de longa data carregam mais em SMB e HML, então o modelo de três fatores prediz incorretamente reversões no retorno.(tradução nossa)

adotar estratégias de compra e venda (de determinados ativos específicos) sem se correr risco adicional. Para o mercado brasileiro esse viés também ocorre (LUCENA.PINTO, 2008).

### 2.4.2 Fama-French aplicado ao Brasil

Para o mercado brasileiro Rogers e Securato (2009) testam o modelo 3F e chegam a conclusão de que o modelo é eficaz em explicar retornos futuros em carteiras. Porém, o fator relacionado ao *Book-to-market* se mostrou insignificante estatisticamente. Sendo assim é sugerido, para o mercado brasileiro, um modelo com dois fatores (o de excesso de retorno em relação ao mercado e o de tamanho). A função de regressão sugerida por Rogers e Securato (2009) (aqui denominada de DF) está representada na Equação 7.

$$E(R_i) - R_f = \beta_i \cdot (E(R_m) - R_f) + \gamma_i \cdot E(SMB) \quad (7)$$

onde cada um dos fatores possui sua variável de carregamento; ou, também chamado, risco marginal associado.

O prêmio de risco associado ao fator tamanho é positivo. Sendo assim paga-se um prêmio de risco para variações positivas em SMB<sup>12</sup>.

Há de se salientar que esses autores fizeram uso da caderneta de poupança como taxa livre de risco.

Lucena e Pinto(2008) utilizando-se de modelos de volatilidade condicional<sup>13</sup> chegam a conclusão de que são necessários modelos que levem em consideração a autocorrelação nos resíduos visto que a hipótese de autocorrelação nula foi rejeitada. A variável relacionada ao tamanho foi, em geral, positiva em seu trabalho e a variável relacionada ao valor é negativa e estatisticamente significativa.

Embora o 3F tenha sido sucedido em explicar a maior parte da variação no excesso de retorno das carteiras de ações, não foi capaz de capturar toda a variação; visto que uma parte do excesso de retorno não foi explicado pelo modelo.

### 2.4.3 Fama-French-Carhart

A anomalia Momento, relacionada ao ganho tendencial de um determinado ativo, além de não ter sido utilizada explicitamente no 3F não foi explicada pelo modelo.

Carhart (1997), estudando a persistência na performance de fundos mútuos, faz uso do modelo 3F com a variável Momento (chamada por ele de *Prior one Year* e em outros artigos de WML). A regressão utilizada por Carhart(1997) é apresentada na Equação 8.

$$E(R_i) - R_f = \beta_i \cdot (E(R_m) - R_f) + \gamma_i \cdot E(SMB) + \delta_i \cdot E(HML) + \theta_i \cdot E(WML) \quad (8)$$

Em seu artigo faz uma comparação entre o 3F e o 3F acrescido do fator Momento (chamado aqui de 4F) e chega a conclusão de que o 4F rende resultados superiores ao 3F mas, mesmo assim, alguns interceptos continuam a ser estatisticamente diferentes de zero. O que significa que o modelo ainda não está sendo capaz de "explicar" toda a variação no excesso de retorno das carteiras empregadas (FAMA;FRENCH,1996).

<sup>12</sup>Lagnado (2016) explica o efeito tamanho para o mercado brasileiro como uma resposta a alta do risco em tempos de crise. Isto é, em tempos de crise tende a haver um fluxo de saída de capitais do país o que acaba por desvalorizar certas firmas, notadamente as menores.

<sup>13</sup>Arch e Garch.

Embora o modelo utilizado, em seu artigo, não seja suficiente para explicar todo o excesso de retorno; os resultados encontrados, sobre o comportamento de *Winners* e *Losers*, estão de acordo com a literatura.

Além de provar a eficácia do uso do fator Momento encontra que a tendência de *Winners* e *Losers* pode se reverter após o período de um ano, o que está de acordo com a orientação de aposta de fundos mútuos.

Juntamente com isso defende que alguns fundos não seguem a estratégia de Momento mas acidentalmente acabam por manter ativos que foram ganhadores no ano anterior.

Santos, Famá e Mussa (2011) encontram, para o mercado brasileiro, resultados diferentes daqueles encontrados por Jegadeesh e Titman(1993) e Carhart (1997). Mussa, Famá e Santos (2012) argumentam que o mercado brasileiro se comporta de maneira diferente do mercado estadunidense.

#### 2.4.4 O modelo final de Fama-French

Uma das principais críticas ao 3F, na Equação 6, é justamente seu caráter *ad hoc*, i.e., as variáveis que são utilizadas carecem de fundamentação teórica. Não são apresentadas justificativas de o por quê os investidores estariam interessados nessas variáveis, para serem utilizadas segundo a teoria do APT.

Tentando contornar esse problema os autores do 3F justificam que as variáveis utilizadas servem como *proxy* para o fluxo de caixa esperado (FAMA; FRENCH, 2008).

É apresentado em Fama e French(2015) o modelo 3F acrescido de outros fatores (relacionados ao Investimento e à Lucratividade da firma). Sendo assim, dá-se início a um desenvolvimento do modelo de 3F para o apresentado em Fama e French(2015). O modelo proposto é apresentado na Equação 9.

$$E(R_i) - R_f = \beta_i \cdot (E(R_m) - R_f) + \gamma_i \cdot E(SMB) + \delta_i \cdot E(HML) + r_i \cdot E(RMW) + c_i \cdot E(CMA) \quad (9)$$

onde os três primeiros fatores são os utilizados anteriormente no 3F e 4F. Já os outros dois são carteiras construídas, que tem por objetivo imitar fatores de risco, relacionadas à Lucratividade (representado por RMW) e ao investimento (representado como CMA). Nessa modelagem a variável referente ao Valor (HML) torna-se redundante. Ou seja, perde seu poder preditivo na presença nas novas variáveis; sugerindo, portanto, que um modelo sem HML apresentaria resultados semelhantes.

Chiah et al(2016), ao estudarem o mercado australiano, fazem uma comparação do poder preditivo do modelo de Fama e French (1992) e do Fama e French(2015) e chegam a duas conclusões principais: a primeira diz respeito ao papel explicativo do HML que não se torna redundante na presença desses fatores, no mercado australiano; o segundo ponto diz respeito ao fato de o modelo Fama e French (1992) ser superior, no quesito explicação, ao modelo Fama e French(2015).

Já para o mercado brasileiro, examinado por Martins e Eid Junior (2015), chega-se a conclusão de que o retorno relacionado ao fator investimento é estatisticamente insignificante. Lagnado (2016) encontra que políticas de investimento mais agressivas tendem a gerar melhores retornos (contrário ao que foi identificado em outros países e, além disso, significante estatisticamente).

## 2.5 MÉTODO DOS MOMENTOS GENERALIZADOS

O mercado brasileiro apresenta efeitos em seus resíduos que podem levar a erros de especificação (LUCENA; PINTO,2008). Sendo assim um método de estimação que incorpore esses padrões nos resíduos faz-se necessário.

Hansen(1982) apresenta um novo tipo de estimador, baseado somente nas condições de ortogonalidade das populações condicionais e com propriedades assintóticas, que é robusto na presença desses padrões encontrados no resíduos. Por possuir essa característica - e ter sido utilizado em outras publicações, como as de Chiah et al(2016), sobre o assunto - esse será o estimador utilizado nessa monografia.

Esse novo estimador, chamado *Generalized Method of Moments*<sup>14</sup>(GMM), tem a vantagem de se pautar em hipóteses menos restritivas do que aquelas utilizados pelo Modelo Clássico de Regressão Linear como, por exemplo, ausência de autocorrelação, homocedasticidade dos resíduos e linearidade dos parâmetros. Sob o GMM o estimador permanecerá não-viesado e eficiente mesmo sob a presença de heterocedasticidade e autocorrelação dos resíduos (MACKINLAY; RICHARDSON, 1991).

Os estimadores são baseados em momentos populacionais. Logo, se são incluídos momentos insignificantes pode-se realizar um teste de sobreidentificação. O que permite testar a veracidade do modelo empregado (BUENO, 2012).

Para se estimar o vetor de parâmetros  $\theta_0$  resolve-se a Equação 10 (HANSEN, 1982).

$$E[g(\theta_0, x_i)] = 0 \quad (10)$$

onde  $x_i$  é um vetor de dados e  $g(\theta_0, \cdot)$  é uma função que provê uma expressão para as condições de ortogonalidade que emergem do modelo econométrico proposto.

Para que se produzam estimativas consistentes das condições a cima, faz-se necessário que  $\theta_0$  seja solução única para  $E[g(\theta_0, x_i)] = 0$  e que seja um elemento de um espaço compacto. Não são impostas condições sobre a distribuição de  $x_i$ . Muitos métodos de estimação, como aponta Chaussé(2010), acabam por ser casos especiais do GMM como, por exemplo, os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO), Máxima Verossimilhança (MV) e Variáveis Instrumentais(VI).

Para o caso de uma regressão linear simples do tipo  $Y = X\beta + u$ , deve-se usar a relação de primeira ordem, dada pela Equação 11.

$$\frac{1}{n} X^T u(\beta) = 0 \quad (11)$$

que é a estimativa da condição de momento  $E(X_i u_i(\beta)) = 0$

No geral,  $E[g(\theta_0, x_i)] = 0$  é um vetor de funções não-lineares de  $\theta_0$  no qual o número de condições não é limitado pela dimensão de  $\theta_0$ . Sendo que, como aponta Chaussé(2010), a eficiência aumenta com o número de instrumentos(momentos), o número de momentos pode ser maior do que o número de variáveis a serem estimadas e, portanto, a condição de momento pode não possuir solução. Como na Equação 12.

$$g(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^n g(\theta, x_i)}{n} = 0 \quad (12)$$

a saída, apontada por Hansen(1982), é tornar essa relação o mais próximo possível de zero; por meio da minimização da função quadrática  $g(\theta)^T W g(\theta)$ , sendo que W é uma matriz de pesos simétrica positiva definida.

<sup>14</sup>Método dos Momentos Generalizados. (tradução nossa)

A matriz  $W$  ótima que produz estimadores eficientes é definida como na Equação 13.

$$W^* = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\sqrt{n}g(\theta_0)) \equiv \Omega(\theta_0) \right\}^{-1} \quad (13)$$

Chaussé(2010) aponta que a matriz ótima também pode ser estimada por uma matriz do tipo HAC (*Heteroskedasticity and Auto-correlation Consistent*) como a proposta por Newey e West (1987) <sup>15</sup>.

O estimador GMM  $\hat{\theta}$  é definido por Hansen(1982), denominado *two-step GMM*<sup>16</sup> (2SGMM), com a implementação do seguinte algoritmo:

1. Calcular  $\theta^* = \text{argmin}_{\theta} g(\theta)^T g(\theta)$ ;
2. Calcular a matriz HAC  $\hat{\Omega}(\theta^*)$  ;
3. Computar  $\theta^* = \text{argmin}_{\theta} g(\theta)^T [\hat{\Omega}(\theta^*)]^{-1} g(\theta)$

Outra maneira seria seguir o algoritmo alternativo, enunciado abaixo, denominado *Iterative GMM* (ITGMM), que apresenta melhores resultados em amostras pequenas do que o 2SGMM<sup>17</sup>. No desenvolvimento desse trabalho se fará uso do ITGMM.

1. Calcular  $\theta^{(0)} = \text{arg min}_{\theta} \bar{g}(\theta)^T \bar{g}(\theta)$ ;
2. Calcular a matriz HAC  $\hat{\Omega}(\theta^{(0)})$ ;
3. Calcular o  $\theta^{(1)} = \text{arg min}_{\theta} \bar{g}(\theta)^T [\hat{\Omega}(\theta^{(0)})]^{-1} \bar{g}(\theta)$ ;
4. Se  $\|\theta^{(0)} - \theta^{(1)}\| < \text{tol}$  então para, caso contrário  $\theta^{(0)} = \theta^{(1)}$  e volte ao passo 2;
5. Defina o estimador do ITGMM como  $\hat{\theta} = \theta^{(1)}$

Onde a variável *tol* é definida como o grau de precisão requerido <sup>18</sup>.

O estimador GMM converge (quando  $n$  vai a infinito) à distribuição apresentada na Equação 14.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \rightarrow N \left( 0, E \left( \frac{\partial g(\theta_0, x_i)}{\partial \theta} \right)^T \Omega(\theta_0)^{-1} E \left( \frac{\partial g(\theta_0, x_i)}{\partial \theta} \right) \right) \quad (14)$$

Sendo assim, inferência podem ser feitas sobre  $\hat{\theta}$  usando-se o pressuposto de que seja aproximadamente distribuído como na Equação 14. E, caso hajam mais momentos do que variáveis a serem estimadas, pode-se utilizar um teste J para verificar se as condições

<sup>15</sup>Para mais detalhes sobre a implementação dessa matriz, ou sobre matrizes do tipo HAC, vide Chaussé(2010) e Zeiles(2004).

<sup>16</sup>GMM em duas etapas

<sup>17</sup>Há outra maneira proposta de se proceder ao calculo de estimador, sugerido por Hansen et al.(1996), o *Continuous Updated Estimator* (CUE), os quais podem ser visto no artigo de Hansen ou em Chaussé(2010).

<sup>18</sup>O R determina como  $1e - 7$ .

de momento se mantém (ou seja um teste de sobreidentificação). A hipótese nula ( $H_0$ ) e a estatística de teste são as seguintes <sup>19</sup>:

i.  $H_0: E[g(\theta, x_i)] = 0;$

i i.  $ng(\hat{\theta})^T[\hat{\Omega}(\theta^*)]^{-1}g(\hat{\theta}) \rightarrow \chi_{q-p}^2$

## 2.6 ESTATÍSTICA GRS

Os modelos apresentados possuem o pressuposto de que todo o excesso de retorno do ativo é explicado por fatores e que, portanto, possuem constantes insignificantes. Logo os dados modelados que apresentam essa característica estariam de acordo com os modelos propostos.

De certa forma os interceptos significativos servem para demonstrar a robustez do modelo utilizado. A estatística GRS proposta em Gibbons, Ross e Shanken (1989)<sup>20</sup> permite testar se as constantes de um modelo são conjuntamente iguais a zero.

Quando se faz uma regressão por vez a estatística t pode ser utilizada para verificar o grau de significância da constante. No entanto, quando se faz mais de uma regressão por vez, é necessário que se teste de forma conjunta o grau de significância das constantes das regressões. A estatística GRS apresentada na Equação 15 tem o poder de realizar esse tipo de teste.

Assumindo-se erros independentes e identicamente distribuídos a estatística GRS é dada pela Equação 15.

$$\frac{T - N - K}{N} [1 + E_t(f)^T \hat{\Omega}^{-1} E_T(f)]^{-1} \hat{\alpha}^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\alpha} \sim F_{N, T-N-K} \quad (15)$$

onde: T é o número de observações, N é o número de ativos, K é o número de fatores,  $\hat{\Omega}$  é a matriz de covariâncias dos fatores e  $\hat{\Sigma}$  é a matriz de covariâncias dos resíduos dos modelos estimados.

Segundo Garcia e Santos (2018), estatísticas próximas a zero para GRS e p-valores significativos indicam modelos robustos para apreçamento de ativos. Esse teste já foi utilizado em outros trabalhos como o de Huynh (2017) e Chiah et al. (2016) para o mercado australiano.

<sup>19</sup>O pacote utilizado pelo software R é chamado "gmm".

<sup>20</sup>O software R possui um pacote, denominado "GRS.test", que pode ser utilizado para se obter essa estatística.

### 3 METODOLOGIA

Seguindo a literatura financeira pretende-se utilizar métodos semelhantes aos empregados em trabalhos anteriores, como os empregados por Chiah et al (2016); quanto aos fatores, utilizados como variáveis explicativas dos retornos em excesso, se opta pela criação de carteiras que tem por objetivo imitar as características desses fatores (esse método sendo o mais empregado para a estimação e posteriores testes).

Os dados utilizados são diários e tem início em 2 de Janeiro de 2008 e acabam em 31 de Agosto de 2018 totalizando um total de 2639 observações. Foram modelados um total de 74 ações, sendo em sua maioria cotados no índice Ibovespa e as restantes do IBrX 100 (ações que tem início de cotação após 2 de Janeiro de 2008 não serão utilizadas). Os dados referentes às ações foram coletados por meio do Economática. Já os dados referentes aos fatores e à taxa de juros livre de risco foram coletados do Nefin-Usp.

Todos os retornos são calculados diariamente e de forma contínua<sup>21</sup>. E como *proxy* para a carteira de mercado, como é usual para os trabalhos empíricos desenvolvidos no Brasil, adotou-se o índice Bovespa. Para a taxa livre de risco se utilizou a taxa 30-day DI Swap (coletada, também, pelo site do Nefin-Usp).

#### 3.1 CONSTRUÇÃO DOS FATORES

Aqui se apresentará o procedimento pelo qual se obtém as carteiras que imitam fatores que serão utilizadas nas regressões dessa obra. Todos os fatores foram obtidos pelo Nefin; sendo assim todo o procedimento abaixo está de acordo com o método utilizado lá.

Os fatores utilizados são os seguintes: o SMB, HML, WML e IML. As variáveis necessárias para o cômputo dos fatores de risco necessários são, respectivamente, o Valor de Mercado (VM), Patrimônio Líquido (PL), Retornos Acumulados (RA) e Iliquidez (Iliq).

Para o cômputo do Valor de Mercado realiza-se a multiplicação do preço unitário do ativo pela quantidade de ativos. A Equação 16 evidencia isso.

$$\text{Valor de Mercado}_t = P_{t-1} \cdot Q_{t-1} \quad (16)$$

O cômputo do *Book-to-Market*, Equação 17, é feito pela razão entre o Patrimônio Líquido e de seu Valor de Mercado(Equação 16).

$$\text{Book-to-Market}_t = \frac{PL_{t-1}}{VM_{t-1}} \quad (17)$$

Para se calcular o Momento calcula-se o Retorno Acumulado (RA) entre t-12 e t-2 (faz-se isso para se descartar a sazonalidade do mês de Janeiro, já evidência por outros autores). A Equação 18 evidencia a construção.

$$\text{Momento}_t = RA_{t-12} - RA_{t-2} \quad (18)$$

O último índice é o de Iliquidez, o qual leva em consideração para seu cômputo: o número de dias do mês em que o ativo foi negociado ( $\text{Days}_t^i$ ), o retorno do ativo no dia d e mês t ( $r_{i,d}^t$ ), o volume de negócios do ativo no dia d e no mês t ( $V_{t,d}^i$ ) e a razão entre a capitalização de mercado da carteira de mercado no final do mês t-1 e no final do início da amostra ( $P_{t-1}^M$ ). A Equação 19 apresenta a fórmula do cômputo do índice de Iliquidez<sup>22</sup>.

<sup>21</sup>Usou-se o logaritmo natural do preço da ação no dia t e do dia t-1.

<sup>22</sup>Para mais informações sobre o cômputo do índice verificar Acharya and Pedersen (2005).

$$Iliq_i = \min \left\{ \frac{1}{Days_t^i} \sum_{d=1}^{Days_t^i} \frac{|r_{i,d}^i|}{\frac{V_{t,d}^i}{P_{t-1}^M}}, 30.00 \right\} \quad (19)$$

Uma vez calculado os índices necessários pode-se proceder o cômputo dos fatores de risco. Todo o mês de Janeiro do ano t são ranqueadas todas as ações elegíveis pelo seu valor de mercado e divididas em três tercís de acordo com sua capitalização de mercado em Dezembro do ano t-1. Segura-se o portfólio durante o ano t. Para o *Book-to-Market* o procedimento é o mesmo com diferença que usa-se Junho ao invés de Dezembro.

Para o fator Momento ranqueia-se, de forma ascendente as ações de acordo com seu retorno acumulado entre t-12 e t-2 e após isso se divide em tercís. Segura-se a carteira por um mês

Para o fator de Iliquidez, todo o mês t classificam-se as ações de forma ascendente e divide-se em tercís de acordo com a média móvel de Iliquidez dos últimos 12 meses. Segura-se a carteira durante todo o mês t.

Após a criação dos índices e sua divisão em tercís pode-se iniciar a criação dos fatores. O SMB (*Small Minus Big*) é simplesmente a diferença entre a carteira com pequeno valor de mercado e a de grande valor de mercado. O HML (*High Minus Low*) é a diferença entre a carteira com grande retorno *Book-to-Market* e a de baixo retorno. O WML (*Winners Minus Losers*) é a diferença entre carteiras de bom retorno e as de retornos ruins. O IML (*Iliquid Minus Liquid*) é a diferença entre carteiras com baixa liquidez com as de alta liquidez.

## 3.2 OS SETORES

Na Tabela 1 e na Tabela 2 explicitam-se os setores e cada um dos ativos incluídos em cada um desses setores. Se um modelo específico for adequado para todos os ativos esse modelo deve ser aceitável para todos os setores; se, no entanto, houver um modelo diferente para cada setor isso apresentará testemunho de que, por suas peculiaridades específicas, cada setor deve ser modelado de maneira específica.

Tabela 1: Ativos por setor 1 a 7

$N^o$	Bancos	Financeiras	Construção	Aluguéis	Químicos	Alimentos	Metal
1	ABCB4	BRAP4	CYRE3	BRML3	BRKM5	ABEV3	CSNA3
2	BBAS3	CARD3	ETER3	IGTA3	FHER3	BEEF3	GGBR4
3	BBDC4	ITSA4	EVEN3	MULT3	PETR4	BRFS3	GOAU4
4	BRSR6	PSSA3	EZTC3	RENT3	UNIP6	CSAN3	PMAM3
5	ITUB4	SULA11	GFSA3	-	-	JBSS3	USIM5
6	-	-	JHSF3	-	-	MRFG3	VALE3
7	-	-	MRVE3	-	-	PCAR4	-
8	-	-	RSID3	-	-	SMT03	-
9	-	-	TCSA3	-	-	-	-

Fonte:Elaborado pelo autor (2018).

Tabela 2: Ativos por setor 8 a 14

$N^{\circ}$	Energia PN	Consumo	Transportes	Ind. Int.	Varejo	Saneamento	Energia ON
1	CESP6	GRND3	CCRO3	EMBR3	BTOW3	CSMG3	CPFE3
2	CMIG4	LREN3	GOLL4	KLBN4	LAME4	SBSP3	CPLE3
3	COCE5	NATU3	TGMA3	POMO4	-	-	EGIE3
4	CPLE6	ODPV3	-	SLCE3	-	-	ELET3
5	ELET6	POSI3	-	WEGE3	-	-	ENBR3
6	TRPL4	SLED4	-	-	-	-	LIGT3
7	-	TIMP3	-	-	-	-	-
8	-	TOTS3	-	-	-	-	-
9	-	VIVT4	-	-	-	-	-

Fonte:Elaborado pelo autor (2018).

### 3.3 AS REGRESSÕES

Para cada um dos setores se realizará cinco regressões distintas: O CAPM (Equação 1), o DF (Equação 7), o TF (Equação 6), o QF (Equação 8) e o proposto nesse trabalho, isto é, o modelo de Fama-French-Cahart acrescido do fator de Iliquidez (Equação 20) aqui denominada de CF. Para melhor simplicidade as equações utilizadas são apresentadas abaixo em ordem.

$$E(R_i) - R_f = \beta_i(E(R_m) - R_f)$$

$$E(R_i) - R_f = \beta_i(E(R_m) - R_f) + \gamma_i E(SMB)$$

$$E(R_i) - R_f = \beta_i(E(R_m) - R_f) + \gamma_i E(SMB) + \delta_i E(HML)$$

$$E(R_i) - R_f = \beta_i(E(R_m) - R_f) + \gamma_i E(SMB) + \delta_i E(HML) + \theta_i E(WML)$$

$$E(R_i) - R_f = \beta_i(E(R_m) - R_f) + \gamma_i E(SMB) + \delta_i E(HML) + \theta_i E(WML) + \lambda_i E(IML) \quad (20)$$

Para que o modelo seja adequado espera-se que, conjuntamente, suas constantes sejam estatisticamente iguais a zero (esse teste será realizado pela estatística GRS). Além disso as variáveis explicativas devem ser significantes e o coeficiente de determinação ajustado ( $\bar{R}^2$ ) deve aumentar conforme as variáveis explicativas acrescentadas produzam um maior poder de explicação ao modelo. A estatística J testa se a condição de momento é adequada, como apresentado na Revisão de Literatura.

## 4 RESULTADOS

Essa seção tem por objetivo apresentar os resultados finais obtidos e compará-los com os obtidos por outros autores. Inicialmente apresenta-se a estatística descritiva dos fatores utilizados.

Na segunda parte dessa seção apresenta-se um resumo dos testes estatísticos para cada um dos setores, nas tabelas utilizadas pode-se encontrar o intercepto médio, o coeficiente de determinação ajustado ( $\bar{R}^2$ ) e a estatística GRS para cada um dos setores e modelos empregados.

Na última parte dessa seção apresenta-se a média dos fatores de carregamento para cada um dos fatores assim como características encontradas em cada um dos setores analisados.

### 4.1 ESTATÍSTICA DESCRITIVA

A Tabela 3 apresenta as estatísticas descritivas médias de cada um dos 14 setores em que as ações estão divididas para melhor apresentação, as principais informações da Tabela 3 são quanto à média dos retornos e à quantidade de ações por setor (representado pela coluna n). A maioria dos retornos orbita próximo a zero. O setor que possui maior ganho máximo é o de Consumo Final e o que possui maiores perdas é o de Construção.

Utilizando-se a média verifica-se que somente Indústria Intermediária apresenta excesso de retorno positivo; porém ao se utilizar a mediana todos os setores apresentam resultados negativos (exceto o setor de Saneamento). Dentro de cada um dos setores verifica-se que não há diferença, no quesito excesso de retorno, entre ativos cotados ou não no índice Ibovespa. Os únicos ativos que apresentam excesso de retorno positivo são os papéis: ITSA4, PSSA3, SULA11, EZTC3, MULT3, RENT3, BRKM5, UNIP6, ABEV3, SMTO3, COCE5, TRPL4, GRND3, LREN3, ODPV3, TOTS3, KLBN4, POMO4, SLCE3, WEGE3 e EGIE3.

O excesso de retorno negativo para a maioria dos papéis pode ser devido à conjuntura macroeconômica dos últimos anos, resultado semelhante deve ser encontrado para o excesso de retorno do mercado (LAGNADO, 2016).

Já na Tabela 4 apresentam-se as estatísticas descritivas dos fatores. Carteiras com baixa capitalização tendem a ter retornos piores do que carteiras com alta capitalização. O que está de acordo com os estudos realizados para o Brasil, pode-se citar para esse caso Garcia e Santos(2018) e Lagnado(2016). Sendo assim, para o mercado brasileiro, o SMB se comporta de maneira contrária ao mercado americano (FAMA; FRENCH, 1992). Carteiras com alto índice *Book-to-Market* tendem a apresentar retornos médios maiores do que carteiras com baixo índice, o que sugere que firmas que esteja subvalorizadas tendem a obter retornos maiores do que firmas que estão sobrevalorizadas.

Para  $(R_m - R_f)$  encontra-se um retorno médio negativo o que, segundo Lagnado (2016), pode se dever a performance negativa do mercado acionário brasileiro nos últimos anos. Particularmente devido conjuntura macroeconômica.

Para o fator WML, formado pela diferença de ações com bom desempenho passado acumulado com as de mal desempenho passado acumulado, encontram-se valores positivos. O sinal do fator WML está de acordo com Jegadeesh e Titman (1993), Cahart(1997) e Garcia e Santos (2018). Visto que firmas vencedoras apresentam maior retorno comparadas com firmas perdedoras.

Segundo Piotroski (2000) o objetivo de se utilizar a estratégia de Momento é jus-

Tabela 3: Estatística descritiva dos Setores

Setor	Média	Desvio Padrão	Mediana	Máximo	Mínimo	n
Bancos	-0.0045	2.5065	-0.0275	18.7519	-18.4672	5
Financeiras	-0.0025	2.4544	-0.0388	23.7011	-21.1345	5
Construção	-0.0890	3.1845	-0.0506	46.3780	-42.6179	9
Aluguéis	-0.0029	2.3871	-0.0406	26.9289	-20.6501	4
Químico	-0.0206	2.9480	-0.0236	20.8228	-20.7099	4
Alimentos	-0.0208	2.5339	-0.0419	30.0718	-37.6453	8
Metal	-0.0709	3.2415	-0.1129	30.0367	-23.0041	6
Energia PN	-0.0172	2.3566	-0.0379	27.7913	-32.2299	6
Consumo	-0.0219	2.4415	-0.0395	58.0895	-30.5235	9
Transportes	-0.0449	3.1063	-0.0448	40.7116	-24.40635	3
Ind. Int.	0.0028	2.4363	-0.0386	21.2403	-17.0526	5
Varejo	-0.0400	3.1398	-0.0754	11.8846	-20.3334	2
Saneamento	-0.0075	2.4333	0.0409	14.6077	-23.5138	2
Energia ON	-0.0175	2.2764	-0.0381	40.0428	-23.5748	6

Fonte:Elaborado pelo autor (2018).

Tabela 4: Estatística descritiva dos Fatores

Fator	Média	Desvio Padrão	Mediana	Máximo	Mínimo
$R_m - R_f$	-0.0082	1.554	0.0025	14.10	-10.52
SMB	-0.0233	0.913	0.0073	4.57	-10.52
HML	0.0024	0.791	-0.0048	4.32	-5.54
WML	0.0576	0.974	0.0849	5.47	-8.18
IML	-0.0135	0.949	0.0017	5.29	-13.32

Fonte:Elaborado pelo autor (2018).

tamente eliminar a parte de retornos negativos e tornar a estratégia já utilizada mais lucrativa. Como apresentado, na Revisão de Literatura, o prêmio de risco está associado a se segurar o ativo por longo tempo ou de perceber as mudanças no mercado antes que outros percebam; pode, também, repousar na super avaliação do mercado de alguns ativos e subavaliação de outros o que acaba desviando os preços de sua trajetória de longo prazo.

O fator IML, testado aqui, representa a diferença de uma carteira com baixa liquidez com o de uma carteira com alta liquidez. O fator IML sugere que carteiras menos líquidas apresentam retornos médios negativos com relação a carteiras com alta liquidez. Sendo assim há indícios de que carteiras mais líquidas tendem a apresentar retornos superiores a carteiras menos líquidas.

Como apresentado na Revisão de Literatura (na parte referente à Hipótese de Eficiência de Mercado) há três grupos nos quais os mercados podem ser agrupados segundo sua eficiência: Fraco, Semiforte e Forte. Um mercado é eficiente na forma Fraca quando seus ativos podem ser modelados por meio de um *Random Walk*, na forma Semiforte quando não é possível se obter ganhos a partir informações contábeis, isto é, todos os agentes são capazes de identificar as oportunidades de investimento e na forma Forte quando não há possibilidade de ganhos anormais relacionados a quaisquer tipos de informações.

Como visto é possível se obter ganhos por meio de estratégias simples de compra e

venda, o que está de acordo com as evidências encontradas para outros mercados. Reforça-se a ideia de que não há evidência de eficiência na forma Semiforte (LUCENA; PINTO, 2008) para o mercado brasileiro; os resultados podem ser utilizados, no entanto, para medir a performance e a medida de retornos esperados de alternativas de investimentos diferentes (FAMA e FRENCH, 1992).

## 4.2 RESUMO DOS TESTES ESTATÍSTICOS

Na Tabela 5 e na Tabela 6 se apresentam os resultados do GRS, intercepto médio e coeficiente de determinação ajustado ( $\bar{R}^2$ ). Para que se possa comparar melhor o grau de explicatividade dos fatores se fará uso do:  $\bar{R}^2$  médio (definido como a média dos  $\bar{R}^2$  dos ativos do setor) e do  $\bar{R}^2$  da carteira (definido pelo  $\bar{R}^2$  obtido quando se atribui pesos iguais a todos os ativos do setor em uma carteira).

Busca-se verificar, por intermédio dos resultados obtidos, se é possível que haja somente um modelo adequado a modelagem de todos os setores e se o fator de Liquidez agrega maior explicatividade aliado aos outros fatores já utilizados.

Lembrando que a estatística GRS testa de maneira conjunta a hipótese de todas as constantes serem estatisticamente iguais a zero; o modelo mais adequado para um determinado setor é, portanto, aquele que possui a estatística GRS o mais próximo de zero possível e maior coeficiente de determinação ajustado ( $\bar{R}^2$ ).

Para a maioria dos setores e carteiras houve um p-valor significativo para a estatística GRS e valores baixos para o GRS. As únicas excessões são referentes ao setor de Aluguéis, que pode ser modelado pelo DF, QF e CF, e as carteiras de Construção e Metal, só podem ser modeladas por QF e CF.

Para nenhum dos setores houve decréscimo do  $\bar{R}^2$  conforme se acrescentou mais fatores de explicação. Nota-se que os papéis que fazem parte do índice ibovespa apresentam, sistematicamente,  $\bar{R}^2$  maiores do que os papéis que não pertencem ao índice. O setor referente a Bancos modelado por meio do CAPM, por exemplo, apresenta um grau de explicação de 0,672 quando são utilizados somente os papéis que fazem parte do índice e de 0,27 quando utilizados somente os demais papéis. Esse comportamento se repete para todos os ativos sem excessão. O principal resultado disso é que o  $\bar{R}^2$  dos setores que possuem papéis não cotados no ibovespa são "puxados" para baixo. Ao se comparar o  $\bar{R}^2$ , sempre calculado a partir do GMM, com o  $\bar{R}^2$  calculado por meio do MQO nota-se que: embora o  $\bar{R}^2_{MQO}$  esteja sempre abaixo do  $\bar{R}^2_{GMM}$  essa diferença é sempre pequena.

Embora em sua maioria as carteiras tenham sempre apresentado  $\bar{R}^2$  crescentes à medida que se acrescentam mais fatores; quando se analisam as carteiras de Alimentos (apresentou decréscimo em QF e CF), de Energia PN (apresentou decréscimo em DF) e de Transportes (apresentou decréscimo em TF), no entanto, o  $\bar{R}^2$  apresenta-se decrescente à medida que se acrescentam mais fatores.

A estatística J, apresentada na Revisão de Literatura, testa a hipótese de a condição de momento ser válida. Em todos os modelos utilizados, em que se acrescentou uma constante à condição de momento, a estatística J rejeita o modelo. O que corrobora com a teoria utilizada.

Para todos os setores há aumentos do  $\bar{R}^2$  quando se acrescentam mais fatores, sendo que o aumento decorrente da inclusão de mais fatores no  $\bar{R}^2$  é decrescente. O que indica que os fatores acrescentados possuem certa explicatividade sendo essa, porém, marginal

Tabela 5: Resultado de Regressão para os setores de 1 a 7

Bancos	CAPM	DF	TF	QF	CF
Intercepto Médio	4.66e-05	0.0001	9.83e-05	7.93e-05	8.17e-05
Estatística GRS	0.0641	0.1090	0.1149	0.1190	0.1186
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.5211	0.5342	0.5353	0.5359	0.5384
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.7520	0.7614	0.7618	0.7621	0.7639
Financeiras					
Intercepto Médio	4.46e-05	8.38e-05	8.27e-05	0.000110	0.000111
Estatística GRS	0.237	0.257	0.304	0.305	0.308
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.339	0.345	0.350	0.352	0.353
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.6795	0.6866	0.6866	0.6875	0.6876
Construção					
Intercepto Médio	-0.000805	-0.000612	-0.000624	-0.000571	-0.000580
Estatística GRS	1.98578	1.74458	1.90889	1.65069	1.67456
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.2736	0.3253	0.3290	0.3317	0.3463
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.5751	0.6741	0.6763	0.6784	0.6993
Aluguéis					
Intercepto Médio	3.89e-05	0.0001008	0.000112	4.59e-05	4.32e-05
Estatística GRS	0.27874	0.33260	0.38022	0.35904	0.35625
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.2970	0.3109	0.3144	0.3181	0.3194
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.5146	0.5287	0.5319	0.5364	0.5388
Químico					
Intercepto Médio	-0.00013	-5.24e-05	-6.59e-05	-2,89e-05	-2.72e-05
Estatística GRS	1.0445	0.7964	0.8350	0.9504	0.9449
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.2633	0.2801	0.2849	0.2887	0.2899
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.5299	0.5514	0.5553	0.5564	0.5572
Alimento					
Intercepto Médio	-0.0001438	-0.0001260	-0.0001180	-0.0001142	-0.0001144
Estatística GRS	0.58531	0.49680	0.49663	0.35251	0.35430
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.2524	0.2574	0.2607	0.2630	0.2635
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.6443	0.6459	0.6480	0.6479	0.6477
Metal					
Intercepto Médio	-0.0006030	-0.000551	-0.0006134	-0.0004325	-0.0004358
Estatística GRS	1.20044	0.98726	1.21081	0.90710	0.90556
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.4023	0.4088	0.4437	0.4556	0.4575
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.6143	0.6191	0.6670	0.6843	0.6861

Fonte:Elaborado pelo autor (2018).

(MUSSA;FAMÁ;SANTOS, 2012). Quando se analisam as carteiras nota-se que apresentam um  $\bar{R}^2$  sempre superior à média dos  $\bar{R}^2$  do setor.

As equações utilizadas, os modelos CAPM, DF, TF, QF e CF, apresentam a característica de possuírem sempre as variáveis explicativas da equação anterior acrescida de um fator. Ao se analisar o  $\bar{R}^2$  do setor, e da carteira do setor, conforme se avança de

Tabela 6: Resultado de Regressão para os setores de 8 a 14

Energia PN	CAPM	DF	TF	QF	CF
Intercepto Médio	-0.00011	-0.00011	-0.00014	-0.00019	-0.00019
Estatística GRS	0.3851	0.4217	0.4751	0.5201	0.5300
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.2359	0.2381	0.2524	0.2543	0.2557
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.4880	0.4878	0.5143	0.5179	0.5179
Consumo					
Intercepto Médio	-0.00016	-0.00011	-0.00010	-0.00011	-0.00011
Estatística GRS	1.3021	1.2167	1.3135	1.2366	1.2406
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.1998	0.2118	0.2201	0.2220	0.2266
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.6228	0.6419	0.6488	0.6489	0.6503
Transporte					
Intercepto Médio	-0.00037	-0.00024	-0.00024	-0.00020	-0.00019
Estatística GRS	0.5240	0.2813	0.3078	0.1658	0.1658
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.2244	0.2522	0.2574	0.2619	0.2639
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.4083	0.4494	0.4493	0.4506	0.4511
Ind.Int.					
Intercepto Médio	1.70e-05	0.000106	0.000119	9.60e-05	9.77e-05
Estatística GRS	0.2523	0.3918	0.4112	0.2488	0.2569
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.2227	0.2351	0.2397	0.2425	0.2440
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.5290	0.5305	0.5355	0.5361	0.5374
Varejo					
Intercepto Médio	-1.46e-05	1.26e-05	1.59e-05	-1.70e-05	-2.04e-05
Estatística GRS	0.00219	0.00131	0.00474	0.00512	0.00489
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.6231	0.6239	0.6285	0.6288	0.6346
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.6890	0.6906	0.6906	0.6912	0.6936
Saneamento					
Intercepto Médio	-1.12e-05	7.22e-06	-7.49e-06	-5.43e-05	-4.96e-05
Estatística GRS	0.01771	0.00034	0.00038	0.01930	0.01719
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.1346	0.1401	0.1434	0.1447	0.1496
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.3409	0.3416	0.3455	0.3470	0.3527
Energia ON					
Intercepto Médio	-0.00011	-0.00012	-0.00015	-0.00019	-0.00019
Estatística GRS	0.20020	0.15631	0.22268	0.25282	0.25331
$\bar{R}_{GMM}^2$ Médio	0.2263	0.2320	0.2503	0.2520	0.2528
$\bar{R}_{GMM}^2$ Carteira	0.5171	0.5176	0.5400	0.5420	0.5422

Fonte:Elaborado pelo autor (2018).

modelo pode-se perceber que o  $\bar{R}^2$  aumenta mais entre dois modelos o que pode sinalizar que o fator acrescentado possui maior capacidade de explicação (visto que o grau de explicação é maior do que a penalidade imposta por se acrescentar mais uma variável explicativa).

Ao se analisar a média do  $\bar{R}^2$  verifica-se que os setores referente a Bancos, Financeiro,

Construção, Aluguéis, Químico, Consumo, Transporte, Indústria Intermediária, Saneamento e Energia ON são os que apresentam maiores aumentos entre o CAPM e o DF. Já os setores Financeiro, Alimentos, Metal, Energia PN e Energia ON apresentam maiores aumentos entre DF e TF. Os maiores aumentos entre TF e QF ocorrem nos setores Químico, Metal, Transportes e Indústria Intermediária e, por último, os maiores aumentos do  $\bar{R}^2$  médio do setor entre QF e CF ocorrem nos setores de Construção e Varejo.

Essas informações parecem apontar que alguns fatores possuem capacidade de explicação maiores do que outros. O excesso de retorno de mercado é significativo para todos os setores, o fator tamanho tem a capacidade de aumentar o grau de explicatividade nos setores: Bancos, Financeiro, Construção, Aluguéis, Químico, Consumo, Transporte, Indústria Intermediária, Saneamento e Energia ON. O fator relacionado ao Valor tem a capacidade de aumentar o grau de explicatividade nos setores: Financeiro, Alimentos, Metal, Energia PN e Energia ON. O fator relacionado ao Momento aumenta o grau de explicatividade nos setores Químico, Metal, Transportes e Indústria Intermediária. O fator referente a Iliquidez aumenta o grau de explicatividade nos setores de Construção e Varejo. Embora, para todos os setores, haja aumento do  $\bar{R}^2$  conforme se acrescentam mais fatores explicativos para alguns fatores o  $\bar{R}^2$  aumenta mais do que para outros fatores.

Quanto as carteiras dos setores algumas características mostram-se importantes como, por exemplo: nem sempre o acréscimo de mais fatores aumenta o grau de explicação ( $\bar{R}^2$ ). Os maiores aumentos entre o CAPM e o DF ocorrem nas carteiras dos setores de Bancos, Financeiras, Construção, Aluguéis, Químico, Consumo, Transporte, Indústria Intermediária e Varejo. E entre o DF e o TF nas carteiras de Aluguéis, Químico, Metal, Energia PN e Energia ON. Somente as carteiras dos setores Metal e Transporte apresentam maiores aumentos entre TF e QF. Os maiores aumentos entre o QF e o CF ocorrem somente nas carteiras dos setores de Construção, Consumo e Saneamento.

O fator relacionado ao Tamanho parece ser o que possui maior poder de aumento do grau de explicatividade, tanto nas carteiras quanto na média dos setores, visto que o  $\bar{R}^2$  das carteiras dos setores tende a aumentar. Seguindo do Tamanho há o Valor, Iliquidez e Momento.

De acordo com a análise verifica-se que cada um dos setores apresenta características diferentes, uns são mais dependentes do Tamanho do que o Momento, por exemplo. A maioria dos  $\bar{R}^2$  médios dos setores mostrou-se crescente conforme se acrescentam mais fatores. O  $\bar{R}^2$  mostrou-se crescente na maioria dos casos, com poucas exceções. Além disso as ações que fazem parte do índice Ibovespa apresentam sistematicamente  $\bar{R}^2$  superiores as não cotadas nesse índice e o  $\bar{R}^2$  da carteira é sempre superior ao  $\bar{R}^2$  médio do setor.

### 4.3 UM OLHAR SOBRE AS ANOMALIAS

Na Tabela 7 apresenta-se os valores médios dos coeficientes dos fatores (média das variáveis de carregamento) o que apresenta de que maneira, na média, as ações carregam com relação aos fatores de risco. Na última coluna da Tabela 7, coluna n, são apresentadas as porcentagens de coeficientes significativamente diferentes de zero para cada fator de risco.

Para os fatores SMB e HML encontrou-se que, em média, as ações modeladas carregam de maneira positiva para esses fatores.

Para o caso do fator WML tem-se um valor médio de carregamento negativo. Mussa, Famá e Santos(2012) e Santos, Famá e Mussa(2011) também encontra um carregamento

negativo para esse fator. O IML também apresenta carregamento negativo para a maioria dos ativos modelados.

Cada setor apresenta características especiais quanto a sua forma de modelação. Para alguns a variável referente ao Tamanho adquire maior importância do que a liquidez, por exemplo. Uma modelagem que leve em consideração as características específicas de cada setor deve ser a mais adequada para a precificação dos ativos daquele setor específico. O fator Tamanho sendo, após o fator referente ao excesso de retorno do mercado, o mais robusto entre todos os outros.

Pela Tabela 7 nota-se que nem todos os fatores são significantes para todos os ativos (a coluna n indica quantos fatores são significativos para cada um dos fatores). Após o fator de excesso de retorno em relação ao mercado o fator que é mais importante é o referente ao Tamanho, após esse o referente ao Valor, após esse o de Ilíquidez e, por último, o de Momento. Dessa forma cada um dos fatores parece capturar peculiaridades específicas para cada um dos ativos que se precifica.

Para melhor compreensão se apresentará a Equação 20, do modelo CF, mostrada na seção sobre a Metodologia, com o intuito de melhor se compreender os resultados da Tabela 7. É importante se notar que os demais modelos podem ser adquiridos por essa equação zerando-se alguns fatores.

$$E(R_i) - R_f = \beta_i(E(R_m) - R_f) + \gamma_i E(SMB) + \delta_i E(HML) + \theta_i E(WML) + \lambda_i E(IML)$$

Tabela 7: Coeficientes médios dos fatores explicativos

Fator	Média	Desvio Padrão	Estatística t	Máximo	Mínimo	n
$\beta$	0.9030	0.2502349	31.04	1.5504	0.4749	100%
$\gamma$	0.2306	0.4801781	3.07	1.5864	-0.4871	55.40 %
$\delta$	0.09281	0.335279	1.70	1.13860	-0.47749	54.05 %
$\theta$	-0.02956	0.157035	-0.88	0.26762	-0.54795	29.72 %
$\lambda$	-0.06883	0.3665371	-0.93	0.67303	-1.47070	33.78 %

Fonte:Elaborado pelo autor (2018).

A média dos coeficientes das carteiras dos setores está de acordo com o encontrado na Tabela 7.

Por meio de análise rápida da Tabela 8, a qual apresenta os valores de carregamento médios para cada setor e a quantidade de ações contidas no setor (coluna n) e fator de risco significativos (linha n), constata-se que os únicos setores em que a Ilíquidez mostrou-se insignificante são os referentes a Aluguéis e Alimentos. O fator referente a Momento apenas se mostrou insignificante para os setores Bancos e Varejo. Já o fator referente ao Tamanho não se mostra significativo apenas para o setor Financeiras. Os únicos fatores que sempre possuem pelo menos uma variável de carregamento significativa são os de Excesso de Retorno de Mercado ( $(R_m - R_f)$ ) e de Valor (HML).

De acordo com as características particulares de cada setor alguns fatores serão mais significativos do que outros. O fator de excesso de retorno do mercado, por exemplo, é significativo para todos os ativos modelados.

O fator de Tamanho mostrou-se significativo para metade, ou mais, dos ativos modelados somente nos setores de: Construção, de Aluguéis, Químico, Consumo, Transportes,

Tabela 8: Coeficientes médios para setores

Setor	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\theta$	$\lambda$	n
Bancos	1.1555	0.0795	0.0315	0	0.0961	7
n	7	1	1	0	1	-
Financeiras	0.8836	0	0.0105	-0.0595	-0.0122	5
n	5	0	3	1	2	-
Construção	1.0082	1.1899	0.1312	-0.0838	-0.6469	9
n	9	9	2	2	6	-
Aluguéis	0.8788	0.23965	-0.0843	0.064275	0	4
n	4	2	1	1	0	-
Químico	1.0603	0.152796	0.20334	-0.10648	0.15624	5
n	5	3	3	2	2	-
Alimentos	0.8066	0.06448125	-0.1003125	0.02077125	0	8
n	8	3	3	3	0	-
Metal	1.1144	0.08266	0.6811	-0.3507	-0.1974	6
n	6	1	5	5	3	-
Energia PN	0.6961	-0.0746	0.3639	0.02653	0.0370	6
n	6	1	5	1	1	-
Consumo	0.7490	0.1307	-0.1145	0.0143	-0.0062	9
n	9	6	5	1	4	-
Transportes	1.0094	0.3442	-0.04305	-0.0802	0.1444	3
n	3	2	3	2	1	-
Indústria Intermediária	0.8011	0.0659	-0.1219	0.0844	0.06326	5
n	5	4	2	2	1	-
Varejo	1.233	0.2977	-0.0175	0	-0.2955	2
n	2	1	2	0	1	-
Saneamento	0.8451	-0.1371	0.07795	0.0647	0.3394	2
n	2	1	1	1	2	-
Energia ON	0.7102	0.1180	0.2975	0.04143	0.0666	6
n	6	4	3	2	1	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Indústria Intermediária, Varejo, Saneamento e Energia ON. Somente no setor de Saneamento mostrou-se com carregamento negativo. O fator de Valor mostra-se significativa para a metade, ou mais, dos setores de: Financeiras, Químico, Metal, Energia PN, Consumo, Transportes, Varejo, Saneamento, e Energia ON. Com relação à média somente Consumo, Transportes e Varejo possuem valores de carregamento, para esse fator, negativos. Quanto ao fator de Momento somente os setores de Metal, Transportes e Saneamento possuem mais da metade de seus ativos significantes para esse fator. Somente o setor de Saneamento possui valor de carregamento contrário à média total, isto é, sinal positivo. Para o fator de Iliquidez somente os setores de Construção, Metal, Varejo e Saneamento possuem a metade ou mais de ativos significativos para esse fator. Somente o setor de Saneamento apresentou um valor de carregamento contrário à média. Faz-se necessário salientar que os setores possuem quantidades diferentes de ativos.

Outra característica interessante para cada um dos setores é que há alguns setores que se comportam de maneira diferente em relação à média total. Isto é, pegando-se o

caso do SMB, por exemplo, os setores de Energia Preferencial e Saneamento apresentam intercepto negativo para a variável Tamanho. Para esses setores carrega-se mais em ações que são maiores em questão de Tamanho, esse comportamento se verificou para a maioria dos ativos do mercado chinês (HU et al., 2018); porém, é importante se notar, nem todas as ações do setor são significantes para esse carregamento (SMB), isso pode ser constatado observando-se a Tabela 8. Rogers e Securato argumentam que o SMB é mais importante do que o HML para se explicar os retornos médios. Segundo se pode constatar na Tabela 7 que a variável que é significativa mais vezes é o SMB e não o HML e após esse o IML e por último o WML. De certa forma o SMB é a variável que mais vezes é significativa e, portanto, uma das mais importantes para ser utilizada em modelagens posteriores.

Pela Tabela 7 fazendo-se a média entre os interceptos das ações modeladas tem-se que aumentos nos fatores  $(E(R_m) - R_f)$ , SMB e HML irão gerar aumentos médios de 0,90, 0,23 e 0,09 respectivamente no excesso de retorno dos ativos e aumentos nos fatores WML e IML irão gerar decréscimos de 0,02 e 0,06 nos excessos de retorno dos ativos. Em alguns escritos escreve-se que:  $(E(R_m) - R_f)$ , SMB e HML carregam positivamente enquanto WML e IML carregam negativamente.

Como cada um desses fatores foi construído de forma a poder capturar características específicas como Tamanho, Valor, Momento e Ilíquidez os valores obtidos dos interceptos mostram um quadro de como cada ativo reaje a cada uma dessas variáveis.

## 5 CONCLUSÃO

A variável explicativa referente ao excesso de retorno do Mercado (única utilizada como explicativa pelo CAPM) é sempre, e em quaisquer regressões, significativa. A variável referente ao Tamanho é a mais importante, como afirmado por Rogers e Securato(2009), dentre os demais fatores para explicar o excesso de retorno de um determinado ativo, visto que essa variável é a segunda mais significativa entre todas as regressões.

As ações contidas no índice ibovespa sempre apresentam grau de explicatividade ( $\bar{R}^2$ ) superior àquelas não contidas no índice e a carteira do setor apresenta sempre  $\bar{R}^2$  superior à média dos  $\bar{R}^2$  dos ativos contidos no setor.

Certos setores apresentam características distintas quanto a quais fatores são mais importantes para a sua modelagem. Alguns setores são melhores explicados quando utiliza-se o fator Tamanho; outros o fator Valor e assim sucessivamente até o fator referente à Iliquidez.

Lagnado(2008) argumenta que firmas pequenas são mais arriscadas do que firmas grandes, no mercado brasileiro, visto que quando ocorre uma crise econômica (decorrendo disso um fuga de capitais) as firmas com menor Valor de Mercado são as mais atingidas. O fator de carregamento relacionado ao SMB mostrou-se, em média, positivo; o que lança luz sobre a possibilidade de firmas pequenas pagarem um prêmio de risco. Muito se objetou sobre a possibilidade de os ativos menos líquidos pagarem um prêmio de risco. Segundo Correia, Amaral e Bressan (2008) em mercados emergenciais com baixa integração paga-se um prêmio pela Liquidez e, semelhante à argumentação de Lagnado(2008), ativos mais líquidos tornam-se mais valiosos quando da ameaça de uma crise econômica. Quando modelados, os ativos brasileiros, nota-se que o fator de Iliquidez possui, em média, um sinal negativo. Negando, assim, a possibilidade de se pagar um prêmio de risco pela baixa liquidez, o que está plenamente de acordo com o mercado nacional( visto que o mercado brasileiro é emergente e sujeito a crises sistemáticas).

O número de ativos significativos, no montante geral de ações modeladas, para o fator de Iliquidez foi superior ao do fator relacionado ao Momento mostrando, então, que a Iliquidez possui a capacidade de capturar algumas das características do excesso de retorno dos ativos modelados. Em alguns setores ao se acrescentar o fator de Iliquidez houve aumento do  $\bar{R}^2$  o que evidencia que o fator possui poder de explicação.

Com as descobertas desenvolvidas nesse trabalho espera-se que se dê maior atenção à Iliquidez quando feitas precificações sobre ativos. Além disso espera-se que haja, para o mercado brasileiro, utilização mais frequente do estimador utilizado no desenvolvimento desse trabalho. Visto que muito do trabalho foi simplificado justamente por não haver preocupações quanto a problemas de autocorrelção e heterocedasticidade dos resíduos (problema esse apontado por Lucena e Pinto (2008)).

## REFERÊNCIAS

- Acharya, V.V., Pedersen, L.H., 2005. Asset pricing with liquidity risk. **Journal of Financial Economics** 77, 375–410.
- AHARONI, Gil; GRUNDY, Bruce; ZENG, Qi. Stock returns and the Miller Modigliani valuation formula: Revisiting the Fama French analysis. **Journal Of Finance Economics**, Melbourne, v. 110, n. 2, p.347-357, Nov. 2013.
- BANZ, Rolf W.. The Relationship Between Return and Market Value of Common Stocks. **Journal Of Financial Economics**, Chicago, v. 9, n. 1, p.3-18, Mar. 1981.
- BHANDARI, Laxmi Chand. Debt/Equity Ratio and Expected Common Stock Returns: Empirical Evidence. **The Journal Of Finance**, [s.l.], v. 43, n. 2, p.507-528, Jun. 1988.
- BUENO, Rodrigo de Losso da Silveira. GMM. In: BUENO, Rodrigo de Losso da Silveira. **Econometria de séries temporais**. 2. ed. [s. l.]: Cengage Learning, 2012. Cap. 5. p. 163-194.
- CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; SANTOS, André A. P.. Seleção de Carteiras Utilizando o Modelo Fama-French-Carhart. **Revista Brasileira de Economia**, Rio de Janeiro, v. 67, n. 1, p.45-65, jan. 2013.
- CARHART, Mark M.. On Persistence in Mutual Fund Performance. **The Journal Of Finance**, Los Angeles, v. 52, n. 1, p.57-82, Mar. 1997.
- CHAN, Louis K. C.; HAMAOKA, Yasushi; LAKONISHOK, Josef. Fundamentals and Stock Returns in Japan. **The Journal Of Finance**, [s.l.], v. 46, n. 5, p.1739-1764, Dec. 1991.
- CHAUSSÉ, Pierre. Computing Generalized Method of Moments and Generalized Empirical Likelihood with R. **Journal Of Statistical Software**, [s.l.], v. 34, n. 11, p.1-37, 2010.
- CHIAH, Mardy et al. A Better Model? An Empirical Investigation of the Fama-French Five-factor Model in Australia. **International Review Of Finance**, [s.l.], v. 16, n. 4, p.595-638, 20 Sep. 2016. Wiley. <http://dx.doi.org/10.1111/irfi.12099>.
- CORREIA, Laise Ferraz; AMARAL, Hudson Fernandes. EXISTE UM EFEITO DA LIQUIDEZ DAS AÇÕES? EVIDÊNCIA DO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO. 2008. ABEPRO. Disponível em: < [http : //www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2008\\_tnsto07150611728.pdf](http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2008_tnsto07150611728.pdf) >. Acesso em: 20 nov. 2018.
- CORREIA, Laise Ferraz; AMARAL, Hudson Fernandes; BRESSAN, Aureliano Angel. O efeito da liquidez sobre a rentabilidade de mercados das ações negociadas no mercado acionário bra: The effect of Liquidity on stock returns in the brazilian stock market. **Revista de Administração e Contabilidade da Unisinos**, Belo Horizonte, v. 5, n. 2, p.109-119, maio 2008.
- COSTA JUNIOR, Newton C. A. da; NEVES, Myrian B. Eiras das. Variáveis Fundamentais e os Retornos das Ações. **Revista Brasileira de Economia**, Rio de Janeiro, v. 54, n. 1, p.123-137, jan. 2000.

DURBIN, J.. Errors in Variables. *Revue de L'institut International de Statistique / Review Of The International Statistical Institute*, [s.l.], v. 22, n. 1, p.23-32, Mar. 1954.

ECONOMÁTICA. Base de dados:Cotações. São Paulo, 2018. Disponível em < <https://economica.com/> >. Acesso:20 de Setembro de 2018.

F.FAMA, Eugene; R.FRENCH, Kenneth. A five-factor asset pricing model. *Journal Of Financial Economics*, [s.l.], v. 116, p.1-22, Apr. 2015. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2014.10.010>

FAMA, Eugene F.; R.FRENCH, Kenneth. O Modelo de precificação de ativos de Capital: Teoria e Evidências. *Revista de Administração de Empresas*, [s.l.], v. 47, n. 2, p.103-118, jun. 2007.

FAMA, Eugene F.. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal Of Finance*, [s.l.], v. 25, n. 2, p.383-417, May 1970.

FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R.. Dissecting Anomalies. *The Journal Of Finance*, [s.l.], v. 63, n. 4, p.1653-1678, Aug. 2008.

FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R.. Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies. *The Journal Of Finance*, [s.l.], v. 51, n. 1, p.55-84, Mar. 1996.

FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R.. The Cross-Section of Expected Stock Returns. *The Journal Of Finance*, [s.l.], v. 47, n. 2, p.427-465, Jun. 1992.

FÁVERO, Luiz Paulo; BELFIORE, Patrícia. Introdução à Programação Linear: Formulação Geral e Modelagem de Problemas Reais: Problema de Seleção de Carteiras de Investimentos. In: FÁVERO, Luiz Paulo; BELFIORE, Patrícia. **Pesquisa Operacional: Para Cursos de Administração, Contabilidade e Economia**. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda., 2012. Cap. 2. p. 37-44. ISBN 978-85-352-3421-3 ,.

FONSECA, Manuel Alcino R. da. Formas Quadráticas: Análise de Risco e Seleção de Carteiras. In: FONSECA, Manuel Alcino R. da. **Álgebra Linear Aplicada: a Finanças, Economia e Econometria**. Barueri: Manole Ltda., 2003. Cap. 7. p. 181-205. ISBN: 85-204-1657-8.

GARCIA, Alexandre Schwinden; SANTOS, André Alves Portela. Dissecando Anomalias com o Modelo de Cinco Fatores para o Mercado Acionário Brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, Rio de Janeiro, v. 16, n. 1, p.81-122, mar. 2018.

Gibbons, M. R., Ross, S. A. e Shanken, J. (1989). A Test of the Efficiency of a Given Portfolio. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 57 (5): 1121-1152.

HANSEN, Lars Peter. Large sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica*, [s.l.], v. 50, n. 4, p.1029-1054, July 1982.

Hansen LP, Heaton J, Yaron A (1996). "Finite-Sample Properties of Some Alternative GMM Estimators." *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, 262-280.

HAUSMAN, J. A.. Specification Tests in Econometrics. *Econometrica*, [s.l.], v. 46, n. 6, p.1251-1271, Nov. 1978.

HU, Grace Xing et al. Fama-French in China: Size and Value Factors in Chinese Stock

Returns. **International Review Of Finance**, [s.l.], p.1-42, 23 Jan. 2018. Wiley. <http://dx.doi.org/10.1111/irfi.12177>.

HUBERMAN, Gur; KANDEL, Shmuel. Mean-Variance Spanning. **The Journal Of Finance**, [s.l.], v. 42, n. 4, p.873-888, Sep. 1987.

HUYNH, Thanh D.. Explaining Anomalies in Australia with a Five-factor Asset Pricing Model. **International Review Of Finance**, [s.l.], v. 18, n. 1, p.123-135, 11 Apr. 2017. Wiley. <http://dx.doi.org/10.1111/irfi.12125>.

JEGADEESH, Narasimhan; TITMAN, Sheridan. Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implacations for Stock Market Efficiency. **The Journal Of Finance**, [s.l.], v. 48, n. 1, p.65-91, mar. 1993.

JENSEN, Michael C.. The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964. **The Journal Of Finance**, [s.l.], v. 23, n. 2, p.389-416, May 1968.

KUHN, Thomas Samuel. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. 2. ed. São Paulo: Perspectiva, 1970. 213 p. ISBN 85-273-0111-3..

LAGNADO, Leonardo Mathiazzi. **INTRODUCING ADDITIONAL FACTORS FOR THE BRAZILIAN MARKET IN THE FAMA-FRENCH FIVE-FACTOR ASSET PRICING MODEL**. 2016. 65 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Economia, Escola de Economia de São Paulo, Fundação Getulio Vargas, São Paulo, 2016.

LINTNER, John. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. **The Review Of Economics And Statistics**, [s.l.], v. 47, n. 1, p.13-37, fev. 1965.

LO, Andrew W.; MACKINLAY, A. Craig. Stock Market Prices do not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test. **The Review Of Financial Studies**, [s.l.], v. 1, n. 1, p.41-66, Sep. 1988.

LUCENA, Pierre; PINTO, Antonio Carlos Figueiredo. Anomalias no Mercado de Ações Brasileiro: uma Modificação no Modelo de Fama e French. **Revista de Administração Contemporânea**, [s.l.], v. 2, n. 3, p.509-530, set. 2008.

MACHADO, Márcio André Veras; MACHADO, Márcia Reis. Liquidez e precificação de ativos: evidências do mercado brasileiro. **Brazilian Business Review**, Vitória, v. 11, n. 1, p.73-95, jan. 2014.

MACKINLAY, A.craig; RICHARDSON, Matthew P.. Using Generalized Method of Moments to Test-Mean-Variance Efficiency. **The Journal Of Finance**, [s.l.], v. 46, n. 2, p.511-527, June 1991.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. **The Journal Of Finance**, [s.l.], v. 7, n. 1, p.77-91, Mar. 1952.

MARTINS, Clarice Carneiro; EID JUNIOR, William. Pricing Assets with Fama French 5-Factor Model: a Brazilian market novelty. 2015. Disponível em: < <https://www.researchgate.net/publication/277020668PricingAssetswithFamaandFrench5-FactorModelaBrazilianmarketnovelty> >. Acesso em: 11 ago. 2018.

MUSSA, Adriano; FAMÁ, Rubens; SANTOS, José Odálio dos. A adição do fator de risco

momento ao modelo de precificação de ativos dos três fatores de Fama e French aplicado ao mercado acionário Brasileiro. **Revista de Gestão**, São Paulo, v. 19, n. 3, p.431-447, set. 2012. Emerald. <http://dx.doi.org/10.5700/rege433>.

MUSSA, Adriano; ROGERS, Pablo; SECURATO, José Roberto. Modelos de retornos esperados no mercado brasileiro: testes empíricos utilizando metodologia preditiva. **Revista de Ciências da Administração**, [s.l.], v. 11, n. 23, p.192-216, 24 ago. 2009. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). <http://dx.doi.org/10.5007/2175-8077.2009v11n23p192>.

NEWKEY, Whitney K.; WEST, Kenneth D.. A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. **Econometrica**, [s.l.], v. 55, n. 3, p.703-708, May 1987.

NOVY-MARX, Robert. The other side of value: The gross profitability premium. **Journal Of Finance Economics**, [s.l.], v. 108, n. 1, p.1-28, Jan. 2013.

PIOTROSKI, Joseph D.. Value Investing: The Use of Historical Financial Statement Information to Separate Winners from Losers. **Journal Of Accounting Research**, [s.l.], v. 38, p.1-41, Jan. 2000.

RACICOT, François-eric; RENTZ, William F.. A panel data robust instrumental variable approach: a test of the new Fama-French five-factor model. **Applied Economics Letters**, [s.l.], v. 24, n. 6, p.410-416, 4 Jul. 2016. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/13504851.2016.1197361>.

RACICOT, François-eric; RENTZ, William F.. Testing Fama–French’s new five-factor asset pricing model: evidence from robust instruments. **Applied Economics Letters**, [s.l.], p.1-5, Sep. 2015. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/13504851.2015.1080798>.

ROGERS, Pablo; SECURATO, José Roberto. Estudo Comparativo no Mercado Brasileiro do Capital Asset Pricing Model (CAPM), Modelo 3-Fatores de Fama e French e Reward Beta Approach. **Revista de Administração Contemporânea**, [s.l.], v. 3, n. 1, p.159-179, jan. 2009.

ROSENBERG, Barr; REID, Kenneth; LANTEIN, Ronald. Persuasive evidence of market inefficiency. **The Journal Of Portfolio Management**, [s.l.], v. 11, n. 3, p.9-16, Sep. 1985.

ROSS, Stephen A.. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. **Journal Of Economic Theory**, [s.l.], v. 13, n. 3, p.341-360, May 1976.

SANTOS, José Odálio dos; FAMÁ, Rubens; MUSSA, Adriano. A ADIÇÃO DO FATOR DE RISCO MOMENTO AO MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS DOS TRÊS FATORES DE FAMA e FR. **Revista de Gestão**, [s.l.], v. 19, n. 3, p.453-472, 2012. Emerald. <http://dx.doi.org/10.5700/rege473>.

SATURNINO, Odilon; LUCENA, Pierre; SATURNINO, Valéria. Liquidez e valor no mercado de ações brasileiro: Modelo de cinco fatores. **Revista Eletrônica de Administração**, Porto Alegre, v. 86, n. 2, p.191-224, maio 2017.

SANVICENTE, A. Z.; MINARDI, A. M. A. F. **A liquidez é relevante no mercado de ações?** Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais, São Paulo:Ibmeq, 1998.

SHARPE, William F.. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. **The Journal Of Finance**, [s.l.], v. 19, n. 3, p.425-442, Sep. 1964. JSTOR. <http://dx.doi.org/10.2307/2977928>.

TITMAN, Sheridan; WEI, K. C. John; XIE, Feixue. Capital Investments and Stock Returns. **Journal Of Finance And Quantitative Analysis**, [s.l.], v. 39, n. 4, p.677-700, Dec. 2004.

TORRES, Ricardo; BONOMO, Marco; FERNANDES, Cristiano. A Aleatoriedade do Passeio na Bovespa: Testando a Eficiência do Mercado Acionário Brasileiro. **Revista Brasileira de Economia**, Rio de Janeiro, v. 56, n. 2, p.199-247, abr. 2002.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - USP. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. Núcleo de Pesquisa em Economia Financeira. Data: risk factors. São Paulo, 2018. Disponível em : < [http : //www.nefin.com.br/](http://www.nefin.com.br/) >. Acesso em 20 de Setembro de 2018.

VARIAN, Hal R.. Ativos de Risco. In: VARIAN, Hal R.. **Microeconomia** Uma abordagem moderna. 9. ed. [s.l]: Elsevier Editora Ltda., 2016. Cap. 13. p. 233-247. ISBN: 978-85-352-3018-5.

VIEIRA, Kelmara Mendes; JUSTEN JUNIOR, Ari Aloísio; RIGHI, Marcelo Brutti. O papel da liquidez e suas múltiplas dimensões no retorno das ações: Um estudo com dados em painel do mercado brasileiro. **Revista Contemporânea de Economia e Gestão**, [s. l.], v. 13, n. 2, p.7-35, maio 2015.

ZEILEIS, Achim. Econometric Computing with HC and HAC Covariance Matrix Estimators. **Journal Of Statistical Software**, [s.l.], v. 10, n. 11, p.1-21, Nov. 2004.

## APÊNDICE A - O MODELO DE MARKOWITZ

Há muitos ativos disponíveis no mercado e cada um deles tem seu risco e retorno próprio. Após se fazer uma análise, do rendimento e do risco, de cada um desses ativos duas perguntas são cabíveis:

1. É eficiente (no sentido de que irá prover risco mínimo ou retorno máximo) alocar todo o capital em um só ativo?
2. Como alocar todo o capital, que se dispõe para investimentos, nos diferentes ativos?

O ato de se alocar o capital em diferentes ativos recebe o nome de "diversificação". Um combinação linear de diferentes ativos é denominado "carteira", quanto mais ativos houverem na carteira mais diversificada essa será. Pode-se provar matematicamente que o processo de diversificação, embora não possa eliminar, tem a capacidade de diminuir o risco. Isto é, dados dois ativos é possível se fazer um combinação linear entre esses dois ativos que permitirá obter uma carteira que tem risco menor do que a soma dos riscos dos dois ativos individualmente.

Pressupostos do modelo de Markowitz

1. Os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal com média e variância constante;
2. Os investidores são avessos ao risco;
3. O risco é quantificado pelo desvio padrão dos retornos;

Sendo que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal, com média e variância constante, uma combinação linear entre o retorno desses ativos irá apresentar as mesmas características.

A seguir apresenta-se uma exposição matemática do efeito da diversificação sobre o risco.

Sendo " $X$ ", uma matriz coluna, a matriz de pesos da carteira e " $\Sigma$ ", uma matriz simétrica e quadrada, a matriz de covariâncias tem-se que " $X_{m \times 1}$ " e " $\Sigma_{m \times n}$ " tem a seguinte forma:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mn} \end{pmatrix}$$

As fórmulas de rentabilidade e risco da carteira são as seguintes:

1. A rentabilidade esperada da carteira, denotada por " $E(R_c)$ ", é dada pela seguinte fórmula:

$$(a) E(R_c) = X^T \cdot E(R)$$

2. O risco associado à carteira, denotado por " $\sigma_c^2$ ", é dado pela seguinte fórmula:

$$(a) \sigma_c^2 = X^T \cdot \Sigma \cdot X$$

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & 0 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Se se dividir a matriz de covariâncias em duas partes, uma contando somente as variâncias (diagonal principal) e outra só contendo as covariâncias, tem-se o seguinte:

Utilizando-se dessa decomposição, da matriz  $\Sigma_{m \times n}$ , pode-se avaliar a função de risco associado à carteira. A transformação da Equação 1 em Equação 2 permite que se possa reescrever a equação original em formato de somatório.

$$\sigma_c^2 = X^T \cdot (\Sigma_1 + \Sigma_2) \cdot X \quad (1)$$

$$\sigma_c^2 = X^T \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \cdot \sigma_{11} \\ x_{21} \cdot \sigma_{22} \\ \vdots \\ x_{m1} \cdot \sigma_{mn} \end{pmatrix} + X^T \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \cdot \sigma_{12} + x_{13} \cdot \sigma_{13} + \cdots + x_{m1} \cdot \sigma_{1n} \\ x_{11} \cdot \sigma_{21} + x_{31} \cdot \sigma_{23} + \cdots + x_{m1} \cdot \sigma_{2n} \\ \vdots \\ x_{11} \cdot \sigma_{m1} + x_{21} \cdot \sigma_{m2} \cdots x_{(m-1)1} \cdot \sigma_{m(n-1)} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Se, por simplificação, se fizer a carteira ótima ser igual a " $\frac{1}{n_i}$ " (onde " $n$ " denota o número de ativos e o subíndice " $i$ " o ativo específico) e se passar do formato matricial (Equação 2) para o formato de somatórios (Equação 3) tem-se:

$$\sigma_c^2 = \sum_i^n x_{i1}^2 \cdot \sigma_{ii} + \sum_i^n x_i \cdot (\sum_{i \neq j} x_j \cdot \sigma_{ij}) \quad (3)$$

$$\sum_i^n x_{i1}^2 \cdot \sigma_{ii} + \sum_i^n x_{i1} \cdot (\sum_{i \neq j} x_{j1} \cdot \sigma_{ij}) = \sum_i^n x_{i1}^2 \cdot \sigma_{ii} + \sum_i^n \sum_{i \neq j} x_{i1} \cdot x_{j1} \cdot \sigma_{ij} \quad (4)$$

$$\sum_i^n x_{i1}^2 \cdot \sigma_{ii} + \sum_i^n \sum_{i \neq j} x_{i1} \cdot x_{j1} \cdot \sigma_{ij} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_i^n \sigma_{ii} + \frac{1}{n^2} \cdot \sum_i^n \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} \quad (5)$$

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_i^n \sigma_{ii} + \frac{1}{n^2} \cdot \sum_i^n \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_i^n \sigma_{ii} + \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_i^n \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} \quad (6)$$

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_i^n \sigma_{ii} + \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_i^n \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} = \frac{1}{n} \cdot \bar{\sigma}_{ii} + \frac{(n-1)}{n} \cdot \bar{\sigma}_{ij} \quad (7)$$

$$\frac{1}{n} \cdot \bar{\sigma}_{ii} + \frac{(n-1)}{n} \cdot \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n} \cdot (\bar{\sigma}_{ii} - \bar{\sigma}_{ij}) + \bar{\sigma}_{ij} \quad (8)$$

$$\sigma_c^2 = \frac{1}{n} \cdot (\bar{\sigma}_{ii} - \bar{\sigma}_{ij}) + \bar{\sigma}_{ij} \quad (9)$$

$$\text{onde: } \bar{\sigma}_{ii} = \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_i^n \sigma_{ii} \right) \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \left( \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_i^n \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} \right)$$

A partir da Equação 9 pode-se intuir que caso se faça o número de ativos tender ao infinito (o caso de uma diversificação extrema) tem-se a Equação 10.

Denomina-se "risco diversificável" (ou risco específico) a parte do risco da carteira que pode ser eliminado por meio da introdução de mais ativos (diversificação) e "risco de mercado" (ou não-diversificável) a parte do risco da carteira que não pode ser eliminado por meio do processo de diversificação. Portanto, mesmo que se diversifique ao máximo, sempre haverá risco, sendo denotado por " $\bar{\sigma}_{ij}$ ". O, já citado, personagem shakespeariano mesmo tendo diversificado seus investimentos, pondo suas mercadorias em diferentes barcos(ativos), se deparou com um risco que independe da diversificação.

Minimizando-se a matriz de covariância com pesos ( $X^T \cdot \Sigma \cdot X$ ) sujeito as restrições de utilização total do capital (a soma de todos os pesos deve igualar "1") e a restrição de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_c^2 = \bar{\sigma}_{ij} \quad (10)$$

um retorno específico tem-se o seguinte problema de minimização:

$$\text{Minimizar: } \sigma_c^2 = X^T \cdot \Sigma \cdot X$$

$$\text{Sujeito a : } \begin{cases} X^T \cdot s = 1 \\ E(r_c) = X^T \cdot E(r) = \mu \end{cases}$$

Sendo  $\mu$  uma constante, que representa a rentabilidade média esperada, pode-se encontrar todas as carteiras eficientes no plano simplesmente variando-se  $\mu$ . Resolvendo-se as condições de primeira ordem do Lagrangiano:

$$L = X^T \cdot \Sigma \cdot X - \lambda_1 \cdot (X^T \cdot s - 1) - \lambda_2 [X^T \cdot E(r) - \mu]$$

Tem-se que o resultado para a carteira eficiente é:

$$\sigma_c^2 = \frac{k}{\Delta} \cdot [E(r_c) - \frac{b}{k}]^2 + \frac{1}{k}$$

Sendo que:  $b = E(r)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot s$ ,

$k = s^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot s$ ,

$s^T = (1, 1, \dots, 1)$  e

$\Delta = (s^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot s) \cdot (E(r)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot E(r)) - (E(r)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot s) \cdot (E(r)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot s)^T$

Sendo que a função objetivo é convexa e que suas restrições são lineares tem-se que a solução é necessariamente um mínimo; não sendo, portanto, necessário se desenvolver as condições de segunda ordem para o problema de minimização condicionada.

Sendo que a solução, quando posta em um gráfico, pode ser compreendida como uma hipérbole com centro em  $\frac{b}{k}$ , a fronteira eficiente (composta somente por carteiras eficientes) é aquela situada a cima de  $\frac{b}{k}$  <sup>23</sup>.

---

<sup>23</sup>Para mais informações sobre derivações de carteiras eficientes consultar Fávero e Belfiore (2012) e Fonseca (2013).

## APÊNDICE B - O MODELO CAPM

O *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) foi idealizado como um “desenvolvimento” do modelo de carteiras de Markowitz. Desenvolvimento no sentido de simplificação na maneira de se determinar o risco. Ao contrário do modelo de Markowitz, que somente permite se avaliar carteiras, o CAPM permite que se avalie o risco de cada um dos ativos individualmente (pode, também, ser utilizado para se avaliar carteiras).

Devido ao número de parâmetros a serem estimados, às vezes, dependendo do tamanho da carteira, torna-se mais simples se utilizar o índice de Sharp, do que o desvio padrão de Markowitz, para se medir o risco. Portanto, além de se poder analisar uma carteira de forma mais simplificada pode-se, também, analisar o peso que cada um dos ativos tem na carteira para diminuir o risco.

Segundo Varian(2016) e Sharpe(1964) um dos pressupostos básicos do modelo é a aversão ao risco dos investidores. Isto é, a função de utilidade dos indivíduos em relação ao risco é côncava.

Dada a eficiência de mercado, é pouco provável que um indivíduo consiga ganhar sucessivamente a cima do mercado. Sendo assim, a carteira de mercado será o ponto de partida, sendo essa a carteira mais diversificada possível.

Segundo Varian (2016), o modelo CAPM pode ser utilizado para se comparar investimentos (como fundos mútuos). E, além disso, o “ $\beta$ ” pode ser compreendido como a razão entre o grau de risco do ativo “i” (uma ação determinada) e o grau de risco do mercado (um índice determinado, como o ibovespa, por exemplo).

As hipóteses principais do modelo são as seguintes:

1. Os investidores são avessos ao risco;
2. A carteira de mercado é a mais diversificada possível;
3. Todos que participam do mercado usam o mesmo método de seleção de carteiras (o método de Markowitz);
4. Todos possuem o mesmo conjunto de informações e, portanto, podem chegar aos mesmos parâmetros (simetria de informação);

O índice de Sharp é uma medida de risco. Pode-se, com ele, se precificar o risco de determinado ativo. Abaixo se fará o desenvolvimento de seu significado.

Começando-se por  $r_i = \alpha_i + \beta_i \cdot r_m + \varepsilon_i$  onde  $r_i$  representa o retorno do ativo,  $r_m$  representa o retorno de mercado e  $\varepsilon_i$  representa o termo de erro (que tem a seguinte distribuição  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ) pode-se calcular a esperança e a variância do retorno do ativo.

Sendo que a esperança do retorno do ativo é  $E(r_i) = \alpha_i + \beta_i \cdot E(r_m)$  pode-se calcular a variância da rentabilidade do ativo “i” e a covariância do ativos “i” e “j”. Abaixo se apresenta o desenvolvimento.

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= E\{[r_i - E(r_i)]^2\} = E(\{\beta_i[r_m - E(r_m)] + \varepsilon_i\}^2) \\ \sigma_i^2 &= \beta_i^2 \cdot E\{[r_m - E(r_m)]^2\} + E\{(\varepsilon_i)^2\} + 2 \cdot \beta_i \cdot E\{[r_m - E(r_m)] \cdot \varepsilon_i\}\end{aligned}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= E\{(\beta_i \cdot [r_m - E(r_m)] + \varepsilon_i) \cdot (\beta_j \cdot [r_m - E(r_m)] + \varepsilon_j)\} \\ \sigma_{ij} &= \beta_i \cdot \beta_j \cdot E\{[r_m - E(r_m)]^2\}\end{aligned}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \cdot \beta_j \cdot \sigma_m^2 \quad (2)$$

onde:  $E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = 0$ ,  $E\{[r_m - E(r_m)] \cdot \varepsilon_i\} = 0$  e  $E\{[r_m - E(r_m)] \cdot \varepsilon_j\} = 0$

A partir das fórmulas de variância (Equação 1) e covariância (Equação 2) pode-se montar a matriz de covariâncias ( $\Sigma$ ) o que permite que se avalie o efeito da diversificação sobre uma carteira hipotética e, por fim, mostrar o significado de "β".

Sendo a matriz de covariância dada por:

$$\Sigma = \sigma_m^2 \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^2 & \beta_1 \cdot \beta_2 & \cdots & \beta_1 \cdot \beta_n \\ \beta_2 \cdot \beta_1 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_2 \cdot \beta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_m \cdot \beta_1 & \beta_m \cdot \beta_2 & \cdots & \beta_m^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\varepsilon_m}^2 \end{pmatrix} = \sigma_m^2 \cdot \beta \cdot \beta^T + \Sigma_\varepsilon$$

pode-se obter, respectivamente, a variância e a rentabilidade de uma carteira hipotética  $\frac{1}{n_i}$ , já utilizada anteriormente, para se analisar o efeito da diversificação sobre a carteira. Sendo a variância e a rentabilidade:

$$\sigma_c^2 = \beta_c^2 \cdot \sigma_m^2 + \frac{1}{n^2} \cdot \sum_i^n \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad \text{e} \quad E(r_c) = \alpha_c + \beta_c \cdot E(r_m)$$

onde:  $\beta_c = X^T \cdot \beta = \beta^T \cdot X$  e  $\frac{1}{n^2} \cdot \sum_i^n \sigma_{\varepsilon_i}^2 = X^T \cdot \Sigma_\varepsilon \cdot X$

Se tomar-se o limite de  $\sigma_c^2$  chega-se a Equação 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_c^2 = \beta_c^2 \cdot \sigma_m^2 \quad (3)$$

O significado do parâmetro  $\beta$  é, portanto, o de determinar a contribuição (em termos de risco) que cada novo ativo dá para uma carteira diversificada. A relação entre a carteira de mercado e do ativo específico é dado pelo  $\beta$ . Abaixo se desenvolve a prova.

Sendo que a determinação da carteira de mercado é dada da seguinte forma  $E(r_m) = \alpha_m + \beta_m \cdot E(r_m)$ , segundo Fonseca (2003), não faz sentido se supor uma relação instável entre  $E(r_m)$  e os parâmetros de mercado. Portanto conclui-se que  $\alpha_m = 0$  e  $\beta_m = 1$ . Logo a covariância entre a carteira de mercado e o ativo "i" pode ser desenvolvido a partir da Equação

$$\sigma_{i,m} = E\{(\beta_i \cdot [r_m - E(r_m)] + \varepsilon_i) \cdot (r_m - E(r_m))\} \quad (4)$$

$$\sigma_{i,m} = \beta_i \cdot E\{[r_m - E(r_m)]^2\} + E\{[r_m - E(r_m)] \cdot \varepsilon_i\}$$

$$\sigma_{i,m} = \beta_i \cdot \sigma_m^2 \quad (5)$$

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2} = \frac{\text{cov}(r_i, r_m)}{\text{var}(r_m)} \quad (6)$$

onde:  $E\{[r_m - E(r_m)] \cdot \varepsilon_i\} = 0$  e  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Rearranjando-se a Equação 5, a cima, chega-se a conclusão de que o  $\beta$  representa simplesmente a correlação entre a carteira de mercado e o ativo (Equação 6).