

APLICAÇÕES DO TESTE DE FILLIBEN PARA AVALIAÇÃO DA NORMALIDADE DE AMOSTRAS

Gilberto Gagg¹

¹ Instituto de Geociências, Departamento de Geodésia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS. {gilberto.gagg@ufrgs.br}

RESUMO: Na modelagem estocástica de muitos fenômenos, um dos grandes desafios está em se assumir a hipótese de que os dados amostrais seguem uma distribuição normal. Os chamados testes de aderência são instrumentos da estatística matemática que servem como auxílio na tomada de decisões no que se refere à melhor adequação de um modelo distributivo para uma dada amostra. Há vários testes de aderência apresentados na literatura específica, entre eles o teste de Filliben, que se baseia no coeficiente de correlação linear do gráfico de probabilidades normal. O teste de Filliben é usado na avaliação da normalidade de amostras, com resultados satisfatórios para pequenas amostras. Consiste em calcular o coeficiente de correlação linear de Pearson e compará-lo com valores tabelados segundo o número de pontos das amostras e níveis de confiança distintos. Quanto mais próximo da unidade, mais evidente a hipótese de normalidade ser confirmada no teste de hipótese. Neste trabalho são apresentadas algumas aplicações do teste de Filliben, com ênfase no estudo de algumas amostras testadas para avaliação da ocorrência de subsidência na região da Barragem Bento Munhoz da Rocha-PR, a partir de dados gravimétricos obtidos antes e após o enchimento da barragem. Também são apresentados os princípios teóricos simplificados do método.

Palavras chaves: Normalidade, Filliben.

1. INTRODUÇÃO

Muitas análises estatísticas são feitas pressupondo-se que as populações que originaram as amostras são normalmente distribuídas. Quando se aplica, por exemplo o emparelhamento de dados (caso de populações correlacionadas) e a Análise da Variância, considera-se que as populações são normalmente distribuídas. No entanto, nem sempre essa condição de normalidade é checada previamente, o que permite que testes estatísticos sejam conduzidos a partir de pressupostos falsos. Quanto menor a amostra ($n < 20$), a avaliação da normalidade torna-se mais importante.

Historicamente, entre os primeiros testes estatísticos aplicados para avaliação da normalidade, eram utilizados testes denominados 3º. momento padrão e 4º. momento padrão, o teste estatístico de Filliben (FILLIBEN, 1975) que impõe um esquema linear ponderado nas observações ordenadas, e outros. O teste χ^2 também é empregado, não sendo entretanto um teste geral, havendo restrições para seu uso. Para amostras pequenas, experimentos demonstraram que o teste χ^2 não apresenta resultados satisfatórios ou contundentes na verificação da distribuição amostral a um modelo teórico. Já para amostras com mais de 50 elementos, tem-se observado na prática que o teste de aderência do χ^2 fornece resultados satisfatórios. (CARVALHO & VIEIRA, 2004).

O teste estatístico r combina dois conceitos fundamentalmente simples: um gráfico de probabilidade e o coeficiente de correlação. Pode ser empregado tanto

para amostras pequenas, como para grandes. Filliben, efetuou estudos para checar o poder do teste e constatou que sua comparação é favorável com outros sete testes estatísticos normais (VOGEL, R.M., 1986).

2. APLICAÇÕES DIVERSAS

O teste estatístico de Filliben é uma opção para avaliação da adequação de modelos geoestatísticos e valores empíricos obtidos no processo de amostragem.

Um exemplo da aplicação do teste pode ser encontrado em (FARACO et al, 2008), no qual são estudados modelos de variabilidade espacial para elaboração de mapas temáticos de atributos físicos do solo e produtividade da soja. Recorre a dados amostrados em locais previamente escolhidos, que são modelados em um semivariograma experimental. É feita uma estimativa da semivariância empírica para ajuste a um modelo teórico. Para escolha do modelo teórico de correlação espacial, são empregados métodos de validação que comparam valores teóricos do modelo geoestatístico escolhido e os valores da amostra, sendo o critério de Filliben um deles. São adotadas estimativas por krigagem e testados se os resíduos ortogonais seguem distribuição normal. No trabalho em questão, a hipótese de que os dados seguem uma distribuição normal não foi rejeitada para um nível de significância $\alpha=1\%$.

Para o estudo de previsões hidrológicas de sistemas de alerta de bacias hidrográficas, foram analisados os gráficos de probabilidade normal de séries

de erros horários de previsão de vazões no caso Ponte Nova, Bacia do Rio Doce, aplicando-se o teste de Filliben. O teste conduziu a não aceitação da hipótese de normalidade (QUIEROGA et al, 2005).

Em trabalhos que visam analisar a qualidade posicional em bases cartográficas geradas em CAD (LEAL & DALMOLIN, 2001), recorre-se a testes estatísticos tanto na avaliação dos erros cometidos, como na validação da qualidade posicional e classificação das bases cartográficas. Neste caso específico, foi feito o estudo e análise das discrepâncias obtidas entre as coordenadas de pontos de controle coletadas com receptores geodésicos GPS, e suas homólogas obtidas a partir de uma carta gráfica. Recorreu-se à distribuição t de Student na análise da acurácia, indicada no caso de amostras pequenas. A normalidade da amostra foi checada através do teste de Filliben, que confirmou a mesma.

Aplicações semelhantes propõem metodologias para atualização de áreas de ocupações irregulares em bases cadastrais de pequenos municípios através do uso de imagens de satélite de alta resolução espacial, no caso Quickbird (BEPPLER & ANTUNES, 2008). A avaliação da metodologia é feita comparando-a com métodos de atualização convencionais, no caso o GPS-RTK. Nas etapas da análise, calculou-se as discrepâncias entre as coordenadas (DE, DN) dos dois métodos, e a partir das mesmas o erro planimétrico resultante, posteriormente ordenado em ordem crescente, premissa para aplicação do teste de Filliben. Após o cálculo do coeficiente de correlação e a análise da normalidade, foi gerado o gráfico Q-Q. O conjunto amostral envolveu as coordenadas coletadas de pontos aleatórios a partir do GPS-RTK e os correspondentes vetorizados na imagem (BEPPLER & ANTUNES, 2008).

Com o objetivo de validar modelos geoestatísticos usados na agroclimatologia, o teste de normalidade de Filliben foi aplicado em resíduos ortonormais com dados de precipitação média anual para o estado de São Paulo (CARVALHO & VIEIRA, 2004). Foram utilizadas 49 observações de precipitação, empregando semivariogramas que representam o nível de dependência entre duas variáveis aleatórias regionalizadas locais, sendo pré-requisito para métodos de interpolação de krigagem muito aplicados nestes casos (CARVALHO & VIEIRA, 2004). Os estudos confirmaram que o teste de Filliben demonstrou-se uma ferramenta eficiente no diagnóstico da validade dos modelos geoestatísticos estimados.

Outra aplicação do teste pode ser encontrada na avaliação da qualidade de pontos gerados por fototriangulação apoiada com pontos LIDAR (Light Detection and Ranging), em que são utilizadas as diferenças entre as coordenadas planialtimétricas de pontos obtidos em campo (GPS) e as calculadas no processo de fototriangulação. O projeto visa à extração semi-automática de pontos de apoio para fototriangulação de blocos fotogramétricos. A normalidade das amostras compostas por estas

discrepâncias é investigada aplicando-se o teste de Filliben. É feita a análise dos gráficos Q-Q plots das componentes planimétrica e altimétrica, sendo que em ambos os casos, a normalidade é constatada tanto gráfica quanto analiticamente (SANHUEZA, J.A.F, 2007).

No Projeto de Auscultação Geodésica (Nivelamento Geométrico) e Gravimétrica na UFPR desenvolvido na região da Barragem bento Munhoz da Rocha-PR, antes e após o enchimento do reservatório, tinha-se como propósito detectar variações verticais da crosta terrestre nas imediações da barragem, ao longo de circuitos que totalizaram 126,5km. Na análise qualitativa dos resultados gravimétricos ficaram confirmados os indícios de subsidência constatados anteriormente na etapa de nivelamento geométrico (GAGG, 1997). Na implementação da avaliação gravimétrica, recorreu-se a testes estatísticos para interpretação dos resultados, uma vez que a variação de g foi da mesma ordem de grandeza dos erros observacionais. O teste de Filliben foi aplicado para checagem da normalidade das amostras compostas pelas discrepâncias dos valores de g medidos nos pontos de altimetria conhecida, antes e após o enchimento da barragem, e em seguida foram feitos os testes de hipótese (GAGG, 2007).

Mais detalhes são apresentados na sequência deste trabalho.

3. PRINCÍPIOS TEÓRICOS

No teste estatístico r são analisadas as observações x_j para se averiguar se as mesmas procedem de uma população normal. Baseando-se nas propriedades das distribuições normais, sabe-se que todas as combinações lineares de variáveis normais são normais (JOHNSON & WICHERN). A investigação da normalidade concentrar-se-á no comportamento das observações em uma ou mais dimensões (por ex: distribuições marginais e gráficos de dispersão) (JOHNSON & WEICHERN). A avaliação da normalidade pode ser feita para distribuições marginais univariadas e bivariadas.

O uso de diagramas de ponto e histogramas para $n > 25$ auxiliam a identificar situações onde uma das caudas é mais longa que a outra no caso de uma distribuição univariada. Sabe-se que a curva normal é simétrica e qualquer desvio mais acentuado pode revelar a não normalidade.

Consideremos x_1, x_2, \dots, x_n as n observações que compõe uma amostra. Os passos para se testar a normalidade são os seguintes:

a) ordenar em ordem crescente as observações x_j e definir as probabilidades correspondentes $p(j)$ que, para uma distribuição normal padronizada z é definida pela relação:

$$P(z \leq q_j) = \int_{-\infty}^{q_j} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = p(j) = \left(\frac{j-1/2}{n} \right) \quad (1)$$

onde o valor $1/2$ é dito correção de continuidade (JOHNSON & WICHERN). Sendo assim, teremos as observações ordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) e seus valores de probabilidade correspondentes $(1-(1/2)/n, (2-(1/2))/n, \dots, (n-(1/2))/n$. O valor da posição da discrepância é dado pela letra j .

b) determinar o valor de $z = \phi^{-1}((j-1/2)/n)$, que são as quantidades normais padronizadas.

c) calcular o coeficiente de correlação por:

$$r = \text{correl}(z_j, x_j) = \frac{n \sum xz - (\sum x)(\sum z)}{\{[n \sum x^2 - (\sum x)^2][n \sum z^2 - (\sum z)^2]\}^{1/2}} \quad (2)$$

Na equação acima, temos que:

r – coeficiente de correlação entre x_i e z_i .

x_j – valores que compõem a amostra (discrepâncias entre os valores de g).

z – função de distribuição normal.

d) efetuar o teste: se o coeficiente de correlação calculado for maior que o tabelado para certo nível de significância α , aceita-se a normalidade. Deve-se ter então $r_{\text{calc}} > r_{\text{tab}}$.

Filliben desenvolveu uma tabela de r para amostras de vários tamanhos a vários níveis de significância para se avaliar o coeficiente de correlação r (FILLIBEN, 1975 e STENDIGER et al, 1993).

O valor do coeficiente de correlação deve situar-se entre -1 e $+1$.

e) elaborar um gráfico (Q-Q plot) com os pares de observações $(z_j$ e $x_j)$ e examinar sua distribuição.

4. GRÁFICOS Q-Q

Filliben denomina estes gráficos de Q-Q, os quais são bastante utilizados na avaliação da normalidade. Consiste em elaborar um gráfico de dispersão em que a abcissa é composta pelos valores de z_j e a ordenada pelas observações amostrais em cada variável (JOHNSON & WICHERN).

Se os pares de observações posicionam-se dispostos ao longo de uma linha reta, a normalidade é constatada. A normalidade é comprometida se os pontos desviam-se de uma linha reta, sendo importante checar os pontos extremos do gráfico. Segundo JOHNSON & WICHERN, o padrão dos desvios pode proporcionar indícios acerca da natureza da não normalidade. Descobrimos as razões da não normalidade, torna-se possível o uso de ações corretivas.

A linearidade da reta obtida num gráfico Q-Q é avaliada calculando-se o coeficiente de correlação dos pontos no gráfico.

Os gráficos Q-Q são particularmente informativos no caso de amostras pequenas. Pode-se encontrar trechos de variabilidade na “reta” inferida no gráfico Q-Q, mesmo que as observações sejam conhecidas como oriundas de uma população normal.

5. TESTES REALIZADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Foi efetuada a avaliação da normalidade para amostras compostas de observações gravimétricas feitas na região da Barragem Bento Munhoz da Rocha, antes e após o enchimento do reservatório. Visando-se a interpretação dos dados gravimétricos para checagem da ocorrência de subsidência na região, optou-se pela adoção do emparelhamento de dados, que pressupõe amostras oriundas de populações normais (GAGG, 1997). A normalidade foi checada para as amostras das linhas Faxinal do Céu, Bituruna e Cruz Machado, para alguns irradiamentos, e para amostras compostas por pontos situados conforme uma proximidade pré-definida em relação ao reservatório (2,5km e 10km).

Quando se constatou a normalidade, o emparelhamento de dados pode ser utilizado; caso contrário, foi necessário optar-se por um teste não paramétrico. Foi elaborado um programa para checagem da normalidade (Normal.exe), através do coeficiente de correlação, e também gráficos com os pares de observação (z_j, x_j) , gerados no Excell. Os resultados são apresentados na tabela 1. A letra S (Sim) evidencia a normalidade, e N (Não), caso contrário. O tamanho da amostra é dado por n . Foram empregados os níveis de significância de 1% e 5%.

TABELA 1 – AVALIAÇÃO DE NORMALIDADE

Amostra (Linhas)	Coeficiente de Correlação r			n	Normalidade	
	calc.	tab 1%	tab 5%		$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$
Fax. Céu	0,9428	0,876	0,917	10	S	S
Bituruna	0,9360	0,939	0,959	26	N	N
C. Mach	0,9301	0,919	0,945	18	S	N
10 km	0,9842	0,859	0,905	8	S	S
2,5 km	0,9164	0,925	0,950	20	N	N
Irrad. 14	0,9389	0,847	0,899	7	S	S
Irrad. 19	0,9507	0,822	0,879	5	S	S

Na tabela acima, nota-se que a amostra da linha Bituruna quase teve sua normalidade aceita para $\alpha=1\%$. Já a amostra de pontos com proximidade de 2,5km de fato não confirmou sua normalidade. A amostra Cruz Machado tem sua normalidade confirmada dependendo do nível de significância a ser adotado. Sempre que a normalidade foi aceita, verificou-se $r_{\text{calc}} > r_{\text{tab}}$, ou seja, o valor de r calculado maior que o valor tabelado por Filliben, fato este verificado nas amostras da linha Faxinal do Céu, Proximidade de 10km e irradiamentos 14 e 19.

A seguir são apresentados os gráficos Q-Q de seis das amostras que foram analisadas.

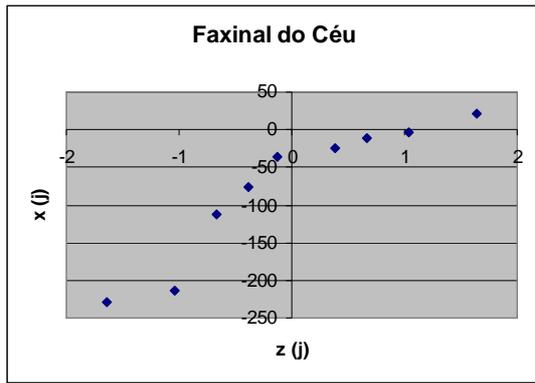


Fig. 1 – Gráfico Linha Faxinal do Céu

O gráfico referente à linha Faxinal do Céu apresenta os pontos mais dispersos. É uma amostra pequena, cujo gráfico sugere a normalidade da amostra, que foi comprovada analiticamente.

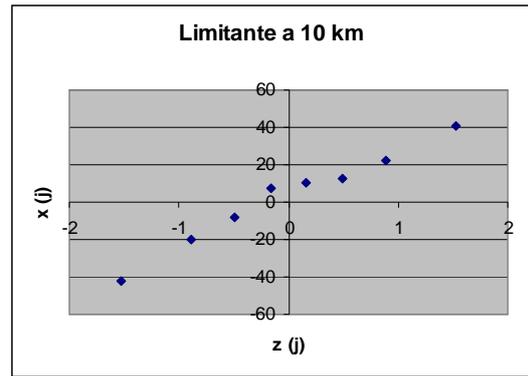


Fig. 4 – Gráfico Limitante a 10Km

Já o gráfico referente à amostra Limitante a 10Km confirma a normalidade obtida pela análise do coeficiente de correlação, uma vez que os pontos estão distribuídos bem próximos à linearidade.

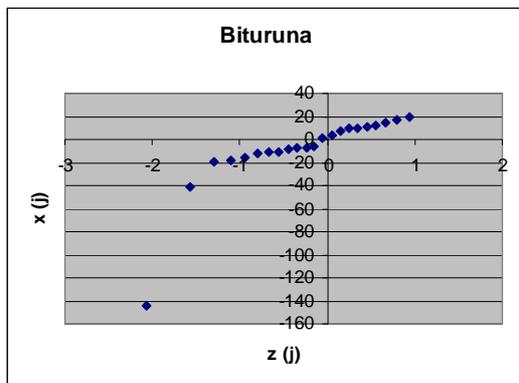


Fig. 2 – Gráfico Linha Bituruna

Para o gráfico referente à linha Bituruna, confirma-se a não normalidade constatada analiticamente. Apresenta um ponto extremo afastado dos demais, podendo ser indicativo de erro pontual.

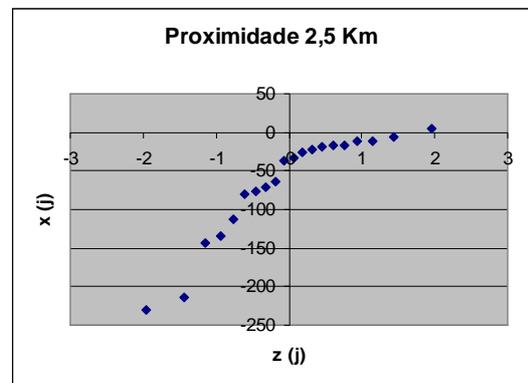


Fig.5 – Gráfico Proximidade de 2,5Km

Para a amostra de pontos com proximidade de 2,5Km, o gráfico apresenta os mesmos não distribuídos próximos de uma reta, descaracterizando a normalidade.

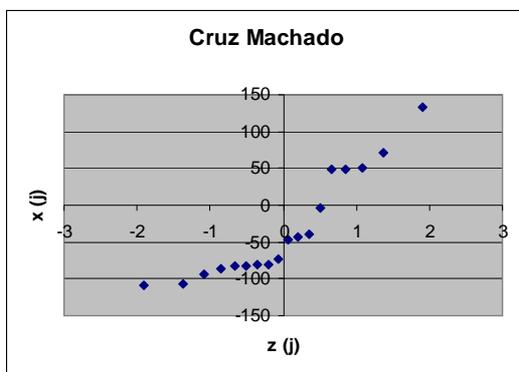


Fig. 3 – Gráfico Linha Cruz Machado

O gráfico para a linha Cruz Machado é de interpretação complexa, fato confirmado analiticamente, uma vez que a normalidade só é verificada dependendo do nível de significância adotado.

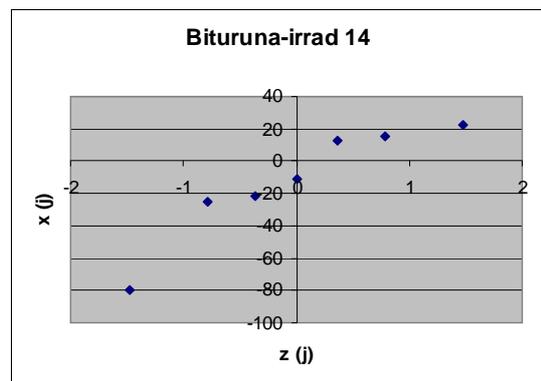


Fig. 6 – Gráfico Irrad.14 -Linha Bituruna

No caso do gráfico do irradiação 14, há certa dificuldade em se confirmar a normalidade pela análise gráfica, embora a mesma tenha sido confirmada analiticamente. Na visualização e interpretação da linha reta do gráfico “Q-Q plot”, deve-se enfatizar os valores

centrais do gráfico, e não os extremos (DRUMOND, 1996).

6. CONCLUSÃO

A conceituação do método de Filliben é simples, e os gráficos são um bom demonstrativo da situação da amostra, permitindo uma interpretação visual da disposição dos dados. Tem a vantagem de não apresentar limitações quanto ao número de pontos da amostra, sendo um teste adequado e confiável no caso de amostras pequenas. Sua aplicação é recomendada para averiguação da normalidade de amostras de dados de diversas áreas e fenômenos, antes do emprego de distribuições estatísticas que tenham a normalidade da amostra como prerrogativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEPPLER, M. & ANTUNES, A.F.B., Atualização de Bases cadastrais, em Áreas de Ocupações irregulares a partir de Imagens de alta resolução espacial, **Geodésia online**, 1/2008, Disponível em < <http://geodesia.ufsc.br/Geodesia-online/arquivo/2008/01.1/MBAA-2008.htm>> Acesso: 15 setembro 2008
- COSTA NETO, P.L.O. **Estatística**. 1977. 264p.
- CARVALHO, J. R. P. & VIEIRA, S.R., **Validação de Modelos Geostatísticos usando Teste de Filliben: Aplicação em Agroclimatologia**, Journal of Hydrology, v.158,p.319-332,2004 Disponível em <<http://www.cnptia.embrapa.br/modules/tinycontent3/content/2004/comtec60.pdf>> Acesso: 25 agosto 2008.
- DALMOLIN, Q. & LEAL. E. M. Análise da Qualidade Posicional em Bases Cartográficas Geradas em CAD, **Boletim de Ciências Geodésicas**, v.7, n.1, p. 21-40, 2001.
- DRUMOND, F.B.; WERKWMA, M.C.C.; AGUIAR, S. **Análise de Variância: Comparação de Várias Situações**, FCO/EEUFMG, Belo Horizonte, 1996. 276p.
- FILLIBEN, J.J. The probability Plot Correlation Coefficient Test for Normality , **Technometrics**, v.17, n.1, p. 111-117, 1975.
- GAGG, G. Auscultação Gravimétrica na Região da Barragem Bento Munhoz da Rocha, **Dissertação de Mestrado**, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UFPR, Curitiba, 1997, 89p.
- GAGG, G. Aplicação da Gravimetria na Detecção de Subsidência na Região de Barragens. In: II Seminário de Pesquisas em Geodésia na UFGRS, Porto Alegre, **Série em Geomática**, v.1, p. 32-36, 2007.
- JOHNSON, R.A & WICHERN, D.W. **Assessing the Assumption of Normality**, Applied Multivariate Statistical Analysis pp. 146-151.
- QUIEROGA, Y. G. & OLIVEIRA E SILVA, F.E. **Utilização da assimilação de erros nas previsões hidrológicas do sistema de alerta da bacia do Rio Doce - o caso de Ponte Nova**, Disponível em <<http://www.cprm.gov.br/rehi/simposio/bh/Queiroga%20&%20Silva.pdf>>. Acesso: 26 de agosto 2008.
- SANHUEZA, J.A.F., Extração Semi-automática de feições planas e cálculo de entidades pontuais a partir de dados LIDAR para o apoio fotogramétrico, **Dissertação de Mestrado**, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UFPR, Curitiba, 2007, 84p.
- STENDIGER, J.R., VOGEL, R.M. & FOUFOULA-GEORGIOV, E. Frequency Analysis of Extreme Events, in: **Handbook of Hydrology**. Ed. By Maidment, DR, ed. McGraw-Hill,, pp.18.1-18.66, 1993. Disponível em. <<http://ase.tufts.edu/cee/faculty/vogel/frequencyAnalysiss.pdf>> Acesso: 02 setembro 2008.
- VOGEL, R. M., The Probability Plot Correlation Coefficient Test for the Normal, Lognormal and Gumbel Distributional Hypotheses, **Water Resources Research**, v. 22, n.4, p. 587-590, 1986.