UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E RELAÇÕES INTERNACIONAIS

LOUISE SALAMI MACHADO DA SILVA

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS: UMA APLICAÇÃO DA ABORDAGEM DE BLACK-LITTERMAN PARA O MERCADO BRASILEIRO

Porto Alegre
2017

LOUISE SALAMI MACHADO DA SILVA

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS: UMA APLICAÇÃO DA ABORDAGEM DE BLACK-LITTERMAN PARA O MERCADO BRASILEIRO

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. João Frois Caldeira

Porto Alegre

2017

CIP - Catalogação na Publicação

Silva, Louise Salami Machado da
Modelos de otimização de carteiras: uma aplicação da abordagem de Black-Litterman para o mercado brasileiro / Louise Salami Machado da Silva. -- 2017.
47 f.
Orientador: João Frois Caldeira.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Curso de Ciências Econômicas, Porto Alegre, BR-RS, 2017.

1. Alocação de ativos. 2. Black-Litterman. 3. Média-Variância. I. Caldeira, João Frois, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

LOUISE SALAMI MACHADO DA SILVA

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS: UMA APLICAÇÃO DA ABORDAGEM DE BLACK-LITTERMAN PARA O MERCADO BRASILEIRO

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. João Frois Caldeira

Aprovada em: Porto Alegre, _____ de ___________ de 2017.

BANCA EXAMINADORA:

____

Prof. Dr. João Frois Caldeira (orientador)
UFRGS

____

Prof. Dr. Fernando Augusto Boeira Sabino da Silva
UFRGS

____

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Griebeler
UFRGS

RESUMO

O presente trabalho apresenta alguns modelos de otimização de carteiras desenvolvidos a partir do artigo de Markowitz (1952). Seu trabalho revolucionou a forma como o problema de alocação de ativos era abordado. Nele, o autor explorou a relação entre risco e retorno através do conhecido modelo de Média-Variância e abriu caminho para outros autores darem suas contribuições acerca do problema. Atualmente, a gestão de portfólios é baseada nos modelos desenvolvidos. Para tanto, neste trabalho foi realizada uma revisão da bibliografia que trata sobre o assunto e foram aplicados os modelos para o mercado brasileiro. O desempenho das carteiras obtidas por meio da utilização dos modelos de Média-Variância, Black-Litterman e de Mínima-Variância foi analisado considerando índice de Sharpe, da volatilidade e do *turnover* produzidos pelas carteiras. Os resultados mostraram que a utilização do vetor de retornos esperados do modelo de Black-Litterman gera carteiras mais estáveis. A verificação do desempenho dos modelos através da imposição de restrições às normas de alocação mostrou, por fim, que há melhora nos resultados apenas até determinado nível de alavancagem.

Palavras-chave: Alocação de ativos. Black-Litterman. Média-Variância.

ABSTRACT

This work features some of the portfolio optimization models developed from Markowitz (1952) article. His work made a revolution to the way that the matter regarding the asset allocation issue was approached. In the work, the author explores the relationship between risk and return through, the known, Mean-Variance model and opens the path to other authors to give their contribution about the issue. Nowadays, the portfolio management is based on the models developed. Therefore, in this work was revised the bibliography about the subject and the models were applied to the Brazilian market. The portfolio's performance obtained through the utilization of the Mean-Variance, Black-Litterman and Minimum-Variance models are analyzed considering the Sharpe Ratio, the volatility and the turnover. The results showed that the utilization of the expected returns vector of Black-Litterman model generates more stable portfolios. Verifying the performance of the models through the imposition of restrictions on the allocation's rules showed, at last, that there is improvement on the results only until a certain level of leverage.

Key-words: Asset allocation. Black-Litterman. Mean-Variance.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Fronteira de variância mínima 16

Figura 2 - Diagrama da relação risco e retorno esperado 17

Figura 3 - Gráficos dos retornos mensais das carteiras de Mínima-Variância, Média-Variância, Média-Variância com restrição, Média-Variância com Black-Litterman e Média-Variância com Black-Litterman e restrição contra a carteira *equally weighted* (EW) 35

Figura 4 - Gráfico dos retornos acumulados das carteiras *equally weighted*, Mínima-Variância, Média-Variância, Média-Variância com restrição, Média-Variância com Black-Litterman e Média-Variância com Black-Litterman e restrição 38

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Análise descritiva dos dados mensais em (%) 31

Tabela 2 - Volatilidade mensal em (%) para as diferentes estratégias de otimização.... 33

Tabela 3 - Índice de Sharpe para as diferentes estratégias de otimização 36

Tabela 4 - *Turnover* em (%) para as diferentes estratégias de otimização 37

Tabela 5 - Volatilidade mensal em (%) para os diferentes níveis de alavancagem das carteiras de Mínima-Variância, Média-Variância e Média-Variância com Black-Litterman 40

Tabela 6 - Índice de Sharpe para os diferentes níveis de alavancagem das carteiras de Mínima-Variância, Média-Variância e Média-Variância com Black Litterman............ 41

Tabela 7 - *Turnover* em (%) para os diferentes níveis de alavancagem das carteiras de Mínima-Variância, Média-Variância e Média-Variância com Black-Litterman 42

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BACEN	Banco Central do Brasil
BM&F	Bolsa de Mercadorias e Futuros
CAPM	Modelo de Precificação se Ativos de Capital
EW	*Equally Weighted*
IBX	Índice Brasil
IMA	Índice de Mercado ANBIMA
IRF	Índice de Renda Fixa
LAC	Linha de Alocação de Capital
LFT	Letra Financeira do Tesouro
PO	Grupo de Pesquisa Operacional

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9
2 REFERENCIAL TEÓRICO 11
2.1 O MERCADO FINANCEIRO 11
2.2 RISCO 12
2.2.1 Risco de mercado 13
2.3 MODELO DE MÉDIA-VARIÂNCIA 14
2.3.1 Fronteira eficiente 15
2.3.2 Críticas ao modelo de Markowitz 18
2.3.3 Modelo de Mínima-Variância 19
2.4 MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS DE CAPITAL (CAPM) 19
2.5 BLACK- LITTERMAN 23
3 APLICAÇÃO PARA O MERCADO BRASILEIRO 28
3.1 APRESENTAÇÃO DA BASE DE DADOS 28
3.2 CAPITALIZAÇÃO DE MERCADO 29
3.3 CARTEIRA EQUALLY WEIGHTED 30
3.4 FERRAMENTAS E PROCEDIMENTOS 30
3.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS 31
3.5.1 Volatilidade 33
3.5.2 Índice de Sharpe 36
3.5.3 Turnover **......... 36**
3.5.4 Evolução 37
3.6 RESTRIÇÕES ÀS NORMAS DE ALOCAÇÃO 38
3.6.1 Volatilidade 40
3.6.2 Índice de Sharpe 40
3.6.3 Turnover **......... 41**
4 CONCLUSÃO 43
REFERÊNCIAS 45

1 INTRODUÇÃO

A maximização do patrimônio é uma questão recorrente tanto no ambiente acadêmico, quanto no ambiente de negócios. Ocorre que esta tarefa se configurava muito mais complicada antes do advento de ferramentas que auxiliam no processo de tomada de decisões quanto à alocação de ativos. Somente em 1952, com a publicação da obra *Portfolio Selection*, de Harry Markowitz, se deu o primeiro passo em direção à resolução do problema da composição de portfólios. Neste trabalho, o autor fundamentou as bases do que se convencionou chamar de Teoria de Carteiras[1], revelando a importância da relação que se estabelece entre os retornos dos ativos no portfólio nas decisões de alocação de ativos.

A partir de então, diversos autores contribuíram para o aperfeiçoamento e robustez desses modelos. Cabe destacar a contribuição William Sharpe, John Lintner e Jan Mossin, que desenvolveram, de forma independente, o Modelo de Precificação de Ativos. Este modelo, conhecido por *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), foi explorado e aprofundado por diversos autores. Merton (1973) desenvolveu a partir do CAPM, um modelo intertemporal de precificação de ativos. Já Fama e French (1996) identificaram padrões anômalos que não seriam explicados pelo CAPM e introduziram o Modelo Trifatorial na tentativa de explicar tais padrões. Alguns anos mais tarde, em 1990, Fischer Black e Robert Litterman, apresentaram em seu artigo *Asset Allocation: Combining Investors Views with Market Equilibrium* um modelo mais aprofundado de otimização de portfólios. O modelo utiliza como ponto de partida o CAPM mostrando que o desenvolvimento dos modelos ao longo do tempo ocorreu de forma interligada.

O estudo dos modelos de alocação de ativos ganhou relevância com a ampla difusão da utilização dos mesmos no mercado financeiro, tendo em vista o impacto direto no modo como gestores e indivíduos passaram a tomar decisões de alocação de ativos. Nesse sentido, os modelos de otimização de portfólio e também de precificação de ativos provocaram uma verdadeira revolução, não só no âmbito teórico, como também no prático, podendo-se dizer que atualmente são indispensáveis como ferramental na tomada de decisões de investimentos.

Tanto no caso de investidores institucionais, que se deparam diariamente com a necessidade de explicar e demonstrar a performance de suas carteiras, como no caso do investidor individual, que, em geral, apenas deseja proteger e adicionar valor ao seu patrimônio, a utilização desses modelos tornou-se imprescindível. Por meio deles, é factível a realização de

[1] Neste trabalho, os termos portfólio e carteira são entendidos como sinônimos.

estudos de otimização que resultam em portfólios mais diversificados, possibilitando a obtenção de retornos superiores combinados a uma menor exposição ao risco.

O presente trabalho tem como objetivo aplicar o modelo de Black-Litterman e alguns dos modelos de otimização de carteiras de investimentos desenvolvidos a partir da Teoria de Carteiras para o mercado brasileiro. Para tanto, primeiramente, será realizada uma revisão da bibliografia que trata sobre os modelos e, na sequência, serão aplicados para o mercado brasileiro.

O trabalho está organizado em quatro capítulos, incluindo esta introdução. O segundo apresentará o referencial teórico, iniciando por uma breve história sobre o desenvolvimento do mercado financeiro, com ênfase no surgimento dos modelos teóricos de otimização de carteiras. Segue-se, então, para uma apresentação sobre risco, essencial para o entendimento da necessidade da criação de portfólios de investimento. Após, são apresentados de forma mais detalhada o modelo de Markowitz, o Modelo de Precificação de Ativos de Capital e o modelo de Black-Litterman. Na sequência, é realizada a aplicação dos modelos ao mercado brasileiro. Por fim, são apresentados os resultados da aplicação e as considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Esta seção tem como objetivo apresentar o referencial teórico acerca dos modelos de otimização de carteiras. Inicialmente, será apresentada uma breve história sobre o contexto do surgimento da Teorias de Carteiras. Após, será realizada uma explanação sobre risco, com ênfase no risco de mercado. Segue-se então para a exposição dos modelos de Média-Variância, Mínima-Variância, CAPM e Black-Litterman.

2.1 O MERCADO FINANCEIRO

De acordo com Bodie et al. (2009), o mercado financeiro tem a preponderante função de alocador de recursos de capital nas economias de mercado. Até a metade do século passado, este importante papel era desenvolvido sem a relevante contribuição dos modelos de construção de portfólios, bem como dos modelos de precificação de ativos financeiros. Neste contexto, o risco era avaliado somente no nível dos ativos e, conforme observa Bernstein (2008), visto como decorrente de mero incidente.

Foi somente a partir da publicação do trabalho de Markowitz (1952) que se abriu espaço para uma nova visão sobre a relação risco *versus* retorno no âmbito do portfólio, tendo em vista a relevância atribuída por ele ao papel desempenhado pelo risco nas decisões de composição de portfólio.

Em virtude disso, e devido à relevância do tema para os propósitos desta monografia, passa-se, agora, a apresentação do contexto e discussão das ideias que serviram como base para a teoria de portfólios desenvolvida por Markowitz (1952).

O pano de fundo do surgimento da Teoria de Carteiras foi o pós-Segunda Grande Guerra. Segundo Fox (2008), durante o conflito militar, a Universidade de Columbia possuía um Grupo de Pesquisas Estatísticas que tinha como vice-diretor o economista Milton Friedman. Com o tempo, este grupo passou a ser chamado de "Grupo de Pesquisa Operacional" (PO), pelo seu foco na utilização de teorias matemáticas e estatísticas para tomar decisões militares.

Apesar de pouco conhecido, segundo o autor, o grupo desempenhou papel fundamental na vitória dos aliados na Segunda Grande Guerra. Com o término da guerra, este grupo seguiu existindo, porém, direcionando pesquisas para diversas outras áreas, inclusive para as áreas de finanças e mercados. De acordo com Fox (2008), um exemplo da aplicação no campo das finanças foi a publicação do já mencionado artigo *Portfolio Selection* de Markowitz. Ao promover a aproximação entre os cálculos de guerra e a ideia de risco e retorno, o artigo propiciou, segundo o autor, “o casamento histórico da PO com os conselhos de investimentos no *Journal of Finance”*, periódico especializado nessa área, em que o artigo foi originalmente publicado.

A Teoria de Portfólios surgiu no contexto pós-Segunda Grande Guerra, a partir da aplicação dos desenvolvimentos científicos que originalmente eram aplicados a estratégias bélicas, às decisões econômicas. Desde então, passou-se a considerar a análise de risco no contexto de um portfólio como um fator de grande importância para as decisões de alocação de ativos.

2.2 RISCO

Segundo Damodaran (2009), no campo de finanças o risco pode ser definido em termos de variabilidade dos retornos de um investimento em comparação com o retorno que se espera do investimento. Neste sentido, o risco pode ser interpretado de forma dual, à medida que pode representar tanto um perigo como uma oportunidade.

Ao analisar a relação da humanidade com o risco ao longo da história, Bernstein (1997) aponta que a combinação entre a capacidade de administrar os riscos e a vontade de corrê-los foi o grande fator impulsionador dos sistemas econômicos ao longo do tempo. De acordo com o autor, a concepção de risco tem antigas raízes, que remontam ao surgimento do sistema de numeração indo-arábico. Entretanto, o seu estudo efetivo começou apenas no Renascimento. O autor afirma ainda que, desde a descoberta da distribuição normal e do conceito de desvio-padrão por Abraham Moivre até a criação do Teorema de Bayes, em sua maioria, as ferramentas ainda hoje utilizadas na administração do risco resultaram da revolução das ideias ocorridas no período compreendido entre os anos de 1654 a 1760.

Damodaran (2008) relata que, no centro da discussão sobre risco está a contribuição do matemático suíço, Daniel Bernoulli (1798), que, ao tentar resolver o paradoxo[2] proposto por seu tio, Nicholas Bernoulli, formulou a Teoria da Utilidade Esperada, que serviu de base para a Teoria Marginalista. Segundo Bernoulli (1798), algumas pessoas são mais afeitas ao risco, enquanto outras demonstram maior aversão. Nesse sentido, a atitude dos indivíduos em relação ao risco tem a ver com suas funções de utilidade esperada. Para Bernoulli (1798), por possuírem preferências diversas, as pessoas estão dispostas a pagar valores diferentes para entrar em uma

[2] Denominado de Paradoxo de São Petesburgo.

mesma aposta, sendo que, a diferença entre o que estão dispostas a pagar depende da sua função de aversão ao risco.

Conforme Damodaran (2009), a preocupação com o risco se justifica pela aversão das pessoas ao mesmo. Em vista disso, as decisões que os indivíduos tomam em relação a investimentos são reflexo do sentimento dos mesmos em relação ao risco. Todavia, conforme revelam os estudos de Friedman e Savage (1948), a aversão ao risco pode variar de acordo com o segmento de riqueza que o indivíduo se encontre.

Depreende-se, portanto, que o investidor mais avesso ao risco penalizará mais o investimento de risco, o que fará com que exija um prêmio de risco maior. Conforme Damodaran (2009), o prêmio de risco é a diferença entre o valor esperado e o equivalente certo. Este último conceito se refere ao menor valor que faz com que um indivíduo se torne indiferente entre uma renda sujeita a um resultado incerto (aleatório) e a uma renda certa, oferecendo informações sobre a aversão ao risco do investidor em questão.

2.2.1 Risco de mercado

O risco pode ser classificado de duas formas, de acordo com a sua natureza. Pode advir tanto das condições de mercado, como inflação, câmbio e taxa de juros, quanto de fatores específicos a determinadas empresas ou a determinado grupo de empresas. O risco de mercado, de acordo com Bodie et al. (2009), é o risco que não é diversificável, ou seja, não é eliminado por meio da diversificação. Este risco é proveniente das condições de mercado e afeta de modo geral todos os ativos em maior ou menor proporção, sendo denominado também de risco sistemático. O prêmio pelo risco é pago em função da exposição do investidor a este tipo de risco.

Já o risco não sistemático ou específico à empresa, segundo Bernstein (2008), tem origem no fato de os ativos nem sempre se alinharem com o retorno de mercado. Este risco pode ser eliminado por meio da diversificação, pois é possível investir em ativos que são afetados de formas diversas por determinados eventos. Assim, quando da ocorrência de algum fato específico a uma empresa, os outros ativos da carteira conseguirão contribuir de forma a mitigar o impacto que poderia causar no retorno da carteira.

2.3 MODELO DE MÉDIA-VARIÂNCIA

O modelo de Média-Variância, segundo Fabozzi et al. (2007), é o que gerou maior influência na atividade gestão de portfólios. Este modelo serve de base para a construção e a seleção de portfólios utilizando as estimativas de retorno esperado e de risco dos investidores.

A construção de portfólios, segundo Bodie et al. (2009) é realizada em três etapas:

a. Identificação das combinações de risco e retorno possíveis com base em um grupo de ativos de risco;
b. Construção de uma carteira ótima de ativos de risco;
c. Montagem de um portfólio que contém a carteira ótima de ativos com risco e o ativo livre de risco.

A diversificação possibilita a obtenção de retornos mais elevados associados a menores níveis de risco, uma vez que o retorno não será dependente do desempenho de apenas um ativo. Desta forma, quanto maior o número de ativos com baixa correlação de retornos, menor será a variância do portfólio. Esta afirmação segue o princípio, de acordo com Bernstein (2008), de que mesmo em uma carteira composta por ativos de alto risco, se os mesmos possuírem baixos níveis de correlação, o risco desta carteira será inferior à soma ponderada dos riscos dos ativos que a carteira possui.

O sentimento em relação ao risco dos investidores, então, será determinante para a escolha da proporção do ativo livre de risco dentro do portfólio. Investidores mais avessos ao risco darão maior peso para este ativo. O contrário se verifica no caso de investidores menos avessos ao risco.

Conforme já mencionado, Markowitz (1952) fundamentou as bases para a análise de média-variância em seu artigo. De acordo Fabozzi et al. (2007), neste artigo, Markowitz parte da suposição de que os investidores deveriam tomar suas decisões baseado no *trade-off* entre risco e retorno esperado, sendo o risco medido com base na variância dos retornos do portfólio.

Considerando-se um portfólio hipotético, em linha com o exemplo utilizado em Fabozzi et al. (2007), o retorno esperado de uma carteira composta por dois ativos é representado pela seguinte equação:

$$\mu_p = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$$

Onde, w é o peso dos ativos e μ é o retorno esperado dos ativos. Depreende-se, portanto, que os retornos esperados dos ativos que compõem o portfólio são aditivos.

Diferentemente do retorno esperado, o risco pode ser não aditivo, à medida que depende da forma com que os retornos se correlacionam no portfólio, conforme a expressão abaixo:

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_{11} + w_2^2\sigma_{22} + 2w_1w_2\sigma_{12}$$

Sendo σ_p^2 a variância do portfólio. A partir da equação anterior, podemos inferir que a diversificação entre ativos pouco correlacionados tende a reduzir o risco do portfólio, sendo o risco aditivo somente no caso extremo em que a correlação entre os retornos dos ativos seja igual a 1.

Markowitz (1952) afirma que para qualquer nível de retorno esperado, um investidor que fosse considerado racional escolheria um portfólio que possuísse a menor variância dentre todas as possibilidades de escolha. O investidor, de acordo com Fabozzi et al. (2007), se depara com um problema de minimização com restrição:

$$\min_{w} w'\Sigma w$$

Onde, Σ é a matriz de covariâncias dos retornos.

Tendo como restrição um retorno médio alvo:

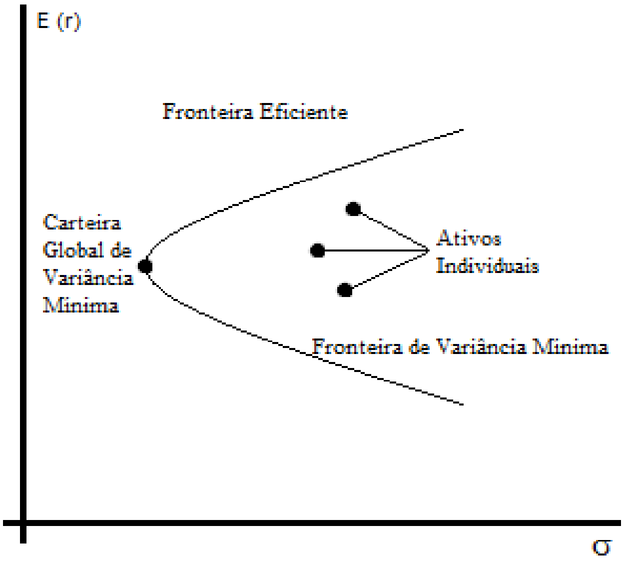
$$\mu_0 = w'\mu$$

O conjunto de todos os portfólios que podem ser construídos é chamado de conjunto factível, já o conjunto de todos os portfólios eficientes para diferentes níveis de retorno esperado é, a conhecida, fronteira eficiente.

2.3.1 Fronteira eficiente

Segundo Bodie et al. (2009), a fronteira eficiente é construída a partir da determinação do risco e do retorno que o investidor pode estar exposto. Esta combinação é apresentada na Figura 1. Os ativos individuais encontram-se na parte interior da fronteira de variância mínima. É possível notar que a combinação dos ativos é mais atrativa em termos da relação risco e retorno, do que em relação aos ativos individuais. A fronteira eficiente é constituída apenas da parte superior da fronteira de variância mínima, acima da carteira de mínima variância global, pois conforme o autor, qualquer carteira situada na parte inferior da fronteira de variância mínima possui carteira com equivalente risco e maior retorno posicionada acima dela. Logo, a parte inferior da fronteira seria ineficiente.

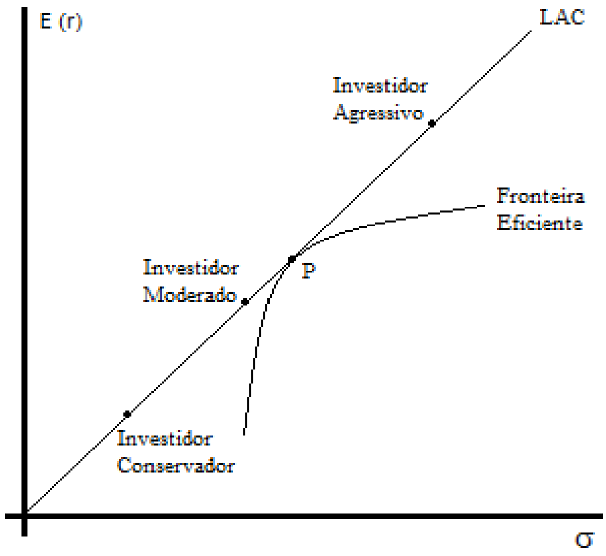
Figura 1 - Fronteira de variância mínima



Fonte: Elaboração própria (2017).

De acordo com Campbell e Viceira (2002), estando os investidores interessados apenas na média e na variância de suas carteiras, todos os investidores acabariam por escolher um mesmo portfólio. Este portfólio encontra-se no ponto (P) em que a fronteira eficiente tangencia a reta chamada de Linha de Alocação de Capital (LAC) como mostra a figura abaixo:

Figura 2 - Diagrama da relação risco e retorno esperado



Fonte: Elaboração própria (2017).

Esta linha representa o conjunto de oportunidades de investimento constituído a partir de possíveis combinações de pares de retorno esperado e desvio-padrão resultante das diferentes combinações do portfólio com risco e do ativo livre de risco. Isto implica que o retorno esperado de um portfólio será igual a uma taxa livre de risco acrescido de um prêmio de risco. Assim, o portfólio que se encontra no ponto em que a Linha de Alocação de Capital tangencia a fronteira eficiente dos ativos com risco representa, de acordo com Campbell e Viceira (2002), a melhor combinação de ativos que compõem o portfólio com risco.

A postura dos investidores em relação ao risco serviria para alterar seu posicionamento. Investidores conservadores têm preferência a portfólios com menor nível de risco, enquanto investidores mais agressivos terão uma exposição maior ao risco. Esta é a ideia base da propriedade da separação, formulada por Tobin (1958) que sustenta ser possível dividir a escolha da carteira em duas etapas.

Segundo Bodie et al. (2009), em uma primeira parte meramente técnica, o administrador de carteiras identificaria a carteira ótima de ativos de risco. Na etapa seguinte, passaria a incorporar o grau de aversão a risco do investidor à análise, de modo que, investidores mais conservadores teriam portfólios com menores níveis de risco e retorno, à medida em que combinariam no seu portfólio consolidado a exposição no portfólio com risco e a manutenção de posição no ativo livre de risco. A propriedade da separação garante, de acordo com Bodie et. al (2009), uma administração de carteiras mais eficiente e menos onerosa.

2.3.2 Críticas ao modelo de Markowitz

Em seu livro, Bernstein (2008) afirma que, nos dias atuais, o próprio Harry Markowitz admite que o modelo desenvolvido por ele parte de pressupostos que poderiam ser considerados irrealistas. Uma vez que, no mundo real, os participantes do mercado não contrairiam tantos empréstimos quanto quisessem a taxas livre de risco, tampouco a revisão contínua dos portfólios dos investidores poderia ser realizada. Bernstein (2008), afirma que, com a rapidez com que o mundo se modifica, o equilíbrio proposto pelo modelo de Média-Variância não ocorreria ou se ocorresse, duraria pouquíssimo tempo.

Silva et al. (2009) apontam que o modelo de Média-Variância é criticado por ser muito sensível aos *inputs*, de modo que pequenas mudanças nos retornos esperados aplicados no modelo para otimização, gerariam grandes mudanças nos pesos de alguns ativos. Esta opinião é compartilhada por Michaud (1989), que acrescenta que alguns dos resultados do modelo poderiam não ser praticáveis. Silva et al. (2009) afirmam ainda que a imposição de restrições para evitar soluções extremas, no entanto, poderia desqualificar o processo de otimização.

O modelo poderia maximizar erros de estimação, de acordo com Michaud (2009), pela possível atribuição de pesos significativamente altos para ativos com grandes retornos esperados, correlações negativas e baixas variâncias, mesmo que estes ativos possuam os maiores erros de estimação. Além disso, conforme o autor, o modelo ignora fatores importantes na tomada de decisão de investimentos. A liquidez e a capitalização de mercado dos ativos em relação ao valor total dos mesmos no portfólio, por exemplo, são omitidas. Em especial, a falta da capitalização de mercado no modelo, segundo o autor, faz com que pequenas variações no portfólio gerem grandes oscilações patrimoniais tanto em grandes organizações quanto em pequenas empresas.

Conforme Michaud (2009), a utilização do modelo de Média-Variância pode gerar resultados indesejáveis se, primeiramente, não for realizada uma cuidadosa definição do problema. Um ajuste das entradas de dados no modelo e a inserção de restrições poderiam atuar de forma a reduzir a incidência de soluções extremas. Por último, seria necessário que se fizesse um julgamento sobre o que seria razoável em relação aos investimentos auxiliando, assim, a serem evitadas tais soluções extremas e dotadas de pouca intuição econômica.

2.3.3 Modelo de Mínima-Variância

Este modelo, de acordo com DeMiguel et al. (2007), gera como resultado o portfólio de ativos de risco que minimiza a variância dos retornos, constituindo um caso específico do modelo de Média-Variância. Pode ser obtido, segundo o autor, por meio da equação:

$$\min_{w_t} w_t^T \, \Sigma_t w_t$$

Sujeita à restrição:

$$1_N^T w_t = 1$$

O cálculo não leva em consideração a estimativa dos retornos esperados, apenas a estimativa da matriz de covariâncias dos retornos dos ativos. A restrição impõe que a soma dos pesos do portfólio seja igual a um.

De acordo com Caldeira et al. (2013), a estimação precisa dos retornos esperados dos ativos e da matriz de covariância dos retornos é a maior dificuldade da aplicação na prática do modelo de Média-Variância. Esta afirmação está em conformidade com a crítica ao modelo de Michaud (2009).

A eliminação dos erros de estimação dos retornos esperados apresenta-se como uma vantagem do modelo de Mínima-Variância. Caldeira et al. (2013) afirmam, por fim, que em virtude disso, o foco das pesquisas acadêmicas tem estado direcionado para carteiras de Mínima-Variância, como pode ser constatado no artigo de DeMiguel et al. (2007).

2.4 MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS DE CAPITAL (CAPM)

De acordo com Bodie et al. (2009), o Modelo de Precificação de Ativos de Capital (CAPM), oferece um olhar sobre a relação entre risco e retorno de um ativo. Esta relação é importante para poder avaliar se um ativo possui nível de retorno esperado que seja compatível com o seu risco.

Este modelo foi sucessor ao desenvolvido por Markowitz em 1952. Formulado de forma independente por William Sharpe, John Lintner e Jan Mossin, o modelo realiza as seguintes hipóteses simplificadoras, conforme Bodie et al. (2009), de modo a homogeneizar os investidores:

a) Nenhum investidor sozinho conseguiria influenciar o mercado, seguindo o princípio da concorrência perfeita;
b) Investidores possuem horizontes de investimento de igual duração;
c) Investimentos são limitados a ativos publicamente negociáveis;
d) Todos investidores podem tomar emprestado qualquer montante a uma taxa de juros livre de risco;
e) Não há pagamento de tributos nem custos de transação;
f) A seleção da carteira é feita utilizando Markowitz;
g) Investidores analisam títulos da mesma forma.

As hipóteses apresentadas ignoram as diferenças entre os investidores do mundo real, porém são importantes no modelo para dar uma intuição sobre a formação dos preços dos ativos no mercado de ativos financeiros.

Segundo o autor, decorrem algumas implicações importantes do modelo. Em primeiro lugar, todos os investidores decidirão manter uma carteira de ativos de risco nas mesmas proporções da carteira de mercado, sendo que esta deveria conter todos os ativos negociáveis existentes na economia. Em segundo lugar, a carteira de mercado encontra-se na fronteira eficiente que, como vimos, é composta por todos os portfólios eficientes, que maximizam o retorno dado suas variâncias, além disso, esta carteira tangencia a Linha de Alocação de Capital. Em terceiro lugar, o prêmio de risco da carteira de mercado é proporcional ao grau de aversão ao risco do investidor.

Cada título que compõe a carteira oferece certa contribuição para o risco da carteira. A contribuição que os ativos oferecem pode ser verificada através da análise da covariância de cada ativo com a própria carteira. Se determinado título apresentar uma covariância positiva com a carteira, podemos então dizer que tal ativo contribui positivamente para o risco da carteira. Uma covariância negativa, por sua vez, indicaria, segundo Bodie et al. (2009), que o ativo produz retornos que se movimentam de forma inversa ao movimento do mercado. Abaixo, tem-se a expressão mais conhecida do CAPM:

$$E(r_x) = r_f + \beta_x[E(r_m) - r_f]$$

Onde,

$E(r_x)$ é o retorno esperado de um ativo *x*;

r_f é o retorno do ativo livre de risco;

β_x é o beta do ativo x;

$E(r_m) - r_f$ é prêmio pelo risco de mercado.

Assim, podemos inferir que o retorno esperado de um ativo *x* depende do retorno do ativo livre de risco e da contribuição de *x* para a variância da carteira de mercado multiplicado pelo prêmio pelo risco desta carteira.

A contribuição de *x* para a variância da carteira de mercado é representada pelo coeficiente β_x que, por sua vez, pode ser calculado como:

$$\beta_x = \frac{cov(r_x, r_m)}{\sigma^2(r_m)}$$

O fato de poucos investidores, na realidade, não manterem de fato a carteira de mercado, não indicaria que o modelo CAPM não possuiria importância prática, como afirmam Bodie et al. (2009). Isso porque, uma carteira bem diversificada ao apresentar grande correlação com a carteira de mercado, estaria sujeita a um baixo nível de risco não sistemático, restando apenas o risco de mercado.

De acordo com o mesmo autor, se, hipoteticamente, todos os investidores possuíssem uma mesma lista de ativos, e realizassem análises utilizando o método de Markowitz, considerando os mesmos *inputs* e para o mesmo horizonte de tempo, chegariam a iguais carteiras ótimas de ativos de risco. Se esta lista de ativos contemplasse todos os ativos negociáveis da economia, se obteriam todas as informações consideradas relevantes sobre os títulos. Isto significa que, mesmo que um investidor não utilizasse uma análise dos títulos para sua decisão, seria eficiente se mantivesse uma carteira de mercado.

Esta afirmação indicaria a estratégia passiva em uma carteira de investimentos indexada ao mercado seria eficiente, conforme Bodie et al. (2009). Este resultado é chamado de teorema do fundo mútuo, sendo semelhante à propriedade da separação citada anteriormente, ao passo que, o problema pode ser separado igualmente em dois. Primeiramente, haveria a criação de um fundo mútuo e após seriam incluídas as aversões pessoais a risco na análise. O que ocorre, na realidade, é a criação de diferentes carteiras pelos administradores devido a diversos fatores. A importância do teorema do fundo mútuo estaria no fato de que a carteira de mercado poderia ser considerada uma aproximação razoável de uma carteira eficiente de títulos, de acordo com Bodie et al. (2009).

Em contribuição dada à literatura de finanças, Fama e French (2007) apresentam os pontos fracos do modelo CAPM. Em primeiro lugar, citam uma imprecisão das estimativas dos betas de ativos individuais. Além disso, sustentam que a existência de correlação positiva entre resíduos das regressões resulta em distorção nas estimativas.

A crítica feita no artigo aborda diversos outros pontos. Dentre eles, o fato de que o CAPM nunca tenha sido efetivamente testado por não haver uma inclusão de todos os ativos negociáveis na carteira de mercado. Fama e French (2007) afirmam que teria sido testada apenas a eficiência de uma *proxy* da carteira de mercado na construção de um conjunto de carteiras e dos ativos utilizados. Contudo, de acordo com os autores “essa crítica pode ser feita aos testes de qualquer modelo econômico que não tenham sido exaustivos ou que usem *proxies* das variáveis exigidas pelo modelo”.

Haveria contradições empíricas no modelo, que indicariam a necessidade de um modelo mais complexo de precificação, uma vez que o CAPM se basearia em premissas irreais. Como exemplo, Fama e French (2007) citam a preocupação dos investidores com a covariação entre os retornos dos investimentos na carteira e o rendimento do trabalho e de outros investimentos, de forma a ver o custo de oportunidade e obter uma maior perspectiva do risco.

Um prolongamento do CAPM foi proposto por Merton (1973) dando um enfoque diferente a precificação de ativos. O modelo ICAPM, consiste em um modelo intertemporal de precificação de ativos, que não se preocupa apenas com o retorno que a carteira produz, mas também com as possibilidades de investimento e consumo do retorno obtido. As carteiras consideradas ótimas são as que possuem o melhor *trade-off* entre variância e retorno, assim como no modelo de Sharpe, Lintner e Mossin, porém são, também, as que possuem os maiores retornos esperados dado as variâncias dos retornos e as covariâncias dos retornos em relação as variáveis de estado futuras. Estas variáveis são as outras possibilidades de investimento e consumo, como por exemplo, renda do trabalho e preços dos bens de consumo.

Outra iniciativa de aprofundamento do modelo, proposta por Fama e French (1996), consiste em ampliar a captação da variação do retorno médio em carteiras constituídas com base em porte e outros índices que causam problemas para o CAPM, conhecido como Modelo Trifatorial de retornos esperados. Este modelo utiliza três fatores, *High Minus Low*, *Small Minus Big* e o prêmio de risco do mercado para conseguir captar as variações. O próprio Modelo Trifatorial possui suas próprias falhas, pois segundo Fama e French (2007) as variáveis escolhidas como parâmetros não são baseadas nos interesses dos investidores.

Este trabalho, no entanto, não tem como intuito se aprofundar às críticas relativas ao modelo CAPM, apenas notar a importância que teve para o universo da alocação e precificação de ativos. O modelo de precificação de ativos criado por William Sharpe, John Lintner e Jan Mossin serviu como uma importante base para trabalhos posteriores, como o modelo Black-Litterman que será visto na próxima seção.

2.5 BLACK- LITTERMAN

Black e Litterman (1990) publicaram, em um documento interno da Goldman Sachs Fixed Income sobre um novo modelo para auxiliar na otimização de portfólios sob gestão da instituição. Nos anos que se seguiram, o artigo foi veiculado em diversos outros meios e ganhou grande visibilidade tanto no mercado quanto no meio acadêmico. Segundo Idzorek (2004), o modelo, combina os retornos esperados que equilibram o mercado com as *views*[3] - as opiniões que os investidores possuem sobre os ativos - para formar um novo vetor de retornos esperados.

Beach (2007) afirma que a diferença entre a seleção de carteiras tradicional realizada por meio do modelo de Markowitz e a seleção que é feita na prática pelos investidores é considerável. Isto ocorreria, de acordo com o autor, pois os investidores construiriam seus portfólios de forma mais intuitiva, sem depender apenas dos resultados de alguma rotina de otimização. O trabalho de Black-Litterman viria para reduzir esta diferença, unindo otimização e intuição.

De acordo com Walters (2008) o método de obtenção do vetor de retornos esperados de ativos, desenvolvido por Black e Litterman, tem como resultado a geração de portfólios mais estáveis e diversificados. Ainda segundo o mesmo autor, a estabilidade poderia ser verificada na utilização da solução na forma fechada, sem restrições, apresentada pela literatura, significando que os portfólios gerados pelo modelo não resultam em soluções extremas. Conforme Idzorek (2004), a geração de portfólios mais estáveis e diversificados supera problemas de sensibilidade dos *inputs.* Silva et al. (2009) acrescentam ainda que a combinação das opiniões sobre os ativos e o equilíbrio de mercado, elemento central do modelo de Black-Litterman, resulta em portfólios mais robustos e menos sensíveis a erros nos excessos de retorno esperados.

Para tanto, é necessário, segundo Walters (2008) que o investidor identifique três fatores importantes:

a) O universo de ativos que podem ser investidos e a capitalização de mercado para cada um deles;

---

[3] O termo *views* também é encontrado traduzido como visões neste trabalho.

b) A série de retornos para cada classe de ativos e para o ativo livre de risco;
c) As *views* que o investidor possui sobre os ativos.

A identificação do universo de ativos possibilita a criação de uma carteira de mercado, ao passo que a série de retornos é utilizada na criação de uma matriz de covariâncias de excessos de retorno. O terceiro e último fator possibilita a estimação de novos retornos baseados na opinião dos investidores acerca do desempenho dos ativos, tendo como referência a opinião implícita obtida a partir do portfólio de mercado.

Os pesos do portfólio gerado vão depender, de acordo com Beach (2007), da própria confiança dos investidores em suas visões do portfólio, e do risco que estão dispostos a correr. Isto aproximará ou afastará o investidor dos pesos de equilíbrio do mercado.

Conforme Walters (2008), o modelo de Black-Litterman, como se tornou conhecido na literatura, utiliza o modelo CAPM como distribuição prévia e as *views* dos investidores como distribuição condicional. A combinação das distribuições é realizada utilizando uma abordagem Bayesiana, segundo Idzorek (2004), para formar um novo vetor de retornos esperados.

O CAPM, como retoma Walters (2008), é baseado na existência de uma relação linear entre risco e retorno, e requer que os últimos sejam normalmente distribuídos. Relembrando a equação do modelo:

$$E(r_x) = r_f + \beta_x[E(r_m) - r_f]$$

Partindo-se da premissa que a carteira de mercado se encontra na fronteira eficiente, o modelo obtém implicitamente o vetor de retornos esperados de equilíbrio que faz com que a carteira de mercado se situe na fronteira eficiente. Utilizando o método de otimização reversa, que, segundo Idzorek (2004), consiste na extração do vetor de excesso de retornos implícito da informação conhecida.

Para obter o vetor, parte-se, segundo Walters (2008), da função utilidade do investidor, que é a função objetivo da otimização de portfólios:

$$U = w^T\prod - \left(\frac{\lambda}{2}\right) w^T \Sigma w$$ [4]

Onde,

U é a utilidade do investidor;

[4] O símbolo utilizado para aversão a risco em Walters (2008) é δ, porém para fins de uniformidade do trabalho, será utilizado o símbolo λ para aversão a risco em linha com Idzorek (2004).

w é o vetor de pesos investido em cada ativo;

$\prod$ é o vetor de excesso de retornos implícitos para cada ativo.

Maximizando a função utilidade sem utilizar restrições, através da primeira derivada da função utilidade em relação aos pesos, tem-se a solução:

$$\frac{dU}{dw} = \prod - \lambda\Sigma w = 0$$

Resolvendo para $\prod$:

$$\prod = \lambda \Sigma w_{mkt}$$

Sendo $\prod$ o vetor de excesso de retornos implícito, λ o coeficiente de aversão ao risco do mercado, Σ a matriz de covariâncias e w_{mkt} os pesos da capitalização de mercado. O lambda expressa o parâmetro de aversão a risco do mercado, representando o nível de excesso de retorno que os investidores exigem para assumir uma unidade adicional de variância, conforme Idzorek (2004). Assim, quanto maior o valor deste coeficiente, maior é a aversão a risco do mercado. O coeficiente pode ser expresso pela seguinte equação:

$$\lambda = \frac{(E(r) - r_f)}{\sigma^2}$$

O numerador $E(r) - r_f$ representa o prêmio de risco de mercado, enquanto o denominador consiste na variância do portfólio de mercado.

Feita uma primeira introdução do modelo de Black-Litterman, neste ponto será introduzida a fórmula do modelo para depois ser explorada. De acordo com Idzorek (2004) a equação pode ser escrita como:

$$E[R] = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

Onde,

$E[R]$ é o vetor de retornos esperados;

τ é um escalar;

Σ é a matriz de covariâncias de excessos de retornos;

P é uma matriz que identifica os ativos envolvidos nas *views;*

Ω é a matriz de covariâncias diagonal dos erros das *views*, que representa a incerteza de cada *view;*

$\prod$ é o vetor de retornos implícitos de equilíbrio;

Q é o vetor de *views.*

Tendo em vista que, como dito anteriormente, a combinação das distribuições é realizada utilizando uma abordagem Bayesiana. Walters (2008) retoma a Teoria de Bayes segundo a qual:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

P(A|B) probabilidade condicional de A dado B. Em equivalência com o modelo de Black-Litterman, esta seria a distribuição posterior;

P(B|A) probabilidade condicional de B dado A, que seria a distribuição condicional;

P(A) probabilidade de A, que seria a distribuição prévia;

P(B) probabilidade de B, que seria a constante de normalização.

O modelo de Black-Litterman combina, portanto, uma distribuição prévia $N{\sim}(\pi, \tau\Sigma)$ e uma distribuição condicional, $N{\sim}(Q, \Omega)$ que resultam na distribuição posterior do modelo $N{\sim}(E[R], [(\tau\Sigma)^{-1} + (P'\Omega^{-1}P)]^{-1})$, conforme Idzorek (2004).

Segundo o autor, investidores podem possuir *views* ou opiniões, sobre determinado ou determinados ativos de um portfólio que diferem do retorno de equilíbrio implícito. As *views* podem ser expressas de duas formas:

a) Relativas: compara dois ativos e indica quanto por cento um ativo obterá de performance a mais em relação a outro ativo;
b) Absolutas: visão de apenas um ativo indicando qual será o excesso de retorno deste ativo em específico.

Walters (2008) ressalta que as *views* devem ser únicas e não correlacionadas, pois isto conferiria a característica da matriz de covariâncias ser diagonal, enquanto todos os outros elementos da matriz que não sejam constituintes da diagonal são iguais a zero.

O investidor pode tanto possuir visões sobre apenas alguns dos ativos como pode não possuir visões sobre qualquer dos ativos. Ao fim, ele terá *k* visões sobre os ativos. Estas visões serão expressas por um vetor Q acrescido de um vetor ε, vetor de erros independente e normalmente distribuído, de acordo com Idzorek (2004). Este vetor de erros não aparece explicitamente na fórmula do modelo, porém a variância de cada termo do vetor de erros ω forma a matriz de covariâncias diagonal Ω que representa a incerteza das *views*.

As *views* apresentadas pelo vetor Q são combinadas com os ativos que estão dispostos em uma matriz *P*, com dimensões *k x N*, sendo N o número total de ativos utilizados no modelo.

Conceitualmente, segundo Idzorek (2004), o modelo de Black-Litterman é uma complexa média ponderada do vetor de retornos implícitos $\prod$ e do vetor de *views* Q sendo os pesos função do escalar τ e da incerteza das *views* Ω.

O autor afirma que na literatura não há grandes indicativos de como calibrar a variável τ. Diversos outros autores citados em seu artigo realizam a calibragem de diferentes formas, como, por exemplo, atribuindo valores para a variável.

A matriz de incerteza das *views* Ω, de acordo com Idzorek (2004) é o parâmetro mais abstrato do modelo. Walters (2008) aponta que existem diversas formas de calcular a matriz Ω. Algumas delas seriam:

a) Calcular proporcionalmente à variância da distribuição anterior, como em He e Litterman (1999) e Meucci (2006);
b) Utilizar um intervalo de confiança;
c) Utilizar a variância dos resíduos em um modelo de fatores. Beach e Orlov (2007) utilizam modelos de fatores estilizados GARCH para gerar as *views* a serem utilizadas no modelo de Black-Litterman;
d) Utilizar o método proposto por Idzorek (2004).

O método proposto por Idzorek (2004), em linhas gerais, contribui com uma forma diferente de determinar os níveis de confiança nas visões e também com um modo de atribuir níveis de confiança para cada visão de 0% a 100% para determinar os valores da matriz Ω. Segundo o autor, desta forma seria eliminada ao mesmo tempo a dificuldade de especificar um valor para a variável escalar τ. Diversos fatores podem afetar a confiança de um investidor em uma visão, na opinião do autor, de modo que tais fatores deveriam ser combinados com a variância do vetor de *views*.

3 APLICAÇÃO PARA O MERCADO BRASILEIRO

Este capítulo se propõe a apresentar os dados e métodos utilizados para a aplicação dos modelos de otimização de carteiras apresentados anteriormente. Contempla a apresentação da base de dados, a composição da carteira de mercado, uma explicação sobre a carteira *equally weighted*, as ferramentas e procedimentos utilizados e os resultados obtidos.

3.1 APRESENTAÇÃO DA BASE DE DADOS

Walters (2008) afirma que, para a computação de uma matriz de covariâncias dos retornos a ser utilizada no modelo de Black-Litterman, é necessário identificar uma série de retornos para cada classe de ativos. Segundo o autor, frequentemente, utiliza-se um índice representativo como uma *proxy* para cada classe.

A base de dados utilizada é composta pelos retornos dos índices de mercado representativos de ativos em negociação no mercado brasileiro. Foram utilizadas 165 observações mensais (L = 165). As observações compreendem o período de dezembro de 2003 a agosto de 2017.

Os índices utilizados estão listados abaixo:

a) IRF-M 1, IRF-M e IRF-M 1+: o IRF-M referencia o desempenho da carteira de títulos públicos federais prefixados, no caso, as LTNs e NTN-Fs. O IRF-M 1 representa os títulos com vencimento inferior a um ano, enquanto que o IRF-M 1+ representa os títulos que vencem após um ano. O IRF-M é formado pela composição do IRF-M 1 e o IRF-M 1 +;
b) IMA-B 5, IMA-B e IMA-B 5+: o índice pode ser visto de forma semelhante ao IRF-M, porém acompanha a evolução das NTN-B. O IMA-B é composto pelo IMA-B 5, que representa os vencimentos inferiores a cinco anos e o IMA-B 5+ com vencimentos superiores a cinco anos;
c) IMA-S: índice composto pelas LFT, títulos atrelados à taxa Selic;
d) IBX: referencia o desempenho de 100 empresas brasileiras listadas na B3, a bolsa brasileira;
e) Dólar: índice para ativos negociados no exterior sujeitos a variação da moeda.

Os retornos históricos foram obtidos através da ferramenta Quantum (2017), que disponibiliza dados provenientes, principalmente, da plataforma Bloomberg, da BM&F Bovespa e da Anbima.

3.2 CAPITALIZAÇÃO DE MERCADO

Na teoria, o valor da carteira do agregado de ativos de risco constitui uma *proxy* para a totalidade dos ativos negociáveis em mercado da economia quando somadas todas as carteiras de todos os investidores, e anulados todos financiamentos. A otimização das carteiras dos investidores individuais resultaria em uma carteira com pesos semelhantes à de mercado.

O grande desafio está em montar uma carteira que seja o mais abrangente possível. Para tanto, adaptando à realidade do mercado de títulos brasileiros, foram consideradas as capitalizações de mercado dos títulos da dívida pública mobiliária federal interna e dívida privada interna, bem como a capitalização do mercado de ações em negociação e os títulos da dívida pública e privada externa. Importante ressaltar que a carteira de mercado desconsidera os derivativos e o estoque do ativo livre de risco, representado pelo estoque das operações compromissada realizadas pelo Banco Central (Bacen) para controle da liquidez da economia e formação da taxa básica de juros.

Para o mercado de títulos públicos, foram utilizados os valores de mercado dos títulos disponíveis para negociação que compõe os índices IRF-M, IMA-B e IMA-S. Como explicado anteriormente, estes índices refletem a precificação dos principais títulos públicos em negociação. O índice IMA-S, sendo representativo dos títulos públicos atrelados à taxa Selic, pode ser utilizado também para representar a poupança, que é atrelada também a Selic. Portanto, é utilizada a soma do valor em mercado das LFTs e do valor do estoque da caderneta de poupança. Os dados relativos aos valores de mercado dos títulos que compõem os índices foram obtidos no site da Anbima, já o valor total da caderneta de poupança foi coletado do Sistema Gerenciador de Séries Temporais do Banco Central do Brasil.

A capitalização do mercado privado envolve todos os títulos emitidos pelo setor privado e que estão em negociação no mercado. Os títulos estão atrelados a índices diversos e prazos distintos. Estes dados foram obtidos através dos sites da Cetip e da Anbima. Já o mercado de ações está representado pelo valor de mercado das empresas listadas na BM&F Bovespa. Os dados do índice IBX são provenientes do site da BM&F Bovespa. Para finalizar, o mercado externo está representado pelo valor da dívida externa pública e privada em reais, obtida também através do Sistema Gerenciador de Séries Temporais do Bacen.

Com exceção da dívida externa que necessitou de conversão do dólar para o real, as outras variáveis foram cotadas em reais.

3.3 CARTEIRA EQUALLY WEIGHTED

A carteira *equally weighted* (EW), é considerada uma carteira de diversificação ingênua, pois são atribuídos pesos iguais a todos os ativos e os mesmos são mantidos ao longo do tempo. Assim, sendo *w* os pesos e N o número de ativos (neste trabalho, N = 9), temos:

$$w = \frac{1}{N}$$

DeMiguel et al. (2007) elaboraram um artigo dedicado a mostrar o quão eficiente é a diversificação ingênua em relação a diversos modelos de otimização de carteiras. Os resultados obtidos pelos autores sugerem que a carteira *equally w*eighted superaria as outras estratégias em termos de índice de Sharpe, retorno equivalente certo (*certainty-equivalent return*) e *turnover*. Os autores indicam ainda que seria necessária uma amostra com aproximadamente 3.000 meses de observações e 25 ativos para que as outras estratégias superassem os resultados obtidos pela diversificação ingênua. No artigo, foram utilizadas diferentes bases de dados compostas por ativos negociados nos Estados Unidos.

Com base nos resultados obtidos por DeMiguel et al. (2007), a comparação das carteiras em relação a estratégia de diversificação ingênua se mostra válida e interessante. Proporciona, também, a possibilidade de verificação dos resultados da estratégia utilizando uma base de dados formada por ativos negociados no Brasil.

3.4 FERRAMENTAS E PROCEDIMENTOS

A ferramenta utilizada para a realização das simulações de otimização dos portfólios foi o software MATLAB, MathWorks (2017).

Para a realização das estimações de retornos esperados e da matriz de covariâncias, foi utilizada uma janela móvel de 60 observações. A aplicação de janela móvel funciona com a seguinte dinâmica: a cada nova observação, a última observação contida na janela é descartada, de modo que se mantenha sempre 60 observações até o fim da amostra.

3.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A Tabela 1 apresenta uma análise descritiva dos retornos históricos utilizados no trabalho. É possível notar que os ativos IBX e Dólar possuem maior variância em comparação com os demais ativos.

Tabela 1 - Análise descritiva dos dados mensais em (%)

Índice	Retorno Mínimo	Retorno Máximo	Retorno Médio	Retorno Mediana	Variância	Desvio-Padrão
IRF-M 1	0,2692	2,3262	1,0119	0,9506	0,0010	0,3153
IRF-M	-1,8137	4,7449	1,0757	1,1441	0,0073	0,8536
IRF-M 1+	-3,6730	6,9332	1,1223	1,2382	0,0189	1,3766
IMA-B 5	-1,7585	4,3833	1,1155	1,1093	0,0078	0,8814
IMA-B	-4,5157	6,0768	1,1979	1,3028	0,0349	1,8687
IMA-B 5+	-8,1737	13,5438	1,3231	1,2985	0,0911	3,0190
IMA-S	0,4966	1,6486	0,9774	0,9452	0,0006	0,2548
DOLAR	-10,7174	17,1256	0,1402	-0,6009	0,2076	4,5558
IBX	-25,1089	18,3355	1,2512	1,1369	0,3944	6,2800
CDI	0,4816	1,6529	0,9685	0,9404	0,0006	0,2437

Fonte: Elaborado pelo autor com base no *software* MATLAB, MathWorks (2017).

Os resultados foram analisados utilizando três indicadores de desempenho: o índice de Sharpe, a volatilidade e o *turnover* da carteira. O Índice de Sharpe representa a relação entre o excesso de retorno médio ($\hat{\mu}$) e o desvio-padrão do portfólio ($\hat{\sigma}$). Este índice é utilizado para a análise da relação risco *versus* retorno. O cálculo da volatilidade dos retornos da carteira é uma medida da variabilidade dos retornos do portfólio em questão.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1} w'_t\, R_{t+1}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1} (w_t R_{t+1} - \hat{\mu})^2}$$

$$\acute{I}ndice\ de\ Sharpe = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$$

Sendo R_{t+1} o vetor de retornos dos ativos e w_t o vetor de pesos.

A fórmula do *turnover* de acordo Naibert e Caldeira (2015) pode ser escrita como:

$$Turnover = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=\tau}^{T-1}\sum_{i=1}^{N}|w_{i,t+1} - w_{i,t}\frac{1+R_{i,t+1}}{1+w_t^T R_{t+1}}|$$

Sendo $w_t^T R_{t+1}$ o retorno fora da amostra.

Tanto no trabalho dos autores, quanto no presente trabalho não são estabelecidos custos de transação e nem são contados os impostos. O *turnover* pode ser entendido então, como a média das alterações dos pesos do portfólio a cada rebalanceamento, realizado mensalmente no neste trabalho.

Foram realizadas simulações utilizando os modelos de Mínima-Variância, de Média-Variância, de Média-Variância com restrição, de Média-Variância com Black-Litterman e de Média-Variância com Black-Litterman e restrição. Para todos os modelos foi imposta restrição não permitindo posições alavancadas.

O modelo de Média-Variância requer que seja estabelecido um retorno-alvo desejado. Tal retorno foi estipulado como sendo a média de retornos da carteira multiplicada por 1,40. A escolha do multiplicador baseou-se em uma análise do retorno e da variância produzidos pela carteira.

As restrições impostas nos modelos de Média-Variância com restrição e de Média-Variância com Black-Litterman constituem restrições de posição. Ou seja, é possível que se tenha uma exposição máxima de 40% em cada ativo, respeitando a impossibilidade de alavancagem do portfólio.

A otimização utilizando o modelo de Black-Litterman foi realizada sem o estabelecimento do vetor de *views* dos investidores, supondo uma convergência entre os retornos implícitos de equilíbrio do mercado e as *views*.

O modelo de Black-Litterman obtém implicitamente o vetor de retornos esperados de equilíbrio que faz com que a carteira de mercado se situe na fronteira eficiente, utilizando o método de otimização reversa. Há, desta forma, o estabelecimento de um valor para o grau de aversão ao risco do mercado brasileiro baseado no Índice de Sharpe. Bevan e Winkelmann (1998) utilizam para o mercado de Renda Fixa Global o valor de 1,0 como grau de aversão ao risco. No presente trabalho, o grau de aversão ao risco estabelecido foi o de 3,5, o que significa que o investidor médio brasileiro é considerado mais avesso a risco, tendo em vista a sua maior exigência de excesso de retorno por unidade de variância assumida.

Os modelos de Média-Variância com Black-Litterman e Média-Variância com Black-Litterman e restrição utilizaram o vetor de retornos esperados obtidos por meio do modelo de Black-Litterman no modelo de Média-Variância.

A carteira igualmente ponderada (*equally weighted*) foi utilizada neste trabalho como *benchmark* a fim de que se pudesse ter uma base de comparação para desempenho.

3.5.1 Volatilidade

A Tabela 2 apresenta as volatilidades obtidas por meio das simulações considerando as diferentes estratégias. As carteiras de Média-Variância e Média-Variância com restrição possuem volatilidade dos retornos mais elevada (1,86060 e 2,20565 respectivamente) do que a carteira igualmente ponderada (1,01916).

Tabela 2 - Volatilidade mensal em (%) para as diferentes estratégias de otimização

Modelo	Volatilidade
Equally weighted	1,01916
Mínima-variância	0,18164
Média-variância	1,86060
Média-variância com restrição	2,20565
Média-variância com Black-Litterman	0,26051
Média-variância com Black-Litterman e restrição	0,30823

Fonte: Elaborado pelo autor com base no *software* MATLAB, MathWorks (2017).

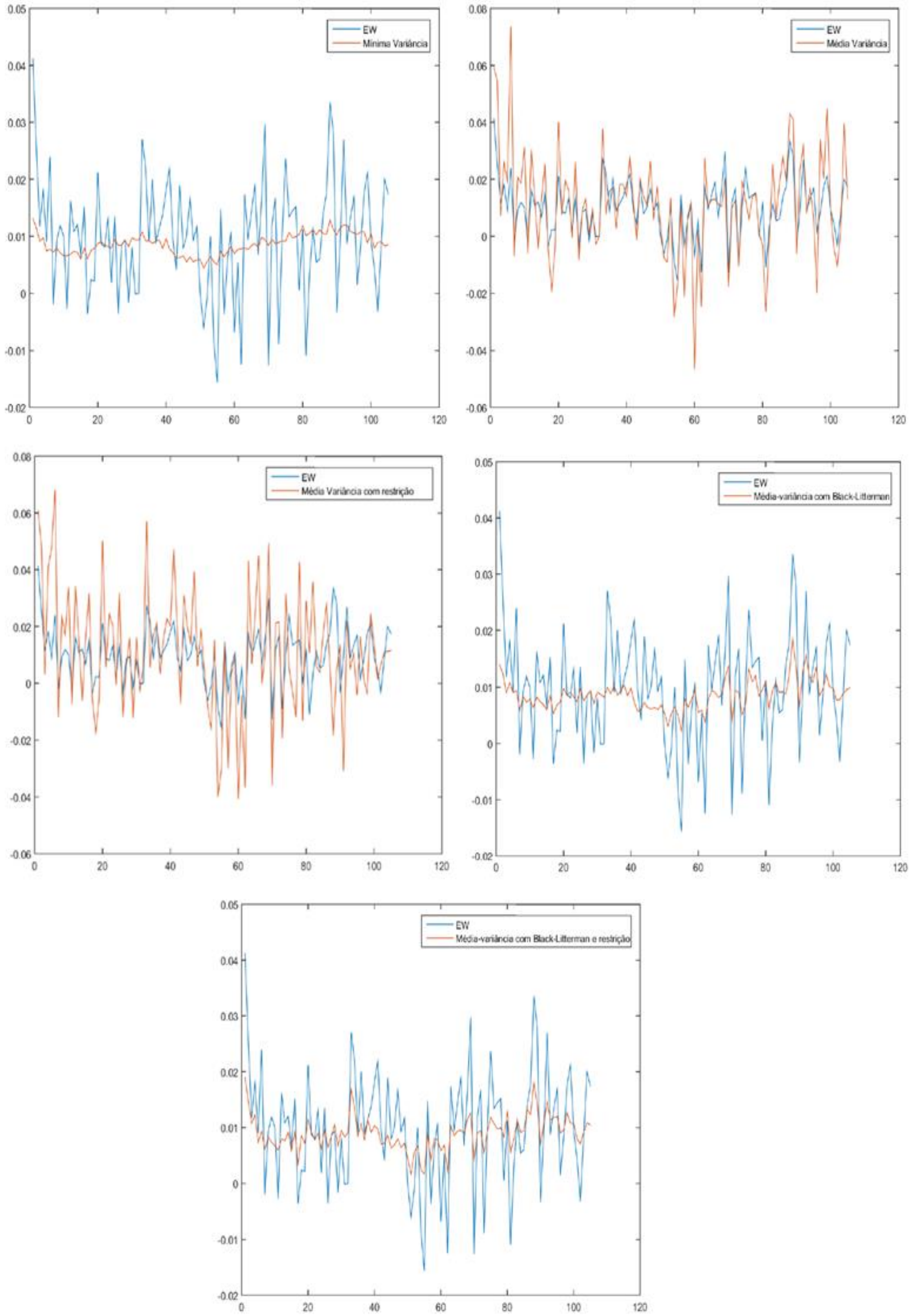
Sendo a volatilidade uma medida para o risco, as duas estratégias que figuraram com as maiores volatilidades - relativas à carteira igualmente ponderada - são consideradas de perfil mais agressivo.

Os gráficos dos retornos das carteiras comparadas com a carteira *equally weighted* são apresentados na Figura 3, em que é possível notar que a maior estabilidade nos retornos ocorre na carteira de mínima variância.

Devido à baixa volatilidade produzida pelas carteiras em que é adicionado o vetor de retornos esperados de Black-Litterman, verifica-se também uma maior estabilidade quando comparadas com a carteira *equally weighted*.

Ao compararmos as carteiras de Média-Variância puras, em relação às Black-Litterman, notamos uma maior estabilidade nas últimas, também. Tais resultados eram esperados, uma vez que o modelo de Black-Litterman tende a gerar carteiras menos extremas e mais estáveis do que as carteiras de Markowitz, tendo em vista a maior estabilidade das estimativas de retorno esperado.

Figura 3 - Gráficos dos retornos mensais das carteiras de Mínima-Variância, Média-Variância, Média-Variância com restrição, Média-Variância com Black-Litterman e Média-Variância com Black-Litterman e restrição contra a carteira *equally weighted* (EW)



Fonte: Elaborado pelo autor com base no *software* MATLAB, MathWorks (2017).

3.5.2 Índice de Sharpe

O Índice de Sharpe é um dos índices de desempenho mais utilizados do mercado. Seu uso possibilita a avaliação da relação entre risco e retorno de ativos individuais ou de portfólios de forma simples.

Os resultados apresentados na Tabela 3 para as carteiras quando levado este índice em consideração demonstraram que, os modelos de Mínima-Variância (4,78026), de Média-Variância com a aplicação do vetor de retornos esperados do Black-Litterman (3,33685) e o modelo de média variância com Black-Litterman e restrição (2,92069) superaram a carteira *equally weighted* (0,97057) em termos de índice de Sharpe. Isto indica que as estratégias seriam mais atrativas do que simplesmente manter a carteira de iguais proporções, quando analisados os resultados através desta medida.

Cabe ressaltar, ainda, que os elevados valores para o índice que foram obtidos através das simulações para a carteira de Mínima-Variância está em linha com o que afirmam Jagannathan e Ma (2003). Os autores destacam que a carteira de Mínima-Variância possui grande potencial para produzir carteiras com elevado Índice de Sharpe, por não estar sujeita aos erros de estimação que as carteiras de Média-Variância estão. Além disso, segundo os autores, a imposição de restrições de posição para as carteiras de Média-Variância ainda sim, não melhorariam os resultados, o que pode ser visto se os modelos de Média-Variância com e sem restrição forem comparados em termos de Índice de Sharpe.

Tabela 3 - Índice de Sharpe para as diferentes estratégias de otimização

Modelo	Sharpe
Equally weighted	0,97057
Mínima-variância	4,78026
Média-variância	0,60288
Média-variância com restrição	0,51426
Média-variância com Black-Litterman	3,33685
Média-variância com Black-Litterman e restrição	2,92069

Fonte: Elaborado pelo autor com base no *software* MATLAB, MathWorks (2017).

3.5.3 Turnover

Os resultados obtidos com a análise desta medida, no entanto, apesar de não superarem a carteira de iguais proporções, produziram baixos *turnovers*. Valores baixos para esta medida não só são interessantes, como desejáveis para os investidores. Conforme afirmado anteriormente, o *turnover* indica a média das mudanças nas alocações dos ativos do portfólio a cada realocação, realizadas mensalmente no caso específico deste trabalho, sendo uma medida representativa dos custos de transação que o investidor incorre para realizar realocações dos ativos. Portanto, os valores resultantes da utilização das estratégias de otimização indicam baixos custos de transação associados.

É possível verificar na Tabela 4, que em linha com a carteira de Mínima-Variância, as carteiras de Média-Variância com Black-Litterman e de Média-Variância com Black-Litterman e restrição geraram baixos *turnovers*. Tais estratégias gerariam menos custos de manutenção para os investidores.

Tabela 4 - *Turnover* em (%) para as diferentes estratégias de otimização

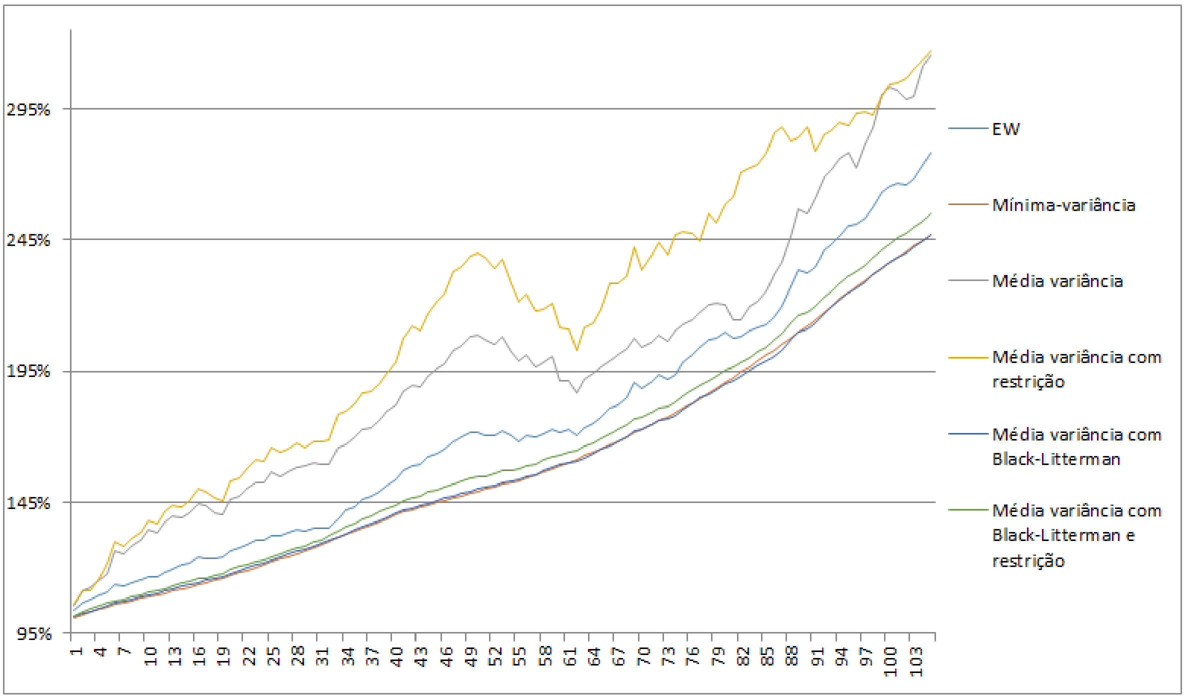
Modelo	Turnover
Equally weighted	0,00000
Mínima-variância	0,08603
Média-variância	1,34067
Média-variância com restrição	7,43849
Média-variância com Black-Litterman	0,35129
Média-variância com Black-Litterman e restrição	0,38049

Fonte: Elaborado pelo autor com base no *software* MATLAB, MathWorks (2017).

3.5.4 Evolução

Os modelos de Média-Variância com e sem restrição obtiveram performance superior à estratégia de diversificação ingênua, em termos de retorno acumulado conforme pode ser verificado na Figura 4. Porém, deve ser considerado que para a Média-Variância foi estabelecido um retorno-alvo e isto influenciou na performance destes modelos.

Figura 4 - Gráfico dos retornos acumulados das carteiras *equally weighted*, Mínima-Variância, Média-Variância, Média-Variância com restrição, Média-Variância com Black-Litterman e Média-Variância com Black-Litterman e restrição



Fonte: Elaborado pelo autor com base no *software* MATLAB, MathWorks (2017).

Com os resultados obtidos, podemos supor que o desempenho superior das carteiras Black-Litterman está relacionado à maior estabilidade e robustez das estimativas de retorno esperados geradas por essa metodologia. Entretanto, a partir do estudo realizado, não se pode concluir que o Modelo de Black-Litterman sempre fornecerá carteiras de desempenho superior às carteiras geradas pelo Modelo de Média-Variância.

Contudo, mediante análise da Figura 4, pode ser destacada a vantagem das carteiras com utilização do vetor de retornos esperados do modelo de Black-Litterman reside no estável desempenho produzido pelas mesmas.

3.6 RESTRIÇÕES ÀS NORMAS DE ALOCAÇÃO

Na presente seção será analisado se o relaxamento das restrições impostas às normas de alocação permite a obtenção de resultados melhores para os modelos. Com esse fim, será analisado o desempenho dos modelos considerando a imposição de restrições às normas de alocação para diferentes níveis de alavancagem.

A análise se baseou na metodologia apresentada no artigo de Naibert e Caldeira (2015), no qual são realizadas simulações utilizando o modelo de Mínima-Variância e uma base de dados composta por 61 ações negociadas na BM&F Bovespa.

Os resultados do trabalho revelam ganhos em termos de Índice de Sharpe em comparação às carteiras restritas para venda a descoberto. Além disso, foi constatado uma redução do turnover dos portfólios.

Os autores estabelecem como restrição que a soma dos pesos (w) do portfólio seja igual ou menor que a variável c:

$$\sum_{i=1}^{N} |w|_1 \leq c$$

Segundo eles, a imposição de restrição sobre as normas permite a imposição de regras para as posições vendidas e compradas, como pode ser visto nas equações abaixo:

$$w^+ = \frac{\sum_{i=1}^{N} |w|_1 + 1}{2} \ , \ w^- = \frac{\sum_{i=1}^{N} |w|_1 - 1}{2}$$

$$w^+ - w^- = 1 \ , \ w^+ + w^- = ||w||_1$$

Sendo w^+ a soma das posições compradas e w^- a soma das posições vendidas.

Naibert e Caldeira (2015) citam que no caso onde c = 1,6, resulta numa carteira composta por $w^+ = 1{,}3$ e $w^- = 0{,}3$. Este caso é chamado de 130/30.

No caso da carteira em que c = 1, tem-se uma carteira que não permite alavancagem nem posições vendidas, carteira esta que foi utilizada como *benchmark*.

Em linha com o artigo dos autores, no presente trabalho foram realizadas simulações com diferentes níveis de alavancagem, permitindo que c variasse de 1,0 até 2,2. Foram estabelecidas, também, restrições quanto as posições, limitadas a 40% em cada ativo, além de se permitir que houvessem posições vendidas de até 15% em cada ativo.

Importante ressaltar que, no presente trabalho, a especificação da regra que permite a realização de posições vendidas no caso em que c = 1 diverge do proposto por Naibert e Caldeira (2015).

Cabe destacar, também, que a possibilidade da ocorrência de posições vendidas pode não implicar em alavancagem do patrimônio, apenas nos ativos individualmente.

As simulações realizadas com os modelos de Mínima-Variância, Média-Variância e Média-Variância utilizando o vetor de retornos esperados do modelo de Black-Litterman foram analisadas considerando os mesmos indicadores de desempenho utilizados anteriormente e serão apresentadas a seguir.

3.6.1 Volatilidade

Conforme mostrado na Tabela 5, a análise da volatilidade dos diferentes modelos e níveis de alavancagem permite constatar que a volatilidade aumenta com o nível de alavancagem permitido para o portfólio.

O resultado da volatilidade para o modelo de Média-Variância e c = 1 destoa dos outros resultados. Isto pode sinalizar que as restrições impostas para este modelo combinado com a impossibilidade de alavancagem não produzem bons resultados, quando comparado com as situações em que é permitida alavancagem. Isso ficará mais evidente quando forem analisados os Índices de Sharpe de cada modelo.

Tabela 5 - Volatilidade mensal em (%) para os diferentes níveis de alavancagem das carteiras de Mínima-Variância, Média-Variância e Média-Variância com Black-Litterman

c	Minima-Variância	Média-Variância	Média-Variância com Black-Litterman
1,0	0,28522	2,02848	0,30823
1,2	0,43155	0,69568	0,43266
1,4	0,58049	0,57882	0,58035
1,6	0,72843	0,72829	0,72668
1,8	0,91582	0,91587	0,91646
2,0	1,14396	1,14397	1,14449
2,2	1,37646	1,37653	1,37628

Fonte: Elaborado pelo autor com base no *software* MATLAB, MathWorks (2017).

3.6.2 Índice de Sharpe

Os resultados obtidos através das simulações para os diferentes níveis de alavancagem, que podem ser verificados na Tabela 6, demonstram que, para níveis mais elevados de alavancagem, há uma piora na relação entre risco e retorno apresentada pelas carteiras.

Naibert e Caldeira (2015) obtiveram os maiores Índices de Sharpe nas carteiras com nível de alavancagem entre 1,4 e 1,8.

No presente trabalho, os melhores resultados foram obtidos nas carteiras com c entre 1,0 e 1,4. Essa variação entre os resultados dos trabalhos pode ocorrer em virtude da composição e tipo de carteiras que são analisadas, dos dados, das restrições impostas, entre outros.

Tabela 6 - Índice de Sharpe para os diferentes níveis de alavancagem das carteiras de Mínima-Variância, Média-Variância e Média-Variância com Black Litterman

c	Mínima-Variância	Média-Variância	Média-Variância com Black-Litterman
1,0	3,14362	0,57028	2,90675
1,2	2,53387	1,67976	2,52876
1,4	2,22379	2,23429	2,22487
1,6	2,04754	2,04817	2,05218
1,8	1,82550	1,82537	1,82382
2,0	1,63024	1,63033	1,62946
2,2	1,49596	1,49584	1,49592

Fonte: Elaborado pelo autor com base no *software* MATLAB, MathWorks (2017).

3.6.3 Turnover

Em relação aos *turnovers* produzidos pelas carteiras é possível constatar que o aumento da alavancagem produz elevações proporcionais nos mesmos. Isto significa que, maiores níveis de alavancagem implicariam em maiores custos de transação. Custos elevados podem tornar a carteira não atraente.

De forma geral, podemos afirmar que o *turnover* cresce conjuntamente ao valor da restrição c. Tais resultados estão alinhados com os obtidos no trabalho de Naibert e Caldeira (2015).

Tabela 7 - *Turnover* em (%) para os diferentes níveis de alavancagem das carteiras de Mínima-Variância, Média-Variância e Média-Variância com Black-Litterman

c	Mínima-Variância	Média-Variância	Média-Variância com Black-Litterman
1,0	0,29103	0,85050	0,38049
1,2	20,00000	20,00000	20,00000
1,4	40,00000	40,00000	40,00000
1,6	60,00000	60,00000	60,00000
1,8	80,00000	80,00000	80,00000
2,0	100,00000	100,00000	100,00000
2,2	120,00000	120,00000	120,00000

Fonte: Elaborado pelo autor com base no *software* MATLAB, MathWorks (2017).

4 CONCLUSÃO

O presente trabalho buscou aplicar o modelo de Black-Litterman e alguns dos modelos de otimização de carteiras de investimentos desenvolvidos a partir da Teoria de Carteiras para o mercado brasileiro. Foi realizada, primeiramente, uma breve apresentação do desenvolvimento do mercado financeiro e, na sequência, o conceito de risco foi explorado. Seguiu-se, para um aprofundamento dos aspectos teóricos dos modelos de Média-Variância, Mínima-Variância, CAPM e Black-Litterman. O trabalho é finalizado, então, com a realização de simulações aplicando os modelos ao mercado brasileiro.

Para tanto, foram utilizados índices de mercado como *proxy* das principais classes de ativos negociáveis no Brasil e a estratégia *equally weighted* foi estabelecida como *benchmark* para a análise de performance dos modelos. As simulações realizadas incluíram o uso de restrições de posição e nas normas de alocação, a fim de verificar o desempenho dos modelos sob condições diversas.

Em relação às carteiras geradas, é possível concluir que produziram resultados satisfatórios. O destaque principal pode ser atribuído a performance das carteiras de Média-Variância com utilização do vetor de retornos esperados do modelo de Black-Litterman. Tais carteiras geraram baixas variâncias e *turnovers* combinados com altos Índices de Sharpe. Os resultados são indicativos de que a maior estabilidade das estimativas de retorno esperado propiciadas pelo modelo. Em relação à estabilidade, também pôde ser percebida na carteira de mínima-variância, em consonância com o que é visto na literatura acerca deste modelo.

A implementação de simulações com a imposição de restrições nas normas de alocação também apresentou bons resultados até determinado nível de alavancagem. Em níveis mais elevados de alavancagem, notou-se uma queda no Índice de Sharpe e um grande aumento no *turnover,* tornando estas carteiras menos atrativas.

A principal contribuição do presente trabalho consiste na realização de aplicação dos modelos de otimização de carteiras considerando as classes de ativos representativas do mercado brasileiro, além da especificação de uma carteira de ativos de risco representativa do mercado brasileiro.

A literatura revela que a construção de uma carteira de mercado constitui uma tarefa desafiadora. Algumas das críticas do modelo CAPM sustentam que o modelo nunca teria sido de fato testado devido à dificuldade de se montar uma carteira de mercado que inclua todos ativos negociáveis. Conforme mencionado, o presente trabalho trouxe uma sugestão de composição de carteira representativa dos ativos de risco negociáveis do mercado brasileiro.

Uma alternativa para futuras pesquisas seria comparar uma maior diversidade de modelos de carteiras com diferentes tipos de restrição. Desta forma, seria possível verificar como se comportam os resultados dos modelos com tais alterações.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIRO E DE CAPITAIS-ANBIMA. **IMA - Índice de Mercado ANBIMA**. Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: <https://goo.gl/AS5UaF>. Acesso em: 14 nov. 2017.

BANCO CENTRAL DO BRASIL-BACEN. **Sistema Gerenciador de Séries Temporais**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <https://goo.gl/ge7tn>. Acesso em: 14 nov. 2017.

BM&F BOVESPA. **Índice Brasil 100 (IBrX 100)**. São Paulo, 2017. Disponível em: <https://goo.gl/6E9uic>. Acesso em: 14 nov. 2017.

BEACH, Steven L.; ORLOV, Alexei G. An application of the Black–Litterman model with EGARCH-M-derived views for international portfolio management. **Financial Markets and Portfolio Management**, [S.l.], v. 21, n. 2, p.147-166, mar. 2007. Disponível em: <https://goo.gl/XhaQB4>. Acesso em: 13 nov. 2017.

BERNOULLI, Daniel. Exposition of a new theory on the measurement of risk. **Econometrica**, [S.l.], v. 22, n. 1, p.23-36, jan. 1954. Disponível em: <https://goo.gl/1SYTrj>. Acesso em: 13 nov. 2017.

BERNSTEIN, Peter L. **A história do mercado de capitais**: o impacto da ciência e da tecnologia nos investimentos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

BERNSTEIN, Peter L. **Desafio aos deuses**: a fascinante história do risco. Rio de Janeiro: Elsevier, 1997.

BEVAN, Andrew; WINKELMANN, Kurt. Using the Black-Litterman global asset allocation model: three years of practical experience. **Goldman Sachs Fixed Income Research**, London, June 1998. Disponível em: <https://goo.gl/eprVAF>. Acesso em: 13 nov. 2017.

BLACK, Fischer; LITTERMAN, Robert B. Asset allocation: combining investor views with market equilibrium. **Goldman Sachs Fixed Income Research**, set. 1990.

BODIE, Zvi; KANE, Alex; MARCUS, Alan J. **Investimentos**. Porto Alegre: Amgh, 2009.

CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; SANTOS, André A. P. Seleção de carteiras utilizando o modelo Fama-French-Carhart. **Revista Brasileira de Economia**, [S.l.], v. 67, n. 1, p.45-65, mar. 2013. Disponível em: <https://goo.gl/VccAVo>. Acesso em: 13 nov. 2017.

CAMPBELL, John Y.; VICEIRA, Luis M. **Strategic asset allocation**: portfolio choice for long-term investors. Oxford: Oxford University Press, 2002. Disponível em: <https://goo.gl/ZntkF6>. Acesso em: 13 nov. 2017.

CENTRAL DE CUSTÓDIA E LIQUIDAÇÃO FINANCEIRA DE TÍTULOS-CETIP. **Total de estoque valorizado registrado na Cetip**. São Paulo, 2017. Disponível em: <https://goo.gl/YPTuwW>. Acesso em: 14 nov. 2017.

DEMIGUEL, Victor; GARLAPPI, Lorenzo; UPPAL, Raman. Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy? **Review of Financial Studies**, [S.l.], v. 22, n. 5, p. 1915-1953, dez. 2007. Disponível em: <https://goo.gl/5vaYpn>. Acesso em: 13 nov. 2017.

DAMODARAN, Aswath. **Gestão estratégica do risco**: uma referência para tomada de riscos empresariais. Porto Alegre: Bookman, 2009.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Multifactor explanations of asset pricing anomalies. **Journal of Finance**, New York, v. 51, n. 1, p. 55-54, 1996. Disponível em: <https://goo.gl/xkBv9x>. Acesso em: 13 nov. 2017.

FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. O Modelo de Precificação de Ativos de Capital: teoria e evidências. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 47, n. 2, p. 103-118, jun. 2007. Disponível em: <https://goo.gl/o9wVNj>. Acesso em: 13 nov. 2017.

FABOZZI, Frank J. **Robust portfolio optimization and management**. New Jersey: John Wiley, 2007.

FOX, Justin. **O mito dos mercados racionais**: uma história de risco, recompensa e decepção em Wall Street. Rio de Janeiro: Bestseller, 2010.

FRIEDMAN, Milton; SAVAGE, L. J. The utility analysis of choices involving risk. **Journal of Political Economy**, [S.l.], v. 56, n. 4, p. 279-304, ago. 1948. Disponível em: <https://goo.gl/DiQMub>. Acesso em: 13 nov. 2017.

HE, Guagliang; LITTERMAN, Robert. The intuition behind Black-Litterman model portfolios. **Investment Management Division**, dez. 1999. Disponível em: <https://goo.gl/iMb4Xw>. Acesso em: 13 nov. 2017.

IDZOREK, Thomas M. **A step-by-step guide to the Black-Litterman model**: incorporating user-specified confidence levels. Chicago, 2004. Disponível em: <https://goo.gl/7b4tzc>. Acesso em: 13 nov. 2017.

JAGANNATHAN, Ravi; MA, Tongshu. Risk Reduction in Large Portfolios: why Imposing the wrong Constraints Helps. **Journal of Finance**, New York, v. 58, n. 4, p.1651-1683, ago. 2003. Disponível em: <https://goo.gl/8pvbGY>. Acesso em: 30 nov. 2017.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, New York, v. 7, n. 1, p.77-91, Mar. 1952. Disponível em: <https://goo.gl/pnmFav>. Acesso em: 13 de nov. 2017.

MATHWORKS. **MATLAB**. Natick, 2017. Disponível em: <https://goo.gl/jK5gNb>. Acesso em: 14 nov. 2017.

MICHAUD, Robert O. The Markowitz optimization enigma: is optimized optimal? **Financial Analysts Journal**, New York, v.45, n.1, p. 31-42, jan./fev. 1989. Disponível em: <https://goo.gl/SVHdKV>. Acesso em: 13 nov. 2017.

MERTON, R. C. An intertemporal capital asset pricing model**. Econometrica**, Chicago, v. 41, n. 5, p. 867-887, 1973. Disponível em: <https://goo.gl/dkTKdY>. Acesso em: 13 nov. 2017.

MEUCCI, Attilio. **Beyond Black-Litterman in practice**: a five-step recipe to input views on non-normal markets. [S.l.], mai 2006. Disponível em: <https://goo.gl/NnsHif>. Acesso em: 13 nov. 2017.

NAIBERT, Paulo Ferreira; CALDEIRA, João Frois. Seleção de carteiras ótimas sob restrições nas normas dos vetores de alocação: uma avaliação empírica com dados da BM&F Bovespa. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 13, n. 3, p.504-543, jul. 2015.

QUANTUM. **Quantum Axis**. Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: <https://goo.gl/ZNXCgg>. Acesso em: 14 nov. 2017.

SILVA, Alexandre S da; LEE, Wai; PORNROJNANGKOOL, Bobby. The Black–Litterman model for active portfolio management. **The Journal of Portfolio Management**, [S.l.], v. 35, n. 2, p.61-70, jan. 2009. Disponível em: <https://goo.gl/TEFUw2>. Acesso em: 13 nov. 2017.

TOBIN, James. Liquidity preference as behavior towards risk. **The Review of Economic Studies**, Oxford, v. 25, n. 2, p. 65-85, fev. 1958. Disponível em: <https://goo.gl/R8yYeY>. Acesso em: 28 nov.2017

WALTERS, Jay. **The Black-Litterman model**: a detailed exploration. [S.l.], jan. 2008. Disponível em: <https://goo.gl/1QTQQo>. Acesso em: 13 nov. 2017.