

Modelagem Dinâmica de Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs)

Guilherme de Paoli Beal¹, Diego Eckhard²

¹Graduando em Engenharia de Controle e Automação, UFRGS, Porto Alegre, RS guilherme.beal@ufrgs.br

²Professor do Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS diegoeck@ufrgs.br

Introdução

O objetivo deste projeto é obter um modelo matemático dinâmico para veículos aéreos não tripulados (VANTs), de modo a posteriormente desenvolver controladores para os mesmos. No caso deste trabalho, o veículo a ser analisado é do tipo quadricóptero, o qual possui crescente popularidade em diversas áreas.



Figura 1: VANT do tipo quadricóptero. Fonte: Josh Sorenson.

Sistemas de Coordenadas e Matrizes de Rotação

A realização desta análise exige a utilização de dois sistemas de coordenadas principais: um sistema inercial O_i , fixado em um ponto da superfície da terra com orientação norte-leste-baixo (*north-east-down*, NED); e um sistema móvel O_b , fixado no corpo do veículo.

Além desses, podem ser enunciados outros três sistemas de coordenadas intermediários, todos fixados no centro de massa do veículo porém com diferentes orientações: O_v , com a mesma orientação de O_i ; O_{v1} , rotacionado de O_v por um ângulo ψ ao longo de k_v (*yaw*); O_{v2} , rotacionado de O_{v1} por um ângulo θ ao longo de \hat{j}_{v1} (*pitch*). Finalmente, a orientação de O_b é obtida rotacionando O_{v2} por um ângulo ϕ ao longo de \hat{i}_{v2} (*roll*).

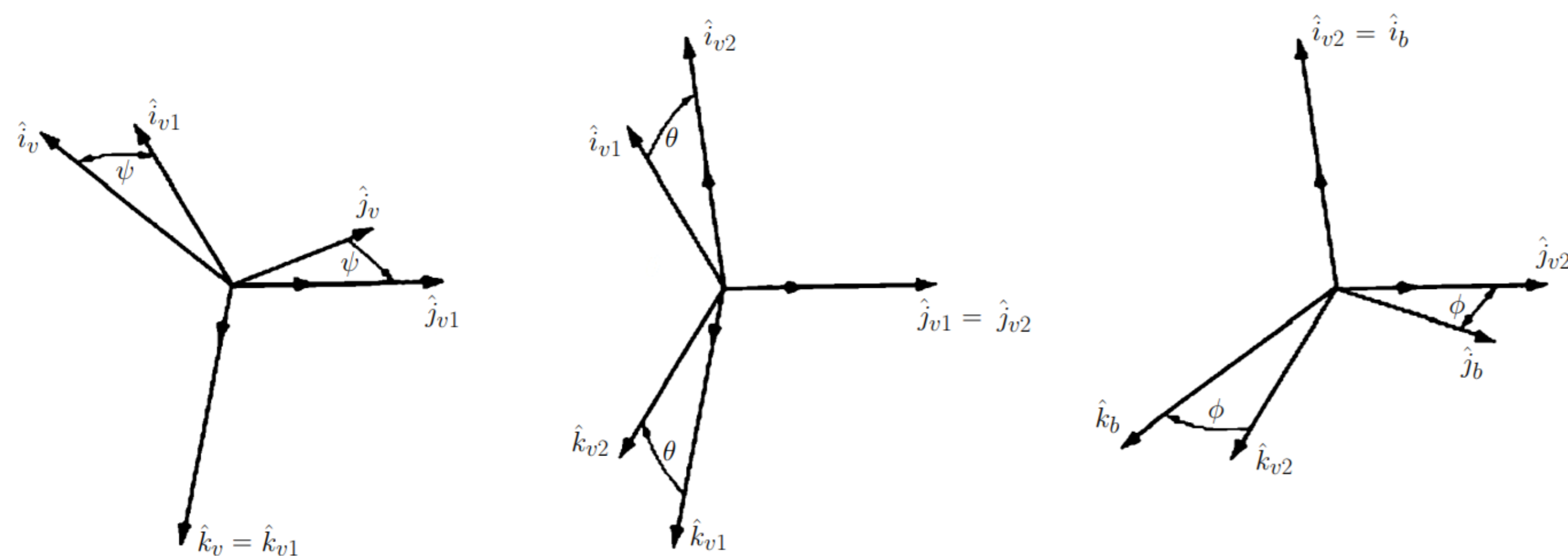


Figura 2: Representação das rotações entre os sistemas de coordenadas O_v e O_b . Fonte: adaptado de [1].

As transformações da orientação de um sistema para outro podem ser representadas por matrizes de rotação, as quais são apresentadas a seguir, sendo R_a^b a matriz que leva de um sistema O_a para O_b :

$$R_i^v = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{v1}^v(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{v1}^{v2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad R_{v2}^b(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

A rotação completa é obtida multiplicando sequencialmente as matrizes individuais. A matriz resultante e sua inversa são definidas a seguir:

$$R_i^b(\phi, \theta, \psi) = R_{v2}^b(\phi) \cdot R_{v1}^{v2}(\theta) \cdot R_{v1}^v(\psi) \cdot R_i^v \quad R_i^{b-1} = R_i^b{}^T = R_b^i$$

Variáveis de Estado

As variáveis de estado relevantes e seus símbolos são apresentadas a seguir:

- Posição ao longo de \hat{i}_i em O_i : X
- Posição ao longo de \hat{j}_i em O_i : Y
- Posição ao longo de $-\hat{k}_i$ em O_i : Z
- Velocidade ao longo de \hat{i}_b em O_b : u
- Velocidade ao longo de \hat{j}_b em O_b : v
- Velocidade ao longo de \hat{k}_b em O_b : w
- Ângulo de rotação ao longo de \hat{i}_{v2} em O_{v2} : ϕ
- Ângulo de rotação ao longo de \hat{j}_{v1} em O_{v1} : θ
- Ângulo de rotação ao longo de \hat{k}_v em O_v : ψ
- Velocidade angular ao longo de \hat{i}_b em O_b : p
- Velocidade angular ao longo de \hat{j}_b em O_b : q
- Velocidade angular ao longo de \hat{k}_b em O_b : r

Tais variáveis podem ser agrupadas em quatro vetores tridimensionais:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Obtenção das Equações Dinâmicas

A equação diferencial da posição é a própria velocidade no sistema do corpo rotacionada do referencial do corpo para o inercial, conforme a Equação (1). O operador $\dot{(\cdot)}$ representa a derivada temporal.

$$\dot{\vec{S}} = R_b^i \cdot \vec{v} \quad (1)$$

A relação entre as posições e as velocidades angulares é obtida pela Equação (2), a partir da qual define-se a matriz H , conforme a Equação (3). Obtém-se assim a equação diferencial das posições angulares, conforme Equação (4).

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = R_{v2}^b(\phi) \cdot \left(\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + R_{v1}^{v2}(\theta) \cdot \left(\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + R_{v1}^v(\psi) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cdot \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cdot \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3) \quad \dot{\vec{\Phi}} = H^{-1} \cdot \vec{\omega} \quad (4)$$

A obtenção das equações diferenciais das velocidades parte da segunda lei de Newton, a qual somente é válida em referenciais inerciais. Essa lei é apresentada em sua forma translacional pela Equação (5) e em sua forma rotacional pela Equação (6). Nessas equações \vec{F} e \vec{T} representam as forças e os torques e \vec{P} e \vec{L} representam os momentos lineares e rotacionais. Tais grandezas são medidas em O_i . Além disso m representa a massa do veículo e J representa a matriz de inércia do veículo em O_b .

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} = \frac{d}{dt} \{ R_b^i \cdot m \cdot \vec{v} \} \quad (5) \quad \vec{T} = \dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \{ R_b^i \cdot J \cdot \vec{\omega} \} \quad (6)$$

Isolando as variáveis de interesse, as Equações (5) e (6) tornam-se as Equações (7) e (8). Nessas equações \vec{f} e $\vec{\tau}$ denotam as forças e os torques medidos em O_b . A matriz Ω é definida pela Equação (9).

$$\dot{\vec{v}} = \frac{1}{m} \cdot \vec{f} - \left(\Omega + \frac{\dot{m}}{m} \cdot I \right) \cdot \vec{v} \quad (7) \quad \dot{\vec{\omega}} = J^{-1} \cdot \left(\vec{\tau} - \left(\Omega \cdot J + \dot{J} \right) \cdot \vec{\omega} \right) \quad (8)$$

$$\Omega = R_b^i \cdot \dot{R}_b^i = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Sistema de Equações Diferenciais

O sistema é composto pelas Equações (1), (4), (7) e (8). Obtém-se assim 12 equações diferenciais, enunciadas abaixo. Para simplificar, foi considerado que J é uma matriz diagonal cujos elementos são J_x, J_y e J_z . Tal aproximação torna-se válida devido a simetria de um quadricóptero.

$$\dot{X} = u \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi + v \cdot (\sin \phi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi - \cos \phi \cdot \sin \psi) + w \cdot (\cos \phi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi + \sin \phi \cdot \sin \psi)$$

$$\dot{Y} = u \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi + v \cdot (\sin \phi \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi + \cos \phi \cdot \cos \psi) + w \cdot (\cos \phi \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi - \sin \phi \cdot \cos \psi)$$

$$\dot{Z} = -u \cdot \sin \theta + v \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta + w \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta$$

$$\dot{u} = \frac{1}{m} \cdot f_x + r \cdot v - q \cdot w - \frac{\dot{m}}{m} \cdot u$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m} \cdot f_y + p \cdot w - r \cdot u - \frac{\dot{m}}{m} \cdot v$$

$$\dot{w} = \frac{1}{m} \cdot f_z + q \cdot u - p \cdot v - \frac{\dot{m}}{m} \cdot w$$

$$\dot{p} = \frac{\tau_x - \dot{J}_x \cdot p + (J_y - J_z) \cdot q \cdot r}{J_x}$$

$$\dot{q} = \frac{\tau_y - \dot{J}_y \cdot q + (J_z - J_x) \cdot p \cdot r}{J_y}$$

$$\dot{r} = \frac{\tau_z - \dot{J}_z \cdot r + (J_x - J_y) \cdot p \cdot q}{J_z}$$

$$\dot{\phi} = p + q \cdot \sin \phi \cdot \tan \theta + r \cdot \cos \phi \cdot \tan \theta$$

$$\dot{\theta} = q \cdot \cos \phi - r \cdot \sin \phi$$

$$\dot{\psi} = q \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \theta} + r \cdot \frac{\cos \phi}{\tan \theta}$$

Forças e Torques

A determinação de como as velocidades dos rotores se transmitem em forças e torques está intrinsecamente ligada a configuração do quadricóptero. A Figura 3 ilustra tais relações para um quadricóptero em configuração “+”. Nesse caso, valem as Equações (10) e (11), as quais consideram também o efeito da gravidade. Nessas equações, g corresponde a aceleração da gravidade, C_t e C_p são constantes de força e torque dos rotores e r é a distância entre o centro do veículo e cada um dos rotores. Além disso, $\omega_f, \omega_d, \omega_e$ e ω_t representam as velocidades angulares dos rotores da frente, direita, esquerda e de trás, respectivamente.

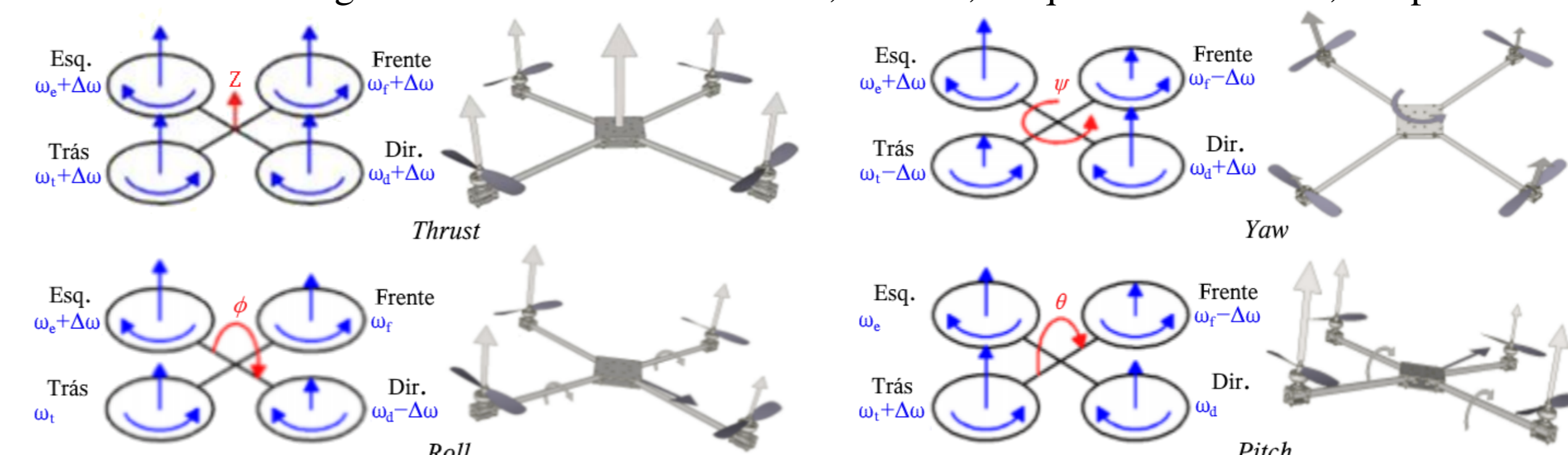


Figura 3: Relação entre as velocidades angulares dos rotores e as forças e torques. Fonte: adaptado de [2].

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cdot g \cdot \sin \theta \\ -m \cdot g \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta \\ C_t \cdot (\omega_f^2 + \omega_d^2 + \omega_e^2 + \omega_t^2) - m \cdot g \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot C_t \cdot (\omega_e^2 - \omega_d^2) \\ r \cdot C_t \cdot (\omega_t^2 - \omega_f^2) \\ C_p \cdot (\omega_d^2 + \omega_e^2 - \omega_f^2 - \omega_t^2) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Conclusões

Com o sistema de equações diferenciais que rege a dinâmica de um VANT e as equações de forças e torques de um quadricóptero o modelo matemático deste veículo está completo. A construção da estrutura do controlador de voo é intimamente dependente deste modelo. Este tópico será estudado na sequência deste projeto. Além disso, o modelo torna possível a realização de simulações numéricas, as quais são de grande importância para a validação de um controlador antes de um teste de campo.

Referências

- [1] Robert C. Nelson. *Flight Stability and Automatic Control*. McGraw-Hill, Singapore, 2 edition, 1997.
- [2] Francesco Sabatino. *Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation*. Master's thesis, KTH, 2015.