VOZES DIVERSAS DIFERENTES SABERES

Salão UFRGS 2018 CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO

SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC

Inversão e Projeção Estereográfica na Geometria Hiperbólica

Victória Corrêa Alves

Orientadora Miriam Telichevesky

1 Motivação

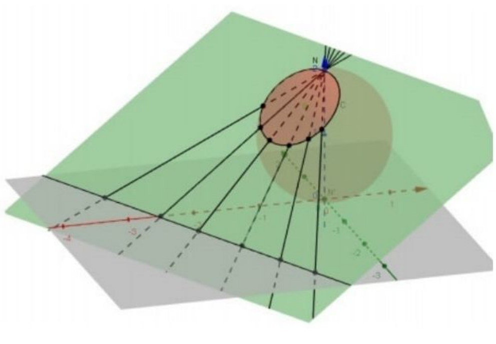
Neste trabalho abordamos a projeção estereográfica e a inversão em relação a uma circunferência no plano, com o intuito de relacionar essas transformações com os modelos do disco e do semiplano superior da Geometria Hiperbólica. Essas transformações podem ser utilizadas como ferramenta para o estudo de propriedades desses modelos e também podem auxiliar a interpretação geometrica da ortogonalidade de curvas.

2 Projeção Estereográfica

Consideramos a esfera unitária $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e dela retiramos o ponto N=(0,0,1), que chamaremos de Pólo Norte. Consideramos o plano XOY denotado por σ e tomemos um ponto M $\neq$ N sobre a esfera, definiremos a projeção estereográfica como a função $\varphi : S^2 - \{N\} \to \sigma$ tal que:

$$M \to \varphi(M) = N\vec{M} \cap \sigma$$

A projeção estereográfica é um mapa que projeta a esfera unitária no espaço tridimensional em um plano, com exceção de um ponto de projeção.

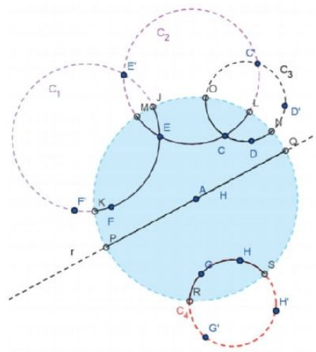


3 Inversão

A inversão do plano tangente no ponto S, em relação à circunferência com centro em S, pode ser vista como uma composição da inversa da projeção estereográfica e duas reflexões e ela, assim como a projeção estereográfica, transforma linhas retas e circunferências em circunferências e linhas retas, além de preservar ângulos.

4 Inversão, Ortogonalidade e Modelo de Poincaré

O modelo de Poincaré é o interior de uma região circular H, onde as retas são as intersecções de circunferências e retas ortogonais a H, com H. Para que retas sejam ortogonais a uma circunferência fronteira de H é necessário que elas sejam ortogonais às retas tangentes no ponto de intersecção, ou seja, devem passar pelo centro da circunferência que define H. Podemos obter circunferências que sejam ortogonais à fronteira de H utilizando a transformação inversão. Sejam C1,C2,C3 e C4 circunferências ortogonais à H e r uma reta, fazendo a intersecção dessas com H, podemos visualizar o modelo de Poincaré:



5 Plano de Lobachevski

Como a função inversão no plano pode ser vista como a composição da inversa da projeção estereográfica e duas reflexões ela transforma circunferências e linhas retas em outras circunferências e linhas retas bem como preserva ângulos. A imagem da restrição da função inversão ao disco de Poincaré será o semiplano e, através de translações, podemos obter o semiplano superior, ou seja, essa composição transforma as retas do disco de Poincaré H em retas do modelo do semiplano superior de Poincaré. E isso permite a dedução de propriedades do modelo do disco através do modelo do semiplano superior e vice-versa.

6 Aplicação

O quinto postulado de Euclides, também conhecido como o postulado das paralelas, pode ser interpretado geometricamente no modelo de Poincaré através da projeção estereográfica. Ou seja, dada uma reta e um ponto fora dela, conseguimos encontrar infinitas retas paralelas à reta dada, passando pelo ponto dado.

7 Referências

- NUNES, Euderley de Castro. A esfera de Riemann: projeção estereográfica e aplicações, uma abordagem para o ensino médio. 2015. 64 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2015.
- LEIVAS, J. C. P. ; CAMACHO, G. G. . PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E INVERSÃO: UMA MOTIVAÇÃO PARA UMA GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA. Vidya (Santa Maria. Online) , v. 35 n.2, p. 215-236, 2015.