
Salão UFRGS 2018 — CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO

SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA
XXX SIC

15 A 19 OUTUBRO
CAMPUS DO VALE

UFRGS PROPESQ

# Um Pouco dos Modelos da Geometria Hiperbólica

**Autor: Humberto de Lima**
**Orientador: Álvaro Krüger Ramos**

## A Geometria Hiperbólica

Por quase dois mil anos os matemáticos se perguntaram se o **Quinto Postulado de Euclides** (que é equivalente a dizer que por um ponto não pertencente a uma reta, pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada) podia ser ou não obtido a partir dos outros quatro. Uma maneira de encontrar um contraexemplo, é assumindo o seguinte postulado.

**Postulado da geometria hiperbólica**: Por um ponto não pertencente a uma reta, pode-se traçar ao menos duas retas paralelas a reta dada.

De fato, ao tomarmos o postulado da geometria hiperbólica em vez do quinto postulado de Euclides, podemos encontrar **modelos** onde os quatro postulados de Euclides valem, mas não o quinto, sendo este substituído pelo postulado acima.
Neste sentido, um modelo para um sistema axiomático é obtido associando objetos já conhecidos aos termos indefinidos, de modo que os axiomas sejam convertidos em afirmações verdadeiras.

## Os Modelos da Geometria Hiperbólia

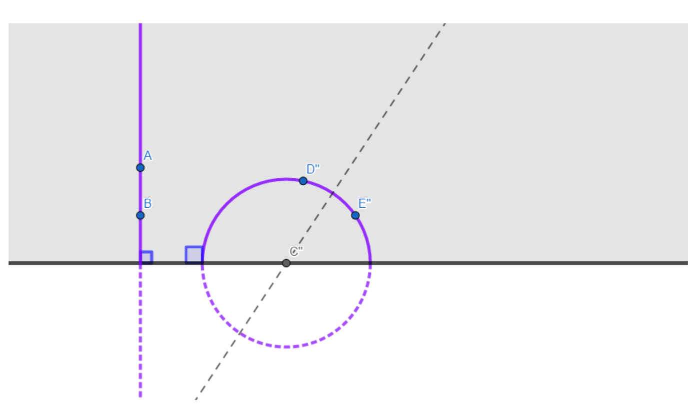
Conhecemos vários modelos para a geometria hiperbólica, dentre os quais estão os três que trataremos aqui: Semiplano de Poincaré, Disco de Poincaré, e Disco de Beltrami-Klein

### Modelo de Semiplano de Poincaré

O modelo do semiplano de Poincaré é o conjunto $S_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

Onde as retas hiperbólicas serão de dois tipos:

- A intersecção do semiplano com retas euclidianas perpendiculares a reta y=0
- A intersecção do semiplano com arcos de circunferência perpendiculares a reta y=0



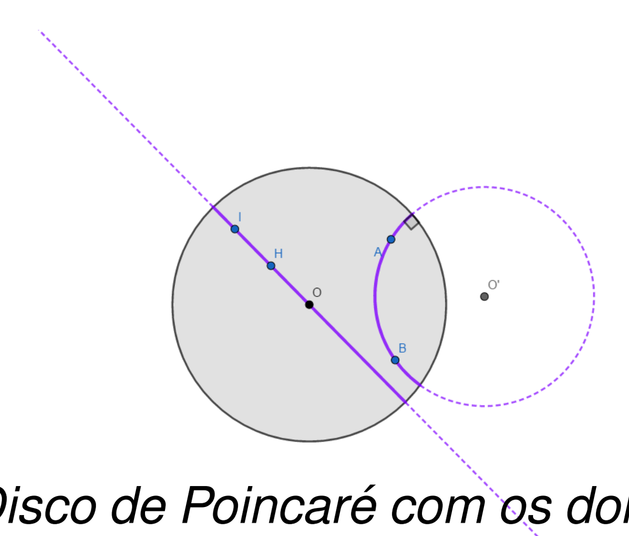
*Semiplano de Poincaré com os dois tipos de retas hiperbólicas. Note que as duas retas desenhadas são paralelas*

### Modelo do Disco de Poincaré

O modelo do Disco de Poincaré é o conjunto $D_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

Neste modelo, as retas hiperbólicas também podem ser de dois tipos:

- Retas euclidianas que passam pelo centro $O$
- Arcos de circunferência que interceptam ortogonalmente a fronteira do disco

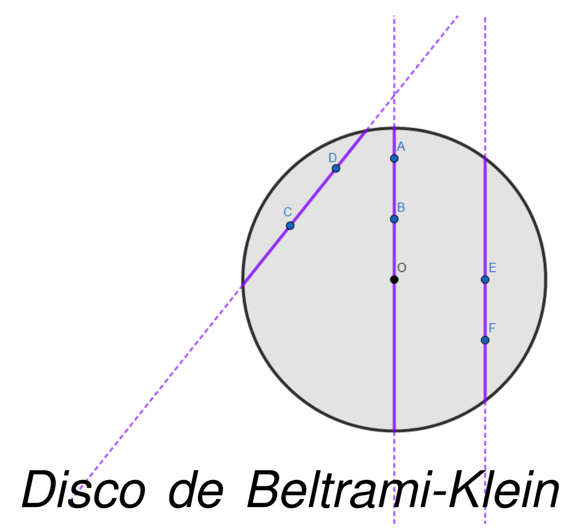


*Disco de Poincaré com os dois tipos de retas hiperbólicas. Note novamente que as retas desenhadas são parelalas.*

### Modelo do Disco de Beltrami-Kein

O modelo do Disco de Beltrami-Klein é o conjunto: $D_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

Agora as retas hiperbólicas são simplesmente a intersecção do disco de Beltrami-Klein com as retas euclidianas, ou seja, são as cordas abertas do disco.



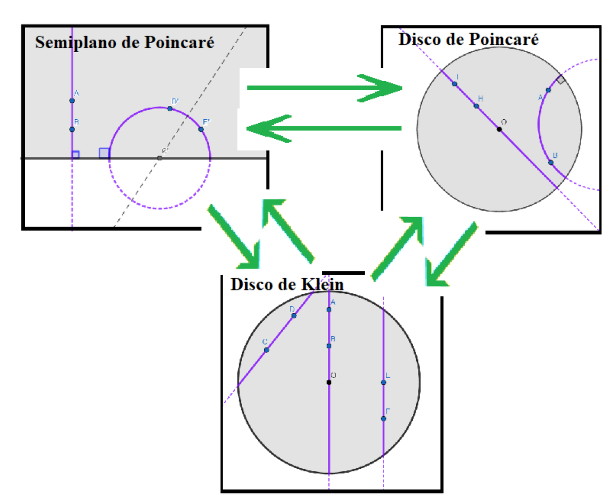
*Disco de Beltrami-Klein com retas hiperbólicas paralelas*

## Isomorfismo entre os Modelos

É importante ver se os modelos acima são equivalentes em algum sentido, ou seja, encontrar funções entre estes modelos que preservam as noções geométricas relevantes destes. Com essse intuito, definimos Isomorfismo entre modelos:

**Def: Isomorfismo entre Modelos**
Dois modelos $M_1$ e $M_2$ de um sistema axiomático são ditos isomorfos se existe uma correspondência biunívoca $\phi$ entre eles que associa o conjunto de pontos e retas de um para o conjunto de pontos e retas do outro, preservando todas as relações.
Isto é, se os termos definidos no sistema axiomático são "ponto", "reta"e "pertencer à", então $\phi$ deve satisfazer:

- Para cada ponto $P$ e reta $r$ em $M_1$, $\phi(P)$ e $\phi(r)$ são ponto e reta em $M_2$
- Se $P \in r$, então $\phi(P) \in \phi(r)$




*As setas indicam um isomorfismo entre os modelos*

## Conclusão

Quando inicia-se o estudo da geometria hiperbólica, usualmente recore-se a um dos modelos de modo a ganhar alguma intuição sobre o que está acontecendo. Entretanto, por vezes, ocorre de algum objeto ter uma interpretação interessante em outro modelo, tornando-se importante mapear um modelo no outro, para que se possa escolher o melhor para trabalhar.

## Referências

[1] Rocha, L. F. C. *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana*, **Impa** (1987).

[2] Cederverg, J. A. *A Course in Modern Geometries*, **Springer** (2001)

[3] Magalhães, J. M. *Um estudo dos Modelos da Geometria Hiperbólica* (2015)