VOZES DIVERSAS DIFERENTES SABERES

SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC

15 A 19 OUTUBRO CAMPUS DO VALE

UFRGS PROPESQ

Localização de Autovalores em Grafos com Pequeno Clique-Width

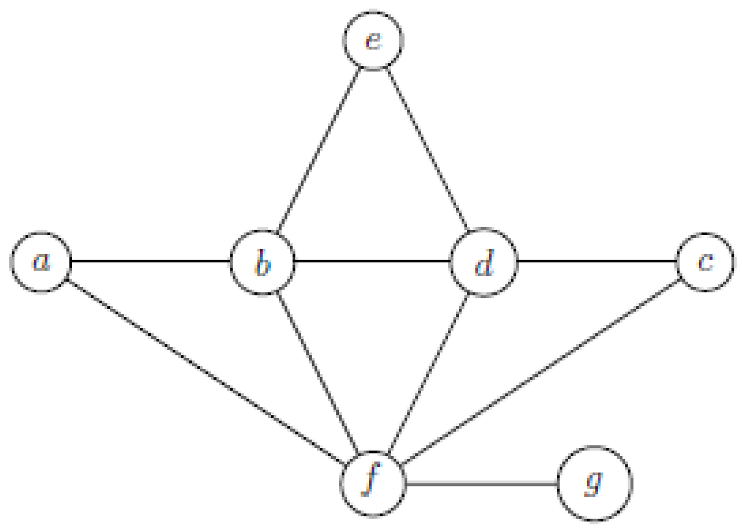
Rafael Jacobs Kehl (Bolsista PROPESQ - CNPq)

Carlos Hoppen (Professor Orientador)

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

1. Grafo

Um grafo é a representação matemática de uma rede qualquer. Ele é composto por vértices e arestas, que são pares não ordenados de vértices. O estudo dessas redes é chamado de Teoria dos Grafos.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Um grafo árvore e sua matriz de adjacências.

Existem diversas maneiras de se gerar grafos a partir de expressões algébricas. Uma *slick k-expressão* é uma expressão formada por átomos $i(v)$ e uma operação binária $\oplus_{S,L,R}$, onde L, R são funções de $[k]$ em $[k]$ e S é uma relação binária em $[k]$, onde $i(v)$ cria o vértice v com rótulo i, com $i \in [k]$ e dados dois grafos G e H cujos vértices possuem rótulos em $[k]$, o grafo rotulado gerado por $G \oplus_{S,L,R} H$ é obtido da seguinte maneira. Comece com a união disjunta de G e H, adicione arestas entre todos os vértices rotulados com $i \in G$ para todo vértice rotulado com $j \in H$ para todo $(i,j) \in S$. Em seguida, todo rótulo i da componente esquerda G é substituído por $L(i)$, e todo rótulo i da componente direita H é substituído por $R(i)$.

$$[1(f) \oplus_{\{(1,2)\},id,id} 2(g)] \oplus_{\{(1,2)\},\{2\to 1\},\{2\to 1\}}$$
$$[\{1(e)\} \oplus_{\{(1,2)\},id,\{1\to 2\}} \{((1(c) \oplus_{\{(1,2)\},id,id} 2(d))) \oplus_{\{(2,2)\},id,id} ((1(a) \oplus_{\{(1,2)\},id,id} 2(b)))\}]$$

Figura 2: Uma k-expressão que gera o grafo acima.

2. Objetivo

A Teoria Espectral de Grafos estuda a relação existente entre o espectro – conjunto de autovalores e suas respectivas multiplicidades algébricas – de matrizes associadas a grafos e propriedades estruturais dos grafos. A matriz mais comumente utilizada para representar um grafo é a matriz de adjacências, cujo espectro é dito espectro do grafo.

Neste contexto, M. Fürer, C. Hoppen, D. P. Jacobs e V. Trevisan desenvolveram um algoritmo que, dada uma *slick k-expressão* que gera um grafo G, encontra uma matriz diagonal D congruente a $B_c = A + cI$, para c um número real qualquer, onde A é a matriz de adjacências de G. A diagonalização é feita em um tempo da ordem de $O(poly(k)n)$ onde n é o número de vértices de G. Dessa forma, podemos rapidamente dizer quantos autovalores existem em um dado intervalo fazendo o uso da *Lei da Inércia de Sylvester*.

Este trabalho tem como objetivo implementar esse algoritmo para posteriormente estudar suas consequências em diferentes classes de grafos. Além disso, será mostrado o funcionamento do algoritmo através de um exemplo.

Teorema 1 ***(Lei da Inércia de Sylvester)*** *Duas matrizes reais simétricas de ordem $n \times n$ são congruentes se e somente se elas têm o mesmo número de autovalores negativos e o mesmo número de autovalores positivos.*

3. Algoritmo

Seja Q_G uma *k-expressão* de G e T a sua árvore sintática. O algoritmo então é aplicado processando os vértices da árvore T das folhas para a raiz e encontra uma matriz diagonal D congruente a $B = A - cI_n$. Note que um vértice $Q \in T$ é uma subexpressão da forma $Q = Q_l \oplus_{S,L,R} Q_r$. Um nodo Q produz uma estrutura chamada *k-box*, denotada por b_Q, que é uma 4-upla da forma $[k', k", M, \Lambda]$, onde k' e $k"$ são inteiros tais que $0 \leqslant k' \leqslant k" \leqslant k$, M é uma matriz de ordem $m \leqslant 2k$ e Λ é um vetor de m componentes com rótulos em $[k]$. Ao percorrer a árvore, o algoritmo irá inicializar uma nova box, caso o nodo seja uma folha, ou irá combinar as $boxes$ produzidas por seus filhos e, então, irá processar a nova box formada. Ao processar uma box, o algoritmo realiza operações simétricas na matriz M a fim de diagonalizá-la preservando a congruência. A matriz resultante D é diagonal com os valores obtidos ao diagonalizar cada matriz M.

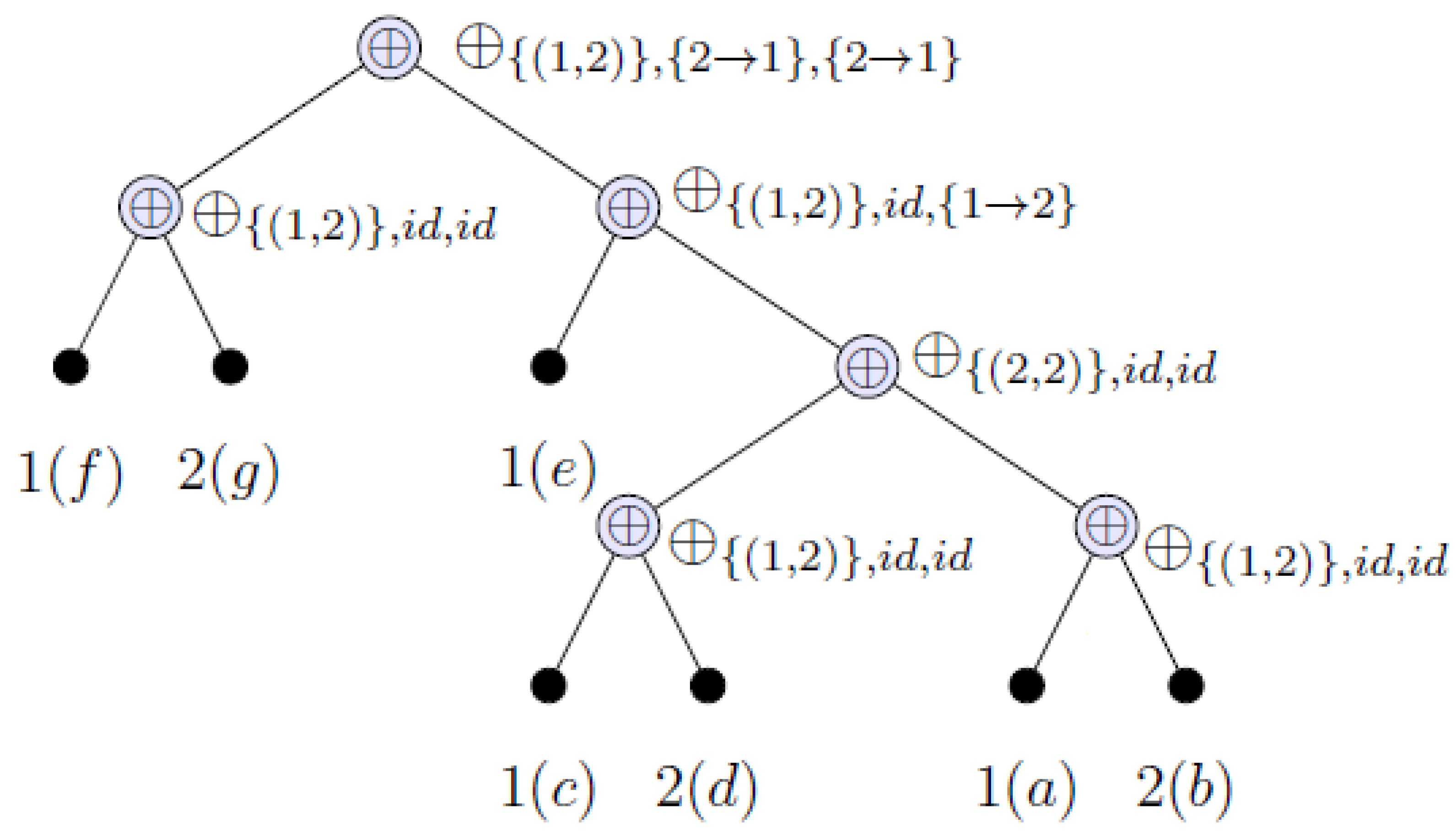


Figura 3: Árvore sintática da expressão que gera o grafo exemplo.

Referências

[1] M. Fürer, C. Hoppen, D. P. Jacobs, V. Trevisan Eigenvalue location in graphs of small clique-width. *arXiv:1710.09510*

[2] Reinhardt Diestel Graph Theory (2^{nd} edition) *Springer-Verlag*, 1:2–26, 12:251–277, 2000.

[3] N. Abreu, R. Del-Vecchio, V. Trevisan, C. Vinagre. Teoria Espectral de Grafos – Uma Introdução. *III° Colóquio de Matemática da Região Sul.*, 6:145–172, 2014.