VOZES DIVERSAS
DIFERENTES SABERES

Salão UFRGS 2018 CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO

SALÃO DE
INICIACAO CIENTIFICA
XXX SIC

15 A 19
OUTUBRO
CAMPUS DO VALE

UFRGS
PROPESQ

Quatérnios e Geometria no Espaço Tridimensional

Vinícius Fernandes Moretti
Orientador: Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Números Complexos ($\mathbb{C}$)

Um **número complexo** é uma matriz quadrada de ordem 2 da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \tag{1}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.
Podemos escrever

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = aE + bI$$

onde $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Para todo $A \in \mathbb{C}$, temos $EA = AE = A$ e ainda,

$$I^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$$

Desta forma, identificamos E como a unidade em $\mathbb{R}$ e I como a unidade imaginária i, de modo que obtemos a forma algébrica de um número complexo: $z = a + bi$.

Álgebra de divisão

Uma **álgebra de divisão** ou *skew-field* [2] é um espaço vetorial S com uma operação de multiplicação que associa a cada dois vetores x e y um terceiro vetor xy tal que são satisfeitas:

1. $a(xy) = (ax)y = x(ay)$, $\forall x, y \in S, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $(x+y)z = xz + yz$, $\forall x, y, z \in S$
3. $x(y+z) = xy + xz$, $\forall x, y, z \in S$
4. $\exists e \in S, e \neq 0, xe = ex = x$, $\forall x \in S$
5. Se $0 \neq a \in S$ e $b \in S$, $\exists! x \in S$ tal que $ax = b$ e $\exists! y \in S$ tal que $ya = b$.

Teorema

O espaço $\mathbb{R}^3$ não é uma álgebra de divisão real.

Quatérnios ($\mathbb{H}$)

Um **quatérnio** é uma matriz quadrada de ordem 4 da forma

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} \tag{2}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Podemos reescrever (2) como

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \tag{3}$$

onde $z = a + bi$ e $w = c + di$ são números complexos.

Segue que (3) pode ser escrita como

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} = aE + bI + cJ + dK$$

onde

$$E = \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

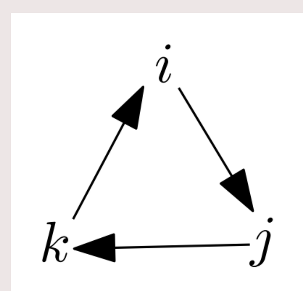
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, temos que um quatérnio é uma matriz da forma $aE + bI + cJ + dK$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sendo o seu conjunto detonado por $\mathbb{H}$, constituindo um espaço vetorial de dimensão 4.
Notemos que $I^2 = J^2 = K^2 = -E$. De posse dessas relações, podemos escrever também

$$IJ = -JI = K, \quad KI = -IK = J,$$
$$JK = -KJ = I \quad \text{e} \quad IJK = -E.$$

Identifaremos $E = 1$, $I = i$, $J = j$ e $K = k$, escrevendo os quatérnios em sua forma canônica $a + bi + cj + dk$.
Notemos também que a multiplicação em $\mathbb{H}$ não é comutativa. É útil observarmos o esquema e o quadro abaixo para a multiplicação de quatérnios.

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1



Escolhendo vértices p, q e r que seguem a ordem das setas no triângulo da figura teremos $pq = r$, caso contrário $pq = -r$.
Seja $q = a + xi + yj + zk$ em $\mathbb{H}$, onde $a, x, y, z \in \mathbb{R}$. Definimos a **parte escalar** e a **parte vetorial** de q, respectivamente, como

$$S(q) = a \quad \text{e} \quad V(q) = xi + yj + zk.$$

Definimos também o **conjugado** de q

$$\overline{q} = a - xi - yj - zk$$

e a **norma** de q

$$|q| = \left(a^2 + x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}.$$

Se $S(q) = 0$, dizemos que q é um **quatérnio puro**. Se $|q| = 1$, q é chamado de **quatérnio unitário**.

Teorema

$\mathbb{H}$ é uma álgebra de divisão real.

Quatérnios e Geometria

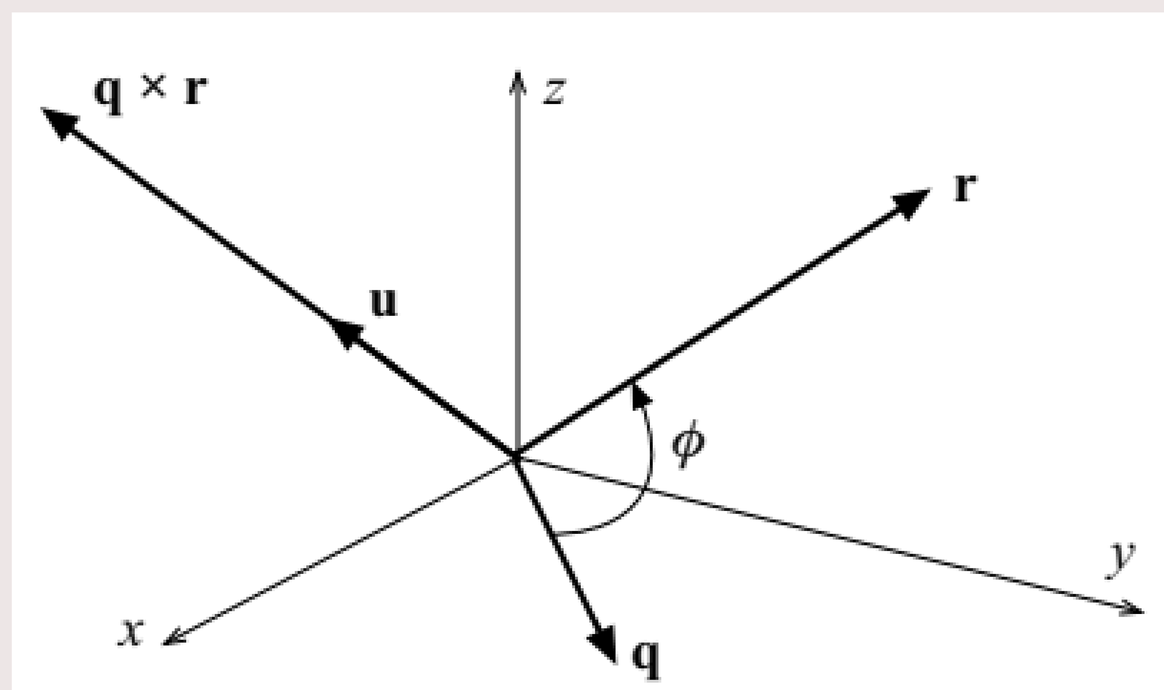
Um quatérnio puro representa um ponto no espaço tridimensional [1].

Teorema

Sejam q e r quatérnios puros. Então:

1. $S(qr) = -\langle q, r \rangle = |q|\,|r| \cos\phi$.
2. $V(qr) = q \times r = |q|\,|r| \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{u}$.
3. $qr = -\langle q, r \rangle + q \times r$.

O ângulo ϕ é o ângulo entre os vetores q e r, nesta ordem, e o vetor $\mathbf{u}$ é um quatérnio unitário puro, o qual representa um vetor unitário do espaço tridimensional perpendicular ao plano formado por q e r, respeitando a regra da mão direita.



Teorema

Todo quatérnio pode ser representado da forma

$$q = |q|\left(\cos\theta + \mathbf{u} \operatorname{sen}\theta\right),$$

onde $\mathbf{u}$ é um quatérnio unitário puro e $0 \leq \theta < 2\pi$.

Teorema

Seja $r = \cos\theta + \mathbf{u}\operatorname{sen}\theta$, onde $\mathbf{u}$ é um quatérnio unitário puro. Definamos operação R sobre um vetor q tal qual

$$R(q) = rqr^{-1}.$$

Temos, então, que $R(q)$ é uma rotação de q em torno do eixo $\mathbf{u}$ pelo ângulo 2θ. Mais ainda, toda rotação tridimensional em torno do eixo passando pela origem é escrita desta forma.

Desta forma, operações básicas da geometria tridimensional podem ser escritas utilizando a notação dos quatérnios, já que as relações os definem possuem caráter geométrico. Constatamos, portanto, o poder da linguagem algébrica sobre a geometria.

Referências

[1] Henle, Michael, *Which numbers are real?*, vol. 42, MAA, 2012.
[2] Weisstein, Eric W, *Division algebra*, http://mathworld.wolfram.com/DivisionAlgebra.html, [acesso em 01/set. 2018].