VOZES DIVERSAS DIFERENTES SABERES

Salão UFRGS 2018 — CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO

SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC

15 A 19 OUTUBRO CAMPUS DO VALE

UFRGS PROPESQ

Transferência Perfeita de Estado em Árvores

Eduardo David Nonnenmacher

Orientador: Vilmar Trevisan

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

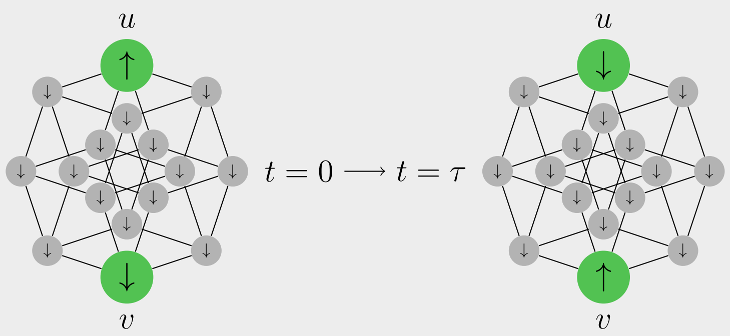
INTRODUÇÃO

Estamos interessados em determinar quais grafos, representando uma rede de qubits, admitem transferência de informação de um vértice para outro com probabilidade um. Se especificarmos certas condições as quais a rede deve satisfazer poderemos entender e estudar esse problema de uma perspectiva puramente algébrica. Nesse trabalho veremos algumas relações entre propriedades clássicas de grafos com propriedades motivadas pela teoria quântica e investigaremos se árvores admitem tranferência perfeita de estado.

MOTIVAÇÃO QUÂNTICA

Um **qubit** é o análogo quântico de um bit. Enquanto o bit assume valores no conjunto $\{0,1\}$ o estado de um qubit é descrito por um vetor unitário pertencente a um espaço de Hilbert de dimensão 2. Seja G um grafo com n vértices, estaremos supondo que cada vértice representa um qubit e as adjacências serão determinadas por algum modelo de acoplamento. Estamos interessados em investigar a seguinte pergunta:

Se configurarmos um grafo G de forma que o vértice u encontra-se num determinado estado, digamos *up*, e todos os demais vértices no estado ortogonal, existe um tempo τ tal que o vértice v encontra-se no estado *up* e todos os demais no estado ortogonal? Ou seja, é possível tranferir a informação de u para v com probabilidade 1?

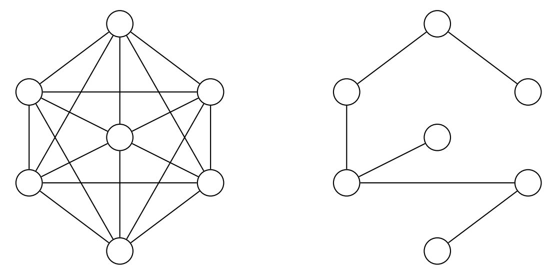


Caso tomarmos o modelo de acoplamento apropriado para tal configuração inicial a evolução do sistema é descrito pelo operador $exp(itA)$ ou $exp(itL)$, onde A é a matriz de adjacência e L a matriz laplaciana. Isso nos permite usar ferramentas advindas da teoria espectral de grafos para analisar nossa pergunta.

DEFINIÇÕES

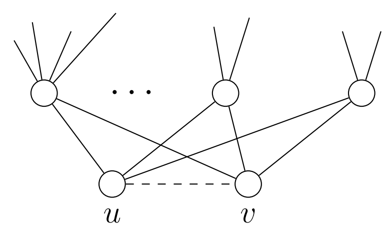
Entendemos por um **grafo** a dupla $G = (V, E)$, sendo V o conjunto dos vértices e E o conjunto das arestas, onde se $e \in E$ então $e = \{u, v\}$ sendo $u, v \in V$ com $u \neq v$. Seja D a matriz diagonal dos vértices de um grafo G (ou seja, a matriz D tal que $(D)_{ii}$ é o grau do i-ésimo vértice de G) e seja A a matriz de adjacência de G. A matriz $L = D - A$ é chamada a **matriz laplaciana** do grafo G.

Chamamos por **árvore geradora** o subgrafo $H(V', E')$ tal que $E' \subset E$ e $V' = V$, onde H é conexo e não possui ciclos. Note que um grafo pode admitir múltiplas árvores geradoras, denotamos por $\tau(G)$ o número de árvores geradoras de G.



À direita um exemplo de árvore geradora do grafo à esquerda.

Seja $N(u)$ o conjunto de vizinhos de um vértice u em G dizemos que u e v são **vértices gêmeos** se $N(u) \setminus v = N(v) \setminus u$. Note que u não é necessariamente adjacente a v.



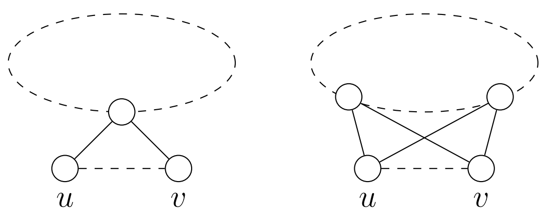
Exemplo de vértices gêmeos.

Seja M uma matriz Hermitiana e G o grafo associado, dizemos que G admite **tranferência perfeita de estado** de u para v se $\exists\ \tau \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\mathrm{e}^{itM} e_u = \lambda e_v$$

RESULTADOS

O **Teorema 1** nos permite associar transferência laplaciana perfeita de estado entre u e v com propriedades estruturais dos vértices.



Sem transferência laplaciana perfeita de estado entre u e v.

Os **Teoremas 2** e **3** são consequências do clássico resultado em teoria de grafos conhecido como **teorema da Matriz-Árvore** que afirma que o número de árvores geradoras de um grafo G é igual a qualquer cofator da matriz laplaciana L que o representa.

Teorema 1. Suponhamos que G não é o ciclo com quatro vértices nem o grafo completo K_4 menos uma aresta. Se u e v são gêmeos compartilhando exatamente um ou dois vizinhos, então tranferência laplaciana perfeita de estado não ocorre entre u e v.

Teorema 2. Se G possui um número ímpar de vértice e $\tau(G)$ é ímpar, então G não admite transferência laplaciana perfeita de estado.

Teorema 3. Nenhuma árvore com mais de dois vértices admite transferência laplaciana perfeita de estado.

A interpretação que damos ao **Teorema 3** é que se acomplarmos uma rede de qubit de forma que não haja ciclos então não haverá transferência laplaciana perfeita de estado. O que não sabemos ainda é que se essa rede admite transferência perfeita de estado associada a adjacência.

Computações feitas no `SAGE` garante que todas as árvores com até dez vértices, com exceção do caminho entre dois vértices P_2 e o caminho entre três vértices P_3, não admitem transferência perfeita de estado com relação a adjacência. O que nos leva a conjectura:

Conjectura. Nenhuma árvore, com exceção de P_2 e P_3, admite transferência perfeita de estado.

REFERÊNCIAS

[1] Gabriel de Morais Countinho, *Quantum State Transfer in Graphs*, University of Waterloo, Ontario, Canada, 2014.

[2] Gabriel Countinho, Henry Liu, *No Laplacian Perfect State Transfer in Trees*, Department of Combinatorics and Optimization University of Waterloo, Ontario, Canada, August 14, 2014.