SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC

15 A 19 OUTUBRO CAMPUS DO VALE

UFRGS PROPESQ

Localização de Autovalores da Matriz Laplaciana Perturbada de Grafos Unicíclicos

Rafaela Oliveira da Silva

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Orsini Braga

Definições Básicas

- Um **grafo** $G = G(V, E)$ de ordem n é uma estrutura constituída por um conjunto $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de vértices e por um conjunto E formado por subconjuntos de dois elementos de V, denominados arestas.
- **Grafos unicíclicos** são grafos conexos que contêm um único ciclo.
- **Árvores** são grafos conexos e sem ciclos.
- Dizemos que G é um **grafo com pesos** se a cada aresta $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$ é associado um número real não nulo $w(e_{ij}) = w_{ij}$ denominado peso da aresta e_{ij}.

Matriz Laplaciana Perturbada

As principais matrizes utilizadas para representar um grafo $G = G(V, E)$ são:

- **Matriz de adjacências**: $A = A(G)$ é a matriz de ordem $n \times n$, com entradas
$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$
- **Matriz laplaciana**: $L = L(G) = D_G - A$, onde D_G é a *matriz diagonal* dos graus dos vértices de G.
- **Matriz laplaciana normalizada**: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$ é a matriz de ordem $n \times n$, com entradas
$$\mathcal{L}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \text{ e } d_i > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$
onde d_i denota o grau do vértice $v_i \in V$.
- **Matriz laplaciana sem sinal**: $Q = Q(G) = D_G + A$, onde D_G é a *matriz diagonal* dos graus dos vértices de G.

Considerando grafos com pesos, podemos ver cada uma dessas matrizes como casos particulares de uma *matriz laplaciana perturbada*.

Dada uma matriz diagonal D, a **matriz laplaciana perturbada** de $G = G(V, E)$, com respeito a D, é a matriz $\mathbb{L}(G) = D - A(G)$, onde $A = (a_{ij})$ é a matriz de adjacências de G, com $a_{ij} = \omega_{ij}$ se $\{v_i, v_j\} \in E$, e 0 caso contrário.

- Se $D = 0$ e $w_{ij} = 1$, então $\mathbb{L}(G) = -A$.
- Se $D = D_G$ e $w_{ij} = 1$, então $\mathbb{L}(G) = L$.
- Se $D = D_G$ e $w_{ij} = -1$, então $\mathbb{L}(G) = Q$.
- Se $D = I$ e $\omega_{ij} = \frac{1}{\sqrt{d_i \cdot d_j}}$, então $\mathbb{L}(G) = \mathcal{L}$.

Algoritmos de Localização de Autovalores

- Em 2017, R. Braga V. Rodrigues e V. Trevisan [1] apresentaram um algoritmo para localização de autovalores de grafos unicíclicos, que permite determinar o número de autovalores da matriz de adjacências de um grafo unicíclico em um dado intervalo real.
- O algoritmo tem como entrada um grafo unicíclico G de ordem n e um número real α. Ele calcula os valores diagonais de uma matriz diagonal D_α congruente à $A(G) + \alpha I$, onde $A(G)$ é a matriz de adjacências de G e I é a matriz identidade.
- Consequentemente, pela Lei da Inércia de Sylvester:
  i. O número de autovalores de G que são maiores do que $-\alpha$ é o número de entradas positivas em D_α.
  ii. O número de autovalores de G que são menores do que $-\alpha$ é o número de entradas negativas em D_α.
  iii. A multiplicidade de $-\alpha$ como autovalor de G é o número de entradas nulas em D_α.
- Também em 2017, R. Braga e V. Rodrigues [2] apresentaram um algoritmo para localização de autovalores da matriz laplaciana perturbada de árvores.
- Esses algoritmos permitem calcular de forma eficiente o número de autovalores em um dado intervalo real, uma vez que são algoritmos de tempo linear e podem ser executados diretamente sobre os vértices e arestas desses grafos, sem a necessidade de obter explicitamente a matriz associada ao grafo. Constituem-se assim em uma ferramenta útil para obter propriedades espectrais desses grafos.

Resultados Novos

- **Neste trabalho, adaptamos o algoritmo de localização de autovalores de grafos unicíclicos [1] para qualquer matriz laplaciana perturbada associada a esses grafos.**
- Utilizando este algoritmo, obtivemos, simultaneamente, propriedades espectrais de famílias de grafos unicíclicos para diferentes matrizes de representação. Abaixo apresentamos algumas dessas propriedades para grafos unicíclicos chamados de *centopeias fechadas*.
- Uma **centopeia fechada** é um grafo obtido tomando um ciclo C_b de ordem b adicionando pelo menos um pendente a cada nó do ciclo, conforme ilustra a Figura 1.

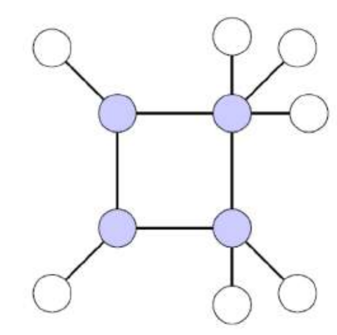


Figure 1: Centopeia Fechada

- **Teorema**: *Se $\mathcal{C}$ é uma centopeia fechada de ordem n e ciclo C_b, e A é a matriz de adjacências de $\mathcal{C}$, então para qualquer matriz diagonal D, cujas entradas na diagonal correspondentes aos pendentes de $\mathcal{C}$ são iguais a 1, a matriz laplaciana perturbada $\mathbb{L}(\mathcal{C}) = D - A(\mathcal{C})$ tem b autovalores maiores que 1 e b autovalores menores que 1. Além disso, a multiplicidade de 1 como autovalor de $\mathbb{L}(\mathcal{C})$ é $n - 2b$.*
- O resultado acima vale, em particular, para as matrizes L, Q e $\mathcal{L}$.
- Denotamos por $C_3(p, p, 0)$, com $p \geq 1$, o grafo unicíclico obtido adicionando exatamente p pendentes a exatamente dois dos vértices do triângulo C_3, conforme ilustra a Figura 2.

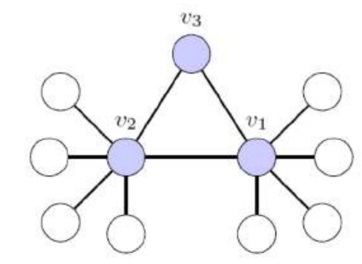


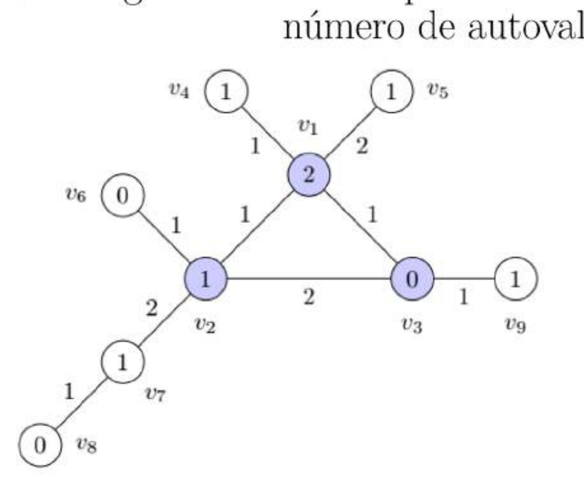
Figure 2: Grafo Unicíclico $C_3(4, 4, 0)$

- Utilizando nosso algoritmo, obtivemos os seguintes espectros de $C_3(p, p, 0)$ para diferentes matrizes.

Espectro de $C_3(p, p, 0)$ para as matrizes:	
Adjacências	$\left\{0^{2p-1},\ \frac{-1\pm\sqrt{1+4p}}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{9+4p}}{2}\right\}$
Laplaciana	$\left\{1^{2p-2},\ \frac{p+4\pm\sqrt{p^2+8p+4}}{2},\ \frac{p+4\pm\sqrt{p^2+4}}{2}\right\}$
Laplaciana Normalizada	$\left\{0,\ 1^{2p-1},\ \frac{2p+3}{p+2},\ \frac{2p+5\pm\sqrt{4p^2+8p+1}}{2(p+2)}\right\}$

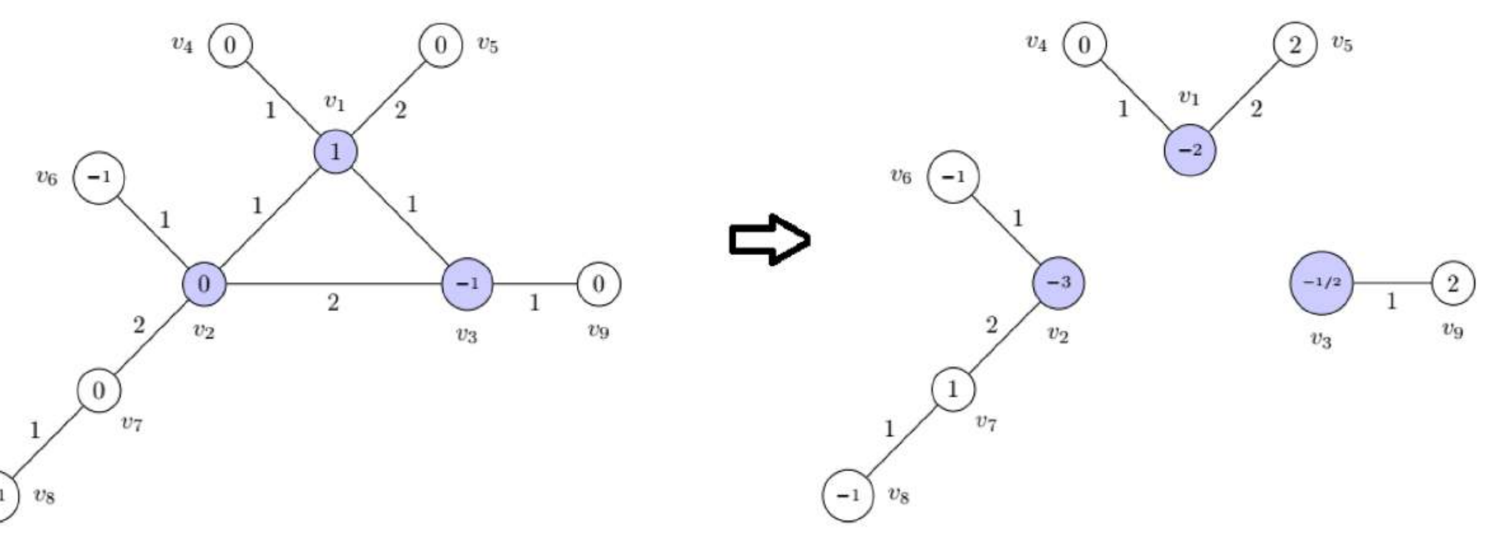
Exemplo

Para o grafo G da figura abaixo e respectiva matriz laplaciana perturbada $\mathbb{L}(G)$, vamos determinar o número de autovalores no intervalo $(0, 1)$:



$$\mathbb{L}(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando o algoritmo para $\mathbb{L}(G)$, com $\alpha = -1$, os vértices são inicializados com $d_{ii} - 1$, como ilustrado no lado esquerdo da figura abaixo.



- O lado direito da figura acima mostra que o algoritmo produziu cinco valores negativos, três valores positivos e um valor zero, concluímos que $\mathbb{L}(G)$ tem cinco autovalores menores que 1, três autovalores maiores que 1 e um autovalor igual a 1.
- Aplicando o algoritmo para a mesma matriz $\mathbb{L}(G)$, com $\alpha = 0$, o algoritmo produziu quatro valores negativos, cinco valores positivos e não produziu zeros, logo $\mathbb{L}(G)$ tem quatro autovalores negativos e cinco autovalores positivos.
- *Conclusão*: O grafo tem exatamente um autovalor no intervalo aberto $(0, 1)$.

Referências

[1] R. O. Braga, V. M. Rodrigues, V. Trevisan, Locating eigenvalues of unicyclic graphs. Applicable Analysis and Discrete Mathematics 11 (2) (2017) 273-298.

[2] R. O. Braga, V. M. Rodrigues, Locating eigenvalues of perturbed Laplacian matrices of trees. In: TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos 18 (3) (2017) 479-491.