VOZES DIVERSAS DIFERENTES SABERES
Salão UFRGS 2018 CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO
SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC
15 A 19 OUTUBRO CAMPUS DO VALE
UFRGS PROPESQ

Soluções de Equações Integrais Singulares por Métodos Espectrais

Autora: Ana Paula Giussani Mocellin
Orientador: Leandro Farina
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Instituto de Matemática e Estatística

Equações Integrais

Uma **equação integral** é uma equação na qual a função desconhecida $u(x)$ deve ser determinada, aparece sob o sinal integral. Uma forma típica de uma equação integral em $u(x)$ é

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt$$

onde $K(x,t)$ é chamado de núcleo da equação integral. Chamamos de **equação integral singular** se um ou ambos os limites de integração torna-se infinito, ou se o núcleo $K(x,t)$ da equação se torna infinito em um ou mais pontos no intervalo de integração.
Uma equação integral singular unidimensional do primeiro tipo com núcleo de Cauchy, também conhecida como *equação do aerofólio*, é muito comum em várias areas de aplicações de elasticidade e mecânica dos fluídos e pode ser escrita como

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\phi(t)}{x-t}dt = f(x),\ x \in (a,b)$$

onde a integral é definida no sentido de valor principal de Cauchy e $f(x)$ é uma função contínua conhecida definida no intervalo (a,b). Suas soluções dependem do comportamento de $\phi(t)$ nos extremos do intervalo (a,b) e são ditadas pela física dos problemas em que a equação integral aparece.
O objetivo desse trabalho é estudar a equação do aerofólio em intervalos disjuntos e um método espectral para resolver a versão generalizada desta equação.

Equação do Aerofólio

Vamos considerar a equação do aerofólio definida em intervalos disjuntos. Ou seja, consideramos um intervalo com uma pequena abertura de comprimento $2\varepsilon > 0$, dado por $G_\varepsilon = (-1,-\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$. Assim temos

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_\varepsilon(t)}{x-t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_\varepsilon(t)}{x-t}dt = -\psi(x),\ x \in G_\varepsilon$$

onde $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(t)$ é desconhecida e $\psi(x)$ é um dado do problema.

Um Método Espectral para a Equação do Aerofólio Generalizada em Intervalos Disjuntos

Consideramos a equação generalizada do Aerofólio em intervalos disjuntos, dada por

$$\frac{1}{\pi}\int_{G_\epsilon} \left\{ \frac{1}{x-t} + K(x,t) \right\} f_\epsilon(t) w(t) dt = h(x),\ x \in G_\epsilon \tag{1}$$

onde K é uma função regular e $w(t) = \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}$. É mostrado em [1], que a expressão

$$\frac{1}{\pi}\int_{G_\varepsilon} \frac{f_0(t)}{x-t}dt \approx -\psi(x),\ x \in G_\varepsilon,\ \varepsilon << 1 \tag{2}$$

é verificada por $\psi(x) = x^{-1}U_n$ e $f_0(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}T_{n+1}(x)$ onde U_n e T_{n+1} são polinômios de Chebyshev de segundo e primeiro tipo, respectivamente. Assim,

$$\frac{1}{\pi}\int_{G_\varepsilon} \frac{1}{x-t} T_{n+1}(t) \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}dt} \approx -x^{-1}U_n(x),\ x \in G_\varepsilon,\ \varepsilon << 1. \tag{3}$$

Expandimos a solução como

$$f_\varepsilon(t) \simeq \sum_{n=0}^{N} a_n T_{n+1}(t). \tag{4}$$

Substituindo em (1) e usando (3), obtemos

$$\sum_{n=0}^{N} a_n[-x^{-1}U_n(x) + \kappa T_{n+1}] = \psi(x) \tag{5}$$

onde κ é o operador integral dado por

$$\kappa(g) = \frac{1}{\pi}\int_{G_\varepsilon} K(x,t)g(t)w(t)dt$$

A equação (5) pode ser resolvida pelo método de Galerkin ou Colocação. O método espectral para resolver (1) consiste em (4) e (5).

Método da Colocação

O método de colocação é um método para a solução numérica de equações integrais, onde a solução aproximada satisfaz a equação em um número de pontos no domínio (chamados pontos de colocação) que são selecionados de modo a otimizar a convergência do método. No caso da equação do aerofólio, as escolhas foram os zeros polinômios de Chebyshev, que garantem a convergência da solução. Um código em Matlab está no momento sendo desenvolvido para a implementação deste método para a solução de (1).

Referências

[1] FARINA, L.; FERREIRA, M.R.S.; PÉRON, V., *The airfoil equation on near disjoint intervals: Approximate models and polynomial solutions.* Journal of Computational and Applied Mathematic, 2015.

[2] FARINA, L., *Ondas Oceânicas de Superfície (Notas em Matemática Aplicada).* 2.ed. São Carlos, SP: SBMAC, 2012.

[3] WAZWAZ, Abdul-Majid., *A first course in integral equations* 2.ed. Saint Xavier University, USA.