VOZES DIVERSAS DIFERENTES SABERES
Salão UFRGS 2018 CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO
SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC
15 A 19 OUTUBRO CAMPUS DO VALE
UFRGS PROPESQ

Autor: Adir Matos de Souza Júnior

REGULARIDADE DA FUNÇÃO DE CANTOR

INTRODUÇÃO

Este projeto aborda algumas características notáveis sobre o conjunto e a função de Cantor. O conjunto de Cantor, embora tenha medida zero, possui uma dimensão de Hausdorff maior que zero e menor que um. Já a função de Cantor, apesar de ser Hölder contínua e ter derivada igual a zero quase sempre, é monótona crescente, mas não é constante; além disso, ela não satisfaz o Teorema Fundamental do Cálculo, não sendo portanto uma função absolutamente contínua.

OBJETIVOS

Primeiramente definiremos os conceitos de medida de Hausdorff e dimensão de Hausdorff de um conjunto. Depois mostraremos que o conjunto de Cantor tem dimensão igual a log2/log3. Finalmente veremos que a função de Cantor tem expoente de Hölder igual a log2/log3 e que não satisfaz o Teorema Fundamental do Cálculo.

DESENVOLVIMENTO

Um primeiro conceito importante é o de diâmetro de um subconjunto da reta. Diâmetro de um conjunto F é o supremo das distâncias entre dois de seus pontos e será denotado por |F|.

Seja δ um número positivo. Uma δ-cobertura para um conjunto F é uma coleção enumerável de bolas $\{ B_i \}$, com diâmetro máximo δ, que cobre F. Isto é: F $\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ e $0 < |B_i| \leq \delta$.

Consideremos agora um subconjunto F da reta e um número d não negativo. Para cada número positivo δ definimos:

H_δ^d (F) = inf $\{\sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^d \ : \{B_i\}$ é $\delta-$cobertura para F$\}$.

Fazendo δ tender a zero, obtemos a medida de Hausdorff d-dimensional:

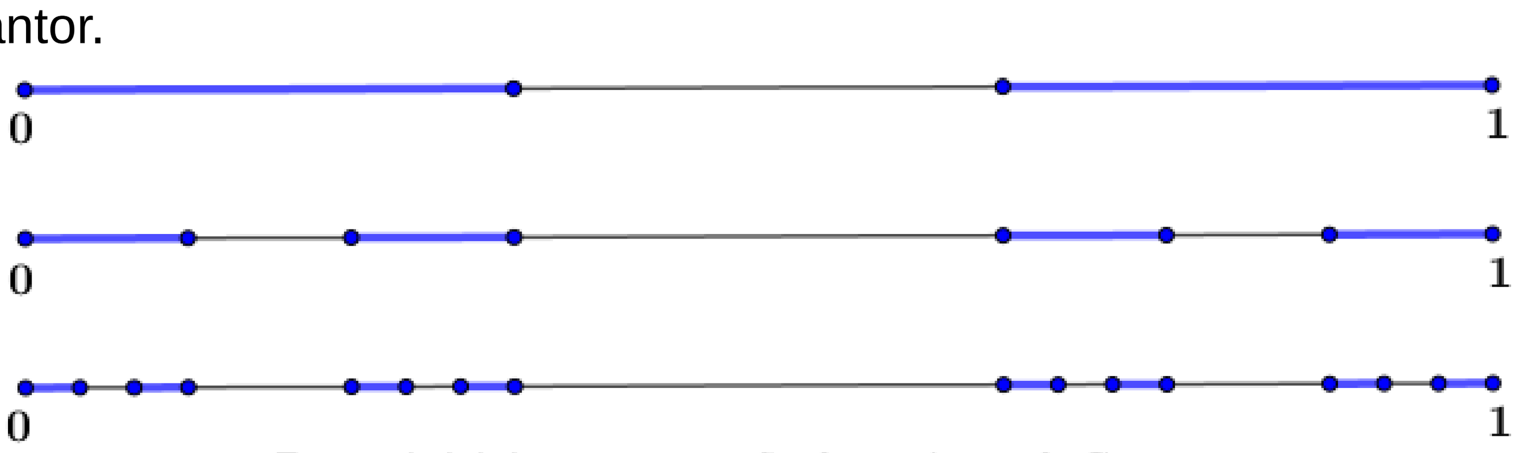
H^d (F) = $\lim_{\delta \to 0} H_\delta^d$ (F).

A medida de Hausdorff possui algumas propriedades interessantes, por exemplo, a medida de uma união enumerável disjunta de conjuntos abertos ou fechados é a soma das medidas de cada um dos conjuntos. Se F é um subconjunto da reta e λ é um número positivo, então a medida de Hausdorff d-dimensional do conjunto λF é igual a medida de F multiplicada por λ^d. Se v é um número real, então a medida de Hausdorff d-dimensional do conjunto F+v é igual a medida de F, onde F+v é o conjunto obtido somando-se v a cada um dos elementos de F.

Observe que a medida de Hausdorff depende do parâmetro d. Variando d, há um valor crítico do qual a medida salta de infinito para zero. O conjunto dos valores de d para os quais a medida de Hausdorff é zero e o conjunto dos valores de d para os quais a medida é infinita são intervalos disjuntos, enquanto que o conjunto dos valores de d para os quais a medida é positiva e finita tem no máximo um ponto. Assim definimos a Dimensão de Hausdorff de F como sendo este valor crítico d, e a denotamos por D_h(F). Mais precisamente, D_h(F) = inf { d : H^d (F) = 0 } = sup { d : H^d (F) = ∞ }.

Para valores de d maiores que a dimensão de Hausdorff de um conjunto, a medida de Hausdorff d-dimensional do conjunto é nula. E para valores de d menores que a dimensão de Hausdorff, a medida de Hausdorff é infinita. Descreveremos agora o conjunto de Cantor e algumas de suas propriedades.

O conjunto de Cantor K é um subconjunto do intervalo [0,1], obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo. Retira-se do intervalo [0,1] seu terço médio aberto $(1/3, 2/3)$. Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes [0, $1/3$] e [$2/3$, 1]. Sobram então os intervalos $[0,1/9]$, $[2/9,1/3]$, $[2/3, 7/9]$ e $[8/9,1]$. Em seguida retira-se o terço médio aberto de cada um desses quatro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor.

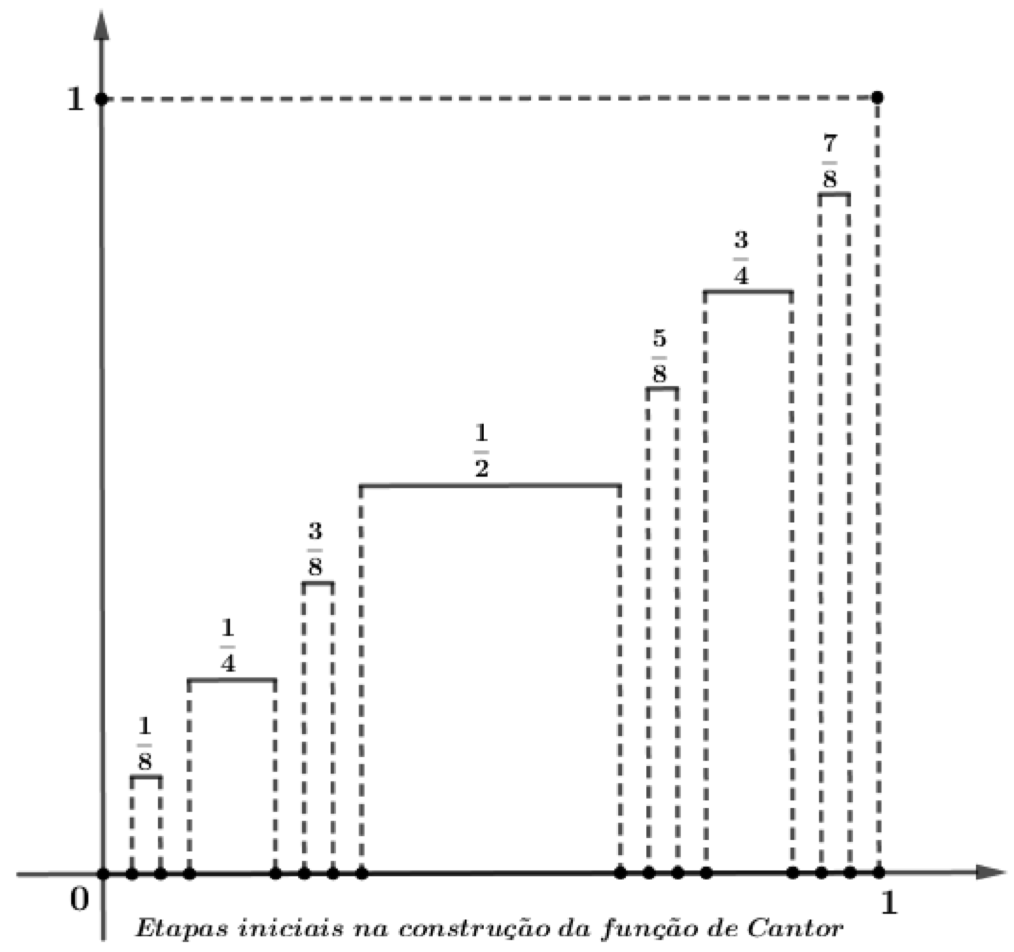


Etapas iniciais na construção do conjunto de Cantor

Assim, como o complementar de K é um conjunto aberto, temos que K fechado e limitado, ou seja, o conjunto de Cantor é compacto. Convém observar que depois da n-ésima etapa da construção de K restam 2^n intervalos fechados de comprimento $1/3^n$, os quais cobrem o conjunto de Cantor. Então, a medida de K é menor do que ou igual a $(2/3)^n$, para todo n. Isto mostra que a medida de K é igual a zero; por outro lado, a medida do complementar de K no intervalo [0,1], que vamos denotar por E, é igual a 1.

Porém, é possível demonstrar que para d = log2/log3, a medida de Hausdorff d-dimensional de K é um número entre $1/2$ e 1, e portanto D_h (K) = log2/log3.

Agora, definiremos a função f de Cantor. Nos extremos 0 e 1 do intervalo [0,1] definimos f(0) = 0 e f(1) = 1. Agora f será definida nos terços médios que compõem o conjunto E = [0,1] - K. No intervalo $(1/3, 2/3)$ definimos f como sendo 1/2. Depois, nos terços médios de comprimento $1/3^2$ definimos f como sendo 1/4 e 3/4, da esquerda para direita (ver figura abaixo). A seguir, nos terços médios de comprimento $1/3^3$, definimos f como sendo 1/8, 3/8, 5/8 e 7/8, respectivamente. Repetindo este processo indefinidamente, definimos a função f no complementar do conjunto de Cantor. Observe que nos terços médios que compõem o conjunto E, a função de Cantor tem como valores as frações diádicas, isto é, as frações da forma m/2^n. Por fim, definimos a função f nos pontos de K de maneira que ela seja contínua. Mais precisamente, em cada ponto x de K definimos f como sendo o limite dos valores f(y) com y tendendo a x e y ∈ E.



Etapas iniciais na construção da função de Cantor

Note que, pela própria maneira como definimos f, a função de Cantor é monótona crescente e contínua. Além disso, pode-se demonstrar que para quaisquer dois pontos x, y no intervalo [0, 1], tais que |y – x| < $1/3^n$, tem-se |f(y) – f(x)| ≤ $1/2^n$. Desse fato decorre que, para quaisquer x, y em [0, 1], | f(y) – f(x) | ≤ 2 |y-x|$^{log2/log3}$. Isto mostra que f é uma função Hölder contínua com expoente igual a log2/log3.

Além disso, como nos terços médios do conjunto E a função f é constante, e a medida de E é igual a 1, temos que a derivada de f é igual a zero quase sempre. Porém, como f não é constante no intervalo [0, 1], temos que f não satisfaz o Teorema Fundamental do Cálculo.

CONCLUSÃO

Apesar de a função de Cantor ser de Hölder com expoente α = log2/log3, ela não é absolutamente contínua, pois não satisfaz o Teorema Fundamental do Cálculo. Ou seja, existem funções de Hölder que não satisfazem o Teorema Fundamental do Cálculo.

REFERÊNCIAS

- Ziemer, William P. **Weakly Differentiable Functions.** Springer, 1989.
- Ziemer, William P. **Modern Real Analysis.** Springer, 2017.
- Arsie, Karla C. **Dimensão Espacial.** Departamento de matemática, Universidade Federal do Paraná, 2012 "https://docs.ufpr.br/~ewkaras/ic/karla08.pdf"
- Landim, Cláudio. **Measure Theory - Lecture 32: Cantor ternary set and function.** IMPA, 2018 "https://www.youtube.com/watch?v=e47L5PMYV0o&t=3919s"