Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Existência de Soluções Explosivas para Problemas Semilineares Elípticos

Nicolau Matiel Lunardi Diehl

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, 26 de Novembro de 2009.

Dissertação submetida por Nicolau Matiel Lunardi Diehl[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)

Banca Examinadora:
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)
Dr. José Afonso Barrionuevo (UFRGS)
Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano (UFRGS)

Data da Apresentação: 26 de Novembro de 2009.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes

Conteúdo

0.1 Resumo

Neste trabalho mostraremos a existência de solução para um problema semilinear elíptico com singularidade na fronteira. Estudamos problemas do tipo $\Delta u = k(x)f(u)$, sendo as funções k e u sujeitas a certas condições que serão apresentadas ao longo do texto. O problema é resolvido usando as idéias do método de sub e supersolução adaptadas ao problema.

0.2 Abstract

In this master thesis we show the existence of solution for a semilinear elliptic problem with singularity at the boundary. We study problems such as $\Delta u = k(x)f(u)$, where the fucntions k and u are assumed to satisfy certain conditions that we present througout the text. The problem is solved using the ideas of the method of sub and supersolution adapted to the problem.

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência de solução do seguinte problema modelo:

$$\begin{cases} \Delta u = k(x)f(u), \;\; u > 0, & x \in \Omega. \\ \;\; u = \infty & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

onde Ω é um domínio aberto em $\mathbb{R}^N (N > 2)$, e as funções k e f satisfazem as seguintes hipóteses:

(k1) k é não negativo, não constante igual a zero em Ω e tem a seguinte propriedade: se $x_0 \in \Omega$ e $k(x_0) = 0$, então existe um domínio Ω_0 tal que $x_0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ e $k(x) > 0$, $\forall x \in \partial\Omega_0$.

(k2) $k \in C^{\alpha_0}(\Omega)$, $\alpha_0 \in (0,1)$ e; além disso, ou $\sup\limits_{x\in\Omega}[d(x)]^{2-\beta}k(x) \leq C_0$, para algum $\beta \in (0,2]$ e alguma constante positiva C_0; ou $k \in L^q(\Omega)$ para algum $q > N/2$.

(f1) $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(s) > 0, \forall s \in \mathbb{R}$ ou $f \in C^1[0,\infty]$, $f(0) = 0$ e $f(s) > 0, \forall s > 0$.

(f2) $f'(s) > 0$ para $s > 0$.

(f3) $\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{F(s)}} ds < \infty$, $F'(s) = f(s)$, $a > 0$.

Tais problemas aparecem no estudo de movimentos subsônicos de um gás (ver [21]), o potencial elétrico em alguns corpos (ver [16]) e em Geometria Rimanniana (ver [7]). Mostramos a existência de solução para (1.1), no caso de Ω ser limitado (Teorema 3.3.5) e no caso de $\Omega = \mathbb{R}^N$, (Teorema 3.3.7).

Os casos particulares $f(u) = e^u$, e $f(u) = u^p$, $p > 1$, onde Ω é um aberto, limitado e conexo vem sendo intensamente estudados por muitos autores. O primeiro caso, quando $f(u) = e^u$, foi primeiramente estudado por Bieberbach [6] em 1916 onde $k(x) = 1$ e $N = 2$. Rademacher [22], usando as idéias de Bieberbach, mostrou que se Ω é limitado em $\mathbb{R}^3$ com fronteira C^2, então (1.1) tem única solução $u \in C^2(\Omega)$ com $|u(x) + 2 \ln d(x)|$ limitado em Ω, onde $d(x)$ é a função distância de x a fronteira de Ω. Em [18] Lijing Lu mostrou que (1.1) tem pelo menos uma solução clássica $u \in C^2(\Omega)$, com Ω sendo uma bola em $\mathbb{R}^N$ para $N \geq 1$ e $k^\alpha(\bar{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0, 1)$, com $k(x) > 0$ em $\bar{\Omega}$. E ainda, (1.1) tem no maximo uma solução clássica quando Ω é um domínio (aberto e conexo) estrelado e limitado em $\mathbb{R}^N$ e $k \in C(\bar{\Omega})$, com $k > 0$ em Ω. Em [16], Lazer e McKenna mostraram que se Ω é limitado em $\mathbb{R}^N$ e que se satisfaz a condição da esfera exterior $k \in C^{\bar{\Omega}}$ com $k > 0$ em $\bar{\Omega}$, então existe no máximo uma solução clássica de (1.1) e que para qualquer solução u, $|u(x) + 2 \ln d(x)|$ é limitada em Ω. Além disso, se $k \in C^\alpha(\Omega)$ com $k(x) > 0$ em Ω, e limitado superiormente, então existe uma solução clássica de (1.1). Eles deram diferentes provas de unicidade para Ω domínio estrelado e limitado, sem supor a suavidade de $\partial\Omega$. Em [25], Zhang mostrou que (1.1) tem uma solução clássica se Ω é limitado, aberto C^2 em $\mathbb{R}^N$ e k satisfaz $k > 0$ em Ω e as hipóteses:

(k2) $k \in C^{\alpha_0}(\Omega)$, $\alpha_0 \in (0, 1)$ e; além disso, ou $\sup\limits_{x\in\Omega}[d(x)]^{2-\beta} k(x) \leq C_0$ para algum $\beta \in (0, 2]$ e alguma constante positiva C_0; ou $k \in L^q(\Omega)$ para algum

$q > N/2$.

Para $f(u) = u^p$ ($p > 1$), segue de [3, 4, 12, 17] que se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é domínio limitado, suficientemente regular e k é positiva e suave em Ω, então existe uma única solução clássica $u \in C^\alpha(\Omega)$ de (1.1) tal que $C_1[d(x)]^{-2/p-1} \leq u(x) \leq C_2[d(x)]^{-2/p-1}$, $\forall x \in \Omega$, onde C_1 e C_2 são constantes positivas. Em [7] Cheng e Ni mostraram que (1.1) tem solução clássica se $\Omega \subset$ é domínio limitado, suficientemente regular e $k \in C^1(\bar{\Omega})$ é não negativo em Ω e estritamente positivo em $\partial\Omega$. Para $\Omega = \mathbb{R}^N$, supondo uma condição de positividade de k, eles provaram que se existe $\sigma > 2$ tal que $|x|^\sigma k(x)$ é limitado para $|x|$ grande, então (1.1) tem única solução clássica inteira (quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, uma solução explosiva inteira de (1.1) significa que $u(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$). Além disso, eles caracterizaram o comportamento assintótico da solução perto de ∞. Mais recentemente, Lair e Wood [15] provaram que se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suficientemente regular, limitado e que satisfaz a hipótese (k1), então (1.1) tem solução clássica. Em particular, eles mostraram que se k se anula em uma vizinhança de $\partial\Omega$, então (1.1) não tem solução clássica. Eles também mostraram que se $\Omega = \mathbb{R}^N$ e k satisfaz (k1) e (k3) $k \in C(\mathbb{R}^N)$ e $\int_0^\infty s\phi(s)$, onde $\phi(s) = \max\limits_{|x|=s} k(s)$, então (1.1) tem uma solução inteira se e somente se $p > 1$. Em [25], Zhang provou que se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto C^2, conexo e limitado, $k > 0$ em Ω e satisfaz (k2), então (1.1) tem uma solução clássica.

Para domínios limitados e convexos, a não unicidade, a unicidade e o comportamento assintótico de soluções de (1.1) foram discutidas e estendidas para os casos mais gerais de não linearidade, satisfazendo as hipóteses (f1),(f2) e (f3) e $k = 1$ em [1, 3, 5, 7, 10, 12, 16, 17, 19, 20, 24]). Neste trabalho é feito um estudo do problema (1.1), que estende os resultados obtidos por Lair e Wood em [15] e os resultados obtidos por Lazer e McKenna em [16], estes resultados foram provados por Tao e Zhang em [23]. Em particular, é construída a menor subsolução explosiva de (1.1) com $k(x)$ e $f(s)$ mais gerais. E ainda, quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, mostramos que (1.1) tem uma solução inteira $u \in C^2(\mathbb{R})$ para $f(s)$ mais gerais. A Seção 2.1 trata de enunciados de teoremas e definições de análise no $\mathbb{R}^N$ necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Na Seção 2.2 aparece um pouco da teoria clássica de EDP onde as principais referências bibliográficas são [8] e [9], e na Seção 2.3 apresentamos os Espaços de Sobolev. Os resultados de EDP utilizados como ferramenta neste trabalho aparecem na Seção 2.4, tratando geralmente de existência e unicidade de problemas com hipóteses mais fortes. No capítulo 3, inicialmente reapresentamos o problema e o transformamos em outro equivalente. Em seguida apresentamos essa transformação no caso $f(u) = e^u$ e $f(u) = u^p$. Na Seção 3.2, apresentamos o método de sub e super solução, adaptado ao problema. E por último demonstramos os resultados principais.

Capítulo 2

Considerações Iniciais

2.1 Resultados de Análise

Teorema 2.1.1. *Se* $f_n(x_0) \to y$ *e* $f_n'(x_0) \to g(x)$ *uniformemente em* $A \subseteq \mathbb{R}^N$*, então existe* $f : A \to \mathbb{R}$ *tal que* $f_n \to f$ *uniformemente e* $f' = g$*.*

Definição 2.1.2. Uma sequência $\{f_k\}$ é dita uniformemente equicontínua se para cada $\epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.1.3. *(Teorema de Arzela-Ascoli) Sejam* $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Suponhamos que a sequência* $\{f_k\}$ *seja uniformemente limitada, ou seja,* $|f_k(x)| \leq M$ *para* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *para alguma constante M, e a sequência* $\{f_k\}$ *é uniformemente equicontínua. Então existe uma subsequência* $\{f_{k_j}\} \subset \{f_k\}$ *e uma função contínua* f*, tal que* $f_{k_j} \to f$ *uniformemente em compactos de* $\mathbb{R}^n$*.*

Definição 2.1.4. Seja P uma propriedade. Dizemos que uma função f tem a propriedade P q.t.p. se f não satisfaz P apenas em um conjunto de medida nula.

Teorema 2.1.5. *(Teorema da Convergência Dominada). Sejam* f_k *integráveis* *e $f_k \to f$ q.t.p. com $|f_k| \leq g$ q.t.p. para alguma função g integrável. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Definição 2.1.6. Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência $\{u_k\} \subset H$ converge fracamente para $u \in H$ e escrevemos $u_{k_j} \rightharpoonup u$, se:

$$\phi(u_k) \to \phi(u), \text{ para cada } \phi \in H^*,$$

onde H^* é o espaço dual de H, ou seja $H^* = \{\phi : H \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ é linear e } \exists C > 0 \text{ tal que } |\phi(u)| \leq C\|u\|\}$.

Teorema 2.1.7. *Sejam H espaço de Hilbert, e (u_k) sequência limitada em H. Então existe uma subsequência $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$ e $u \in H$ tal que $u_{k_j} \rightharpoonup u$.*

2.2 Teoria Clássica de EDP

Definição 2.2.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Considere o operador L definido em $C^2(\Omega)$ por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x)u,$$

Dizemos que o operador L é uniformemente elíptico se existe uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$$

para todo $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.2.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Para $u \in C^2(\Omega)$. Definimos o *Laplaciano de u* por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}.$$

Definição 2.2.3. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Definimos

$$u^+ = \begin{cases} u & \text{se } u \geq 0. \\ 0 & \text{se } u < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Analogamente definimos

$$u^- = \begin{cases} 0 & \text{se } u \geq 0. \\ u & \text{se } u < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Teorema 2.2.4. *(Princípio Fraco do Máximo) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, conexo e limitado, e seja L uniformemente elíptico em Ω, com $c = 0$. Suponhamos que $Lu \leq 0$ $(Lu \geq 0)$ em Ω, onde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Então*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \ \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

Corolário 2.2.5. *Seja L uniformemente elíptico em Ω, com $c \leq 0$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, conexo e limitado. Suponhamos que $Lu \leq 0$ $(Lu \geq 0)$ em Ω, onde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Então*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \ \left(\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- \right).$$

Se $Lu = 0$ em Ω, então

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Teorema 2.2.6. *(Princípio Forte do Máximo)Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e conexo. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ em Ω, e L uniformemente elíptico em Ω, com $c \leq 0$.*
(i) Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge máximo em um ponto interior a $\bar{\Omega}$ então u é constante em Ω.
(ii) Se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge mínimo em um ponto interior a $\bar{\Omega}$ então u é constante em Ω.

Observação 2.2.7. Os dois teoremas acima são provados em [9], no caso geral em que Lu é um operador diferencial linear da forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

onde L é uniformemente elíptico em Ω.

Definição 2.2.8. Dizemos que u é subsolução (supersolução) do problema:

$$\begin{cases} Lu = 0, \quad u > 0, & x \in \Omega. \\ u = g & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Se $i)Lu \geq 0$ $(Lu \leq 0)$, em Ω e,
$ii)u \leq g$ $(u \geq g)$, em $\partial\Omega$.

2.3 Espaços de Sobolev

Definição 2.3.1. Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice, isto é, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ onde $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dizemos que v é a *α-ésima derivada fraca de u* se

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \, dx, \tag{2.4}$$

para qualquer função teste $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, onde $D^\alpha\phi = \frac{\partial^{\alpha_1}\cdots\partial^{\alpha_n}\phi}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Se este for o caso, escrevemos $D^\alpha u := v$.

Definição 2.3.2. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é definido como o espaço de funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ pertencentes a $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u$, a α-ésima derivada fraca de u, existe e pertence a $L^p(\Omega)$, para todo multi-indíce α tal que $|\alpha| \leq k$.

Definição 2.3.3. O supremo essencial é definido por $\inf\{c \in \mathbb{R}; |\{x \in \Omega; u(x) > c\}| = 0\}$ e denotado por $\sup_\Omega |u|$.

Definição 2.3.4. Podemos definir uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$ por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_\Omega |D^\alpha u| & \text{se } p = \infty \end{cases} \tag{2.5}$$

onde indicamos por $\sup\limits_\Omega |f|$ o supremo essencial de f em Ω.

Teorema 2.3.5. *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando equipado com a norma dada por* (2.5)*.*

Teorema 2.3.6. *(Teorema do Traço, ver em [8]) Seja Ω limitado e $\partial\Omega \in C^1$. Então existe um operador linear limitado:*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que:
(i) $T(u) = u\big|_{\partial\Omega}$, se $u \in W^{1,p} \cap C(\bar{\Omega})$ e
(ii) $||T(u)||_{L^p(\partial\Omega)} \leq C||u||_W^{1,p}(\Omega)$, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, onde a constante C depende apenas de p e Ω.

Definição 2.3.7. Denominamos $T(u)$ como o traço de u em $\partial\Omega$.

2.4 Alguns Teoremas de EDP

Teorema 2.4.1. *([9], ver Lema 6.10) Seja T uma porção $C^{1,\alpha}$, limitada (possivelmente vazia) de uma bola $B \in \mathbb{R}^n$ e seja $\phi \in C^0(\partial\Omega) \cap C^{2,\alpha}(T)$. Se L é um operador estritamente elíptico em B, com coeficientes em $C^\alpha(\bar{B})$ e com $c \leq 0$, e ainda $f \in C^\alpha(\bar{B})$. Então o problema de Dirichlet, $Lu = f$ em B, $u = \phi$ em ∂B, tem única solução $u \in C^{2,\alpha}(B \cup T) \cap C(\bar{B})$.*

Teorema 2.4.2. *([9], ver Teorema 6.13) Seja L uniformemente elíptico em Ω, aberto, conexo e limitado, com $c \leq 0$, e suponhamos que f e os coeficientes de L pertencentes a $C^\alpha(\Omega)$. Suponhamos que Ω satisfaz em cada ponto da fronteira a condição da esfera exterior. Se ϕ é contínua em $\partial\Omega$, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega. \\ u = \phi & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

tem única solução $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Teorema 2.4.3. *([9], ver Teorema 6.14) Seja L uniformemente elíptico em Ω, aberto, conexo e limitado, com $c \leq 0$, e suponhamos que f e os coeficientes de L pertencentes a $C^\alpha(\bar{\Omega})$. Suponhamos que $\Omega \in C^{2,\alpha}$. Se $\phi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega. \\ u = \phi & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

tem única solução $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Teorema 2.4.4. *([9], ver Corolário 8.36) Seja T uma porção $C^{1,\alpha}$, limitada (possivelmente vazia) de Ω, aberto, limitado e conexo, e suponhamos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca de $Lu = g + D_i f^i$ tal que $u = 0$ em T (no sentido do traço). Então $u \in C^{1,\alpha}(\Omega \cup T)$, e para qualquer $\Omega' \subset\subset (\Omega \cup T)$, temos*

$$|u|_{1,\alpha;\Omega'} \leq C(|u|_{0;\Omega} + |g|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

para $C = C(n, \lambda, K, d', T)$, onde λ é dado pela definição 2.2.1, $d' = dist(\Omega', \partial\Omega - T)$ e $K = \max\limits_{i,j=1\cdots n}\{|a^{ij}, b^i|_{0,\alpha;\Omega}, |c^i, d|_{0;\Omega}\}$.

Capítulo 3

Existência de Soluções Explosivas para Problemas Semilineares Elípticos

Consideremos o problema modelo

$$\begin{cases} \Delta u = k(x)f(u), \ \ u > 0, & x \in \Omega. \\ \ \ u = \infty & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio aberto em $\mathbb{R}^N (N > 2)$, e as funções k e f satisfazem as seguintes hípóteses:

(k1) k é não negativo, não constante igual a zero em Ω e tem a seguinte propriedade: se $x_0 \in \Omega$ e $k(x_0) = 0$, então existe um domínio Ω_0 tal que $x_0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ e $k(x) > 0$, $\forall x \in \partial\Omega_0$.

(k2) $k \in C^{\alpha_0}(\Omega)$, $\alpha_0 \in (0,1)$ e; além disso, ou $\sup\limits_{x\in\Omega}[d(x)]^{2-\beta}k(x) \leq C_0$ (onde $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$) para algum $\beta \in (0,2]$ e alguma constante positiva C_0; ou $k \in L^q(\Omega)$ para algum $q > N/2$.

(f1) $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(s) > 0, \forall s \in \mathbb{R}$ ou $f \in C^1[0,\infty)$, $f(0) = 0$ e $f(s) > 0, \forall s > 0$.

(f2) $f'(s) > 0$ para $s > 0$.

(f3) $\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{F(s)}} ds < \infty$, $F'(s) = f(s)$, $a > 0$.

Seja
(f4) $H(a) = \int_a^\infty \frac{1}{f(s)} ds < \infty$, onde $a > 0$ e $H(u) = \int_u^\infty \frac{1}{f(s)} ds$ e $w(x) = H(u(x))$.

Observação 3.0.5. No trabalho [14] o autor mostrou que o resultado principal pode ser obtido sem supor (f4).

Considerando (f4), podemos transformar (3.1) no seguinte problema de Dirichlet equivalente

$$\begin{cases} -\Delta w + g(w)|\nabla w|^2 = k(x),\, w > 0, & x \in \Omega. \\ \quad w = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $g(w) = f'(u) = f'(H^{-1}(w))$ e H^{-1} denota a função inversa de H (H e H^{-1} são estritamente decrescentes em $(0,\infty)$).
Prova:
1. Consideremos $\Delta u = k(x)f(u)$.
Como $u(x) > 0$ para $x \in \Omega$ e $f(s) > 0, \forall s \in (0,\infty)$, podemos reescrever a equação anterior,

$$\frac{\Delta u}{f(u)} = k(x).$$

Basta então verificarmos que

$$\frac{\Delta u}{f(u)} = -\Delta w + g(x)|\nabla w|^2.$$

Derivando

$$w(x) = H(u(x)) = \int_{u(x)}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds$$

em relação a x_i obtemos

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x_i} = H'(u(x))u_{x_i}(x) = -\frac{1}{f(s)}\bigg|_{u(x)} u_{x_i}(x) = -\frac{1}{f(u(x))} u_{x_i}(x) \qquad (3.3)$$

e derivando novamente em relação a x_i, obtemos

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{f(u(x))^2} f'(u(x))u_{x_i}(x)u_{x_i}(x) - \frac{1}{f(u(x))} u_{x_i x_i}(x).$$

Somando em i, obtemos

$$\Delta w = \frac{f'(u)}{f(u)^2}|\nabla u|^2 - \frac{\Delta u}{f(u)}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\Delta u}{f(u)} = -\Delta w + \frac{f'(u)}{f(u)^2}|\nabla u|^2. \qquad (3.4)$$

De (3.3), obtemos

$$|\nabla w|^2 = \frac{|\nabla u|^2}{f(u)^2}.$$

Agora, usando esta última igualdade em (3.4), obtemos

$$\frac{\Delta u}{f(u)} = -\Delta w + f'(u)|\nabla w|^2 = -\Delta w + g(w)|\nabla w|^2.$$

Vejamos agora que $u(x) = \infty$ para $x \in \partial\Omega \Leftrightarrow w(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$.

Como $\lim\limits_{M\to\infty}\int_a^M \frac{1}{f(s)}ds < \infty$, seja $\lim\limits_{M\to\infty}\int_a^M \frac{1}{f(s)}ds = K$.

Assim,

$$K = \int_a^M \frac{1}{f(s)}ds + \int_M^\infty \frac{1}{f(s)}ds, \ \forall M.$$

Fazendo $M \to \infty$, temos que

$$K = \int_a^\infty \frac{1}{f(s)}ds + \lim_{M\to\infty}\int_M^\infty \frac{1}{f(s)}ds = K + \lim_{M\to\infty}\int_M^\infty \frac{1}{f(s)}ds \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{y\to x} w(y) = \lim_{M\to\infty}\int_M^\infty \frac{1}{f(s)}ds = 0, \forall x \in \partial\Omega.$$

2.H e H^{-1} são estritamente decrescentes em $(0,\infty)$.

H: $H(a) = \int_a^\infty \frac{1}{f(s)}ds$, para $b > a > 0$, temos

$$H(a) - H(b) = \int_a^\infty \frac{1}{f(s)}ds - \int_b^\infty \frac{1}{f(s)}ds = \int_a^b \frac{1}{f(s)}ds > 0.$$

Logo H é decrescente e ,portanto, invertível.

H^{-1}: É decrescente pois é a inversa de uma função decrescente.

3.1 Dois exemplos desta transformação

1.Quando $f(s) = e^s$, temos $f'(s) = e^s$ e $w = e^{-u}$, como podemos verificar

$$w(x) = \int_{u(x)}^\infty \frac{1}{f(s)}ds = \int_{u(x)}^\infty e^{-s}ds = e^{-s}\Big|_{u(x)}^\infty = 0 + e^{-u(x)}.$$

E ainda,

$g(w) = f'(u) = e^u = \dfrac{1}{e^{-u}} = \dfrac{1}{w}$.

Logo o problema inicial se transforma em

$$\begin{cases} -\Delta w + \dfrac{|\nabla w|^2}{w} = k(x),\, w > 0, & x \in \Omega. \\ w = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

2.Quando $f(s) = s^p$ e $p > 1$, temos $w = \frac{1}{p-1}u^{p-1}$, como podemos verificar:

$$w(x) = \int_{u(x)}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds = \int_{u(x)}^{\infty} s^{-p} ds = \frac{1}{-p+1} s^{-p+1}\Big|_{u(x)}^{\infty} = \frac{-1}{-p+1} u(x)^{-p+1}.$$

Além disso,
$g(w) = f'(u) = pu^{p-1} = \dfrac{p}{(p-1)w}$.

Logo o problema inicial se transforma em:

$$\begin{cases} -\Delta w + \dfrac{p}{p-1}\dfrac{|\nabla w|^2}{w} = k(x),\, w > 0, & x \in \Omega. \\ w = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

3.2 Método de sub e super solução

Apresentamos agora um teorema de existência de solução, usando o método da subsolução e supersolução.

Teorema 3.2.1. *O problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = k(x) f(u), \;\; u > 0, & x \in \Omega. \\ u = m \in \mathbb{N} & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

tem solução $u_m \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ no intervalo ordenado $[\underline{u}_1, m]$. Além disso, vale o seguinte:

$$0 < H^{-1}(\underline{w}_1) \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_m \leq u_{m+1} \leq \cdots \;\; em\ \Omega.$$

Demonstração. Como $k \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ e satizfaz (k1), vemos que $\bar{u}_m = m$ é uma supersolução de (3.7):

$-\Delta \bar{u}_m = 0, \ \forall x \in \Omega$, e ainda $u_m = m, \ \forall x \in \partial\Omega$.

Para construir uma subsolução $\underline{u}_m$ de (3.7), definimos para cada $i \in \mathbb{N}$

$\underline{w}_i(x) = \int_{\underline{u}_i(x)}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds$, onde $\underline{w}_i(x) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ é a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta v = k(x), \ \ v > 0, & x \in \Omega. \\ v = \displaystyle\int_i^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Observação 3.2.2. Podemos tomar $\underline{w}_1$ assim pelo Lema 3.3.2.

Vemos que, se $i \leq m$,

$$\underline{u}_i \Big|_{\partial\Omega} = i \leq m$$

e $\underline{u}_i = H^{-1}(\underline{w}_i) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfaz

$$-\Delta \underline{w}_i = \frac{\Delta \underline{u}_i}{f(\underline{u}_i)} - \frac{f'(\underline{u}_i)}{f^2(\underline{u}_i)} |\nabla \underline{u}_i|^2 = k(x), \ \ x \in \Omega$$

$$\Updownarrow$$

$$-\Delta \underline{u}_i = k(x) f(\underline{u}_i) + \frac{f'(\underline{u}_i)}{f(\underline{u}_i)} |\nabla \underline{u}_i|^2, \ \ x \in \Omega$$

$$\Downarrow$$

$$-\Delta \underline{u}_i \geq k(x) f(u), \ \ x \in \Omega \Leftrightarrow \underline{u}_i \text{ é subsolução de (3.7)}$$

Logo, $\underline{u}_i$ é subsolução de (3.7) para todo $i \leq m$. Pelo Princípio Fraco do Máximo temos $\underline{u}_i \leq i \leq m$.

Para construirmos uma solução, vamos seguir os seguintes passos:

1. $\forall i, j \in \mathbb{N},$ com $i < j$ temos $\underline{u}_i \leq \underline{u}_j$.
Seja $\underline{w}_i(x) = \displaystyle\int_i^\infty \frac{1}{f(s)} ds$ em $\partial\Omega$. Fixa $i < j$.
Como $f(s) > 0,\ \forall s$, temos que $\underline{w}_i \geq \underline{w}_j$ em $\partial\Omega$. Logo $\underline{w}_j - \underline{w}_i \leq 0$ em $\partial\Omega$.
Temos ainda que $\Delta(\underline{w}_j - \underline{w}_i) = 0$ em Ω. Logo, pelo Princípio Fraco do Máximo

$$\underline{w}_j \leq \underline{w}_i,\ \forall x \in \Omega,\ \forall i < j.$$

Como H^{-1} é decrescente e $\underline{w}_1 > 0$ temos

$$0 < H^{-1}(\underline{w}_1) = \underline{u}_1 \leq \underline{u}_2 \leq \cdots \leq \underline{u}_m \leq \underline{u}_{m+1} \cdots \text{ em } \Omega.$$

2. $\underline{u}_m = \underline{u}_m^0 \leq \underline{u}_m^1 \leq \cdots \leq \underline{u}_m^k \cdots \leq \bar{u}_m$ em Ω.
Por (f1), $f \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists \lambda_{m+1} > 0$ tal que $|f'(z)| \leq \lambda_{m+1},\ \forall z \in [0, m+1]$.
Logo $k(x)(\lambda_{m+1} z - f(z))$ é crescente em z.
Seja $\underline{u}_m^1$ solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + k(x)\lambda_{m+1} u = k(x)\left(\lambda_{m+1}\underline{u}_m^0 - f(u_m^0)\right) & x \in \Omega. \\ u = m & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

E definimos indutivamente $\underline{u}_m^{k+1}$, como sendo solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + k(x)\lambda_{m+1} u = k(x)\left(\lambda_{m+1}\underline{u}_m^k - f(u_m^k)\right) & x \in \Omega. \\ u = m & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Como $\underline{u}_m^0$ é subsolução de (3.7), então

$$\Delta\underline{u}_m^0 \geq -k(x) f(\underline{u}_m^0),$$

o que implica,

$$
\begin{aligned}
-\Delta \underline{u}_m^0 + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_m^0 &\leq k(x)\left(\lambda_{m+1}\underline{u}_m^0 - f(\underline{u}_m^0)\right) \\
&= -\Delta \underline{u}_m^1 + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_m^1.
\end{aligned}
$$

Desta maneira, obtemos

$$
-\Delta \underline{u}_m^0 + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_m^0 \leq -\Delta \underline{u}_m^1 + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_m^1
$$

logo,

$$
\Delta(\underline{u}_m^1 - u_m^0) + k(x)\lambda_{m+1}(\underline{u}_m^1 - u_m^0) \leq 0 \text{ em } \Omega.
$$

Assim,

$$
\begin{cases}
\Delta(\underline{u}_m^1 - \underline{u}_m^0) + k(x)\lambda_{m+1}(\underline{u}_m^1 - \underline{u}_m^0) \leq 0 & x \in \Omega. \\
\quad \underline{u}_m^1 - \underline{u}_m^0 = 0 & x \in \partial\Omega.
\end{cases} \tag{3.11}
$$

Pelo Princípio Fraco do Máximo, $\underline{u}_m^1 - \underline{u}_m^0 \geq 0$ em Ω, já que $c = -k(x)\lambda_{m+1} < 0$.
Logo $\underline{u}_m^1 \geq \underline{u}_m^0$ em Ω.

Vamos mostrar agora que $\bar{u}_m \geq \underline{u}_m^1$ em $\bar{\Omega}$.
Como é $\bar{u}_m$ supersolução, temos

$$
\begin{aligned}
-\Delta \bar{u}_m + k(x)\lambda_{m+1}\bar{u}_m &\geq k(x)(\lambda_{m+1}\bar{u}_m - f(\bar{u}_m)) \\
&\geq k(x)(\lambda_{m+1}\underline{u}_m^0 - f(\underline{u}_m^0)) = -\Delta \underline{u}_m^1 + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_m^1.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{cases}
\Delta(\bar{u}_m - \underline{u}_m^1) + k(x)\lambda_{m+1}(\underline{u}_m - \underline{u}_m^1) \leq 0 & x \in \Omega. \\
\quad \bar{u}_m - \underline{u}_m^1 = 0 & x \in \partial\Omega.
\end{cases} \tag{3.12}
$$

Aplicando o Princípio Fraco do Máximo e procedendo como anteriormente, obtemos $\bar{u}_m \geq \underline{u}_m^1$ em $\bar{\Omega}$. Juntado estes dois resultados obtemos

$$m = \bar{u}_m \geq \underline{u}_m^1 \geq \underline{u}_m^0 \text{ em } \bar{\Omega}.$$

Agora vamos mostrar por indução que $\forall k \in \mathbb{N}$ temos $m = \bar{u}_m \geq \underline{u}_m^k \geq \underline{u}_m^{k-1}$ em $\bar{\Omega}$.
Mostramos que é válido para $k = 1$. Supondo válido para k, temos

$$m = \bar{u}_m \geq \underline{u}_m^k \geq \underline{u}_m^{k-1} \text{ em } \bar{\Omega},$$

Mas por $\underline{u}_m^{k+1}$ ser solução de (3.10) temos

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}_m^{k+1} + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_m^{k+1} &= k(x)\left(\lambda_{m+1}\underline{u}_m^k - f(\underline{u}_m^k)\right) \\ &\geq k(x)\left(\lambda_{m+1}\underline{u}_m^{k-1} - f(\underline{u}_m^{k-1})\right) \\ &= -\Delta \underline{u}_m^k + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_m^k. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio Fraco do Máximo, obtemos $\underline{u}_m^{k+1} \geq \underline{u}_m^k$ em $\bar{\Omega}$.
Desta maneira, obtemos uma sequência crescente e limitada. Logo $\underline{u}_m^k$, converge para uma função que denotaremos por u_m.
Sejam $\underline{u}_m^k$ e $\underline{u}_{m+1}^k$ soluções de (3.10) para m e para $m+1$ respectivamente. Assim,

$$-\Delta \underline{u}_m^{k+1} + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_m^{k+1} = k(x)\left(\lambda_{m+1}\underline{u}_m^k - f(\underline{u}_m^k)\right) \text{ e}$$

$$-\Delta \underline{u}_{m+1}^{k+1} + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_{m+1}^{k+1} = k(x)\left(\lambda_{m+1}\underline{u}_{m+1}^k - f(\underline{u}_{m+1}^k)\right).$$

Como $\underline{u}_m^k \leq \underline{u}_m^{k+1} \leq \cdots$ e $\underline{u}_{m+1}^k \leq \underline{u}_{m+1}^{k+1} \leq \cdots$, temos que

$$\begin{aligned}
-\Delta \underline{u}_m^1 + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_m^1 &= k(x)\left(\lambda_{m+1}\underline{u}_m^0 - f(\underline{u}_m^0)\right) \\
&\leq k(x)\left(\lambda_{m+1}\underline{u}_{m+1}^0 - f(\underline{u}_{m+1}^0)\right) \\
&= -\Delta \underline{u}_{m+1}^1 + k(x)\lambda_{m+1}\underline{u}_{m+1}^1,
\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade vale pois $k(x)\left(\lambda_{m+1}z - f(z)\right)$ é decrescente.
Logo,

$$-\Delta(\underline{u}_{m+1}^1 - \underline{u}_m^1) + k(x)\lambda_{m+1}(\underline{u}_{m+1}^1 - \underline{u}_m^1) \leq 0.$$

E ainda $\underline{u}_{m+1}^1 - \underline{u}_m^1 = 1$ em $\partial\Omega$. Novamente pelo Princípio Fraco do Máximo obtemos $\underline{u}_{m+1}^1 \geq \underline{u}_m^1$ em $\bar{\Omega}$.
Agora podemos mostrar por indução em m que $\underline{u}_m^k \leq \underline{u}_{m+1}^k \, \forall m$, de forma análoga ao que fizemos para mostrar $\underline{u}_m^k \leq \underline{u}_m^{k+1} \, \forall k$.
Logo,

$$u_m = \lim_{k\to\infty} \underline{u}_m^k \leq \lim_{k\to\infty} \underline{u}_{m+1}^k = u_{m+1}$$

Mostraremos que u_m é solução fraca de (3.7). Note primeiro que $u_k \to u$, em $L^2(\Omega)$ pelo teorema da convergência dominada, pois $u_m = \lim_{k\to\infty} \underline{u}_m^k \leq \bar{u} = m$.

Seja $V \subset\subset \Omega$. Como $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $k \in C^{\alpha_0}(\Omega)$, temos que $\|k(x)f(u_m^k)\|_{L^2(V)} \leq C\left(\|f(m)\|_{L^2(V)} + 1\right)$. Logo, $\sup\limits_k \|u_m^k\|_{H^1(V)} < \infty$. Então, existe uma subsequência $\{u_m^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ que converge fracamente em H^1 para $u_m \in H^1(V)$.
De (3.9) temos:

$$\int_V Du_m^{k+1}Dv + \lambda u_m^{k+1} v dx = \int_V k(x)(f(u_m^k) + \lambda u_m^{k+1}) v dx.$$

Fazendo $k \to \infty$:

$$\int_V Du_m Dv + \lambda u_m v dx = \int_V k(x)(f(u_m) + \lambda u_m) v dx \Leftrightarrow \int_V Du_m Dv dx = \int_V k(x) f(u_m) v dx$$

Logo, u_m é solução fraca de (3.7).

Para qualquer $B_r(x_0) \subset \Omega$, temos u_m limitada, portanto, $f(u_m)$ é limitada, visto que $f \in C^1$. Logo, $k(x)f(u_m)$ é limitada em $B_r(x_0)$. Logo, $u_m \in C^{1,\alpha}(B_r(x_0))$ pelo Teorema 2.4.4. Como $u_m \in C^{1,\alpha}(B_r(x_0))$, então $k(x)f(u_m) \in C^{\alpha_0}(B_r(x_0))$, já que $f \in C^1$ e $k \in C^{\alpha_0}$.

Logo, $\Delta u_m = k(x)f(u_m) \in C^{\alpha_0}(B_r(x_0)) \Rightarrow u_m \in C^{2,\alpha_0}(B_r(x_0))$ pelo Teorema 2.4.1. Como a bola $B_r(x_0)$ é arbitrária temos que $u_m \in C^{2,\alpha_0}(\Omega)$.

$\square$

3.3 Prova dos Teoremas

Lembremos que Ω satisfaz a condição uniforme da esfera exterior se existe um número real $r > 0$ tal que para cada $z \in \partial\Omega$ existe uma bola fechada $\bar{B}_r$ de raio r com $\bar{B} \cap \bar{\Omega} = \{z\}$.

Note que qualquer domínio aberto, limitado, $C^2 \subset \mathbb{R}^N$ satisfaz esta condição.

Lema 3.3.1. *([16], ver Teorema 4.2) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado que satisfaz a condição uniforme da esfera exterior, então $\exists \{\Omega_m\}_1^\infty$ de abertos tal que $\bar{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1} \subset \Omega$, $\cup_{m=1}^\infty \Omega_m = \Omega$ e a fronteira $\partial\Omega_m$ é subvariedade suave (C^∞) de dimensão $N-1$ para $m \geq 1$.*

Lema 3.3.2. *Se Ω e $k(x)$ satisfazem as hipóteses (k1) e (k2), então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta v = k(x),\ v > 0, & x \in \Omega. \\ v = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

tem única solução $\bar{v} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. *Além disso, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta v = k(x),\ v > 0, & x \in \Omega_m. \\ \quad v = 0 & x \in \partial\Omega_m. \end{cases} \tag{3.14}$$

tem única solução $\bar{v}_m \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, *e* $\bar{v}(x) \geq \bar{v}_{m+1}(x) \geq \bar{v}_m(x) > 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}_m$ *e* $m \geq 1$.

Demonstração. O Teorema 2.4.2 garante existência e unicidade ao problema (3.13) e o Teorema 2.4.3 garante o mesmo ao problema (3.14).

Queremos ainda $\bar{v}(x) \geq \bar{v}_{m+1}(x) \geq \bar{v}_m(x) > 0\ \ \forall x \in \Omega_m$ e $m \geq 1$.

Primeiramente vejamos que $\bar{v}_j(x) \geq 0,\ \ \forall j \geq 1$. Consideremos o problema

$$\begin{cases} \Delta \bar{v}_j = -k(x) \leq 0 & x \in \Omega_j. \\ \quad \bar{v}_j = 0 & x \in \partial\Omega_j. \end{cases} \tag{3.15}$$

Pelo Princípio Forte do Máximo temos que

Se $\exists x_0 \in \Omega_j$ tal que $0 = \inf_{\partial\Omega} \bar{v}_j(x) = \inf_{x\in\Omega} \bar{v}_j(x) = \bar{v}_j(x_0)$ temos que $\bar{v}_j(x)$ é constante.

Se $\bar{v}_j(x)$ é constante, então $\bar{v}_j(x) = 0$, pois $\bar{v}_j(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0$ e $\bar{v}_j(x) \in C(\bar{\Omega})$. Mas $\bar{v}_j = 0$ não é solução de (3.15), pois $\bar{v}_j = 0 \Rightarrow \Delta\bar{v}_j(x) = 0 = -k(x), \forall x \in \Omega_j$.
Mas isto contraria (k1).
Logo, $\bar{v}_j(x) = 0$ não é solução. Então $\bar{v}_j(x) > 0,\ \forall x \in \Omega_j$.

Vejamos agora que $\bar{v}_{m+1}(x) \geq \bar{v}_m(x)$. Para isso, notemos que $\bar{v}_{m+1} > 0$ em Ω_{m+1} pelo Princípio do Máximo. Logo, $\bar{v}_{m+1} > 0$ em $\partial\Omega_m \subset \Omega_m$ e, assim, $\bar{v}_{m+1}(x) - v_m(x) > 0\ \ \forall x \in \partial\Omega_m$.
Logo,

$$\begin{cases} \Delta(\bar{v}_{m+1} - \bar{v}_m(x)) = 0 & x \in \Omega_m. \\ \bar{v}_{m+1} - \bar{v}_m(x) > 0 & x \in \partial\Omega_m. \end{cases} \tag{3.16}$$

Pelo Princípio Fraco do Máximo temos

$$0 < \inf_{\partial\Omega} \bar{v}_{m+1}(x) - \bar{v}_m(x) = \inf_{x\in\Omega} \bar{v}_{m+1}(x) - \bar{v}_m(x).$$

Portanto,

$$\bar{v}_{m+1}(x) - \bar{v}_m(x) > 0, \ \forall x \in \Omega_m.$$

Resta ainda mostrar que $\bar{v}(x) \geq \bar{v}_{m+1}(x)$. Consideremos agora

$$\begin{cases} \Delta(\bar{v} - \bar{v}_{m+1}(x)) = 0 & x \in \Omega_{m+1} \\ \bar{v} - \bar{v}_{m+1}(x) > 0 & x \in \partial\Omega_{m+1} \end{cases} \tag{3.17}$$

Usando o raciocínio feito anteriormente, obtemos $\bar{v} - \bar{v}_{m+1}(x) > 0 \in \Omega_{m+1}$.

$\square$

Lema 3.3.3. *Nas hipótese* (f1)-(f4),(k1) *e* (k2), *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto conexo,* C^2*, limitado. Então* $H^{-1}(\bar{v}(x)) \leq u(x)$, $\forall x \in \Omega$ *vale para qualquer solução* $u \in C^{2,\alpha}$ *de* (3.1)*.*

Demonstração. Vamos considerar (3.2). Lembremos que $-\Delta w = k(x) - g(x)|\nabla w|^2$, onde w é solução de (3.2). Temos $k \in C^\alpha$, $g(w)$ é C^α e $|\nabla w|^2 \in C^1(\Omega)$ então $g(w)|\nabla w|^2$ é C^α,daí segue que $w \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.
Queremos que

$$w(x) = \int_{u(x)}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds \leq \bar{v}(x) \text{ em } \Omega.$$

Supondo o contrário, consideramos $\{x \,|\, w(x) > \bar{v}(x)\} \neq \emptyset$ para qualquer componente conexa A de Ω.
Como $g(w) = f'(w) \geq 0$, temos $-\Delta(w - \bar{v}) = -g(w) \cdot |\nabla w|^2 \leq 0$, $x \in A$. Como $w - \bar{v}\Big|_{\partial A} = 0$, segue do Princípio Fraco do Máximo que $w(x) \leq \bar{v}(x)$, $\forall x \in A$.

Isto é uma contradição. Logo, $w(x) = \int_{u(x)}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds \leq \bar{v}(x)$ em $\bar{\Omega}$. Então $H^{-1}(w) = u \geq H^{-1}(\bar{v})$, pois H^{-1} é decrescente. $\square$

Lema 3.3.4. *Nas hipótese* (f1)-(f4),(k1)*,* $k \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto limitado, conexo com fronteira suave. Então* (3.1) *tem solução* $C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Demonstração. Consideraremos o seguinte problema perturbado de (3.1)

$$\begin{cases} \Delta u = k(x) f(u), \ \ u > 0, & x \in \Omega. \\ \ \ u = m \in \mathbb{N} & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.18}$$

Pelo Teorema 3.2.1, a equação (3.18) tem solução única $u_m \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ no intervalo ordenado $[\underline{u}_1, m]$. Além disso,vale o seguinte:

$$0 < H^{-1}(\underline{w}_1) \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_m \leq u_{m+1} \leq \cdots \text{ em } \Omega.$$

Para provar o lema, é suficiente mostrar:
I) $\forall x_0 \in \Omega, \ \exists C_3$ (dependendo de x_0) tal que $u_m(x) \leq C_3, \ \forall x$ perto de x_0;
II) $\lim\limits_{x \to \partial\Omega} u(x) = \infty$, onde $u(x) = \lim\limits_{m \to \infty} u_m(x)$.

Para provar (I), vamos considerar dois casos.

Caso (a): $k(x_0) > 0$. Como $k \in C^{\alpha_0}(\bar{\Omega}), \exists B_r(x_0)$, tal que $k(x) > 0, \forall x \in \bar{B}_r(x_0)$. Seja $k_0 = \min\limits_{\bar{B}_r(x_0)} k(x)$, e $\bar{u}$ uma solução clássica positiva de

$$\begin{cases} \Delta u = k_0 f(u) & x \in B_r. \\ \ \ u = \infty & x \in \partial B_r. \end{cases} \tag{3.19}$$

(A existência de solução é justificada sob as hipóteses (f1)-(f3) em [11])

Afirmação: $u_m(x) \leq \bar{u}(x), \ \forall x \in B_r(x_0)$.
Prova: Considera $B_\delta(x_0)$ tal que $\bar{u} > m, \ \forall x \in \partial B_r(x_0)$.
$\Delta(\bar{u} - u_m) = k_0 f(\bar{u}) - k(x) f(u_m) \leq k_0(f(\bar{u}) - f(u_m)) = k_0.f'(\xi)(\bar{u} - u_m) \Rightarrow$ $\Delta v - k_0 D(x) v \leq 0, \ \forall x \in \partial B_r$, onde $v = \bar{u} - u_m$. Como $v(x) \geq 0, \ \forall x \in \partial B_r$, e $D(x) \geq 0$, pelo princípio do máximo temos: $\min\limits_{\partial B_\delta} v = \min\limits_{B_r} v \Rightarrow \bar{u} - u_m \geq 0$ em $B_r \Rightarrow \bar{u} \geq u_m$ em B_r.
Seja $C_3 = \max\limits_{\bar{B}_{r/2}(x_0)} \bar{u}$, então $u_m < C_3$ em $\bar{B}_{r/2}(x_0)$.

Caso (b): $k(x_0) = 0$. Como $k \in C^\infty(\bar{\Omega})$ e satisfaz (k1), temos que $\exists \Omega_0$ aberto e conexo, tal que $x_0 \in \Omega_0 \subset \Omega$, e ainda $k(x) > 0 \ \forall x \in \partial\Omega_0$.
Do caso (a) acima, sabemos que $\forall x \in \partial\Omega_0, \ \exists B_{r_x}(x)$ e uma constante positiva C_x, tal que $u_m(x) \leq C_x$ em $\bar{B}_{r_x/2}(x)$. Como Ω é limitado, temos que $\partial\Omega_0$ é compacto. Então existe um número finito de bolas que cobre $\partial\Omega_0$. Seja $C_3 = \max\{C_{x_1}, \cdots, C_{x_l}\}$, onde as bolas $\bar{B}_{r_{x_i}/2}(x_i), i = 1, \cdots, l$, cobrem $\partial\Omega_0$. Dessa maneira, obtemos $u_m(x) \leq C_3$ em $\partial\Omega_0$. Logo pelo Princípio do Máximo podemos obter $u_m(x) \leq C_3$ em $\bar{\Omega}_0$, pois $\Delta u_m(x) = k(x) f(u_m(x)) \geq 0, \ \forall x \in \Omega_0$.
Finalmente, para provar (II), é suficiente mostrar o seguinte:

$$w_m(x) = \int_{u_m(x)}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds \leq \bar{v}(x) + \epsilon(1 + r^2)^{-1/2}, \ \forall x \in \Omega, \tag{3.20}$$

onde $\epsilon > 0, \ r = (\sum\limits_i^n x_i^2)^{1/2}, \ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$ e $\bar{v} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ é a única solução clássica de (3.13).
Suponhamos o contrário de (3.20). Então

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} [w^m(x) - \bar{v}(x) - \epsilon(1 + r^2)^{-1/2}] > 0.$$

O ponto x_0 onde ocorre deve ser ponto interior. Assim,

$$0 \geq \Delta[w^m(x_0) - \bar{v}(x_0) - \epsilon(1+r^2)^{-1/2}] = g(w_m)|\nabla w_m|^2 + \epsilon[-\Delta(1+r^2)^{-1/2}].$$

Veremos agora que esta expressão é positiva, obtendo uma contradição. Para isso, note que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(1+r^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1+r^2)^{-3/2}2x_i$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i x_i}\left(-\frac{1}{2}(1+r^2)^{-3/2}2x_i\right) = 3(1+r^2)^{-5/2}x_i^2 - (1+r^2)^{-3/2}.$$

Logo,

$$-\Delta(1+r^2)^{-1/2} = -3(1+r^2)^{-5/2}\underbrace{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}_{r^2} + n(1+r^2)^{-3/2}.$$

Definindo $s = (1+r^2)^{-1/2}$, temos $s \geq 1$ e

$$-\Delta(1+r^2)^{1/2} = -3\frac{1}{s^5}(s^2-1) + n\frac{1}{s^3} > 0, \text{ pois } n \geq 3.$$

Com isso vemos que expressão desejada é positiva, o que é uma contradição. Logo, vale (3.20) $\forall \epsilon > 0$. Portanto,

$$w_m(x) = \int_{u_m(x)}^{\infty} \frac{1}{f(s)}ds \leq \bar{v}(x), \ \forall x \in \Omega.$$

e

$$w(x) = \int_{u(x)}^{\infty} \frac{1}{f(s)}ds \leq \bar{v}(x) \ \forall x \in \Omega. \Rightarrow u(x) = H^{-1}(w(x)) \geq H^{-1}(\bar{v}(x)), \ \forall x \in \Omega.$$

Como

$$\lim_{x \to \partial\Omega} H^{-1}(\bar{v}(x)) = \infty, \text{ vemos que } \lim_{x \to \partial\Omega} u(x) = \infty.$$

Assim concluímos (II).

Vistos I e II podemos mostrar que u é solução de (3.1).

Seja $V \subset\subset \Omega$. Como $\|u_m\|_{2,\alpha_0;V} \leq C$, temos que (u_m) é uma sequência uniformemente limitada e uma família equicontínua. Logo, pelo Teorema de Arzela-Ascoli, $\exists (u_{m_j})$ subsequência uniformemente convergente em compactos. E ainda, $\|u_m\|_{2,\alpha_0;V} \leq C \Rightarrow \|Du_m\|_{1,\alpha_0;V} \leq C$. Logo, (Du_{m_j}) é uma sequência uniformemente limitada e uma família equicontínua. Logo, pelo Teorema de Arzela-Ascoli, $\exists (Du_{m_{j_l}})$ subsequência uniformemente convergente em compactos. Sejam $u = \lim\limits_{m_j \to \infty} u_{m_j}$ e $v = \lim\limits_{m_j \to \infty} Du_{m_j}$. Temos que $Du = v$ pelo Teorema 2.1.1.
Dessa maneira, para qualquer $V \subset\subset \Omega$ temos $u \in C^{1,\alpha_0}(V)$. Logo, pelo Teorema 2.4.1, temos $u \in C^{2,\alpha_0}(V)$. Logo, $u \in C^{2,\alpha_0}(\Omega)$.

□

Teorema 3.3.5. *Suponhamos que valem as hipóteses* (f1)-(f4), (k1) *e* (k2). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *aberto* C^2, *limitado e conexo. Então* (3.1) *tem uma solução* $C^{2,\alpha}(\Omega)$, *além disso, qualquer solução* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *de* (3.1) *satisfaz*

$$H^{-1}(\bar{v}(x)) \leq u(x), \ \forall x \in \Omega,$$

onde $\bar{v} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *é a única solução do problema* (3.13).
Em particular, quando $f(u) = e^u$, $-\ln(\bar{v}(x)) \leq u(x)$, $\forall x \in \Omega$; *e quando* $f(u) = u^p$ *e* $p > 1$, $[(p-1)\bar{v}(x)]^{-1/p-1} \leq u(x), \ \forall x \in \Omega$.

Demonstração. Consideremos o seguinte problema perturbado de (3.1):

$$\begin{cases} \Delta u(x) = k(x) f(u(x)) & x \in \Omega_m, \ u > 0 \\ u(x) = \infty & x \in \partial\Omega_m \end{cases} \tag{3.21}$$

onde $\{\Omega_m\}_1^\infty$ é como no Lema 3.3.1. Como $k \in C^\alpha(\Omega)$, segue que $k \in C^\alpha(\Omega_m)$, e pelo Lema 3.3.4, temos que (3.21) tem solução $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_m)$. Além disso, podemos provar que $u_{m+1} < u_m$, $\forall x \in \Omega_m$ e $m \geq 1$. Segue pelos Lemas 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.4 que

$$H^{-1}(\bar{v}(x)) \leq H^{-1}(\bar{v}_{m+1}(x)) \leq u_{m+1}(x) \leq u(x),\ \forall x \in \Omega_m. \tag{3.22}$$

Se $B \subset \Omega$ é um compacto qualquer, então $\exists m_0$ tal que $B \subset \Omega_{m_0}$ e segue de (3.24) que a sequência $\{u_m(x)\}_{m_0}^\infty$é não crescente para $x \in B$ e é limitada em B, então $u(x) = \lim\limits_{m\to\infty} u_m(x)$ existe $\forall x \in \Omega$. Usando argumentos de convergência, como foi feito no final da demostração do Lema 3.3.4, obtemos $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $\Delta u(x) = k(x)f(u(x))$, $x \in \Omega$. Por (3.22) e $\lim\limits_{x\to\partial\Omega} H^{-1}(\bar{v}(x)) = \infty$, obtemos que u é solução de (3.1), o que completa a prova. $\square$

Para o lema e para o seguinte teorema, ao invés da hípótese (k2), vamos assumir a hipótese abaixo:
(k3) $k \in C(\mathbb{R}^N)$ e $\int_0^\infty s\phi(s) < \infty$, onde $\phi(s) = \max\limits_{|x|=s} k(s)$.

Lema 3.3.6. ([13],Prova do Teorema 1) *Nas hipótese* (k1)*e* (k3)*, o problema*

$$-\Delta v = \phi(v),\ v(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ r = |x|,\ \lim_{r\to\infty} v(r) = 0 \tag{3.23}$$

tem única solução radialmente simétrica $\bar{v} \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.3.7. *Suponhamos que valem as hipóteses* (f1)-(f4),(k1),(k3)*. Para $\Omega = \mathbb{R}^N$,* (3.1) *tem uma solução inteira $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $H^{-1}(\bar{v}(x)) \leq u(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, onde $\bar{v} \in C^2(\mathbb{R}^N)$ é a única solução inteira, radialmente simétrica do problema* (3.23)*.*

Demonstração. Do Teorema 3.3.5, temos que para cada $m \in \mathbb{N}$, tomando

$\Omega = B_m(0)$, o problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) = k(x)f(u(x)) & u > 0,\ x < m. \\ u(x) = \infty & |x| = m. \end{cases} \tag{3.24}$$

tem única solução $u_m \in C^{2,\alpha}(B_m)$.
Além disso, $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_m \geq u_{m+1} \geq 0,\ \forall x \in B_1$.

Para provar o teorema precisamos apenas provar:

(I) $H^{-1}(\bar{v}(x)) \leq u_m(x),\ \forall x \in B_m,\ \forall m$, onde $\bar{v}(x) \in C^2(\mathbb{R}^N)$ é a única solução radialmente simétrica de (3.24).

(II) $u \to \infty$ quando $|x| \to \infty$, onde $u = \lim\limits_{m\to\infty} u_m$.
Seja $w_m = \displaystyle\int_{u_m}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds,\ \forall |x| \leq m$. Queremos que $w_m(x) \leq \bar{v}(x)$ pois assim $H^{-1}(\bar{v}(x)) \leq H^{-1}(w_m(x)) = u_m,\ \forall x \in B_m$. Isto é mostrado no Teorema 3.2.1. Note que a desigualdade se mantém em ∂B_m, onde $w_m = 0$ e $u_m = \infty$ e ainda $\bar{v}(x) > 0,\ \forall x \in B_m$. Logo temos que $H^{-1}(\bar{v}(x)) \leq u_m,\ \forall x \in B_m,\ \forall m$. Dessa maneira $0 < H^{-1}(\bar{v}(x)) \leq u(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N$. Assim (I) fica provado.

Como $\lim\limits_{r\to\infty} \bar{v}(r) = 0$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} H^{-1}(\bar{v}(x)) = \infty$ e temos que $0 < H^{-1}(\bar{v}(x)) \leq u(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N$ temos que $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = \infty$, completando a demostração. $\square$

Bibliografia

[1] A. Aftalion, W. Reichel, Existence of two solutions for semilinear elliptic equations, J. Differential Equations 141 (1997) 400-421.

[2] H. Amann, Existence and multiplicity theorems for semilinear elliptic boundary value problems, Math. Z. 150 (1976) 567-597.

[3] V. Anuradha, C. Brown, R. Shivaji, Explosive nonnegative solutions of boundary value problems, Nonlinear Anal. 26 (1996) 613-630.

[4] C. Bandle, M. Marcus, Sur Les Solutions maximales de problems elliptiques nonlineaires, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I 311 (1990) 91-93.

[5] C. Bandle, M. Marcus, Large Solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and asymptotic behavior, J. Anal. Math. 58 (1992) 231-250.

[6] L. Bieberbach, $\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen, Math. Ann. 77 (1916) 173-212.

[7] K.-S. Cheng, W.M. Ni, On the structure of the conformal scalar curvature equation, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992) 261-278.

[8] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduated Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society (1998).

[9] D.Gilbarg e N.S.Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2ª edição, Springer, Berlim, 1983.

[10] A. Greco, G. Porru, Asymptotic estimates and convexity of large solutions to semilinear elliptic equations, Differencial Integral Equations 10 (1997) 219-229.

[11] J.B. Keller, On solutions of $\Delta u = f(u)$, Commun. Pure Appl. Math. 10 (1957) 503-510.

[12] V.A. Kondrat'ev, V.A. Nikishkin, Asymptotic near the boundary-value problem for a semilinear elliptic equations, Differentsial'nye Uraneniya 26 (1990) 465-468 (English translate Differential Equations 26 (1990) 345-348).

[13] A.V. Lair, A.W. Shaker, Entire solutions of a singular semilinear elliptic problem, J. Math. Anal. Appl. 200 (1996) 498-505.

[14] A.V. Lair, A necessary and sufficient condition for existence of large solutions to semilinear elliptic equations, J. Math. Anal. Appl. 240 (1999) 205-218.

[15] A.V. Lair, A.W. Wood, Large solutions of semilinear elliptic problems, Nonlinear Anal. 37 (1999) 805-812.

[16] A.C. Lazer, P.J. McKenna, On a problem of Bieberbach and Rademarcher, Nonlinear Anal. 21 (1993) 327-335.

[17] A.C. Lazer, P.J. McKenna, Asymptotic behavior of solutions of boundary blowup problems, Differential Integral Equations 7 (1994) 1001-1019.

[18] L. Lu, Blowup solutions of comformal Gaussian curvature equations, J. Lanzhou Univ. (Natural Science) 28 (4) (1992) 1-7.

[19] M. Marcus, L. Veron, Uniqueness of solutions whit blowup on the boundary for a class of nonlinear elliptic equations, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 317 (1993) 557-563.

[20] P.J. McKenna, W. Reichel, W. Walter, Symmetry and multiplicity for nonlinear elliptic differential equations whit boundary blow-up, Nonlinear Anal. 28 (1997) 1213-1225.

[21] S.L. Pohozaev, The Dirichlet problem for the equation $\Delta u = u^2$, Soviet Math. Dokl. 1 (1961), 1143-1146.

[22] H. Rademacher, Einige besondere problem partieller Differentialgleichungen, ver: P. Frank, L. von Mises, Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik I, 2nd Edition, Rosenberg, New York, 1943, pp. 838-845.

[23] S. Tao e Z. Zang, On the existence of explosive solutions for semilinear elliptic problems, Nonlinear Analysis 48 (2002), 1043-1050.

[24] Z. Zang, Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions, J. Math. Anal. Appl. 216 (1997) 390-397.

[25] Z. Zhang, A remark on the existence of explosive solution for a class of semilinear elliptic equations, Nonlinear Anal 41 (2000) 143-148.