VOZES DIVERSAS DIFERENTES SABERES

Salão UFRGS 2018 CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO

SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC

15 A 19 OUTUBRO CAMPUS DO VALE

UFRGS PROPESQ

Discussão sobre sistemas completamente integráveis

Autor: Alisson Matheus Fachini Soares
Orientador: Lucas da Silva Oliveira

Introdução

Na Mecânica Clássica existe uma definição de sistemas integráveis (Hamiltonianos) que pode ser transportada para sistemas infinitos de EDO's ou EDP's; tais sistemas são chamados **sistemas completamente integráveis**. Abaixo descreveremos de forma sucinta o desenvolvimento das ideias sobre esse tema (a teoria de solitons, pares de Lax, etc). Porém, para deixar a exposição mais simples, apresentaremos os resultados para o sistema de Toda fechado com 3 equações; curioso é o fato de que tal sistema foi demonstrado ser integrável utilizando técnicas mais avançadas (ao invés de argumentos clássicos envolvendo variáveis de ação-ângulo) por Flaschka e Moser [1].

Experimento FPUT

Um importante marco para história da análise numérica e sistemas não-lineares, foi o experimento conduzido em 1953 por Fermi, Pasta, Ulam e Tsing. O experimento simulava um entrelaçado de partículas vibrando, que possuíam um termo não linear. Tal experimento mostrou que o sistema, ao invés de realizar um processo conhecido como termalização, exibiu um comportamento quasi-periódico: as partículas produziram muito pouca energia de compartilhamento e tinham forte recorrência ao seu estado inicial (um comportamento típico de sistemas lineares).

Em 1965 Kruskal e Zabusky, descobriram a relação entre o experimento FPUT com a KDV e também as soluções do tipo soliton para KDV. Eles mostraram que o objeto sóliton satisfaz as propriedades previstas pelo experimento, pois esse tipo de solução pode interagir sem causar perturbação entre elas.

Pares de Lax

Em 1968, Peter Lax [2] descreveu como associar equações não-lineares a operadores lineares com intenção de resolver a KDV, no entanto os pares de Lax dão uma maneira mais geral de verificar se um sistema é completamente integrável para sistemas de EDO's finita ou infinitas e para EDP's.

O método em geral é encontrar um par de operadores lineares $\mathcal{L}$ e $\mathcal{P}$ de maneira que o sistema possa ser representado pela equação de Lax:

$$\dot{\mathcal{L}} = [\mathcal{L}, \mathcal{P}]$$

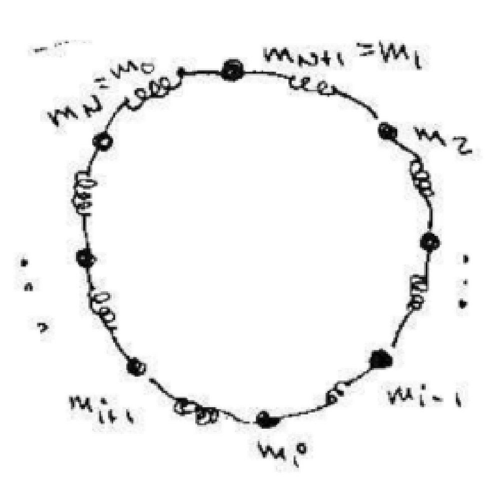
Os autovalores de $\mathcal{L}$ tem a propriedade

de serem invariantes no tempo. Portanto os autovalores são as integrais primeiras (quantidades conservadas) que mostram que o sistema é completamente integrável. O desafio desse método é encontrar os $\mathcal{L}$ $\mathcal{P}$, de modo que a equação de Lax deescreva o sistema.

Toda Lattice (N = 3)

O *Toda Lattice*, foi um proposto por Toda Morikazu em 1983 [3], um modelo similar ao estudado no experimento FPUT, porém com um potencial diferente. Esse modelo é considerado a versão discreta da KDV.

Para ilustrar o método dos Pares de Lax vamos usar o modelo Toda Fechado com três partículas, porém poderíamos fazer para um valor maior de partículas (como ilustrado abaixo).



O Toda Lattice fechado, pode ser descrito usando as seguintes equações de movimento, com a massa normalizada.

$$\frac{d}{dt}e^{-Q_{n+1}-Q_n} = -(P_{n+1} - P_n)e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$$
$$\frac{d}{dt}P_n = e^{-(Q_n-Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$$

Usando as variavéis de Flaschka $a_n = \frac{1}{2}e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$ e $b_n = \frac{1}{2}P_n$ e portanto o modelo de Toda se escreve

$$\dot{a_n}(t) = a_n(t)(b_{n+1}(t) - b_n(t))$$
$$\dot{b_n}(t) = 2(a_n^2(t) - a_{n-1}(t)^2)$$

Então o sistema pode ser reescrito como $\dot{\mathcal{L}} = [\mathcal{L}, \mathcal{P}]$, tal que $\mathcal{L}$ e $\mathcal{P}$ são:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & a_3 \\ a_1 & b_2 & a_2 \\ a_3 & a_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & a_3 \\ a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & a_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o modelo de Toda pode ser reescrito como um par de Lax e, concluímos que, é um sistema completamente integrável.

Próximos objetivos

Em um próximo trabalho, iremos realizar simulações numéricas para mostrar o comportamento "solitônico"das soluções e usaremos as ferramentas descritas aqui para entender o método do espalhamento inverso para resolvermos problemas mais gerais, como a equação não-linear de Schrödinger e a própria KDV.

Referências

[1] Moser J: *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential–an integrable system* (1976)

[2] Lax, P.:*Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves* (1968)

[3] Morikazu Toda: *Non Linear Waves and Solitons* (1983)