

ANÁLISE DOS EFEITOS DE RETRAÇÃO E FLUÊNCIA EM
ESTRUTURAS INCREMENTAIS DE CONCRETO
ARMADO E PROTENDIDO

KARLA SCHUCK SARAIVA

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre

Dezembro 1987

ESCOLA DE ENGENHARIA
BIBLIOTECA

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Guillermo J. Creus

Orientador



Prof. Jarbas Milititsky

Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng.Civil

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Guillermo J. Creus
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Ademar G. Groehs
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Pablo Gaston Bignon
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Oswaldo Duarte Paim
Eng. pela UFRGS

Agradecimentos

Aos meus amados pais.

Ao professor Guillermo J. Creus, pela orientação desse trabalho.

Ao professor Pablo G. Bignon, pela dedicação na revisão desse trabalho.

Ao professor Oswaldo Duarte Paim, pela preciosa ajuda, sem a qual talvez não fosse possível realizar esse trabalho.

A engenheira Cristina Hagemann, companheira de trabalho e, sobretudo, grande amiga.

A professora Carmem Handel, pela sua garra e vontade de ensinar.

Ao CNPq e à Capes, pelo suporte financeiro.

A todos aqueles que colaboraram para a realização desse trabalho.

INDICE

1. Introdução	1
2. Processo Construtivo	3
3. Fundamentos de Viscoelasticidade	8
3.1 Modelos Reológicos	13
3.2 Envelhecimento	17
4. Viscoelasticidade: representação através das variáveis de estado	19
5. Formulação incremental para problemas viscoelásticos .	22
6. Descontinuidades e mudanças de sistema estático	27
7. Construção incremental	41
8. Representação do concreto	55
8.1 Fluência	55
8.2 Retração	59
9. Protensão	62
10. Implementação Computacional	69
11. Exemplos	94
12. Conclusão	105
Bibliografia	109
Anexo I - Arranjos e Variáveis do programa APAS	112
Anexo II - Solicitações resultantes da supressão de uma descontinuidade	118
Anexo III - Recomendações do CEB/FIP	121
III.1 Fluência	121
III.2 Retração	124

Sumário

Em estruturas incrementais a fluência e a retração além de causarem deformações progressivas, provocam também mudanças nas solicitações, quando se impede tais deformações. Esse impedimento se dá no momento em que se une duas subestruturas, provocando uma mudança de sistema estático.

A principal aplicação de tal método construtivo está nas pontes em avanços sucessivos. A avaliação dos esforços ao longo do tempo em tais estruturas é laboriosa quando feita pelos métodos convencionais disponíveis. A presente dissertação visa buscar um método computacional para realizar tal tipo de análise.

ABSTRACT

On incremental structures, creep and shrinkage cause, beyond time-dependent deformations, changes in internal efforts when such deformations are obstructed. These obstructions occur at the moment that two substructures are bonded together, resulting in a static system change.

The principal application of this constructive method is the segmental bridges. The evaluation of the time-dependent internal efforts is hard when made by conventional methods. The present dissertation develops a computational method for performing this analysis.

1. INTRODUÇÃO

A presente dissertação busca analisar estruturas construídas em processos incrementais, que poderão ser de concreto armado ou protendido.

Sua aplicação principal se dá na análise de pontes em balanços sucessivos cujo processo construtivo se acha descrito no capítulo 2.

Métodos de análise de estruturas viscoelásticas com mudanças no sistema estático foram propostos por Favre et alii [7], Chiorino e Mola [4] e Holck [12]. Favre aplica o método das forças generalizado e representa o material pelas fórmulas de Dischinger e Trost. Chiorino e Mola utilizam um procedimento semelhante, porém com as fórmulas de Dischinger e do modelo standard. Holck aborda o assunto através do método da rigidez em forma computacional. Nenhuma das soluções, porém, incorpora o processo de construção incremental.

No Brasil, os pioneiros no estudo do assunto são Gravina [11] e Langedonck [15].

Na presente dissertação além de se considerar a mudança de descontinuidade foi representada também a construção incremental.

A análise feita é viscoelástica linear, utilizando-se um algoritmo incremental baseado no método da

rigidez. A parcela dos deslocamentos devidos à fluência será calculada através das variáveis de estado [5].

A função de fluência adotada é a do CEB/FIP-1978 [3], bem como o modelo de retração.

O modelo adotado para protensão é baseado no trabalho de Gastal [10].

As forças de protensão foram consideradas cargas externas. A matriz de rigidez do aço protendido são somadas à matriz de rigidez de concreto, de forma a calcular as perdas por retração e fluência.

2. PROCESSO CONSTRUTIVO

A técnica dos avanços sucessivos (ou balanços sucessivos) data já da antiga civilização romana, quando era utilizada na construção de pontes de madeira. A obra mundialmente pioneira realizada em concreto armado foi a ponte sobre o rio Peixe projetada em 1931 pelo engenheiro brasileiro Emílio Baumgart. Muitas outras pontes foram construídas por esse processo que, no entanto, apresentava graves inconvenientes como a armadura excessiva necessária para sustentar os balanços e a acentuada fissuração da parte tracionada. Ambos os inconvenientes foram superados pela aplicação do concreto protendido. Ulrich Finsterwalder construiu a primeira ponte protendida em avanços sucessivos sobre o rio Lahn, em 1949.

Atualmente essa técnica domina a construção de pontes com grandes vãos. Entre suas várias vantagens encontra-se a sua maior produtividade, ou seja, é a técnica que permite que se construa a maior taxa de metros por dia. Além disso é bastante econômica por permitir o aproveitamento integral das formas, equipamento e mão-de-obra e prescindir de escoramento. O fato de prescindir de escoramento não apenas reduz o custo da obra como ainda deixa livre o gabarito de navegação e permite que se construa com mais facilidade sobre grotas profundas.

As estruturas construídas em avanços sucessivos partem de bases iniciais. Essas bases enquadram-se em geral em uma das três categorias:

- encontros;
- pilares;
- contrabalanços.

As figuras seguintes mostram cada uma dessas bases:

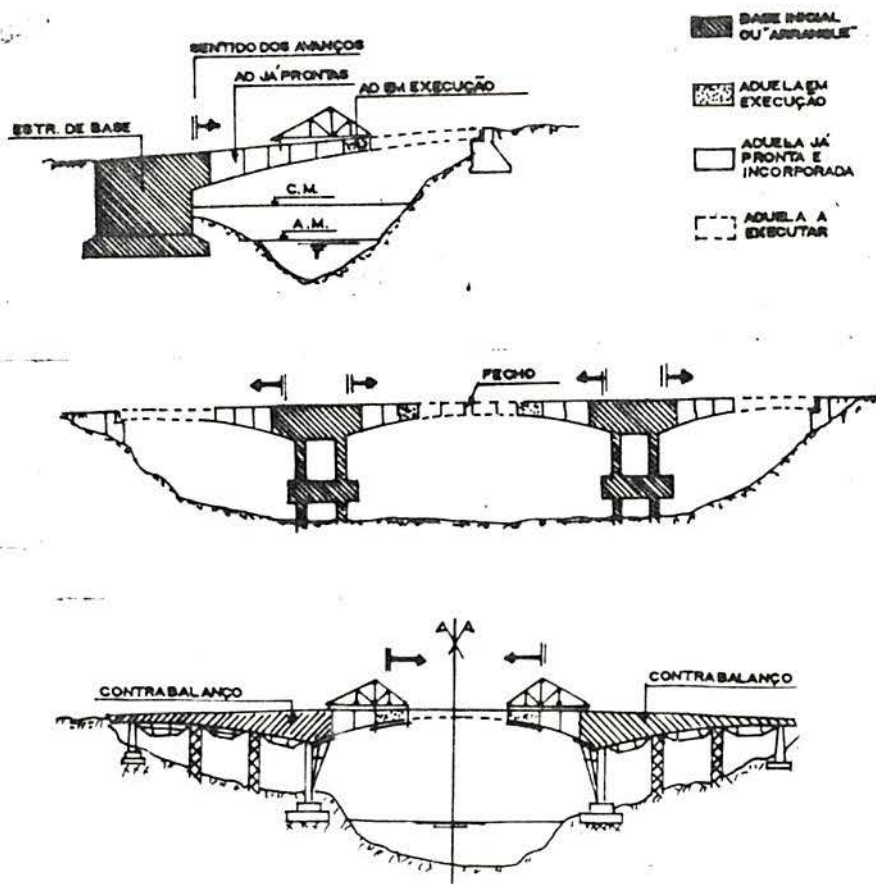


Figura 2(a) - Bases Iniciais

Cada trecho da ponte construído é chamado aduela. Normalmente as aduelas são moldadas no local, mas podem ser, em alguns casos, pré-moldadas.

Para a construção das aduelas no local utiliza-se um equipamento denominado treliça metálica mostrado na

Figura 2(b). O processo se inicia com a treliça apoiada na base inicial e com uma parte em balanço onde se encontra a forma para concretagem da próxima aduela. Procede-se à concretagem e à cura. Logo após se efetua a protensão. Feito isso, a aduela está pronta e tornou-se autoportante, podendo receber o peso da treliça. Então desloca-se a treliça para confecção da próxima aduela. Esse ciclo é repetido até a última aduela. Em geral utilizam-se duas treliças e executa-se esse processo simetricamente.

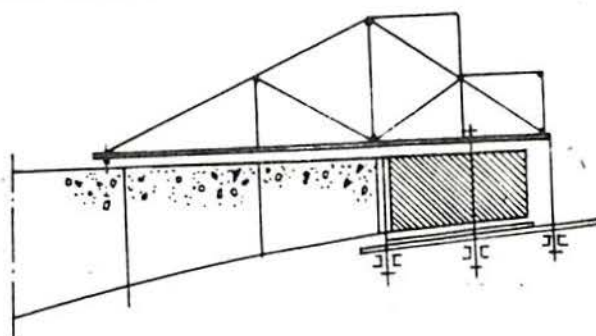


Figura 2(b) - Treliça Metálica

Uma vez executadas todas as aduelas é necessário unir as duas subestruturas. Essas poderão ser unidas de várias formas: através de uma viga Gerber, através de uma rótula, com continuidade total e outras formas.

Sob o ponto de vista da estrutura, o ideal é que se dê continuidade total, uma vez que as continuidades parciais conduzem a grandes flechas. Porém, essas últimas têm a sua determinação dos esforços mais simples, o que pode ser bastante importante quando isso é feito manualmente. Além disso, continuidades parciais diminuem os esforços horizontais. Ao serem suprimidas descontinuidades entre os balanços está-se impedindo o livre deslocamento dos extremos das barras concorrentes a esse nó. Isso dará origem à

aparição de esforços hiperestáticos. Esses esforços terão duas causas básicas: impedimento da deformação instantânea no momento de colocação de novas cargas e impedimento da continuação da livre deformação lenta das cargas já existentes antes da mudança do sistema estático. O comportamento para as novas cargas será, aproximadamente, considerando que o concreto não é elástico, nem linear, o de uma viga hiperestática tradicional e seus esforços podem ser avaliados por métodos convencionais, uma vez que ao longo do tempo apenas sua deformação aumentará, mantendo-se os esforços inalterados, fato esse decorrente do não impedimento da deformação lenta.

Já a avaliação dos esforços é um pouco mais laboriosa no caso do impedimento da deformação lenta das cargas já existentes. Devemos quantificar a cada tempo t a parcela de deformação lenta impedida para avaliarmos os esforços proporcionais que desse fato decorrerão. Esse é o intuito da presente dissertação.

Para tanto foi construído um programa capaz de analisar vigas viscoelásticas através de um método incremental. Tal programa utiliza elementos de vigas. Sua elaboração foi feita visando-se simular a história da estrutura da melhor forma possível. Desse modo o programa permite que se incluam as barras em tempos distintos, bem como as cargas, permitindo uma análise da estrutura apenas parcialmente construída.

O programa oferece ainda o recurso de se colocar ao longo do tempo descontinuidades entre os deslocamentos de barras concorrentes em um nó e posteriormente suprimi-las.

Esse fato é típico das estruturas em avanços sucessivos, uma vez que concluídos os balanços tem-se suas barras extremas concorrendo no mesmo nó, mas com todos deslocamentos independentes, sendo posteriormente dada continuidade entre as duas subestruturas. Tal continuidade poderá ser total, quando então o comportamento do nó passa a ser o de um nó rígido, ou parcial, caso da união através de rótula, quando não se suprime todas as descontinuidades, mas apenas algumas.

3. FUNDAMENTOS DE VISCOELASTICIDADE

O fenômeno viscoelástico caracteriza-se por ser a lei tensão-deformação do material dependente do tempo. Os materiais viscoelásticos caracterizam-se por ter uma deformação crescente ao longo do tempo quando sua tensão é constante e uma tensão decrescente quando fixamos a deformação. Ao primeiro fenômeno chama-se deformação lenta ou fluência e ao segundo relaxação. Esses fenômenos são mostrados nas Figuras 3(a) e 3(b).

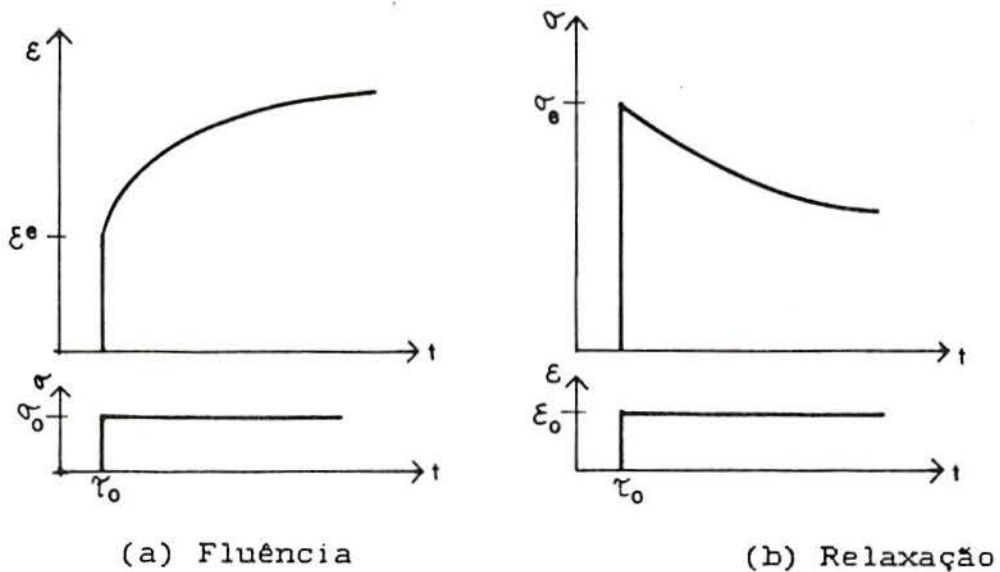


Figura 3 - Fenômenos da viscoelasticidade

Os materiais viscoelásticos são freqüentemente representados por uma combinação da lei da elasticidade de Hooke com a lei da viscosidade de Newton. Dessa combinação resultam os modelos reológicos. Reologia é definida como a ciência que estuda o escoamento dos fluidos. Então pode-se

representar esses fenômenos de forma esquemática através dos modelos reológicos o comportamento mecânico dos materiais ao longo do tempo. Eles consistem normalmente em combinações de molas e amortecedores e nos dão uma visão simplificada do fenômeno. No item 1.1 serão abordados com maiores detalhes.

Rabotnov [20] contesta essa forma de abordar o fenômeno viscoelástico como uma combinação da lei da elasticidade de Hooke com a lei da viscosidade de Newton. Ele prefere considerá-lo como um fenômeno primário, com características próprias. Assim ele não usa o termo viscoelasticidade, mas sim elasticidade hereditária.

Os materiais, em geral, sofrem o fenômeno viscoelástico. Porém, se os efeitos são bem semelhantes as causas podem ser bem diversas.

Em metais, o fenômeno ocorre por causa de um certo rearranjo molecular que se dá ao longo do tempo. Já em materiais não-homogêneos, como o concreto e a madeira, as causas não estão relacionadas à estrutura molecular.

No concreto, material do qual se ocupa este trabalho, esse fenômeno está intrinsecamente ligado a outro também muito importante: a retração. Após a concretagem e a cura do concreto, ainda encontra-se água em seu interior, alojada em pequenos vasos capilares. Essa água é o resíduo da reação de hidratação do cimento, resíduo esse que sempre irá existir, uma vez que o fator água-cimento necessário para realizar a reação é 15% e o fator água-cimento mínimo para o concreto ser trabalhável é 40%. Logo há no mínimo 25% de água livre após o término da reação [9].

Com o tempo, essa água irá evaporar e os vasos capilares, sem a pressão interna da água, são esmagados, provocando uma perda de volume denominada retração. A perda d'água, além de provocar uma diminuição do volume, provoca uma transferência de carga, já que a carga que era resistida parte pela matriz do concreto e parte pela água existente nos vasos capilares com a fuga d'água passa a ser gradativamente transferida para a matriz. Isso significa uma perda da seção resistente. Assim a deformação cresce ocorrendo a fluência.

A relaxação se dá de forma análoga, uma vez que a rigidez é diminuída com a saída da água.

Em um material viscoelástico considera-se que toda deformação produzida ao longo do tempo pode ser recuperada. Caso queira se considerar deformações irreversíveis teria-se um material viscoplástico ou plástico hereditário, segundo Rabotnov.

Do mesmo modo que as deformações instantâneas, as deformações progressivas podem ser lineares ou não-lineares. Para deformações lineares a deformação causada por uma tensão ($\sigma_1 + \sigma_2$) é igual à soma das deformações causada por σ_1 e σ_2 aplicadas separadamente. A isso chama-se princípio da superposição. Esse princípio é válido para materiais lineares com pequenas deformações.

As deformações do concreto são aproximadamente lineares até 30% a 50% de sua tensão de ruptura. Contudo, no presente trabalho o concreto será sempre considerado linear numa primeira aproximação.

Tendo sido o comportamento considerado viscoelástico linear, pode-se definir uma função de fluência $D(t, \tau)$ apenas dependente da idade t do concreto e do tempo da colocação da carga τ . Essa função desempenha um papel análogo ao módulo de elasticidade dos materiais elásticos, ou seja, serve para relacionar a tensão com a deformação. Só que, ao contrário do módulo de elasticidade, ela não é um número, mas uma função do tempo e da idade do material no instante de colocação da carga. A relação é linear, porque a função não inclui a tensão ou deformação, o que vale dizer que a relação entre ambas independe do nível de carga. Então, tem-se para uma função de tensão tipo salto unitário:

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t-\tau) \quad (3.1)$$

$$\sigma_0 = \frac{\epsilon(t, \tau)}{D(t, \tau)} \quad (3.2)$$

onde $H(t-\tau)$: função salto unitário.

Assim, a função de fluência é obtida pela divisão da deformação ao longo do tempo pela tensão que a causa, quando essa tensão é do tipo salto unitário.

Para o caso da deformação ser do tipo salto unitário tem-se:

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t-\tau) \quad (3.3)$$

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma(t, z)}{E(t, z)} \quad (3.4)$$

onde $E(t, z)$ é a função de relaxação.

Para histórias de carga tipo salto unitário pode-se achar as deformações com as relações acima, uma vez conhecida a função de fluência do material. Agora, para histórias de carga mais complexas, ou seja, com cargas sendo colocadas em tempos diversos tem-se:

$$\sigma(t) = \int_{z_0}^t d\sigma(z) = \int_{z_0}^t \dot{\sigma}(z) dz \quad (3.5)$$

onde z_0 : tempo em que se inicia a colocação das cargas;

z : tempo em que é colocado cada incremento infinitesimal da carga.

$\dot{\sigma}$: derivação em relação a z

Então:

$$\epsilon(t) = \int_{z_0}^t D(t, z) \dot{\sigma}(z) dz \quad (3.6)$$

A relação acima é conhecida como representação integral da viscoelasticidade e vale para qualquer material viscoelástico linear. O comportamento dos diversos materiais é simulado através de funções de fluência convenientes.

Utilizando a integração por partes, obtêm-se sua forma mais comum:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{z_0}^t d(t,z) \sigma(z) dz \quad (3.7)$$

onde $d(t,z) = -\partial D(t,z) / \partial z$,

$$E(t) = 1/D(t,t).$$

Na expressão acima, o primeiro membro representa a deformação instantânea e o segundo a deformação progressiva.

A questão fica em como determinar-se a função de fluência. Essa função deve ser construída através de dados experimentais, os quais, uma vez obtidos, são transformados em uma função. As funções, em geral, são bastantes sofisticadas. Contudo, existem funções bastante simples, que fornecem uma noção física do fenômeno. Além disso, sua formulação matemática simples permite fácil utilização em algoritmos incrementais. São os já citados modelos reológicos.

3.1. Modelos reológicos

Os modelos reológicos são combinações de amortecedores e molas que simulam o comportamento viscoelástico de um material. Eles são importantes didaticamente e para utilização em algoritmos incrementais.

Um material elástico pode ser representado por uma mola, cujo comportamento é descrito pela lei de Hooke:

$$\sigma_e = E \epsilon_e \quad (3.1.1)$$

Já um material puramente viscoso poderia ser representado por um amortecedor, regido pela equação do amortecedor perfeitamente viscoso:

$$\sigma_V = \eta \dot{\epsilon}_V \quad (3.1.2)$$

A combinação desses dois elementos em paralelo resulta um material sem deformação instantânea, mas cuja deformação viscosa poderia ser recuperada ao fim de algum tempo, uma vez retirada a carga. Esse é o chamado modelo de Kelvin.

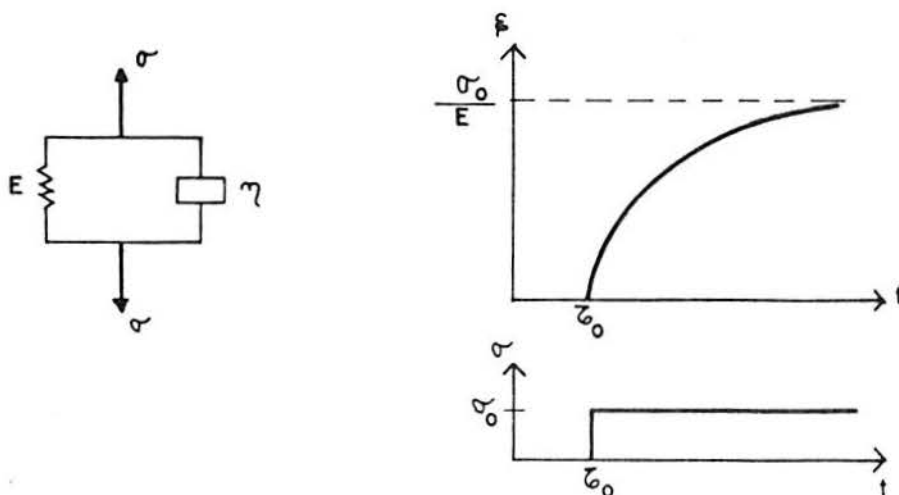


Figura 3(c) - Modelo Kelvin

As condições de compatibilidade e equilíbrio fornecem:

$$\epsilon = \epsilon_e = \epsilon_V \quad (3.1.3)$$

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_V \quad (3.1.4)$$

Ou seja, as deformações na mola e no amortecedor devem ser iguais e a tensão na mola mais a tensão do amortecedor deve resultar a tensão total aplicada. Assim,

substituindo a lei constitutiva da mola e do amortecedor na equação de equilíbrio:

$$\sigma = E \epsilon + \eta \dot{\epsilon} \quad (3.1.5)$$

A solução da equação diferencial acima fornece:

$$\epsilon(t) = \int_{z_0}^t \frac{1}{E} (1 - e^{-(t-z)E/\eta}) \dot{\sigma}(z) dz \quad (3.1.6)$$

Então, para o modelo de Kelvin a função de fluência resulta em:

$$D(t, z) = \frac{1}{E} (1 - e^{-(t-z)E/\eta}) \quad (3.1.7)$$

Pode-se melhorar o modelo acima colocando mais uma mola isolada para representar a deformação instantânea. Esse modelo é chamado standard.

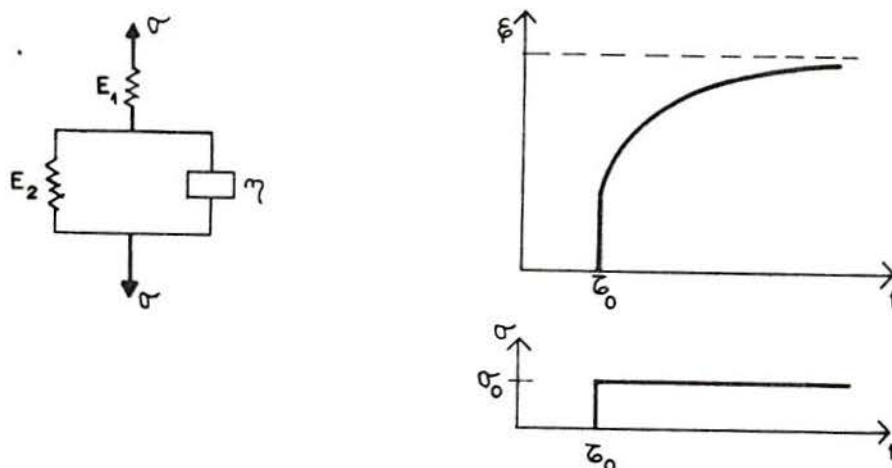


Figura 3(d) - Modelo standard

Aplicando as condições de compatibilidade e equilíbrio obtemos:

$$\epsilon_2(t) = \epsilon_{e2}(t) = \epsilon_v(t) \quad (3.1.8)$$

$$\epsilon(t) = \epsilon_{e1}(t) + \epsilon_{e2}(t) \quad (3.1.9)$$

$$\sigma(t) = \sigma_{e2}(t) + \sigma_v(t) \quad (3.1.10)$$

$$\sigma(t) = \sigma_{e1}(t) \quad (3.1.11)$$

Substituindo a equação constitutiva da mola e do amortecedor nas condições de equilíbrio:

$$\sigma(t) = (E_2 + n \frac{\partial}{\partial t}) \epsilon_2(t) \quad (3.1.12)$$

$$\sigma(t) = E_1 \epsilon_{e1} \quad (3.1.13)$$

Isolando as deformações nas expressões acima e somando-as para obter a deformação total:

$$\sigma(t) = E_1 \epsilon(t) + E_2 n \dot{\epsilon}(t) \quad (3.1.14)$$

Com isso resolve-se a equação diferencial e obtém-se a função de fluência do modelo:

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-E_2(t-\tau)/n}) \quad (3.1.15)$$

Pode-se ainda formar um modelo onde se acople n mecanismos Kelvin. Esse modelo é chamado Kelvin generalizado. Para utilização em algoritmos ele é particularmente útil, uma vez que tendo múltiplos mecanismos pode-se ajustar com mais propriedade os dados que se tenha.

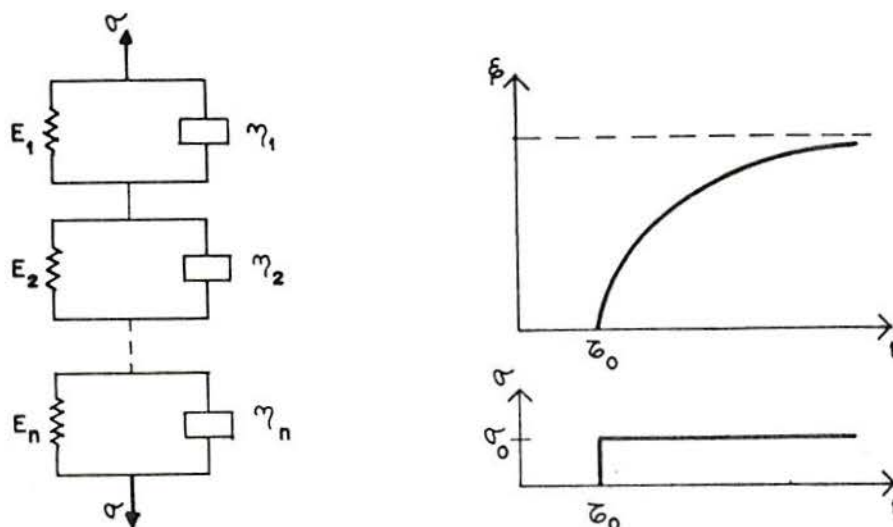


Figura 3(e) - Modelo Kelvin generalizado

A função de fluência desse modelo resulta em:

$$D(t, \tau) = \sum_{r=1}^n \frac{(1 - e^{-(t - \tau)/\theta_r})}{E_r} \quad (3.1.16)$$

onde r : número de cadeias;

$\theta_r = \eta_r/E_r$ (tempo de retardação).

3.2. Envelhecimento

Como foi dito, os modelos reológicos são as formas mais simples de representar o fenômeno viscoelástico. Poderia-se introduzir uma certa sofisticação colocando seus

parâmetros (molas e amortecedores) em função do tempo. Com isso introduz-se o envelhecimento.

Chama-se envelhecimento a mudança das características mecânicas dos materiais ao longo do tempo. O concreto, por exemplo, com a idade, aumenta sua resistência e diminui sua deformabilidade imediata e progressiva. Isso quer dizer que se colocarmos uma carga em uma viga com 10 dias de idade essa carga provocará menor deformação que se fosse colocada aos 1000 dias. O aumento relativo da deformação ao longo do tempo também será menor no segundo caso. Além disso, a carga admissível a 10 dias será inferior à admissível a 1000 dias.

Então, materiais sem envelhecimento tem sua deformação só em função do tempo decorrido desde a colocação da carga($t-\tau$), enquanto materiais com envelhecimento dependem não só do tempo decorrido desde a colocação da carga, mas da idade do concreto no instante da colocação da carga.

4. VISCOELASTICIDADE: REPRESENTAÇÃO EM FUNÇÃO DE VARIÁVEIS DE ESTADO

Retoma-se a relação viscoelástica fundamental (3.7):

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{z_0}^t d(t, z) \sigma(z) dz \quad (4.1)$$

A expressão acima pode ser substituída, com um grau de aproximação tão bom quanto se queira, pela relação abaixo:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \sum_{i=1}^n q_i(t) \quad (4.2)$$

onde $q_i(t)$ são chamadas variáveis de estado. As variáveis de estado são definidas como sendo a resposta viscoelástica de uma cadeia Kelvin a uma história de tensões qualquer:

$$q_i(t) = \int_{z_0}^t \frac{1}{n_i} e^{-(t-z)/\theta_i} \sigma(z) dz \quad (4.3)$$

Diferenciando a expressão acima em relação a t , obtém-se:

$$\dot{q}_1(t) + \frac{q_1(t)}{\theta_1} = \frac{\sigma(t)}{n_1} \quad (4.4)$$

Assim, foi simplificado o equacionamento, passando de uma equação integral para um sistema desacoplado de equações diferenciais de primeira ordem. A representação utilizando as expressões (4.3) e (4.4) são particularmente úteis na análise numérica de sistemas com numerosos graus de liberdade.

A integração das equações diferenciais pode ser realizada de várias maneiras. A mais simples é utilizando o método de Euler. Tomando um incremento Δt tem-se:

$$\Delta q_1(t) = \left(-\frac{q_1(t)}{\theta_1} + \frac{\sigma(t)}{n_1} \right) \Delta t \quad (4.5)$$

$$q_1(t+\Delta t) = q_1(t) + \Delta q_1(t) \quad (4.6)$$

Alternativamente pode-se integrar:

$$q_1(t+\Delta t) = \int_{z_0}^t e^{-(t+\Delta t-z)/\theta_1} \frac{\sigma(z)}{n_1} dz + \int_t^{t+\Delta t} e^{-(t+\Delta t-z)/\theta_1} \frac{\sigma(z)}{n_1} dz \quad (4.7)$$

Para a primeira integral é possível isolar $e^{-\Delta t/\theta_1}$ que é uma constante em relação a z . Dessa forma:

$$e^{-\Delta t/\theta_i} \int_{z_0}^t e^{-(t-z)/\theta_i} \frac{\sigma(z)}{n_i} dz = e^{-\Delta t/\theta_i} q_i(t) \quad (4.8)$$

Para a segunda integral assume-se a hipótese que $\sigma(t)/n_i$ seja constante em cada intervalo Δt :

$$\int_t^{t+\Delta t} e^{-(t+\Delta t-z)/\theta_i} \frac{\sigma(z)}{n_i} dz = \frac{\sigma(t)}{n_i} \theta_i (1 - e^{-\Delta t/\theta_i}) \quad (4.9)$$

Assim resulta:

$$q_i(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_i} q_i(t) + \frac{\sigma(t)}{n_i} \theta_i (1 - e^{-\Delta t/\theta_i}) \quad (4.10)$$

algoritmo que permite determinar as variáveis de estado e através de (4.3) obter as deformações em qualquer tempo t . A precisão do resultado será tanto maior quanto menor o intervalo de integração Δt escolhido.

Assim contruiu-se um algoritmo incremental que permite o cálculo das deformações ao longo do tempo sem ser necessário determinar o valor da integral que representa classicamente a viscoelasticidade.

5. FORMULAÇÃO INCREMENTAL PARA PROBLEMAS VISCOELASTICOS

A intenção desse capítulo é reduzir a análise viscoelástica a uma série de análises elásticas equivalentes, variáveis ao longo do tempo. Os resultados da análise elástica no tempo t seriam equivalentes aos resultados da análise viscoelástica que a originou.

Assume-se que o meio viscoelástico esteja em equilíbrio compatível com deformações pequenas. A velocidade de aplicação das cargas também é pequena e os efeitos dinâmicos são desprezíveis.

Dessa forma pode-se aplicar o princípio dos trabalhos virtuais para pequenos deslocamentos:

$$\int_V \delta \tilde{c}^t \tilde{\sigma} dV = \int_V \delta \tilde{u}^t \tilde{b} dV + \int_S \delta \tilde{u}^t \tilde{t} dS \quad (5.1)$$

onde V: volume do elemento;

S: superfície do elemento;

$\tilde{\sigma}$: matriz coluna contendo as componentes do tensor de tensões;

\tilde{u} : vetor de deslocamentos;

\tilde{b} : vetor de forças de volume;

\tilde{t} : vetor de forças de contato;

δ : pequenos incrementos das grandezas indicadas.

Aplicando o método dos elementos finitos pode-se escrever para cada elemento:

$$\tilde{u} = \tilde{N} \tilde{u}^i \quad (5.2)$$

$$\tilde{e} = \tilde{B} \tilde{u}^i \quad (5.3)$$

onde \tilde{u}^i : matriz coluna dos deslocamentos nodais do elemento;

\tilde{N} : matriz de funções de forma;

\tilde{e} : matriz coluna contendo as componentes do tensor de deformações.

A equação (4.2) pode ser separada em uma parte viscoelástica e em uma parte elástica. Dessa forma ela pode ser reescrita como:

$$\tilde{\sigma}(t) = \tilde{E}(t) (\tilde{e}(t) - \tilde{e}_v(t)) \quad (5.4)$$

onde $\tilde{E}(t)$: tensor de propriedades elásticas em função do tempo;

$\tilde{e}_v(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t)$, componente viscoelástica da deformação.

Substituindo (5.2), (5.3), (5.4) em (5.1) obtém-se uma expressão da forma:

$$\tilde{k}^i \tilde{u}^i = \tilde{p}^i \quad (5.5)$$

onde:

$$\tilde{K}^i = \int_V \tilde{B}^t \tilde{E} \tilde{B} dV \quad (5.6)$$

$$\tilde{P}^i = \int_V \tilde{N}^t \tilde{p} dV + \int_S \tilde{N}^t \tilde{t} dS + \int_V \tilde{B}^t \tilde{E} \tilde{e}_v dV \quad (5.7)$$

O último termo da expressão acima é um termo que aparece sempre que haja algum tipo de deformação inicial. O produto das deformações viscoelásticas pela matriz E resulta nas tensões que seriam geradas caso fosse impedida a livre deformação viscoelástica. Multiplicada pela matriz B e integrada no volume resulta as reações nodais que surgiriam em um elemento com todos graus de liberdade impedidos.

Assim, nesse formalismo, pode-se interpretar o último termo como sendo uma carga fictícia que seria acrescentada ao longo do tempo na estrutura elástica. O valor dessa carga seria tal que provocasse uma deformação correspondente à deformação viscoelástica. Dessa forma atingi-se o objetivo proposto: transformou-se o problema viscoelástico em uma série de análises elásticas em que as cargas crescem ao longo do tempo. Essas cargas fictícias são chamadas cargas viscoelásticas.

É importante salientar que as cargas viscoelásticas só irão afetar às deformações, uma vez que segundo a equação (5.4) as tensões mantêm-se inalteradas, se não houver mudanças nas deformações elásticas.

O campo de deslocamentos nodais totais, subtraído dos movimentos de corpo rígido, dá origem aos deslocamentos

relativos devidos às deformações elásticas e viscoelásticas. A parcela dos deslocamentos associada à deformação elástica chamar-se-á deslocamentos elásticos e àquela associada à deformação viscoelástica chamar-se-á deslocamentos viscoelásticos. Desse modo:

$$\underset{\sim}{u}^i = \underset{\sim}{u}_e^i + \underset{\sim}{u}_v^i + \underset{\sim}{u}_r^i \quad (5.8)$$

$$\underset{\sim}{\epsilon}_v = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{u}_v^i \quad (5.9)$$

Para cálculo das cargas viscoelásticas é conveniente que sejam usados os deslocamentos nodais e não as deformações. Assim as deformações podem ser substituídas pela expressão (5.3). A carga viscoelástica fica:

$$\int_V \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{\epsilon}_v dV = \int_V \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{u}_v^i dV \quad (5.10)$$

Os deslocamentos nodais são constantes e como tais podem ser colocados fora da integral. Em vista disso:

$$\int_V \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{u}_v^i dV = \int_V \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} dV \underset{\sim}{u}_v^i = \underset{\sim}{k}^i \underset{\sim}{u}_v^i \quad (5.11)$$

Chega-se enfim a conclusão que para o cálculo das forças viscoelásticas basta que se multiplique a matriz de rigidez do elemento pelos deslocamentos nodais viscoelásticos que apareceriam se a barra pudesse se deformar livremente. Os deslocamentos nodais viscoelásticos, que são deslocamentos relativos, ou seja, equivalentes a uma

deformação generalizada, serão calculados através do somatório das variáveis de estado, vistas no capítulo anterior.

Para o concreto, adota-se que as funções que caracterizam a deformação lenta uniaxial (como, por exemplo, a função do CEB) são aplicáveis também às deformações generalizadas.

6. DESCONTINUIDADES E MUDANÇAS DE SISTEMA ESTÁTICO

As estruturas de barras construídas de forma incremental provavelmente irão ter descontinuidades entre seus elementos durante algum tempo de sua vida.

Chama-se descontinuidades qualquer condição que torne independente os deslocamentos das barras concorrentes em um nó. Uma descontinuidade pode ser total, quando todos os deslocamentos são independentes, ou parcial, quando apenas alguns são independentes. As solicitações correspondentes aos deslocamentos com descontinuidades se anulam no nó. Por exemplo: uma rótula torna os giros independentes e o momento nulo.

Na sua fase construtiva em geral apresentam-se descontinuidades totais entre os elementos. Isso ocorre quando duas estruturas que estavam sendo construídas separadas a partir de bases iniciais distintas encontram-se frente a frente, prontas para serem unidas.

Além desse tipo de descontinuidade que surge na fase construtiva podem haver descontinuidades parciais que permanecem durante toda a vida útil da estrutura. Esse é o caso, por exemplo, de estruturas cuja continuidade é dada através de rótulas.

Essas descontinuidades são introduzidas em tempos dados. No momento que o tempo da análise é igual ao tempo de introdução da descontinuidade essa é considerada através da

técnica usual utilizada em análise matricial. Essa técnica consiste em calcular-se uma matriz de rigidez modificada e formar-se um subsistema que permita o cálculo dos deslocamentos do nó separadamente. Cabe notar que apenas uma das barras concorrentes no nó deve ser articulada, caso contrário seria criada uma singularidade na matriz de rigidez global, uma vez que essa técnica zera as linhas e colunas das descontinuidades.

A seguir apresenta-se a técnica matricial. Para maior clareza, inicia-se com um caso particular simples: uma barra com uma rótula no seu segundo nó.

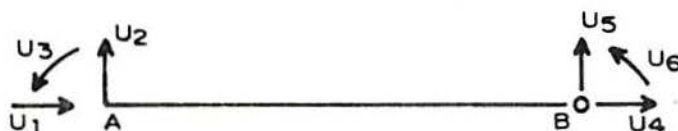


Figura 6(a) - Barra rotulada

A equação de equilíbrio da barra elástica é:

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{f}_{ep} \quad (6.1)$$

onde: $\underset{\sim}{f}$ - solicitações nos nós
 $\underset{\sim}{k}$ - matriz de rigidez do elemento
 $\underset{\sim}{u}$ - deslocamentos nodais
 $\underset{\sim}{f}_{ep}$ - forças de engastamento perfeito

Como tem-se uma rótula no segundo nó sabe-se que $f_6=0$. Dessa forma o sistema de equações da barra pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + \dots + k_{16}u_6 + f_{ep1} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 f_5 &= k_{51}u_1 + k_{52}u_2 + \dots + k_{56}u_6 + f_{ep5} \\
 0 &= k_{61}u_1 + k_{62}u_2 + \dots + k_{66}u_6 + f_{ep6}
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

Vê-se então que é possível isolar u_6 na última equação, escrevendo-o como uma função dos outros deslocamentos. Desse modo obtém-se:

$$u_6 = -[k_{61}u_1 + \dots + k_{65}u_5 + f_{ep6}] / k_{66} \tag{6.3}$$

Assim pode-se substituir u_6 nas equações anteriores e reduzir o sistema de 6 equações para 5. Fazendo isso obtém-se uma matriz de rigidez modificada para a barra, cujos elementos são:

$$\bar{k}_{ij} = k_{ij} - k_{i6}k_{66}^{-1}k_{6j} \quad i, j = 1, 5 \tag{6.4}$$

e um vetor de cargas também modificado:

$$f_{epi} = \bar{f}_{epi} - k_{i6}k_{66}^{-1}f_{ep6} \quad i = 1, 5 \tag{6.5}$$

Para que não se modifique a dimensão da matriz completa-se com zeros a sexta coluna, bem como a sexta linha. O giro do segundo nó da barra não será calculado no sistema global, mas pode-se o fazer utilizando a equação (6.3).

Para o caso de várias descontinuidades procede-se da mesma forma, mas de modo mais geral. Inicialmente reordena-se a matriz de forma que fiquem os graus de liberdade com descontinuidade no final:

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_N \\ \tilde{f}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{NN} & \tilde{k}_{ND} \\ \tilde{k}_{DN} & \tilde{k}_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_N \\ \tilde{u}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{f}_{epN} \\ \tilde{f}_{epD} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Sabendo ser $\tilde{f}_D=0$, então:

$$\tilde{k}_{DN}\tilde{u}_N + \tilde{k}_{DD}\tilde{u}_D + \tilde{f}_{epD} = 0 \quad (6.7)$$

Isolando \tilde{u}_D na equação acima resulta:

$$\tilde{u}_D = -\tilde{k}_{DD}^{-1}(\tilde{k}_{DN}\tilde{u}_N + \tilde{f}_{epD}) \quad (6.8)$$

Substituindo (6.8) em (6.6) e reorganizando:

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\tilde{k}}_{NN} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_N \\ \tilde{u}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\tilde{f}}_{epN} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

onde:

$$\bar{\tilde{k}}_{NN} = \tilde{k}_{NN} - \tilde{k}_{ND}\tilde{k}_{DD}^{-1}\tilde{k}_{DN} \quad (6.10)$$

$$\bar{\tilde{f}}_{epN} = \tilde{f}_{epN} - \tilde{k}_{ND}\tilde{k}_{DD}^{-1}\tilde{f}_{epD} \quad (6.11)$$

A inversão matricial expressa em (6.10) e (6.11) normalmente não é feita, mas define-se uma matriz X como o seguinte produto:

$$\tilde{X} = \tilde{k}_{DD}^{-1}\tilde{k}_{DN} \quad (6.12)$$

e X pode ser obtida através da resolução do sistema de equações:

$$\tilde{k}_{DD}X = \tilde{k}_{DN} \quad (6.13)$$

Feito isso volta-se a ordem inicial da matriz. A matriz assim obtida é adicionada ao sistema global. Para o cálculo dos deslocamentos correspondentes aos graus de liberdade com descontinuidade utiliza-se a equação (6.8).

As mudanças de sistema estático consideradas são as provenientes da supressão de descontinuidades no momento em que se dá continuidade entre os elementos. Essa continuidade pode ser total ou parcial, logo pode-se suprimir todas ou apenas algumas descontinuidades entre os elementos.

Ao contrário das descontinuidades, as mudanças de sistema estático devem ser consideradas em tempo posterior a sua introdução, já que seus efeitos não se fazem sentir instantaneamente. Para maior clareza tome-se um exemplo: suponha-se que a 100 dias duas subestruturas tenham sido completadas e estejam frente a frente esperando serem unidas. Então a 100 dias deve-se introduzir uma descontinuidade entre os dois elementos terminais, caso contrário a estrutura seria analisada como uma estrutura contínua. Imagine-se, agora, que a 130 dias seja dada a ela uma continuidade total. Ela então já não será dois balanços frente a frente mas uma viga contínua. Contudo, a 130 dias as solicitações ainda serão a de dois balanços. Apenas em

tempo posterior a esse começarão a se sentir os efeitos da continuidade.

As mudanças de sistema estático são feitas retirando-se da matriz global a matriz com descontinuidades existente anteriormente e colocando-se em seu lugar uma nova matriz de rigidez com todas ou apenas algumas descontinuidades suprimidas. Além disso, guardam-se todos os deslocamentos existentes nesse momento e zeram-se os vetores de carga, calculando-se a partir de então apenas os deslocamentos que ocorrem após a mudança de sistema. Os deslocamentos existentes antes da mudança somados aos surgidos após resultam no deslocamento total para cada tempo t .

Para maior clareza da aplicação do método será apresentado um exemplo numérico. Inicialmente tem-se um material elástico. O exemplo constará de duas vigas biapoiadas com um apoio comum entre elas. Essa situação será simulada através da consideração de uma rótula. As vigas serão carregadas com uma carga distribuída. Algum tempo após elas são unidas e recebem um segundo carregamento, cuja intensidade é a mesma do primeiro.

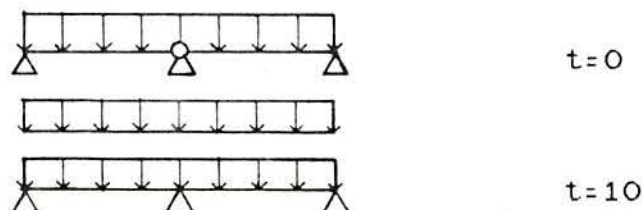


Figura 6(b) - Mudança de sistema
estático

Dados: $E= 2,5 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$

$A= 1000 \text{ cm}^2$

$I= 2,5 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$

$L= 500 \text{ cm}$

$q= 0,20 \text{ kN/cm}$

É importante notar que após a mudança do sistema estático só haverá novas solicitações porque foi colocada uma nova carga, caso contrário nada aconteceria, uma vez que o material é elástico.

A matriz de rigidez de cada barra é:

$$\begin{bmatrix} 5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 & -5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 6,0 \cdot 10^1 & 1,5 \cdot 10^4 & 0 & -6,0 \cdot 10^1 & 1,5 \cdot 10^4 \\ 0 & 1,5 \cdot 10^4 & 5,0 \cdot 10^6 & 0 & -1,5 \cdot 10^4 & 2,5 \cdot 10^6 \\ -5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & -6,0 \cdot 10^1 & -1,5 \cdot 10^4 & 0 & 6,0 \cdot 10^1 & -1,5 \cdot 10^4 \\ 0 & 1,5 \cdot 10^4 & 2,5 \cdot 10^6 & 0 & -1,5 \cdot 10^6 & 5,0 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

Para o carregamento dado o vetor de cargas nodais transposto será:

$$\tilde{p} = [0 \quad -50 \quad -4167 \quad 0 \quad -50 \quad 4167]$$

A rótula será considerada como situada no nó 2 da barra 1. Iremos agora isolar o giro φ_2 para formar a equação auxiliar que nos permita calculá-lo posteriormente (conforme equação (6.3)):

$$\varphi_2 = -(0 u_1 + 1,50 \cdot 10^4 v_1 + 2,50 \cdot 10^6 \varphi_1 + 0 u_2 - \\ - 1,5 \cdot 10^4 v_2 + 4167) / 5 \cdot 10^6$$

Tendo isolado o deslocamento com descontinuidade vamos substituí-lo nas outras equações para formar a matriz modificada.

A primeira linha se manterá inalterada, uma vez que k_{16} é nulo. A segunda linha será modificada da seguinte forma:

$$k_{22} = 6 \cdot 10^1 - 1,5 \cdot 10^4 \cdot 1,5 \cdot 10^4 / 5 \cdot 10^6 = 1,5 \cdot 10^1$$

$$k_{23} = 1,5 \cdot 10^4 - 2,5 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \cdot 10^4 / 5 \cdot 10^6 = 7,5 \cdot 10^4$$

$$k_{24} = 0$$

$$k_{25} = -6 \cdot 10^1 + 1,5 \cdot 10^4 \cdot 1,5 \cdot 10^4 / 5 \cdot 10^6 = -1,5 \cdot 10^1$$

A terceira, a quarta e a quinta linha seriam modificadas de forma análoga. A sexta coluna e a sexta linha seriam zeradas. Completada essa operação obtém-se a matriz modificada (conforme expressão (6.4))

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} 5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 & -5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 \cdot 10^1 & 7,5 \cdot 10^3 & 0 & -1,5 \cdot 10^1 & 0 \\ 0 & 7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^6 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & 0 \\ -5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 \cdot 10^1 & -7,5 \cdot 10^3 & 0 & 1,5 \cdot 10^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na sequência das operações calcula-se o vetor de cargas modificado, lembrando que o vetor de cargas nodais é o oposto do vetor de forças de engastamento perfeito. Transpondo-o, resulta:

$$\bar{p} = [0 \quad -62,5 \quad 6250 \quad 0 \quad 62,5 \quad 0]$$

Tendo calculado a matriz e o vetor modificado para a barra que contém a descontinuidade podemos montar o sistema global, que é apresentado na forma de matriz banda na Figura 6(c).

Aplica-se as condições de contorno e calcula-se os deslocamentos através da resolução de sistema global e do sistema auxiliar, que no caso se resume a uma equação (giro da barra 1, nó 2). Como a vinculação impede os deslocamentos verticais em todos nós e o carregamento não provoca deslocamentos horizontais, obtém-se como deslocamentos apenas os giros nas extremidades das barras. Sendo o sistema estático duas vigas isostáticas carregadas de forma idêntica resulta que os giros da primeira serão iguais aos da segunda:

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = -1,67 \cdot 10^{-3}$$

Com os deslocamentos calculam-se as solicitações. Essas solicitações resultarão nas solicitações das vigas isostáticas. O diagrama de momentos fletores terá a seguinte configuração:

$$\begin{bmatrix}
 5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 & -5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\
 1,5 \cdot 10^1 & 7,5 \cdot 10^3 & 0 & -1,5 \cdot 10^1 & 0 & 0 \\
 3,8 \cdot 10^6 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\
 1,0 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^1 & 1,5 \cdot 10^4 & 0 & -6,0 \cdot 10^1 & 1,5 \cdot 10^4 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^6 & 0 & -1,5 \cdot 10^4 & 2,5 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 6,0 \cdot 10^1 & -1,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 \phi_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 \phi_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 \phi_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 -62,5 \\
 6250 \\
 0 \\
 12,5 \\
 -4167 \\
 0 \\
 -50,0 \\
 4167
 \end{bmatrix}$$

Figura 6(c) - Sistema global da estrutura isostática

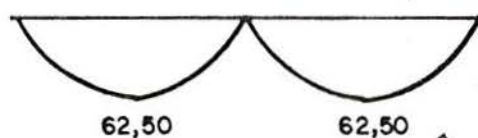


Figura 6(d) - Momentos fletores no sistema isostático [kNm]

Aos dez dias fecha-se a rótula e acrescenta-se uma segunda carga uniforme de mesmo valor que a colocada no sistema isostático. Para considerar tais efeitos são alterados a matriz de rigidez global e o vetor de cargas.

A matriz de rigidez global tem substituída a matriz de rigidez modificada referente a barra com descontinuidade pela matriz de rigidez convencional dessa barra.

O vetor de cargas deverá conter apenas as cargas externas acrescentadas após a mudança de sistema estático e as cargas viscoelásticas relativas aos deslocamentos viscoelásticos também surgidos após a mudança.

Assim foi gerado um novo sistema global. Esse sistema acha-se transcrito na forma de matriz retangular contendo apenas a semi-banda na figura 6(e).

Os deslocamentos lineares continuam impedidos, sendo, portanto, os giros as únicas incógnitas. Por simetria os giros 1 e 3 devem ter mesmo módulo e sinais opostos e o giro 2 deve ser nulo. Os valores dos giros resultam:

$$\begin{bmatrix}
 5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 & -5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\
 6,0 \cdot 10^1 & 1,5 \cdot 10^4 & 0 & -6,0 \cdot 10^1 & 1,5 \cdot 10^4 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^6 & 0 & -1,5 \cdot 10^4 & 2,5 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\
 1,0 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\
 1,2 \cdot 10^2 & 0 & 0 & -6,0 \cdot 10^1 & 1,5 \cdot 10^4 & 0 \\
 1,0 \cdot 10^9 & 0 & -1,5 \cdot 10^4 & 2,5 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 6,0 \cdot 10^1 & -1,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 \phi_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 \phi_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 \phi_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 -50,0 \\
 4167 \\
 0 \\
 -100 \\
 0 \\
 0 \\
 -50,0 \\
 4167
 \end{bmatrix}$$

Figura 6(e) - Sistema global da viga contínua

$$\varphi_1 = -\varphi_3 = -8,33 \cdot 10^{-4}$$

$$\varphi_2 = 0$$

Esses giros são relativos apenas ao último carregamento. Os giros da extremidade são de mesmo módulo e sinais opostos e o giro no centro nulo, como era de se esperar, uma vez que existe simetria na estrutura e nas cargas.

Com esses giros são calculadas as solicitações que serão as de uma viga contínua. O gráfico de fletores resulta:

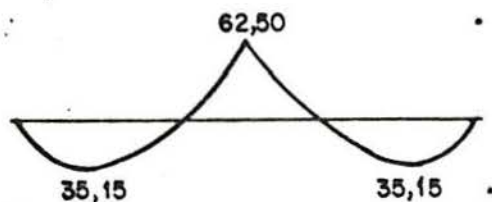


Figura 6(d) -Momentos fletores do sistema hiperestático [kNm]

A soma do gráfico acima com o anterior, pertencente ao sistema rotulado resultará nas solicitações que atuarão na peça.

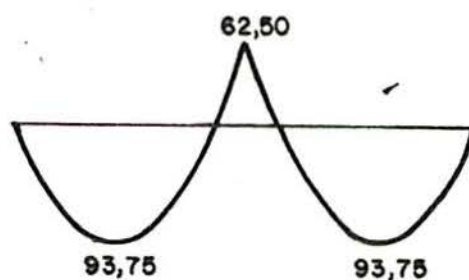


Figura 6(e) - Momentos fletores finais [kNm]

Através desse exemplo buscou-se ilustrar a causa do aparecimento de esforços hiperestáticos em vigas viscoelásticas que sofrem mudanças de descontinuidades: eles aparecerão porque após a supressão da descontinuidade continua-se a acrescentar cargas viscoelásticas. A explicação física do fenômeno está no impedimento dos nós centrais em continuar a aumentarem seus giros, como deveria ocorrer se não houvesse interferência externa. Uma vez que as deformações são impedidas deverão aparecer solicitações em consequência do fato.

7. CONSTRUÇÃO INCREMENTAL

As estruturas construídas incrementalmente se caracterizam por deverem ser analisadas incompletas durante sua fase de construção. Isso se faz necessário porque nesse tipo de estrutura cada parte construída se torna autoportante e passa a ser carregada logo após sua construção, ao contrário de estruturas convencionais. Além disso essas estruturas sofrerão mudanças em seu sistema estático e as solicitações que irão se desenvolver desde então estarão relacionadas com a história anterior da estrutura.

Dessa forma a estrutura deve ser analisada em sua fase construtiva para cada tempo t de análise com os elementos, cargas e descontinuidades que hajam nesse tempo.

A forma como se considera as descontinuidades e mudanças de sistema estático já foi descrita no item anterior desse trabalho. Passaremos a expor nesse item como será feita a colocação das barras e das cargas ao longo do tempo.

Para tanto além dos dados convencionais necessários para o cálculo da matriz de rigidez das barras também devemos fornecer o tempo de colocação de cada uma delas. Analogamente, para cada carga devemos fornecer o seu tempo de inclusão (uma vez que o carregamento não precisa começar a atuar no momento que a barra for colocada). Além disso devemos fornecer o número de subestruturas iniciais.

Assim vai-se adicionando sucessivamente barras às subestruturas até que elas se encontrem. Nesse instante elas passam a não ser mais calculadas como subestruturas, mas como uma única. Tal fato é verificado automaticamente pelo programa. Sua detecção se dá da seguinte maneira: ao iniciar a análise verifica-se os limites (primeira e última linha) de cada subsistema. Esses limites são reconhecidos pela presença de valores não-nulos na diagonal. A cada tempo posterior de análise pesquisa-se, então, a ampliação desses limites, que pode ou não ocorrer. Quando dois subsistemas se unem (mesmo contendo descontinuidades) os limites desses dois subsistemas se tornarão iguais, já que os valores nulos na diagonal que haviam entre os dois subsistemas irão desaparecer. Desse modo, a cada tempo de análise compara-se os limites dos sistemas adjacentes e, caso eles tenham se tornado iguais, um deles é desativado colocando-se como seus limites um número igual ao número de incógnitas mais um. Ao ser lido esse código o programa saberá que não é mais necessário resolver esse subsistema.

Para maior clareza apresenta-se outro exemplo :

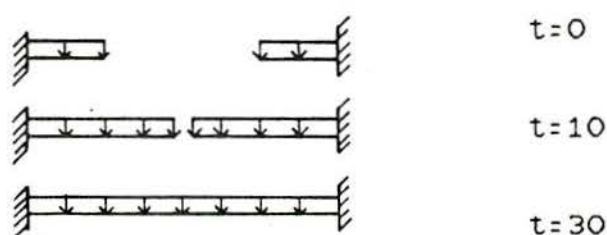


Figura 7(c) - Exemplo de aplicação

Dados: comprimento de cada segmento: 100 cm

área da seção: 1000 cm²

inércia da seção: 25000 cm^4

carga: $0,20 \text{ kN/cm}$

modelo standard

$$E_1 = 2500 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_2 = 2500 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{amortecedor} = 250000 \text{ kN/cm}^2 \cdot \text{dia}$$

Matriz de rigidez de cada barra:

$$\begin{bmatrix} 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 \\ 0 & 3,8 \cdot 10^5 & 2,5 \cdot 10^7 & 0 & -3,8 \cdot 10^5 & 1,3 \cdot 10^7 \\ -2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -7,5 \cdot 10^3 & -3,8 \cdot 10^5 & 0 & 7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 \\ 0 & 3,8 \cdot 10^5 & 1,3 \cdot 10^7 & 0 & -3,8 \cdot 10^5 & 2,5 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

O vetor de cargas transposto para cada barra será:

$$\tilde{p}^t = [0 \quad -10 \quad -167 \quad 0 \quad -10 \quad 167]$$

No tempo zero tem-se o sistema mostrado na figura 7(d), estando a matriz de rigidez global sob a forma de banda simétrica.

Resolvendo-se separadamente os dois subsistemas resultantes das duas subestruturas obtêm-se os seguintes deslocamentos:

$$\begin{array}{llll} u_1=0 & u_2=0 & u_4=0 & u_5=0 \\ v_1=0 & v_2=-4,00 \cdot 10^{-3} \text{ cm} & v_4=-4,00 \cdot 10^{-3} \text{ cm} & v_5=0 \\ \varphi_1=0 & \varphi_2=-5,33 \cdot 10^{-5} & \varphi_4= 5,33 \cdot 10^{-5} & \varphi_5=0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & 3,8 \cdot 10^5 & 1,3 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^3 & -3,8 \cdot 10^5 & 0 & -6,0 \cdot 10^1 & 1,5 \cdot 10^4 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & -1,5 \cdot 10^4 & 2,5 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & -3,8 \cdot 10^5 & 1,3 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^3 & -3,8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 \phi_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 \phi_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 \phi_3 \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 \phi_4 \\
 u_5 \\
 v_5 \\
 \phi_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 -10 \\
 -167 \\
 0 \\
 -10 \\
 -167 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -10 \\
 -167 \\
 0 \\
 -10 \\
 -167
 \end{bmatrix}$$

Figura 7(d) - Sistema para t=0

As solicitações obtidas com tais deslocamentos serão:

$$\begin{array}{llll}
 N_1=0 & N_2=0 & N_4=0 & M_5=0 \\
 V_1= 20 \text{ kN} & V_2=0 & V_4=0 & V_5= 20 \text{ kN} \\
 M_1= 1000 \text{ kNcm} & M_2=0 & M_4=0 & M_5=-1000 \text{ kNcm}
 \end{array}$$

A seguir, tendo os deslocamentos proveniente das deformações elásticas, calcula-se os deslocamentos provenientes das deformações viscoelásticas que apareceriam caso houvesse livre deformação.

Conceitualmente, os deslocamentos não são apenas elásticos ou viscoelásticos, mas têm embutida uma parcela de movimento de corpo rígido. Porém, para maior simplicidade, passar-se-á a chamar-se os primeiros de deslocamentos elásticos e os segundos de deslocamentos viscoelásticos. Com esses últimos calculam-se as forças viscoelásticas. Para o presente passo o vetor de forças viscolásticas globais resulta:

$$P_{\sim v}(10) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,95 \\ 79,3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,95 \\ -15,9 \\ 0 \\ 0,95 \\ -79,3 \end{bmatrix}$$

A seguir vai-se colocar as novas barras e as novas cargas na matriz global. Observa-se que as barras 2 e 3 estarão frente a frente sem qualquer ligação entre elas. Portanto, deve-se considerar uma descontinuidade total entre elas. Considerando a descontinuidade no segundo nó da barra 2, obtêm-se a matriz de rigidez modificada da seguinte forma:

$$k_{\sim DD}^{-1} k_{\sim ND} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$k_{DN} k_{NN}^{-1} k_{ND} = \begin{bmatrix} 2,50 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 7,50 \cdot 10^3 & 3,7 \cdot 10^5 \\ 0 & 3,75 \cdot 10^5 & 2,5 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

$$\bar{k}_{NN} = k_{NN} - k_{DN} k_{DD}^{-1} k_{ND} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso vê-se que no caso de descontinuidade total entre os elementos a matriz de rigidez modificada se anula. Calcula-se agora o vetor de cargas modificado transposto:

$$\tilde{p}^t(10) = [0 \quad -20 \quad -1000 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Ou seja, o vetor de carga assume a forma das cargas do balanço reduzidas ao engaste. Com isso o vetor de cargas externas para $t=10$ resulta:

$$\tilde{P} + \tilde{P}_V(10) = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ -167 \\ 0 \\ -30 \\ -833 \\ 0 \\ -10 \\ -167 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 167 \end{bmatrix}$$

Somando os vetores de cargas externas com o de cargas viscoelásticas e colocando na matriz de rigidez global as matrizes de rigidez das novas barras obtêm-se o sistema global de $t=10$ que aparece na Figura 7(e).

Pode-se observar agora que os dois subsistemas se uniram. A partir de então calcula-se apenas um sistema principal. Para o cálculo dos deslocamentos das descontinuidades usa-se o sistema auxiliar.

Para $t=10$ resultam os seguintes deslocamentos:

$$\begin{array}{ll} v_1 = 0 & \varphi_1 = 0 \\ v_2 = -2,30 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_2 = -3,78 \cdot 10^{-4} \\ v_3(\text{esq}) = -6,49 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_3(\text{esq}) = -4,32 \cdot 10^{-4} \\ v_3(\text{dir}) = -6,49 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_3(\text{dir}) = -4,32 \cdot 10^{-4} \\ v_4 = -2,30 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_4 = 3,78 \cdot 10^{-4} \\ v_5 = 0 & \varphi_5 = 0 \end{array}$$

As solicitações resultantes serão:

Barra 1

$$\begin{array}{ll} V_1 = 40 \text{ kN} & M_1 = 4000 \text{ kNcm} \\ V_2 = -20 \text{ kN} & M_2 = -1000 \text{ kNcm} \end{array}$$

Barra 2

$$\begin{array}{ll} V_2 = 20 \text{ kN} & M_2 = 1000 \text{ kNcm} \\ V_3 = 0 & M_3 = 0 \end{array}$$

As solicitações das barras 3 e 4 serão simétricas.

Para $t=20$ procede-se da mesma forma, apenas que não será necessário nenhuma modificação no vetor de cargas externas nem na matriz de rigidez. A única mudança estará

$$\begin{bmatrix}
 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & 3,8 \cdot 10^5 & 1,3 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -5,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^3 & -3,8 \cdot 10^5 & 0 & -6,0 \cdot 10^1 & 1,5 \cdot 10^4 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & -1,5 \cdot 10^4 & 2,5 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^3 & -3,8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\
 1,5 \cdot 10^4 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & -3,8 \cdot 10^5 & 1,3 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^3 & -3,8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 \varphi_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 \varphi_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 \varphi_3 \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 \varphi_4 \\
 u_5 \\
 v_5 \\
 \varphi_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 -9,0 \\
 -87,4 \\
 0 \\
 -30,9 \\
 -817,5 \\
 0 \\
 -10 \\
 -167 \\
 0 \\
 -20,9 \\
 -15,9 \\
 0 \\
 -9,0 \\
 87,4
 \end{bmatrix}$$

Figura 7(e) - Sistema para t=10

nas cargas viscoelásticas. Assim tem-se os seguintes deslocamentos:

$$\begin{array}{ll}
 v_1 = 0 & \varphi_1 = 0 \\
 v_2 = -2,52 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_2 = -3,13 \cdot 10^{-4} \\
 v_3(\text{esq}) = -7,09 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_3(\text{esq}) = -4,71 \cdot 10^{-4} \\
 v_3(\text{dir}) = -7,09 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_3(\text{dir}) = 4,71 \cdot 10^{-4} \\
 v_4 = -2,52 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_4 = 3,13 \cdot 10^{-4} \\
 v_5 = 0 & \varphi_5 = 0
 \end{array}$$

As solicitações não se alteram, uma vez que as subestruturas são isostáticas e, por consequência, as solicitações independem da lei tensão-deformação.

Em $t=30$ existe uma mudança de sistema estático. Contudo, segundo o que antes foi apresentado, ela só influenciará a partir de 30 dias. Logo a análise para $t=30$ é feita com a mesma matriz de rigidez global e o mesmo vetor de cargas externas, mudando apenas o vetor de cargas viscoelásticas, de modo análogo ao passo anterior. Os deslocamentos serão:

$$\begin{array}{ll}
 v_1 = 0 & \varphi_1 = 0 \\
 v_2 = -2,71 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_2 = -4,45 \cdot 10^{-4} \\
 v_3(\text{esq}) = -7,63 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_3(\text{esq}) = -5,08 \cdot 10^{-4} \\
 v_3(\text{dir}) = -7,63 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_3(\text{dir}) = 5,08 \cdot 10^{-4} \\
 v_4 = -2,71 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_4 = 4,45 \cdot 10^{-4} \\
 v_5 = 0 & \varphi_5 = 0
 \end{array}$$

No próximo passo deve-se modificar a matriz de rigidez global e o vetor de cargas externas, substituindo a matriz modificada do elemento com descontinuidade por uma

matriz comum de barra de pórtico e zerando o vetor de cargas externas. Os deslocamentos que serão calculados a partir desse momento serão os que ocorrerem apenas após a mudança, ou seja, os devidos a novas cargas externas e as cargas viscoelásticas, cargas estas que deverão ser calculadas apenas com a parcela dos deslocamentos viscoelásticos ocorridos após a mudança. Os deslocamentos totais serão obtidos da soma dos que havia no tempo da mudança ($t=10$) com os calculados. O sistema de equações para $t=30$ está mostrado na Figura 7(f).

Pode-se notar que a matriz de rigidez global é a matriz convencional de uma estrutura contínua. O vetor de cargas já não contém as cargas externas, mas apenas as cargas viscoelásticas devidos aos deslocamentos viscoelásticos que surgiram após a mudança de sistema estático, ou seja, entre 30 e 40 dias.

Resolvendo o sistema acima obtêm-se os seguintes deslocamentos:

$$\begin{array}{ll}
 v_1 = 0 & \varphi_1 = 0 \\
 v_2 = -9,13 \cdot 10^{-4} \text{ cm} & \varphi_2 = -1,23 \cdot 10^{-5} \\
 v_3 = -1,63 \cdot 10^{-3} \text{ cm} & \varphi_3 = 0 \\
 v_4 = -2,71 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_4 = 4,45 \cdot 10^{-4} \\
 v_5 = 0 & \varphi_5 = 0
 \end{array}$$

Esses deslocamentos somados com os deslocamentos existentes quando da mudança do sistema estático darão os deslocamentos existentes a 40 dias:

$$\begin{bmatrix}
 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & -3,8 \cdot 10^5 & 1,3 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\
 1,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & -3,8 \cdot 10^4 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^7 & 0 & -3,8 \cdot 10^5 & 1,3 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\
 1,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^7 & 0 & -3,8 \cdot 10^5 & 1,3 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\
 1,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -7,5 \cdot 10^3 & 3,8 \cdot 10^5 & 0 \\
 5,0 \cdot 10^7 & 0 & -3,8 \cdot 10^5 & 1,3 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 7,5 \cdot 10^3 & -3,8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2,5 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 \phi_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 \phi_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 \phi_3 \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 \phi_4 \\
 u_5 \\
 v_5 \\
 \phi_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 2,3 \\
 292,5 \\
 0 \\
 -1,5 \\
 -1,2 \\
 0 \\
 -1,6 \\
 0 \\
 0 \\
 -1,5 \\
 -1,2 \\
 0 \\
 2,3 \\
 -292,5
 \end{bmatrix}$$

Figura 7(f) - Sistema para t=30

$$\begin{array}{ll}
 v_1 = 0 & \varphi_1 = 0 \\
 v_2 = -2,80 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_2 = -4,57 \cdot 10^{-4} \\
 v_3(\text{esq}) = -7,80 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_3(\text{esq}) = -5,08 \cdot 10^{-4} \\
 v_3(\text{dir}) = -7,80 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_3(\text{dir}) = 5,08 \cdot 10^{-4} \\
 v_4 = -2,80 \cdot 10^{-2} \text{ cm} & \varphi_4 = 4,57 \cdot 10^{-4} \\
 v_5 = 0 & \varphi_5 = 0
 \end{array}$$

Com esses deslocamentos pode-se calcular as solicitações:

Barra 1

$$\begin{array}{ll}
 V_1 = 40 \text{ kN} & M_1 = 3897 \text{ kNcm} \\
 V_2 = -20 \text{ kN} & M_2 = -897 \text{ kNcm}
 \end{array}$$

Barra 2

$$\begin{array}{ll}
 V_2 = 20 \text{ kN} & M_2 = 897 \text{ kNcm} \\
 V_3 = 0 & M_3 = 102 \text{ kNcm}
 \end{array}$$

As solicitações das barras 3 e 4 são simétricas. Pode-se notar que começa a haver uma redistribuição de momentos, de forma que o comportamento da viga vá sendo modificado. Assim o momento no engaste está diminuindo e no nó central(nó 3) está aparecendo um momento positivo.

Com o tempo o momento no centro do vão irá crescer e no engaste diminuir. A 50 dias o momento no centro do vão será 186 kNcm e no engaste 3814 kNcm e a 60 dias será 253 kNcm e 3745 kNcm respectivamente.

No cortante não há modificações, já que a estrutura é simétrica. Em caso de não-simetria haveria então redistribuição dos cortantes.

8. REPRESENTAÇÃO DO CONCRETO

8.1 Fluência

Num primeiro momento, quando a intenção era formular um método numérico para analisar uma estrutura incremental utilizando-se variáveis de estado representou-se o concreto através do modelo standard.

Uma vez concluída essa etapa do trabalho passou a ser necessário que se introduzisse uma representação mais satisfatória do comportamento do concreto.

Decidiu-se, então, adotar o modelo proposto pelo Código Modelo CEB-FIP/1978, que é o mesmo proposto pelo projeto de Norma Brasileira de Concreto Protendido. A formulação é apresentada no Apêndice III.

O modelo adotado propõe uma função de fluência e para que possa-se utilizá-la com as variáveis de estado deve-se transformá-la em um modelo Kelvin generalizado.

A primeira solução tentada foi baseada em um trabalho de Bazant e Asghari [1]. A proposta de tal trabalho era gerar um modelo Kelvin, com tantos elementos quanto se desejasse, a partir de dados de fluência quaisquer. Essa solução foi bastante atrativa, pois abria um grande leque de possibilidades, passando pelas mais diversas funções de fluência e permitindo mesmo a utilização de dados experimentais.

O método era baseado nos mínimos quadrados e uma vez escolhidas o número de cadeias desejadas e arbitrado o tempo de retardação da primeira (que poderia ser até um dado fixo do programa) , ou melhor, da segunda, já que a primeira seria uma mola isolada para representação dos deslocamentos instantâneos, o programa arbitraria os tempos de retardação seguintes. Os tempos de retardação eram considerados constantes no tempo e os módulos de elasticidade variáveis. Dessa forma eram calculados os coeficientes que iriam compor uma função do tempo para representar a mola de cada elemento Kelvin.

Grande foi o tempo gasto tentando chegar a bons resultados com o método citado. Todavia, não foi possível. Com o método conseguiu-se módulos de elasticidade para as molas, módulos esses que reconstituíam a função do CEB com erros quase nulos, mas que entretanto tinham um comportamento individual bastante ruim: os valores oscilavam e chegavam mesmo a tornar-se negativos. Assim sendo, obtinham-se péssimos resultados quando da aplicação com variáveis de estado.

Em vista do ocorrido, após algum tempo de tentativas infrutíferas, resolveu-se adotar outro método. Esse segundo método foi apresentado por Ishai [12]. Embora mais simples permitiu a obtenção de resultados bastante bons. A inconveniência desse método é sua semi-automatidade: para cada função de fluência ou para cada conjunto de dados experimentais deve ser feita parte do cálculo manualmente e essa parte pode ser laboriosa.

Ishai, utilizando o modelo Kelvin, chega a seguinte expressão :

$$\log [D(t_{\infty}, \zeta_0) - D(t, \zeta_0)] = \log D(t_{\infty}, \zeta_0) - \frac{t}{\theta} \log e \quad (8.1.1)$$

A equação acima resultará em uma curva que a partir de um certo tempo se tornará praticamente uma reta. Comparando a equação (8.1.1) com a figura 8(a) podemos obter o valor do tempo de retardação de uma primeira cadeia Kelvin, aproximando a função de fluência como sendo a reta:

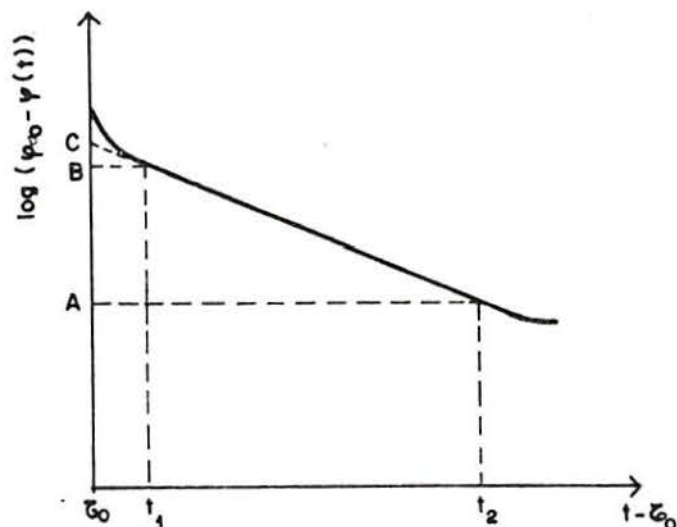


Figura 8(a) - $\text{Log } D(t, \zeta_0) \times t$

$$\theta_1 = \frac{(t_2 - t_1)}{(B - A)} \log e \quad (8.1.2)$$

O valor do módulo de elasticidade da cadeia será dado pelo valor obtido pela função de fluência no tempo inicial, que é tirada pelo prolongamento da reta, já que a função de fluência foi aproximada pela reta:

$$D(\tau_0, \tau_0) = \frac{1}{E_1} \quad (8.1.3)$$

$$E_1 = \text{antlog } C \quad (8.1.4)$$

Criado o primeiro elemento da cadeia, plota-se os dados do resíduo desse elemento em relação à fluência total e constrói-se uma segunda e assim por diante, até que se consiga uma boa aproximação. Nesse método constrói-se um modelo Kelvin generalizado, mas sem uma mola desacoplada de amortecedor. Dessa forma, as deformações instantâneas devem ser calculadas separadamente.

Se forem fornecidos os tempos t_1 e t_2 para cada elemento desejado e os dados do valor da função de fluência para esses tempos pode-se calcular automaticamente as constantes dos elementos.

Como desejava-se construir-se esses elementos a partir da função do CEB decidiu-se aplicar o método para a dita função. Verificou-se que com cinco elementos obtinha-se uma precisão boa.

A partir de dados convencionados calculou-se os tempos t_1 e t_2 para cada um dos cinco elementos. A seguir, tomou-se esses tempos como válidos para quaisquer dados, variando apenas os valores da função de fluência, que são calculadas através das fórmulas do Anexo III.

Esses valores foram determinados por Daroit [6].

Uma vez determinados esses tempos iniciais e finais para cada um dos cinco mecanismos, montou-se um

programa que calcula automaticamente os dados de fluência para esses tempos e controla os mecanismos.

Esses mecanismos serão usados como a cadeia de Kelvin no programa principal.

O módulo de elasticidade instantâneo será calculado para cada passo no programa principal como:

$$E(t) = \frac{E_{c28}}{\varphi(t_1, t)} \quad (8.1.5)$$

onde de E_{28} - módulo secante de concreto aos 28 dias.

8.2 Retração

Ao se tratar de fluência não se pode ignorar a existência da retração, já que ambos são fenômenos interligados.

A retração foi tratada como uma deformação imposta, de forma semelhante ao efeito térmico.

Para cada tempo t é calculado o valor do encurtamento que apareceria na barra, caso houvesse livre deformação. O valor do encurtamento da barra será dado pelo produto entre seu encurtamento específico e seu comprimento, uma vez que o encurtamento específico não varia ao longo do comprimento, já que as propriedades do concreto são consideradas constantes em toda barra.

O valor específico da retração é calculado com base na função de retração apresentada no boletim do CEB/FIP de 1978 [3]. As fórmulas que representam tal função se encontram no anexo III.

Obtido o encurtamento da barra pode-se calcular as reações nodais que seriam geradas caso esse encurtamento fosse impedido. Essas reações tomadas com sinal contrário fornecem as forças de engastamento perfeito. Essas forças são de compressão pura e podem ser calculadas pela expressão abaixo:

$$f_r = E_c A_c L \epsilon_{cs} \quad (8.2.1)$$

onde f_r : força de engastamento perfeito devido à retração;

A_c : área da seção transversal do concreto;

L : comprimento do elemento;

ϵ_{cs} : encurtamento específico do concreto devido à retração.

Como o encurtamento específico varia com o tempo as forças de engastamento perfeito dele originadas também irão variar. Desse modo essas forças devem ser recalculadas a cada passo.

Na implementação computacional optou-se por calcular as forças de engastamento perfeito devido à retração na mesma subrotina que se calculam as cargas viscoelásticas. Essas forças são somadas junto com as cargas viscoelásticas nas filas correspondentes às forças normais. As cargas nodais provenientes da retração não podem ser colocadas junto com as cargas externas por ter seu efeito semelhante à carga de fluência e bem diverso às cargas externas.

Duas cargas externas de compressão, aplicadas a uma barra nas suas extremidades, gerarão esforços normais caso haja livre deformação. Se a deformação for impedida não surgem esforços. Uma carga normal gerada pela retração

gerará esforços apenas se não houver livre deformação e os esforços serão de tração. As cargas viscoelásticas também só geram tensões quando é impedida a deformação progressiva.

9. PROTENSAO

As forças de protensão serão introduzidas como cargas externas. Instantaneamente serão consideradas as perdas por atrito ao longo do cabo. No decorrer do tempo serão consideradas as variações da tensão de protensão devidas às deformações do elemento. Dessa forma estará se determinando as perdas por fluência e retração do concreto.

São assumidas as seguintes hipóteses:

- os cabos podem ser representados pelo seu eixo baricêntrico;

- os cabos podem ser aproximados por uma série de trechos retos em cada elemento;

- não existe escorregamento entre as barras e o concreto.

- é válida a hipótese das seções planas, o que permite em primeiro lugar compatibilizar o campo de deformações totais do concreto e em segundo lugar relacionar os deslocamentos nodais com os deslocamentos dos cabos da seguinte forma, sendo os deslocamentos mostrados na Figura 9(a):

$$u_{p1} = u_1 - \varphi_1 y_{p1} \quad (9.1)$$

$$v_{p1} = v_1 \quad i = 1, 2 \quad (9.2)$$

O deslocamento axial do cabo será:

$$\Delta_1 = u_{p1} \cos\alpha - v_{p1} \operatorname{sen}\alpha \quad (9.3)$$

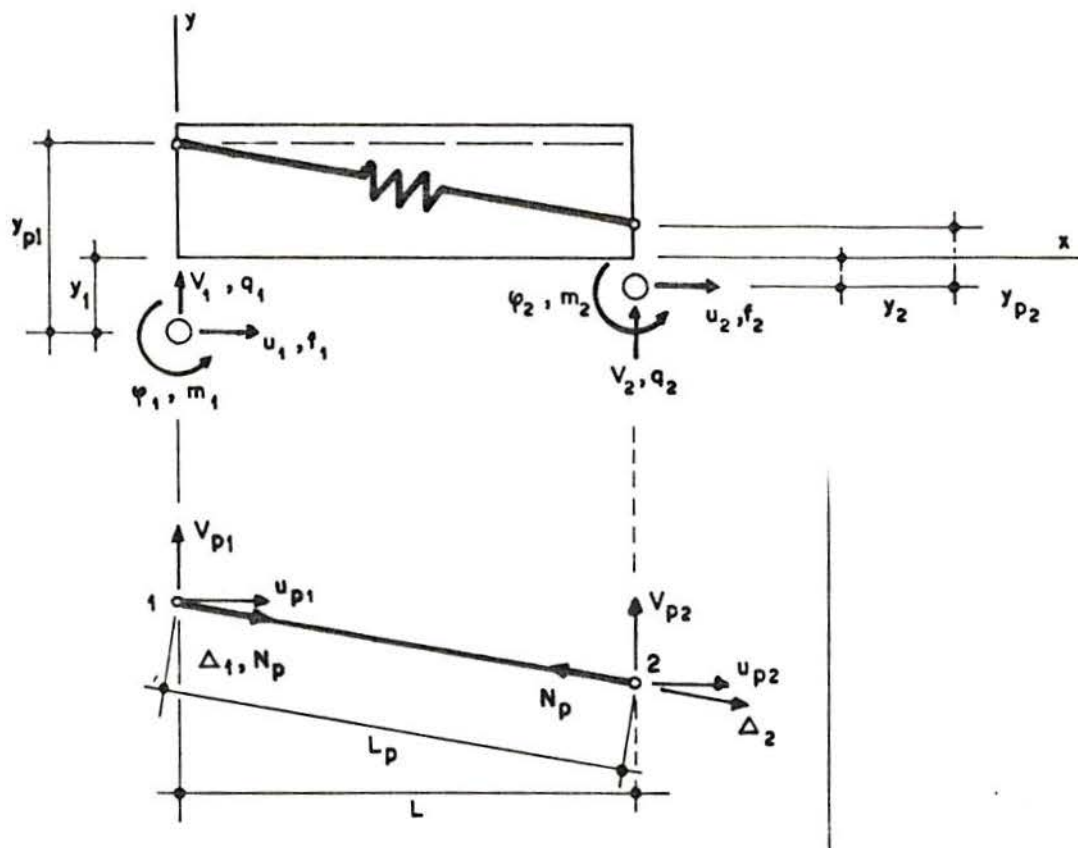


Figura 9(a) - Modelo do cabo de protensão

A relação entre a deformação do cabo e seus deslocamentos axiais será:

$$\epsilon_{pd} = \frac{1}{L_p} (\Delta_2 - \Delta_1) \quad (9.4)$$

Utilizando a formulação de elementos finitos pode-se escrever:

$$\tilde{\epsilon}_{pd} = \tilde{B}_p \tilde{u}_1 \quad (9.5)$$

onde:

$$\tilde{u}_1^t = [u_1 \ v_1 \ \phi_1 \ u_2 \ v_2 \ \phi_2] \quad (9.6)$$

são as variações dos deslocamentos nodais, medidas a partir do momento em que se produz a aderência.

Se a relação (9.3) for substituída na (9.4) pode-se obter a matriz B:

$$B_{\sim P}^t = \frac{1}{L_p} \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \text{sen}\alpha \\ y_{p1} \cos\alpha \\ \cos\alpha \\ -\text{sen}\alpha \\ -y_{p2} \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Por outro lado, a força inicial de protensão P_0 atuante no concreto pode ser transformada em carga nodal conforme mostra a Figura 9(b):

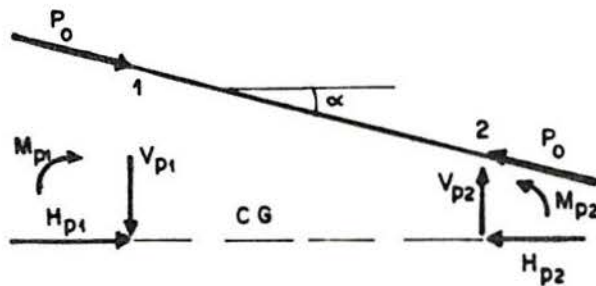


Figura 9(b) - Cargas nodais devidas à protensão

$$\begin{aligned} H_{p1} &= P_0 \cos \alpha & H_{p2} &= -P_0 \cos \alpha \\ V_{p1} &= -P_0 \text{sen} \alpha & V_{p2} &= P_0 \text{sen} \alpha \\ M_{p1} &= -P_0 y_{p1} \cos \alpha & M_{p2} &= P_0 y_{p2} \cos \alpha \end{aligned} \quad (9.8)$$

Desse modo, as cargas nodais devidas à força inicial de protensão podem ser calculadas como:

$$\tilde{P}_{po} = - L_p \tilde{B}_p^t P_o \quad (9.9)$$

A força de protensão total após a transferência atuante em cada elemento de cabo pode ser expressa por:

$$\tilde{P}_p = \tilde{P}_{po} + \tilde{P}_{pd} \quad (9.10)$$

onde o último elemento representa a variação da força de protensão no cabo devido à deformação do elemento.

Esse último membro pode ser calculado como apresenta-se a seguir:

$$\tilde{P}_{pd} = \tilde{k}_p \Delta \tilde{u}^i \quad (9.11)$$

onde : \tilde{k}_p - matriz de rigidez do elemento de cabo;
 $\Delta \tilde{u}^i$ - variação dos deslocamentos nodais desde o instante em que se produz a aderência.

A parcela de força de protensão inicial é fixa e incluída no vetor de cargas, descontadas as perdas por atrito. As perdas por ancoragem não são calculadas no programa. A parcela da protensão devida à variação de deformação do elemento depende do incremento de deslocamentos no intervalo de tempo em consideração, que é incógnita. Então, tal parcela pode ser levada em consideração inserindo-se a matriz de rigidez do cabo na matriz global.

Assim, as perdas por retração e fluência surgem automaticamente da solução do sistema global a cada passo de integração.

A matriz de rigidez do elemento de cabo é calculada a partir das funções de forma:

$$k_{\sim P} = \int_V B_{\sim P}^T E_P B_{\sim P} dv = A_P E_P L_P B_{\sim P}^T B_{\sim P} \quad (9.12)$$

O acima exposto é válido para cabos pós ou pré-tracionados, porém irão existir algumas diferenças entre ambos.

A primeira dessas diferenças diz respeito ao tempo de inclusão da matriz de rigidez do cabo no sistema global e de quando deve-se começar a calcular as variações de forças nodais devidas às deformações.

No caso da pré-tensão, quando a força de protensão é aplicada no elemento, o cabo já tem aderência e existe uma perda de protensão por encurtamento elástico. Assim sendo a matriz de rigidez do cabo é incorporada à matriz global no instante de protensão e as variações de força de protensão são calculadas já no instante inicial.

Se for pós-tensão, o cabo só terá aderência posterior ao concreto e não sofrerá perda por encurtamento elástico. Desse modo, a matriz de rigidez do cabo será incorporada à matriz global para calcular as variações das forças de protensão apenas no tempo de análise posterior à aplicação da mesma.

A segunda diferença importante é a perda por atrito que os cabos sofrem no sistema com pós-tensão.

O presente trabalho só leva em conta sistemas com pós-tensão.

A perdas por atrito são calculadas segundo a fórmula sugerida pela Comitê de Perdas de Protensão do PCI [19].

$$P = P_0 e^{-(\mu\theta + kx)} \quad (9.13)$$

onde: μ - coeficiente de atrito.

θ - ângulo de mudança de direção do cabo.

k - ângulo de atrito involuntário.

x - comprimento do cabo desde a cabeceira de protensão até o ponto de interesse.

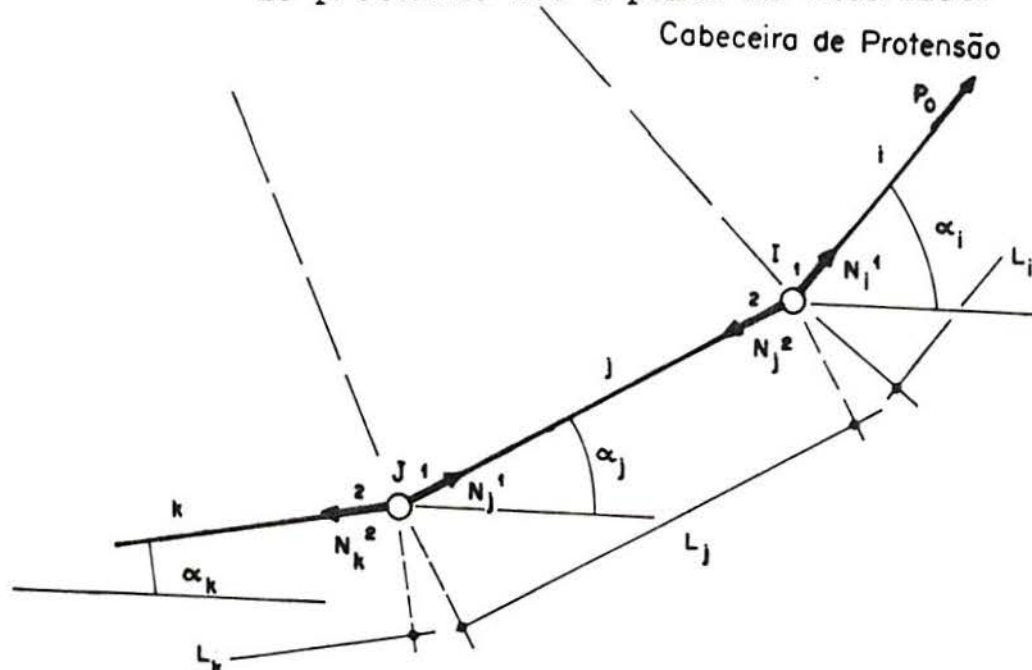


Figura 9(c) - Variação da força de protensão devido ao atrito

O modelo adotado coloca em cada nó uma carga nodal equivalente à força de protensão média do elemento e uma segunda força nodal proveniente de uma carga distribuída equivalente à diferença entre a força média de protensão e a

força de protensão calculada no nó, ou seja, a perda por atrito.

O ângulo θ de cada nó é dado por:

$$\theta_1 = \theta_{1j} \frac{L_j}{L_1 + L_j} + \theta_{jk} \frac{L_j}{L_j + L_k} \quad (9.14)$$

onde:

$$\theta_{ij} = | \alpha_i - \alpha_j | \quad ; \quad \theta_{jk} = | \alpha_j - \alpha_k | \quad (9.15)$$

10. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesse capítulo visa-se esclarecer o procedimento utilizados para implementar computacionalmente os tópicos anteriormente expostos.

O trabalho final da dissertação é composto de três programas separados. O primeiro desses é o programa de entrada de dados geométricos, cronológicos e referentes às armaduras da estrutura. Esse programa recebe os dados e os grava em um arquivo randômico. O segundo gerará um modelo reológico com 5 cadeias Kelvin a partir da função de fluência do CEB. Esse modelo gerado não inclui o elemento elástico puro.

O terceiro programa é onde deve-se concentrar a atenção. Esse programa toma os dados contidos nos arquivos gerados nos dois programas anteriores e procede a análise da estrutura. Assim, passa-se a explicar com maiores detalhes esse último programa, que passaremos a chamar de APAS (Análise de Pontes em Avanços Sucessivos).

10.1 Programa Principal (APAS)

10.1.1 Subrotinas

CORPO: gerencia o programa.

DADOS: lê os arquivos de dados da estrutura e imprime, se desejado.

MATGLOBAL: montagem da matriz de rigidez global.

MATBARRA: montagem da matriz de rigidez de um elemento tipo pórtico plano.

CARGLOBAL: montagem do vetor global de cargas externas.

CARGBARRA: montagem das forças de engastamento perfeito.

CONDCONTORNO: aplica as condições de contorno no sistema global.

DESLOCAMENTOS: calcula os deslocamentos nodais.

REACOES: calcula as reações e solicitações nodais.

IMPRESSAO: imprime os resultados.

VISCO: calcula as deformações e cargas viscoelásticas.

DESBARRA: modifica as matrizes de barras de pórtico que contenham descontinuidades.

DESCARGA: modifica os vetores de cargas externas que contenham descontinuidades.

DESCVIS: modifica os vetores de cargas viscoelásticas que contenham descontinuidades.

BARRACO: monta a matriz de rigidez de barras de aço contidas no concreto, sejam as barras frouxas ou protendidas.

ARMPROT: gerencia a inclusão das armaduras protendidas.

FORCAPROT: gerencia e calcula as forças de protensão a serem incluídas.

DESCACO: modifica a matriz de rigidez das barras de aço que contenham descontinuidades.

10.1.2 Corpo

O corpo do programa representa a parte central do mesmo. Sua estrutura está representada no diagrama de bloco das figuras 10(a), 10(b) e 10(c).

O primeiro comando envia à subrotina de tomada de dados em disco. Feito isso, deveria ser calculada a semi-largura de banda (SB), mas como se trata de uma viga ela será sempre 6.

A seguir, verifica-se se alguma descontinuidade é introduzida já no passo inicial. Caso isso ocorra se calcula a matriz de rigidez modificada do elemento de concreto (barra de pórtico plano). Para tal cálculo deve-se escolher um módulo de elasticidade, uma vez que o módulo de elasticidade do concreto é variável com o tempo. Numa primeira tentativa utilizou-se um módulo de elasticidade unitário. Os resultados não foram bons, uma vez que quando substituía-se tal módulo unitário pelo módulo de elasticidade correto aparecia um erro numérico. Desse modo arbitrou-se como módulo de elasticidade fictício o valor 250000. Assim armazena-se a matriz de rigidez modificada em um vetor auxiliare cada vez que se vai utilizá-la multiplica-se pelo módulo de elasticidade do concreto no tempo da análise e divide-se por 250000. As matrizes modificadas são armazenadas a cada passo e não recalculadas como as que não contêm descontinuidades por ser o seu cálculo muito demorado.

A seguir, calculam-se as cargas iniciais de protensão então introduzidas e coloca-se tais cargas no

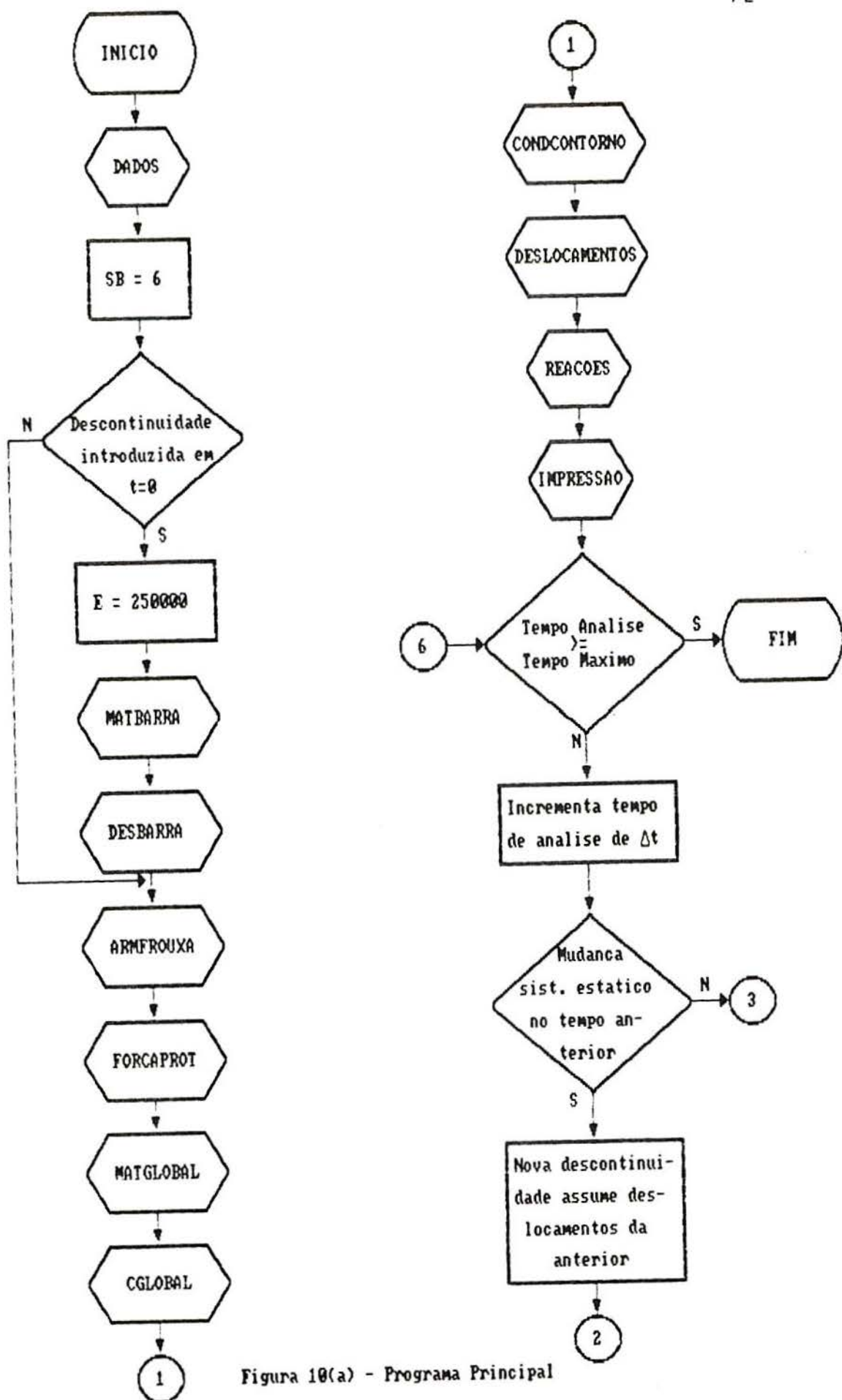


Figura 10(a) - Programa Principal

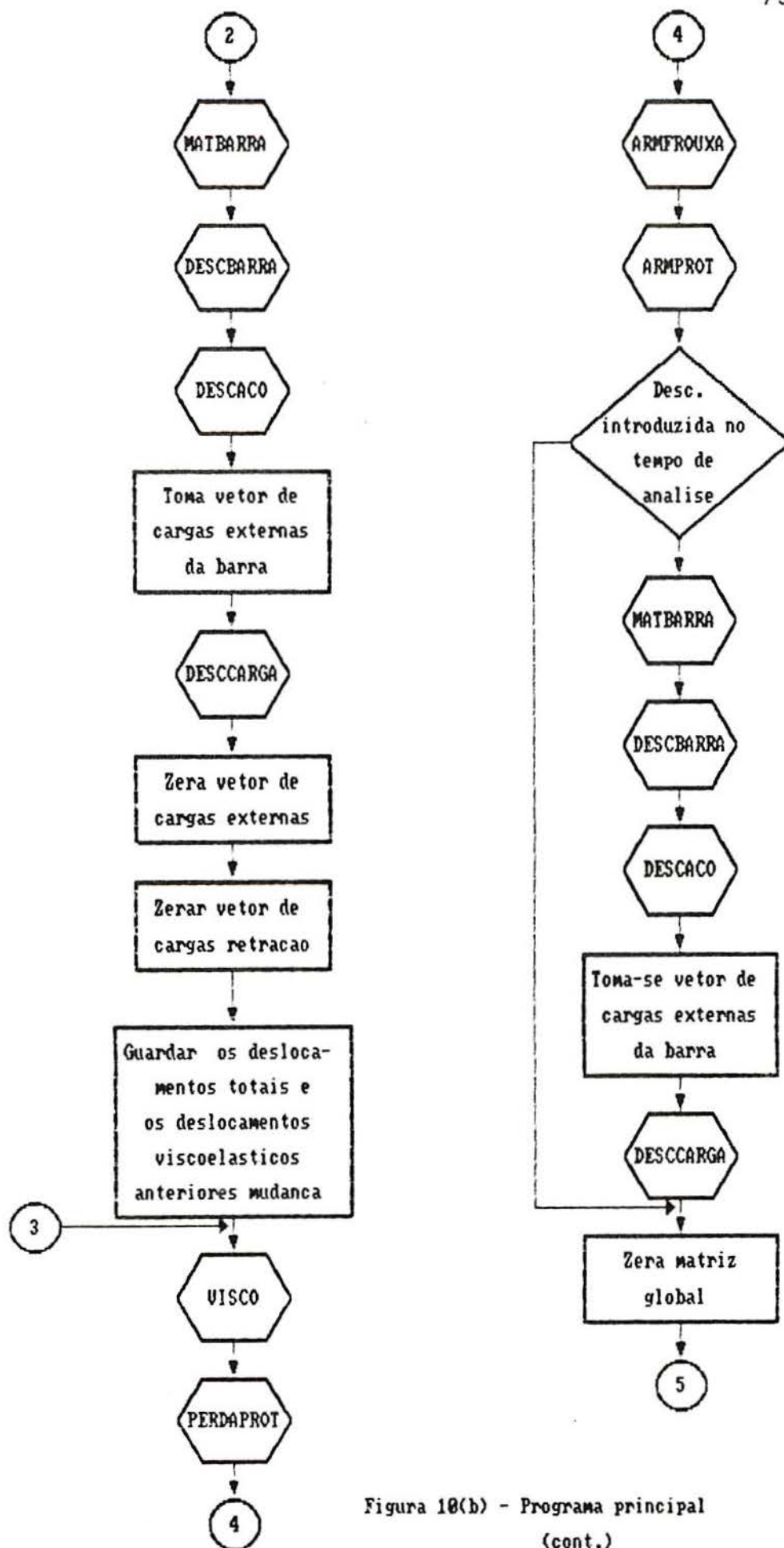


Figura 10(b) - Programa principal
(cont.)



Figura 10(c) - Programa principal
(cont.)

vetor de cargas globais externas. Não é necessário verificar se se deve introduzir a matriz de rigidez de algum cabo de protensão no primeiro passo, pois como trabalha-se com pós-tensão a aderência dos cabos ainda não foi dada.

Monta-se o sistema global, aplicam-se as condições de contorno, calculam-se os deslocamentos, as solicitações e as reações e imprime-se os resultados.

Desse modo finaliza-se o primeiro passo. A seguir será descrito o n-ésimo passo.

Compara-se o tempo de análise em que foi feito o passo anterior com o tempo máximo de análise. Se o primeiro for igual ou maior que o segundo o programa estará concluído, caso contrário o tempo de análise presente será o tempo anterior acrescido do intervalo de integração Δt .

Inicia-se esse passo verificando-se se existem mudanças de sistema estático por supressão de descontinuidades introduzidas no tempo de análise anterior.

Os dados de uma descontinuidade ou de uma mudança de sistema estático produzida por supressão da mesma são colocados no mesmo vetor, sem nada que os diferencie (ver 10.1.2), contudo é importante que se distinga essas duas situações (ver capítulo 6). A mudança de sistema estático é caracterizada pela existência de descontinuidade no mesmo nó anteriormente.

A mudança de sistema estático por supressão de descontinuidades é realizada do seguinte modo: calcula-se a nova matriz de rigidez eliminando-se as descontinuidades suprimidas e guarda-se no arranjo destinado a esse fim. Desativa-se a descontinuidade anterior fazendo-se o tempo de

sua introdução igual ao tempo máximo mais dez. Dessa forma quando for montada a matriz de rigidez global será utilizada a nova matriz de rigidez, e não a antiga.

Os deslocamentos que haviam na descontinuidade desativada serão transferido para a posição correspondente a nova (que no caso é a responsável pela mudança de sistema estático, podendo ter até todos deslocamentos contínuos), sejam os totais e os viscoelásticos. Também deve-se modificar a matriz de rigidez dos cabos de protensão.

Quando houver mudança de sistema estático o vetor de cargas externas é zerado e os deslocamentos totais e viscoelásticos são guardados. Daqui para frente será como se houvesse uma nova estrutura, cujo carregamento serão as cargas viscoelásticas geradas pelos deslocamentos viscoelásticos ocorridos entre a mudança de sistema estático e o tempo de análise em questão e eventuais cargas externas colocadas após a mudança. Os deslocamentos resultantes dessa situação serão somados aos existentes antes da mudança e nos darão os deslocamentos existentes. Com esses últimos deslocamentos calcula-se as solicitações.

Pode-se ter ainda um segundo tipo de mudança de sistema estático: é o caso de uma barra que uma dois subsistemas. Tal caso não foi considerado no programa.

Após a verificação da existência de mudanças no sistema estático, calculam-se os deslocamentos e cargas viscoelásticas e verificam-se os cabos de protensão colocados no tempo anterior de análise.

Os cabos de protensão têm sua matriz de rigidez calculada e armazenada em um arranjo que contém o somatório

das matrizes de rigidez dos cabos de cada barra. Isso é feito por ser muito demorado recalcular todas essas matrizes a cada passo de integração, uma vez que, em geral, existem vários cabos em cada elemento.

Feito isso, verifica-se a introdução de descontinuidades entre elementos. Essas descontinuidades caracterizam-se por não ter o nó nenhuma descontinuidade anterior. Caso sejam introduzidas, calcula-se a matriz de rigidez da barra com módulo de elasticidade 250000 e modifica-se a matriz para conter as descontinuidades, guardando-a.

Zera-se a matriz global, introduzem-se as novas forças iniciais de protensão e somam-se os vetores globais de cargas externas e viscoelásticas. Monta-se a matriz global, aplicam-se condições de contorno e calculam-se os deslocamentos. Se o tempo de análise for um tempo de impressão, calculam-se as solicitações e reações e imprimem-se os resultados.

Concluído o passo, volta-se à checagem do tempo de análise, recomeçando.

10.1.3 Subrotina de tomada de dados em disco

Lê o arquivo de dados gerado no programa ENTRADA.

10.1.4 Montagem da matriz global (MATGLOBAL)

A matriz global deve ser totalmente remontada a cada passo, uma vez que o módulo de elasticidade do concreto varia no tempo e, por causa do processo incremental de

construção, é diferente em cada barra. Essa subrotina está exposta no fluxograma da figura 10(d).

Percorre-se o vetor que contém a ordem cronológica das barras até que se encontre uma barra cujo tempo de colocação seja posterior ao tempo de análise: nesse caso não existem mais barras a serem consideradas no tempo de análise.

Para cada barra colocada é calculado o módulo de elasticidade do concreto dessa barra no tempo de análise. Verifica-se se a barra contém descontinuidades: se contiver toma-se a matriz de rigidez da parte do concreto que fora anteriormente calculada com módulo de elasticidade 250000 e guardada. Nesse caso a matriz deve ser multiplicada pelo módulo de elasticidade da mesma e dividida por 250000.

Caso a barra não contenha descontinuidades, calcula-se a matriz de rigidez da parte do concreto na subrotina MATBARRA. Tal subrotina calcula a matriz de rigidez de um elemento de pórtico.

Uma vez obtida a matriz de rigidez do concreto, som-se essa matriz à matriz de rigidez das barras de cabos de protensão. Essas matrizes foram calculadas anteriormente e armazenadas. Isso é possível por se considerar o módulo de elasticidade do aço constante.

A matriz do elemento assim composta é colocada na matriz global.

10.1.5 Montagem do vetor de cargas externas (VETCARGAS)

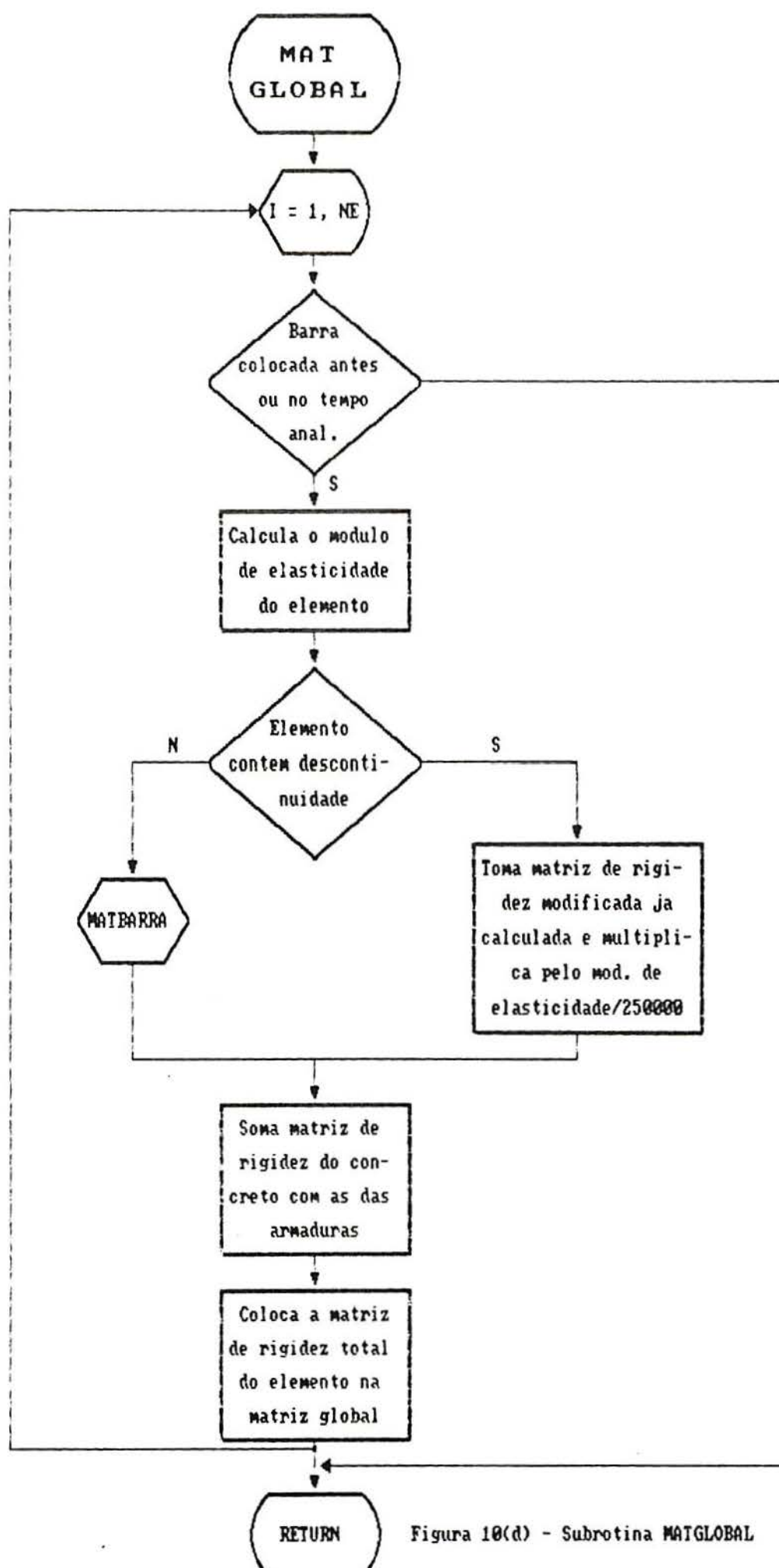


Figura 10(d) - Subrotina MATGLOBAL

Para cada tempo t verificam-se as novas cargas externas incluídas. Uma vez que uma carga deva ser incluída são calculadas as suas forças de engastamento perfeito.

Essas forças são somadas ao vetor de cargas externas locais da barra. Caso exista uma descontinuidade na barra no seu tempo de inclusão, calcula-se o vetor de cargas modificado.

Após essa operação, coloca-se o vetor de cargas local no vetor de cargas externas global.

10.1.6 Aplicação das condições de contorno

Uma vez que a matriz é remontada a cada passo, as condições de contorno devem ser aplicadas a cada passo. O procedimento é idêntico ao tomado em problemas elásticos.

10.1.7 Cálculo dos deslocamentos (DESLOC)

A subrotina de cálculo de deslocamentos é composta de três partes básicas, como mostra a figura 10(e).

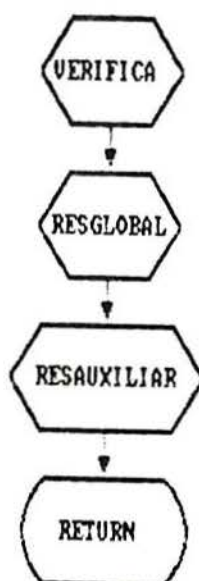


Figura 10(e) - Subrotina DESLOC

10.1.7.1 Verificação dos limites do subsistema (VERIFICA)

Essa subrotina verifica os limites (primeira e última linha) de cada subsistema a cada tempo de análise e detecta quando dois subsistemas se unem. As figuras 10(f) e 10(g) mostram o seu diagrama de bloco.

Para o tempo zero o procedimento é diferente do adotado nos passos posteriores. Começa-se procurando a matriz de rigidez global primeira linha cuja diagonal seja não nula: essa linha será a primeira linha do primeiro subsistema (núcleo). Continua-se a percorrer as linhas de forma a encontrar a próxima que tenha diagonal nula: a linha anterior será a última linha do primeiro subsistema.

A seguir, procura-se a próxima linha de diagonal não nula: essa será a primeira linha do segundo subsistema. Desse modo se determina os limites de cada subsistema. Esses limites são armazenados em um arranjo bidimensional com tantas linhas quanto forem os núcleos e com duas colunas: uma para a primeira linha e outra para a última de cada núcleo.

Nos passos posteriores já não será preciso percorrer todas as linhas da matriz de rigidez global, mas apenas ampliar os já existentes. Além disso, é necessário verificar se não há fusão de subsistemas.

Inicia-se procurando quantas linhas foram acrescentadas acima da primeira e abaixo da última, atualizando-se os limites.

Feito isso, compara-se os limites dos subsistemas adjacentes: caso existam dois subsistemas com os mesmos limites é sinal que esses dois subsistemas se fundiram.

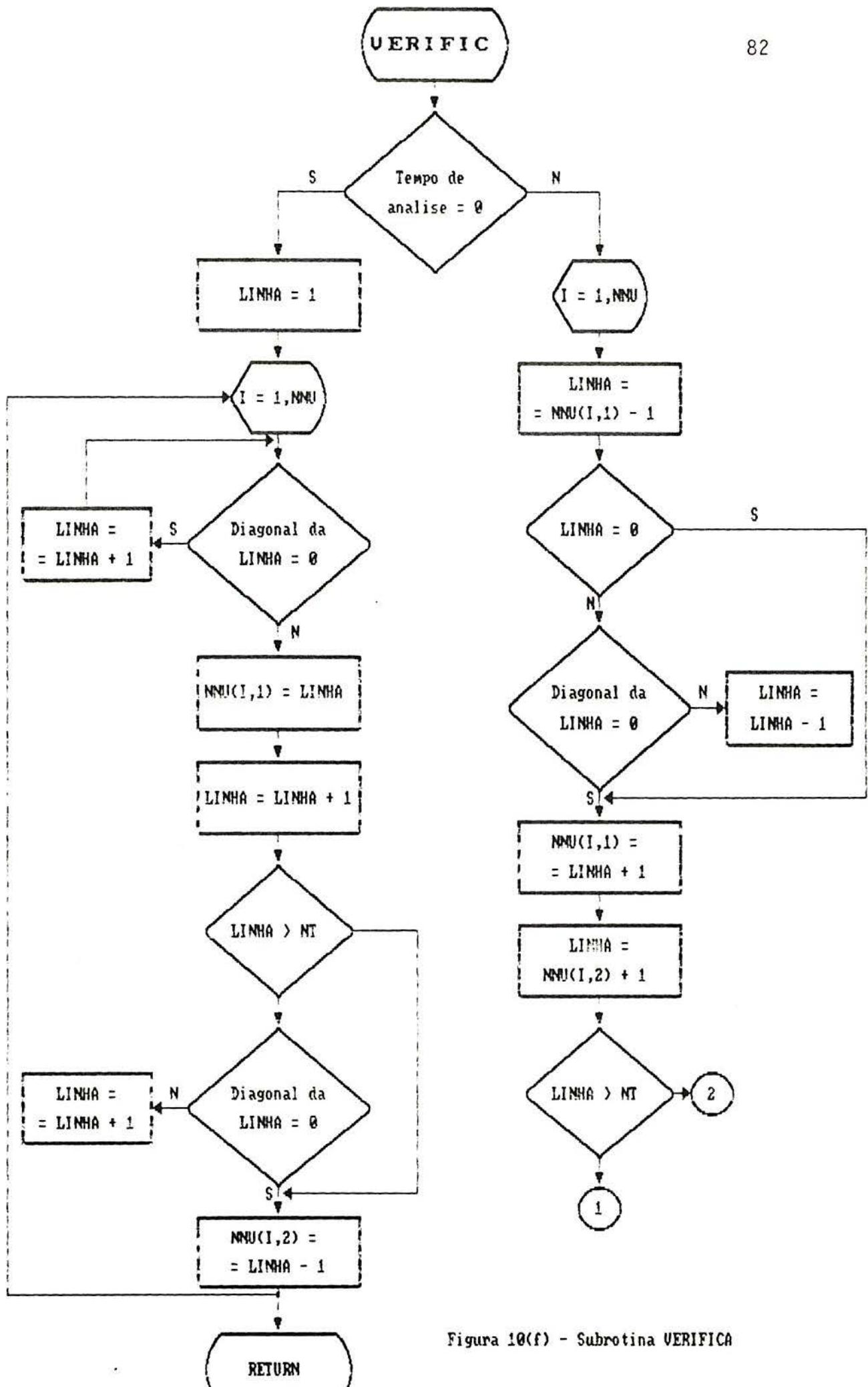


Figura 10(f) - Subrotina VERIFICA

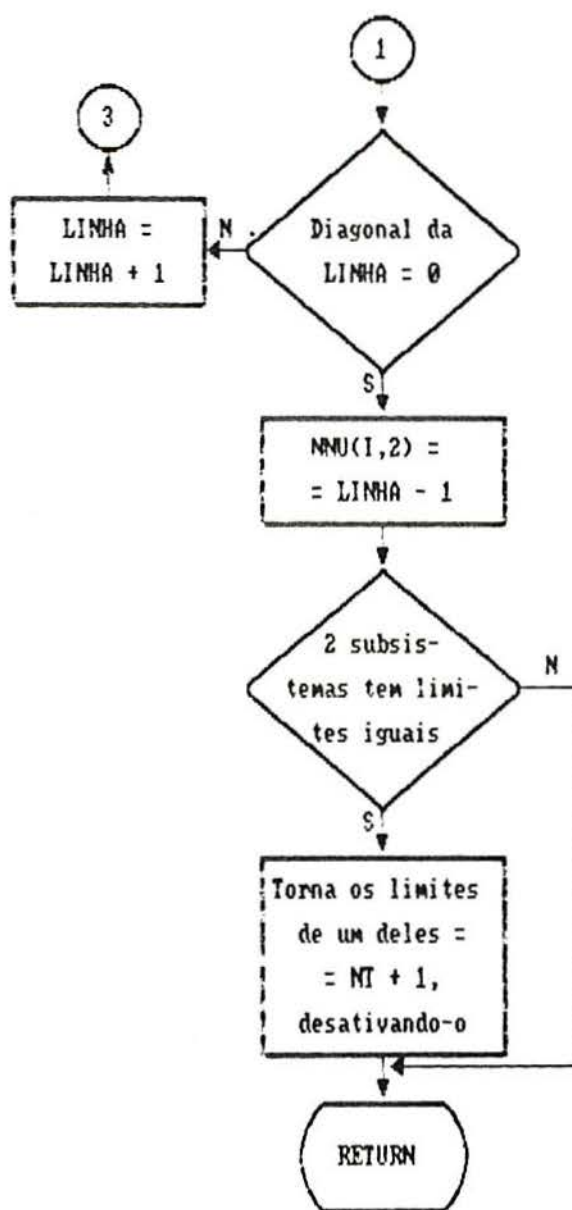


Figura 10(g) - Subrotina VERIFICA (cont.)

Desse modo, um deles deverá ser desativado para que não se resolva duas vezes. Isso é feito fazendo-se seus limites iguais a $NT+1$.

10.1.7.2 Resolução do sistema global (RESGLOBAL)

Resolve cada um dos subsistemas separadamente utilizando o algoritmo de Cholesky.

10.1.7.3 Resolução dos sistemas auxiliares (RESAUXILIAR)

Resolve os sistemas auxiliares criados para o cálculo dos deslocamentos das descontinuidades.

10.1.8 Solicitações e reações (REACOES)

Calcula as solicitações de cada barra e as reações nodais, através de processo análogo ao utilizado na análise de estruturas convencionais. Caso o tempo de análise seja posterior a uma mudança de sistema estático, os deslocamentos ocorridos após a mudança de sistema devem ser adicionados aos ocorridos antes, a fim que se calcule a solicitação total.

10.1.9 Deslocamentos e forças viscoelásticas (VISCO)

Essa subrotina visa calcular os deslocamentos provenientes das deformações viscoelásticas e as forças viscoelásticas. Seu diagrama de bloco se encontra na figura 10(g).

Os deslocamentos viscoelásticos são calculados através das variáveis de estado. São calculadas as parcelas de deslocamentos viscoelásticos geradas por cada elemento da

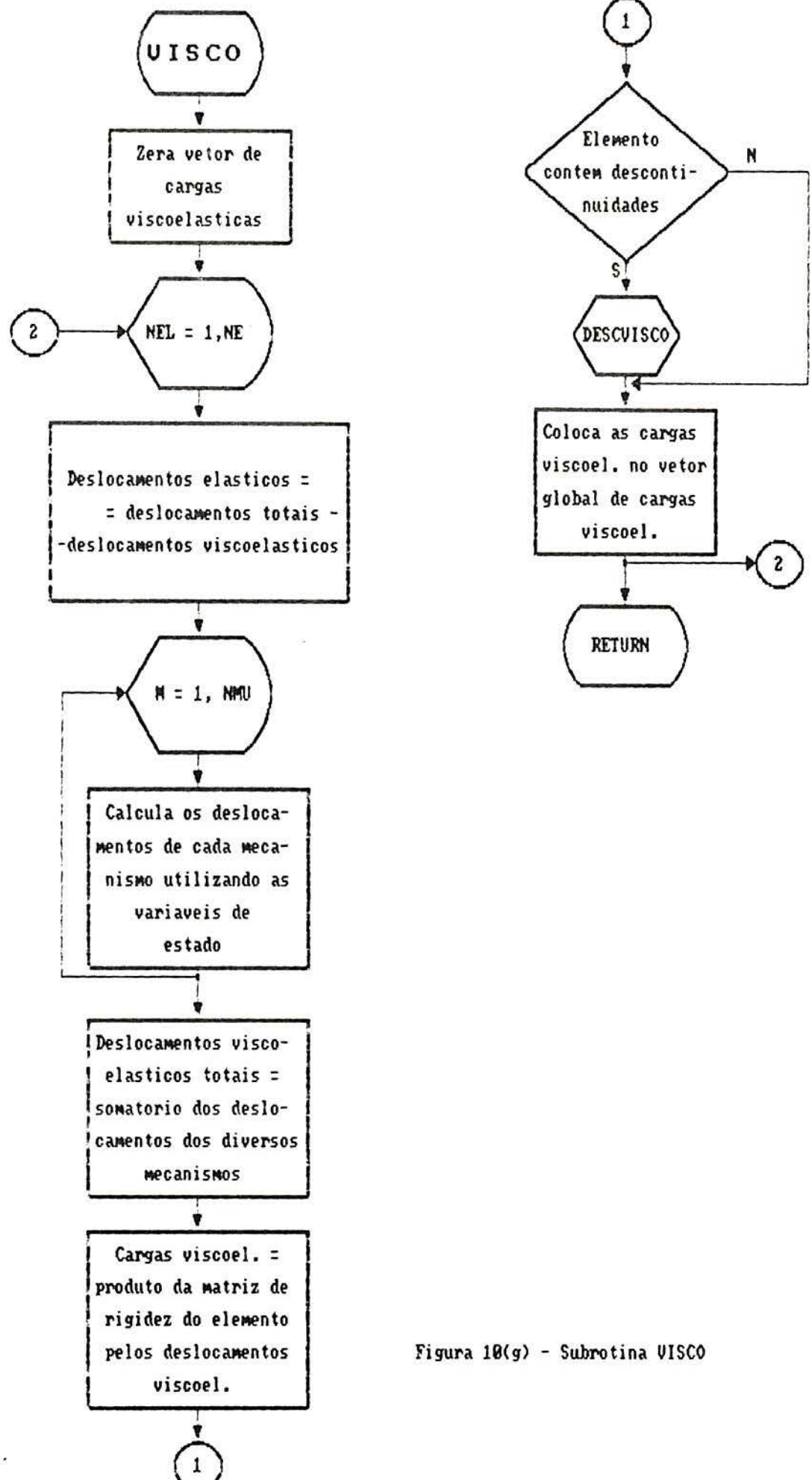


Figura 10(g) - Subrotina VISCO

cadeia Kelvin e seu somatório fornece o deslocamento viscoelástico total.

A cadeia Kelvin utilizada é gerada no programa Kelvin a partir de dados da função de fluência do CEB.

Uma vez obtidos os deslocamentos viscoelásticos são calculadas as forças viscoelásticas. Elas são calculadas através do produto dos deslocamentos viscoelásticos do elemento pela matriz de rigidez da parte do concreto.

No caso do tempo de análise ser posterior a alguma mudança de sistema estático, as cargas viscoelásticas serão calculadas apenas com a parcela dos deslocamentos surgida após a mudança.

Essas cargas viscoelásticas são guardadas em um vetor de cargas viscoelásticas locais. Se o elemento tiver descontinuidades o programa é desviado para a subrotina DESCVISC que modificará o vetor de forma a considerar essas descontinuidades. Logo após, o vetor de cargas da barra é colocado no vetor global de cargas viscoelásticas.

Tal procedimento é repetido para cada elemento.

10.1.10 Descontinuidades em elementos de concreto (DESBARRA)

Essa subrotina modifica a matriz de rigidez da parte de concreto das barras com descontinuidades e monta as matrizes auxiliares para cálculo dos deslocamentos dos nós onde foram aplicadas as condições de descontinuidades.

O sistema auxiliar criado para o cálculo dos deslocamentos é armazenado já na forma decomposta. Para posterior utilização basta ser multiplicado por $(E/250000)^2$,

onde E é o módulo de elasticidade do concreto no tempo de análise.

10.1.11 Descontinuidades nas cargas externas (DESCCARGA)

Modifica os vetores de cargas externas dos elementos que contenham descontinuidades, guardando em um vetor de cargas externas modificadas.

10.1.12 Descontinuidades nas cargas viscoelásticas (DESCVIS)

Idem DESCARGA, para cargas viscoelásticas.

10.1.13 Colocação dos cabos de protensão (ARMPROT)

O diagrama de bloco dessa subrotina é apresentado na figura 10(h). Ela verifica quais os cabos de protensão incluídos em tempos entre o tempo anterior de análise (inclusive) e o tempo de análise presente (exclusive) e envia para a subrotina BARRACO, que calculará a matriz de rigidez de cada trecho. Os cabos não são incluídos no momento de sua colocação, pois está se trabalhando apenas com pós-tensão.

Caso um elemento onde se encontre algum trecho de cabo contenha descontinuidades, a matriz de rigidez desse trecho do cabo deve ser modificada, a fim de levá-las em consideração. Isso feito pela subrotina DESCACO.

A matriz de rigidez de cada trecho do cabo somada com a matriz de rigidez dos outros cabos existentes no elemento é armazenada em um arranjo específico para tal fim. Tal arranjo contém para cada elemento a som das matrizes de rigidez de todos cabos. Isso é possível por se ter assumido

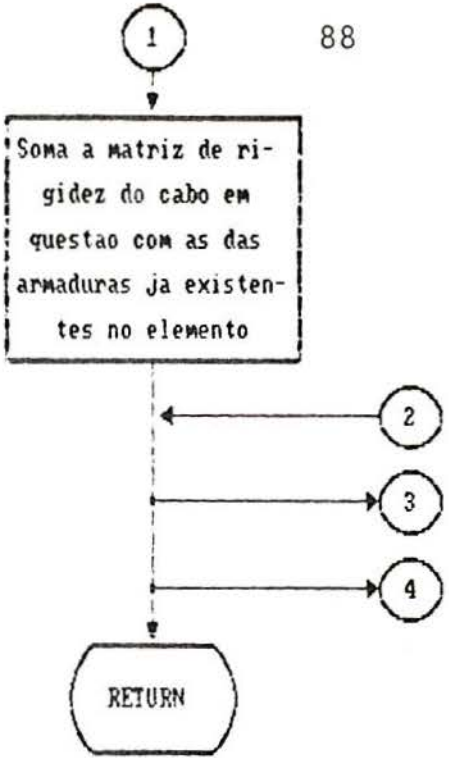
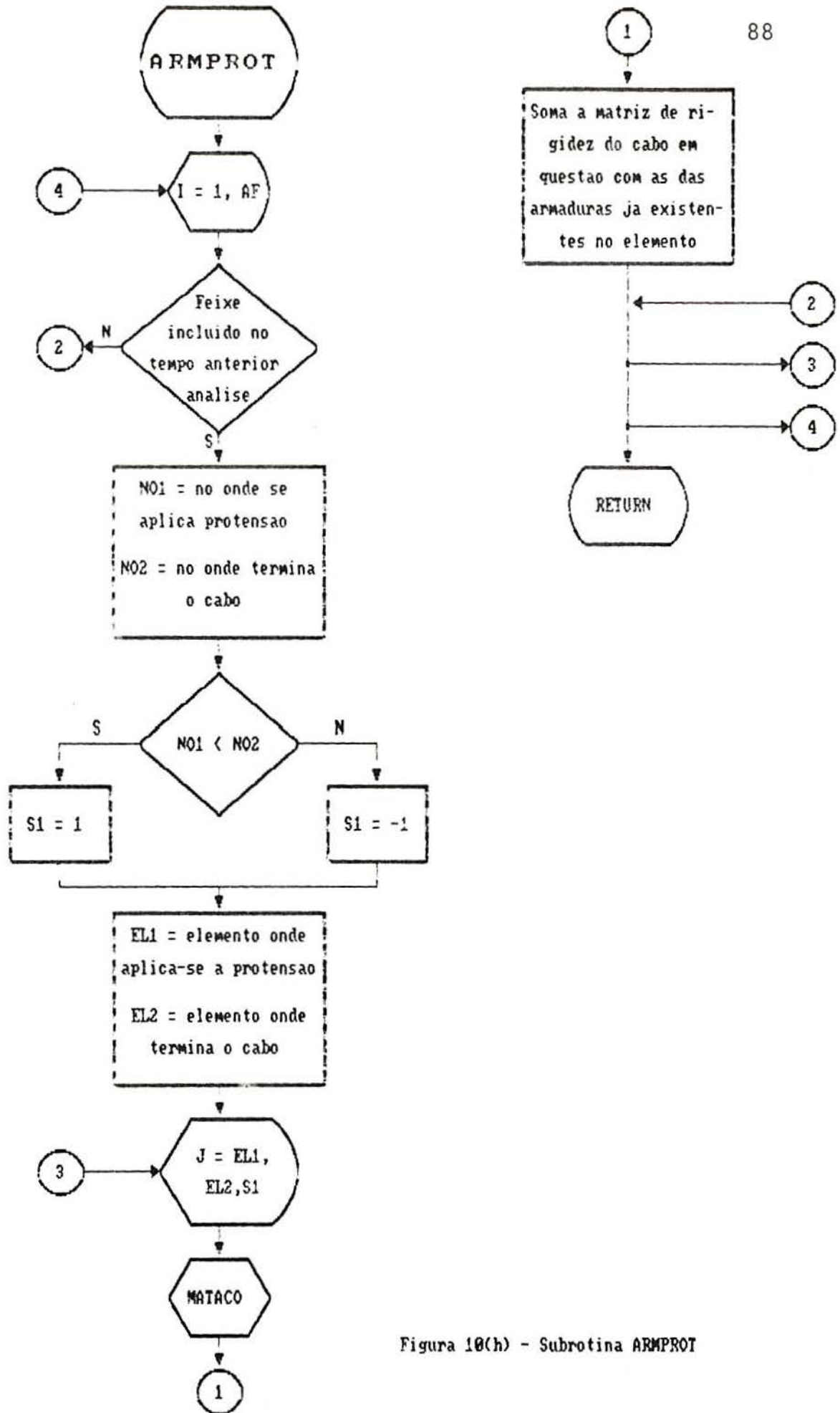


Figura 10(h) - Subrotina ARMPROT

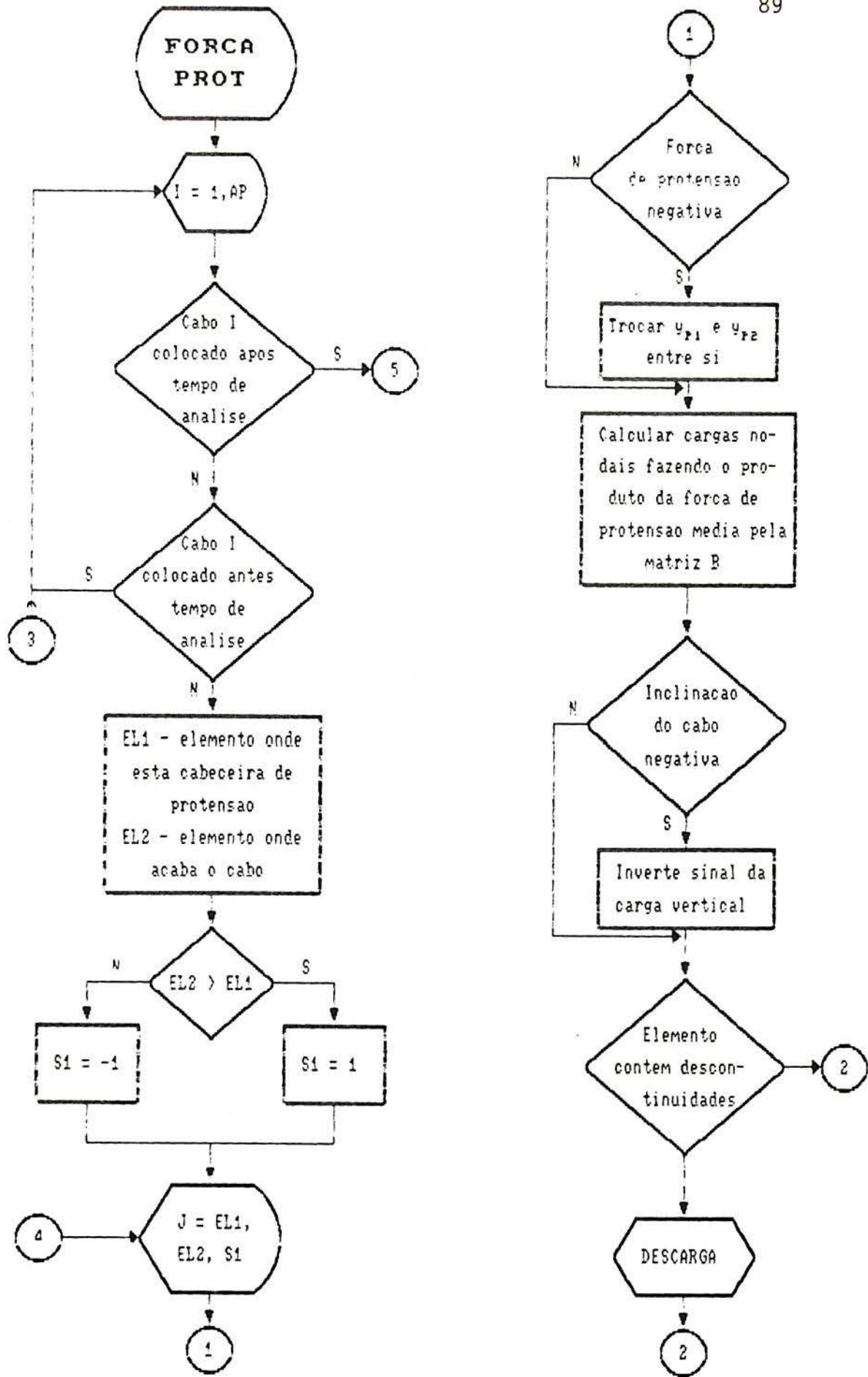


Figura 10(i) - Subrotina FORCAPROT

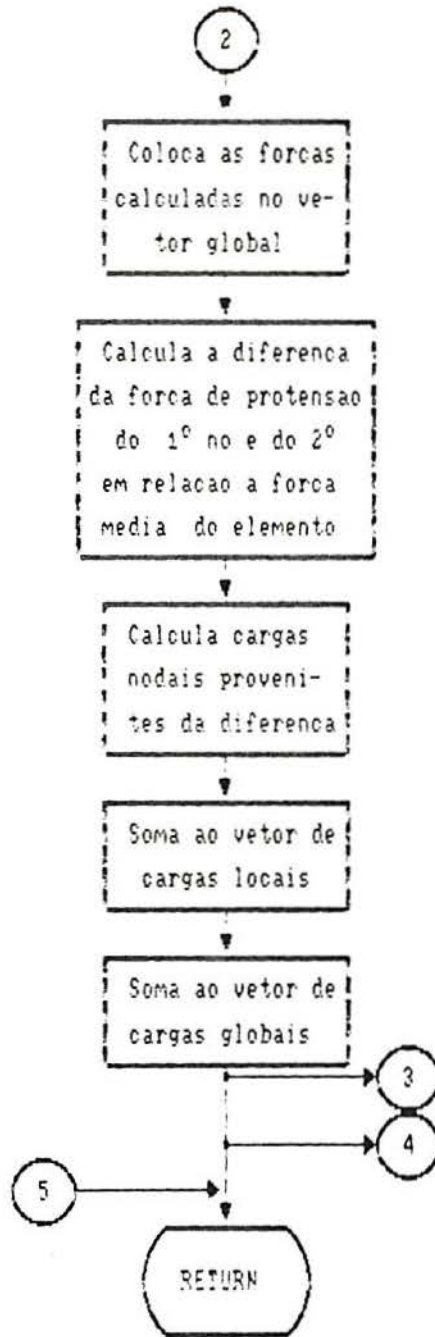


Figura 10(j) - Subrotina FORCAPROI (cont.)

um comportamento elástico linear para o aço, não havendo, então, variação em seu módulo de elasticidade.

10.1.14 Forças de Protensão (FORCAPROT)

Essa subrotina verifica a cada tempo as novas cargas de protensão incluídas e calcula as cargas nodais correspondentes. O diagrama de bloco dessa subrotina está nas figuras 10(i) e 10(j).

10.2 Programa ENTRADA

O programa ENTRADA faz a leitura do teclado dos dados do problema e gera um arquivo randômico, gravando-os. Esses dados são utilizados no programa APAS.

Nesse item se explica a estrutura de variáveis e arranjos que julgou-se pouco claros e que difiram dos dados dos problemas elásticos tradicionais. No anexo I encontra-se uma lista de arranjos e variáveis com seus conteúdos.

10.2.1 Dados da Estrutura

São pedidos o número de nós, o número de elementos, o número de nós restringidos e o número de carregamentos da estrutura.

Além disso, pede-se o número de descontinuidades e mudanças de sistema estático por supressão das mesmas, constituindo-se a soma de ambos apenas um dado. Cada nó que contiver uma ou mais descontinuidades de deslocamentos será um nó com descontinuidade. Cada vez que as descontinuidades

forem alteradas por supressão de algumas ou todas existirá uma mudança de sistema estático.

O número de núcleos é o número de subsistemas isolados existentes inicialmente.

10.2.2 Coordenadas nodais

Deve-se fornecer as coordenadas X e Y de cada nó.

10.2.3 Propriedades geométricas da seção de concreto

Tem-se duas opções: todos elementos iguais ou não.

Caso todos sejam iguais é pedida a área e o momento de inércia de todos elementos. Caso sejam diferentes esses valores devem ser fornecidos para cada elemento.

10.2.4 Restrições nodais

Os dados são análogos ao de um problema elástico convencional. Fornece-se o número de cada nó restringido e para cada direção de deslocamento (direção X, direção Y e giro em torno de Z) se o deslocamento é livre(1), impedido (0) ou imposto (2). Caso haja deslocamento imposto, entra-se com esse valor.

10.2.5 Descontinuidades

Primeiro é pedido o tempo de introdução de cada descontinuidade e mudança de sistema estático.

Então, para cada descontinuidade, ou mudança de sistema estático, é necessário ter como dados o número do nó e a existência(1) ou não(0) de continuidade na direção de cada deslocamento. Assim para uma descontinuidade total

(deslocamentos nas direções X e Y e giro na direção Z independentes), o código seria 0, 0 e 0. Para um nó, em que fossem bloqueadas todas as descontinuidades, o código seria 1, 1 e 1.

10.2.6 Ordem Cronológica das Barras

O tempo de colocação das barras deve ser dado em ordem crescente, iniciando-se no zero e indo até o maior tempo. Caso sejam colocadas várias barras simultaneamente, deve-se ordenar as barras do mesmo tempo em ordem crescente.

10.2.7 Cargas

O programa aceita cargas concentradas, cargas distribuídas e cargas nodais. A estrutura de dados das cargas é análoga a dos problemas elásticos convencionais, tendo apenas um dado extra: o tempo de colocação. Além disso, as cargas devem ser fornecidas em ordem cronológica e cargas colocadas simultaneamente em ordem crescente.

11. EXEMPLOS

11.1 Exemplos utilizando modelo standard

11.1.1 Análise de um sistema com vigas prè-fabricadas

Considerou-se o caso de uma viga com três vãos, Figura 11(a), inicialmente rotulados e que ao longo do tempo têm essas rótulas bloqueadas. A viga foi assentada e carregada com uma carga uniforme em um tempo inicial que escolheu-se como $t=0$. Esta situação ocorre quando o uso de vigas prè-fabricadas que são colocadas em seus lugares e depois ligadas. Admitiremos, por simplicidade, que as ligações sejam rígidas (para uma discussão do assunto ver ref [20]).

Dados:

$$L = 500 \text{ cm};$$

$$\text{vigas de seção retangular } b = 20 \text{ cm}$$

$$h = 50 \text{ cm};$$

$$\text{carga uniforme } q = 200 \text{ N/cm};$$

$$\text{Modelo standard } E = 2.5 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2,$$

$$E_2 = 2.5 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2,$$

$$n = 2.5 \cdot 10^8 \text{ dia/cm}^2;$$

O intervalo de integração foi $\Delta t = 10$ dias. O fechamento da primeira rótula aconteceu para $t_1 = 30$ dias e

o da segunda rótula para $t_2 = 40$ dias. Os resultados são comparados, na figura 11(a), com a solução analítica da ref [4]. A aproximação pode ser melhorada diminuindo Δt . Na figura 11(a), $X_1(t)$ e $X_2(t)$ indicam os momentos que aparecem no primeiro e segundo apoios após o fechamento.

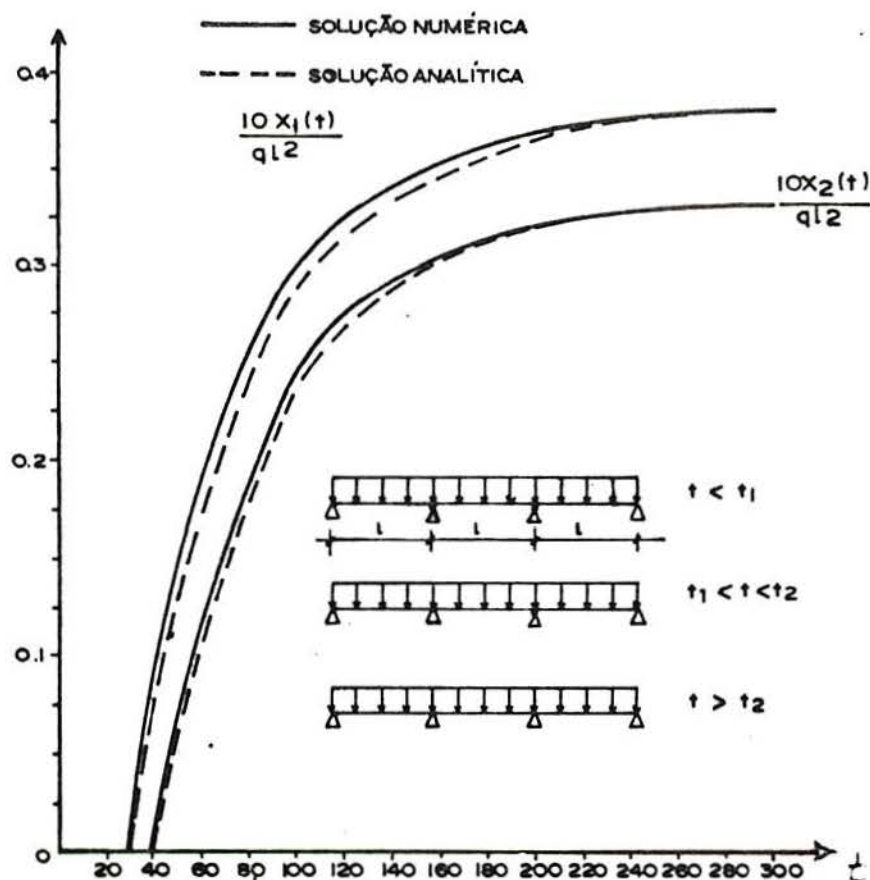


Figura 11(a) - Vigas Pré-Fabricadas

11.1.2 - Mudança no sistema estático

A figura 11(b) indica uma estrutura que é suposta toda colocada no instante $t = 0$, formada por dois balanços opostos sem continuidade. No tempo t_1 dá-se a continuidade total no nó central.

Dados:

$$L = 100 \text{ cm};$$

$$A = 1000 \text{ cm}^2;$$

$$I = 2,5 \cdot 10^5 \text{ cm}^4;$$

$$\text{carga uniforme } q = 200 \text{ N/cm};$$

O modelo viscoelástico é o mesmo do exemplo anterior e $t_1 = 30$ dias. $X(t)$ é o momento que aparece no nó central após o fechamento da descontinuidade. A figura 11(b) compara os resultados do programa com resultados analíticos (ver Anexo III). Para a solução não considerando análise incremental a comparação da solução numérica e da analítica foram coincidentes os pontos calculados analiticamente que estão marcados sobre a curva.

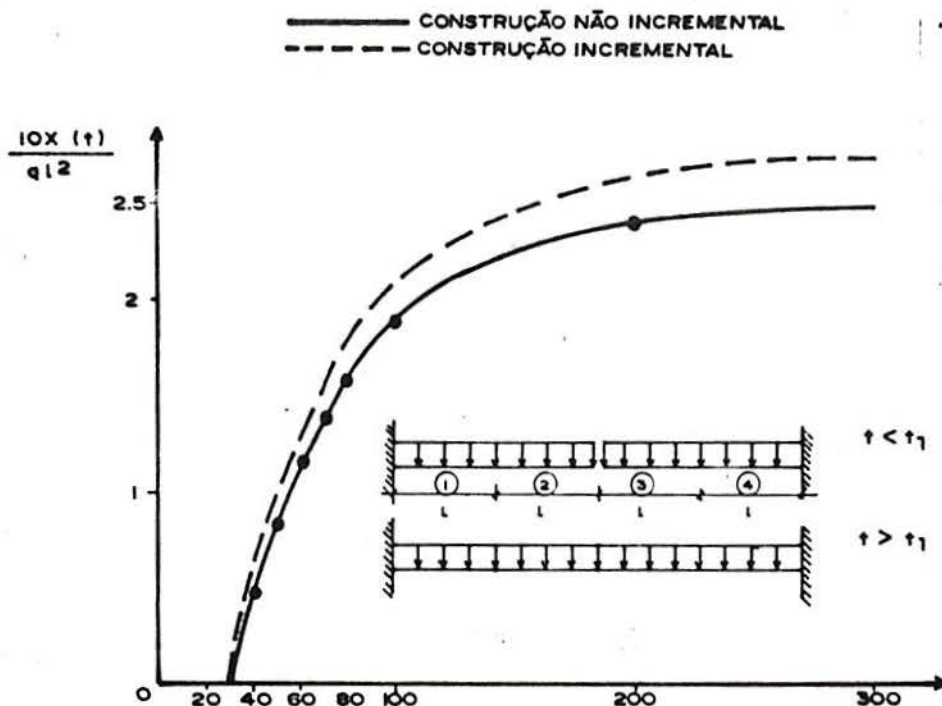


Figura 11(b) - Balanços simétricos

11.1.3 Construção incremental e mudança no sistema estático:

Este exemplo é igual ao anterior, exceto que inclui a construção incremental. Os dados do problema são os mesmos, mudando apenas o tempo de colocação das barras: barra 1 e 4 são colocadas em $t = 0$ e barras 2 e 3 são colocadas em $t = 10$ dias. Podemos conforme o gráfico (figura 11(b)) notar que a diferença de 10 dias na colocação das últimas barras trouxe uma mudança importante nos momentos.

11.2 Exemplos utilizando a função do CEB

11.2.1 Viga rotulada

Esse exemplo é semelhante ao primeiro exemplo desse capítulo, porém tem-se apenas dois vãos. A estrutura é mostrada na Figura 11(c):

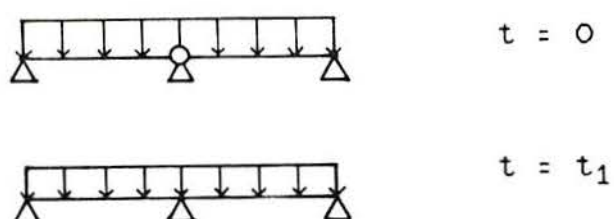


Figura 11(c) - Viga rotulada

Dados: $L = 5\text{m}$
 área da seção: $0,1\text{m}^2$
 momento de inércia: $0,0208\text{m}^4$
 carga: 20 kN/m^2
 $t_1 = 10\text{ dias}$
 condições ambientais: $U = 70\%$
 $T = 20^\circ\text{C}$
 concreto: $E_c = 25000000\text{ kN/m}^2$
 endurecimento normal do cimento

Na Figura 11(d) mostra o crescimento do momento sobre o apoio central, depois de fechada a rótula. Nota-se que, após o fechamento da mesma, existe um crescimento bastante acentuado do momento até a 1500 dias, aproximadamente. Após essa idade o crescimento torna-se bem mais suave, passando a ser pouco significativo após os 3000 dias.

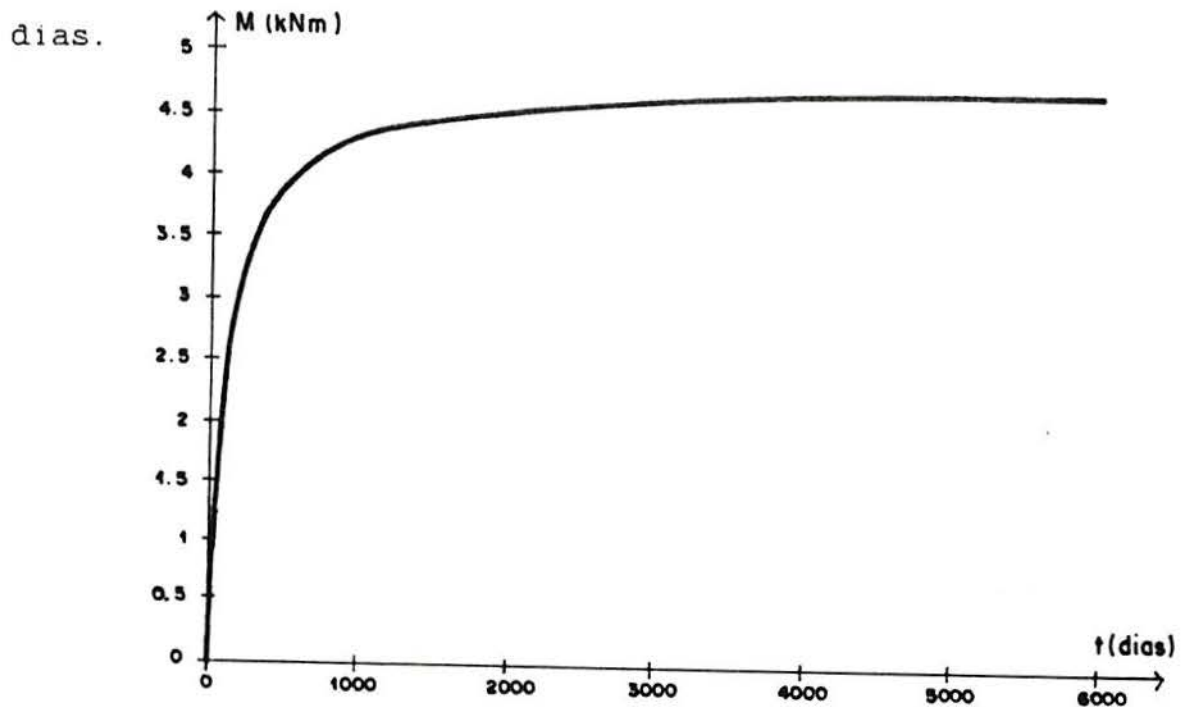


Figura 11(d) - Momentos sobre o apoio central

11.2.2 Avanços sucessivos

Esse exemplo nos mostra dois balanços construídos em avanços sucessivos e depois ligados. A Figura 10(e) ilustra as etapas construtivas:

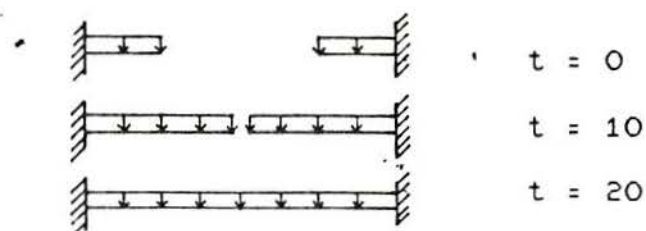


Figura 10(e) - Balanços construídos em avanços sucessivos

Uma vez dada continuidade entre as subestruturas deverá haver uma transição do comportamento de viga em balanço para viga contínua. Desse modo, aparecerá um momento positivo, crescente ao longo do tempo, no meio do vão e o momento negativo do apoio irá decrescer ao longo do tempo.

A Figura 10(f) mostra justamente essa transição de comportamento: nela estão graficados, em módulo, o momento no apoio e no engaste. Nota-se, então, claramente o crescimento do primeiro e o decréscimo do segundo.

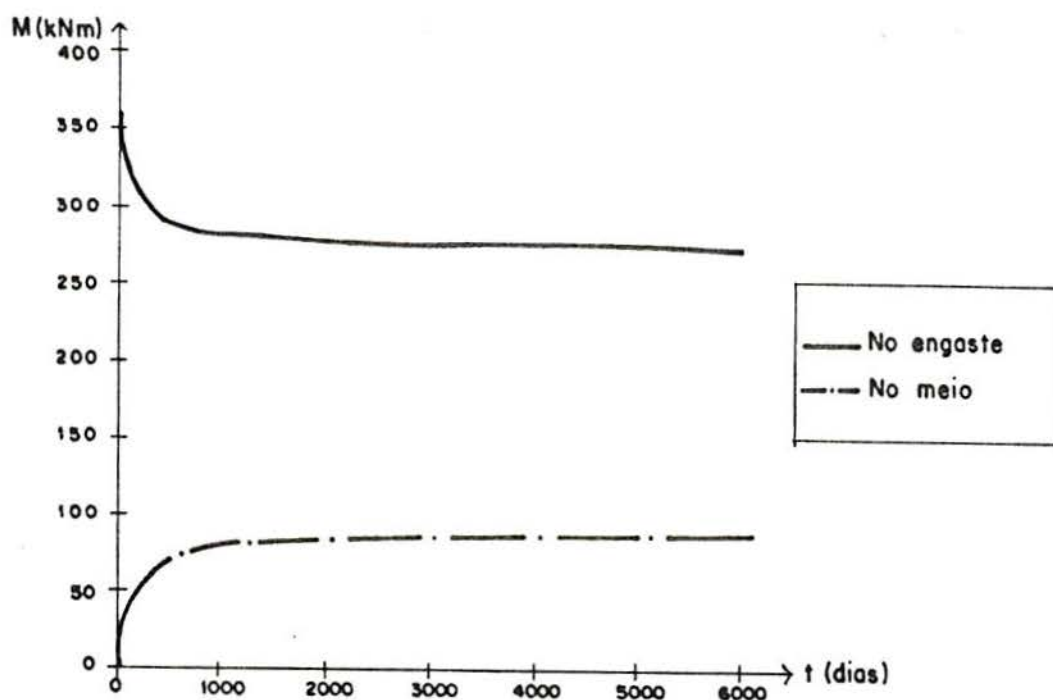


Figura 11(f) - Momentos após a união de dois balanços

11.2.3 Viga biapoiada protendida

Esse exemplo tem por objetivo mostrar como se comporta o esforço normal devido à protensão ao longo do tempo. A viga é mostrada abaixo:

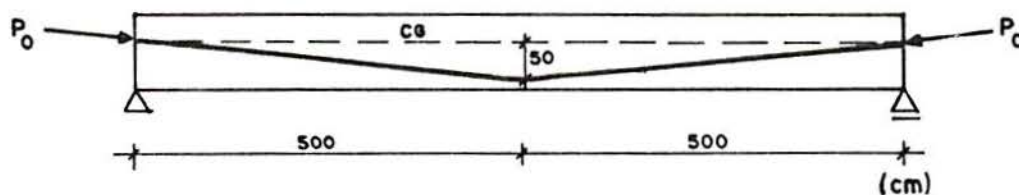


Figura 11(g) - Viga com dupla protensão

A protensão foi aplicada nas duas cabeceiras. Não foram consideradas outras cargas além da protensão.

Dados: $A_C = 4000 \text{ cm}^2$

$I_C = 10^7 \text{ cm}^4$

$A_P = 40 \text{ cm}^2$

$P_0 = 6000 \text{ kN}$

A curva abaixo representa o comportamento do esforço normal sobre um dos apoios ao longo do tempo:

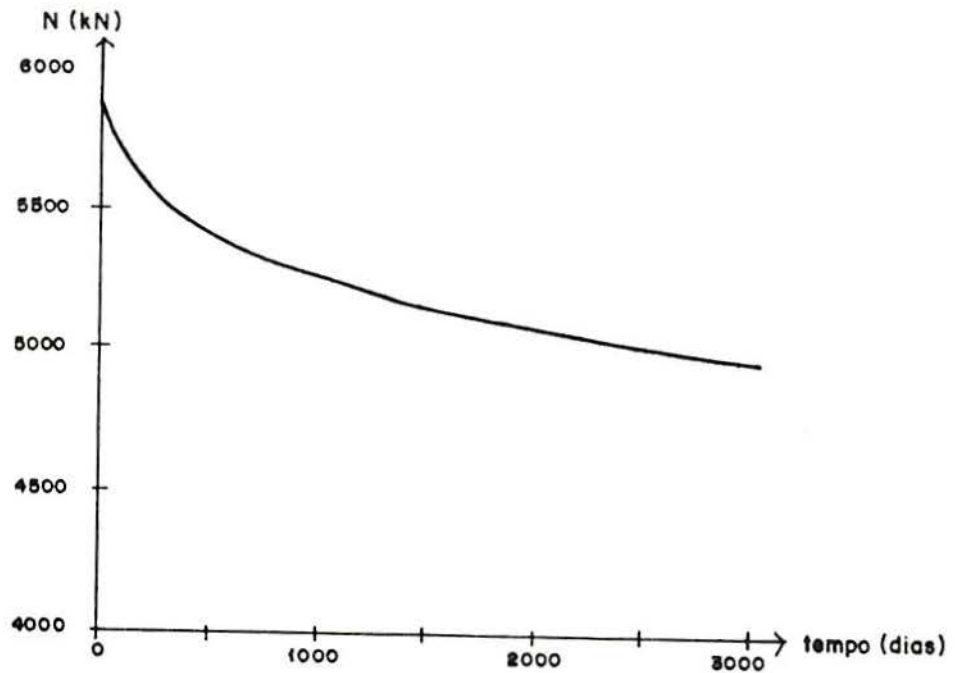


Figura 11(h) - Esforço normal sobre um apoio

11.2.4 Ponte em avanços sucessivos

A seguir, analisar-se-á uma ponte construída em balanços sucessivos. Essa ponte foi construída sobre o Arroio Tega e o projeto é de Paim [16].

O esquema construtivo é mostrado na figura 11(g), estando os dados listados a seguir.

As aduelas 1 a 13 e 33 a 45 são concretadas anteriormente ao início da construção por avanços sucessivos e são escoradas convencionalmente. As aduelas 14 a 34 são contruídas simetricamente por avanços sucessivos.

O tempo de construção de cada aduela é 9 dias. Aos 108 dias o balanço foi todo construído, faltado apenas fechá-lo. A 126 dias é concretado e protendido o fecho.

Utilizou-se intervalos de integração escalonados: até 1800 dias utilizou-se um $\Delta t = 9$ dias. A partir de então aumentou-se o intervalo para 27 dias.

Nos primeiros tempos é desaconselhável que se utilize um intervalo de integração maior que o tempo de execução de cada aduela. Por outro lado, é necessário que as mudanças de sistema estático coincidam com um tempo de análise. Esses fatos foram constatados através de testes feitos.

A análise foi feita apenas até 3000 dias porque as solicitações já mudavam bem lentamente então, bem como os deslocamentos.

Aqui cabe observar a influência que tem o tempo da retirada da treliça metálica sobre os momentos no meio do vão (e, por consequência, em todo os outros), uma vez que ela pode ser retirada antes ou depois da concretagem do fecho.

Se ela for retirada após a concretagem isso irá diminuir os momentos positivos que irão aparecer no meio do vão devido ao impedimento do giro, fato esse que se deve por equivaler a retirada da treliça após a mudança de sistema estático na aplicação de uma carga de baixo para cima no mesmo. Assim, a retirada da treliça após a mudança de sistema estático produzirá um momento negativo que suavizará os momentos positivos que aparecerão ao longo do tempo.

A figura 11(j) mostra esse fato: temos os momentos no meio do vão com a treliça presente na colocação do fecho

e com atrelia retirada antes. Nesse primeiro estágio não se considera efeitos de protensão.

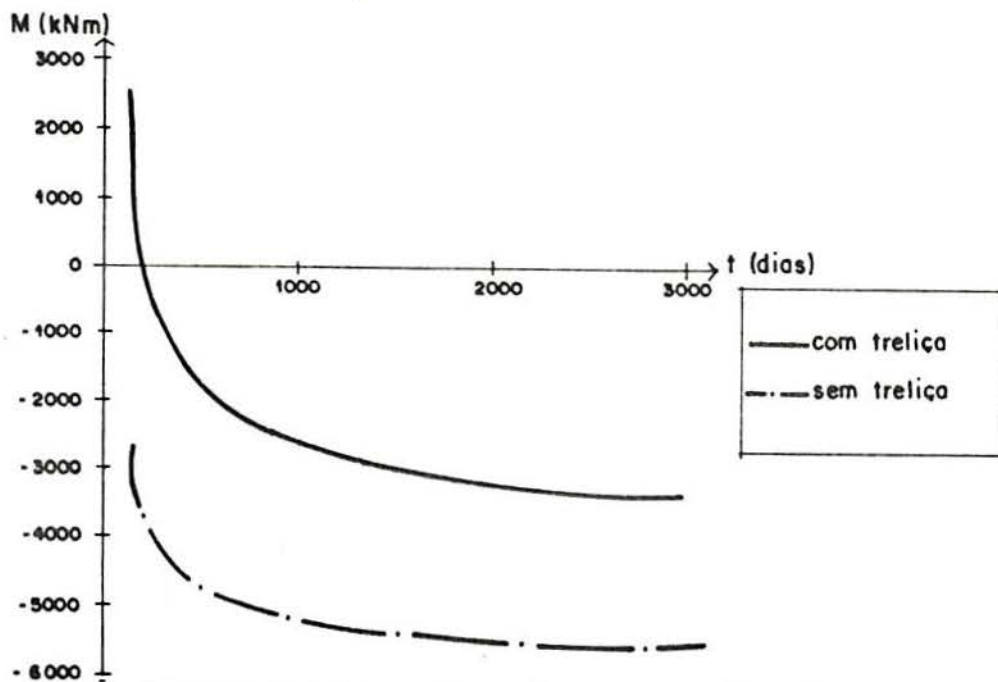


Figura 10(j) - Momentos no centro do vão

As Figuras 11(l) e 11(m) mostram, respectivamente, o decréscimo do momento no apoio e o aumento da flecha no meio do vão. Em ambos os casos verifica-se a influência exercida pela treliça metálica. No momento sobre o apoio quase não se nota a influência por ser o decréscimo pequeno.

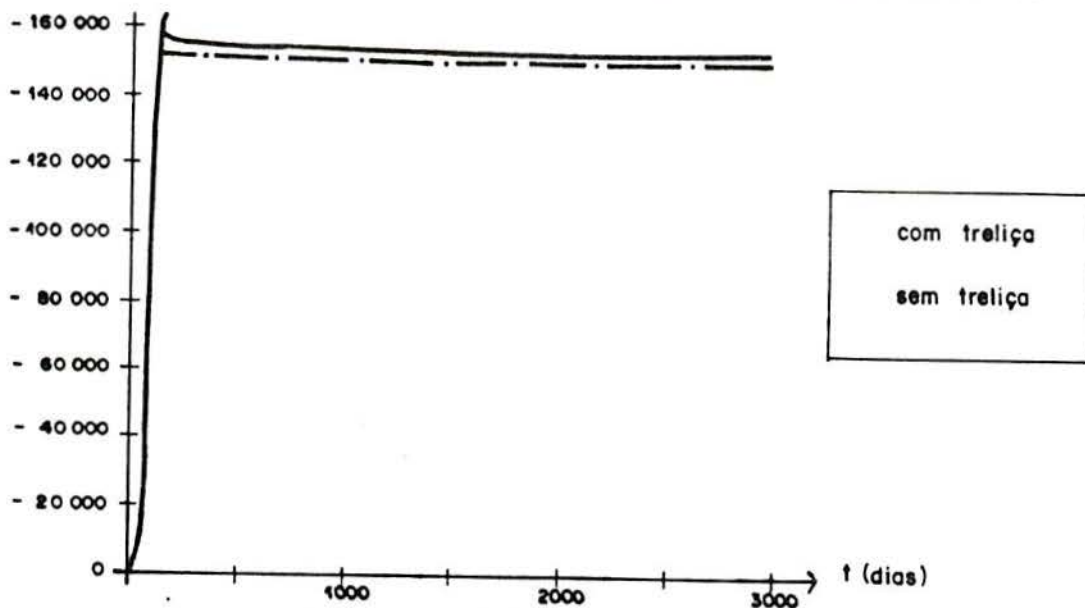


Figura 11(l) - Momento no apoio

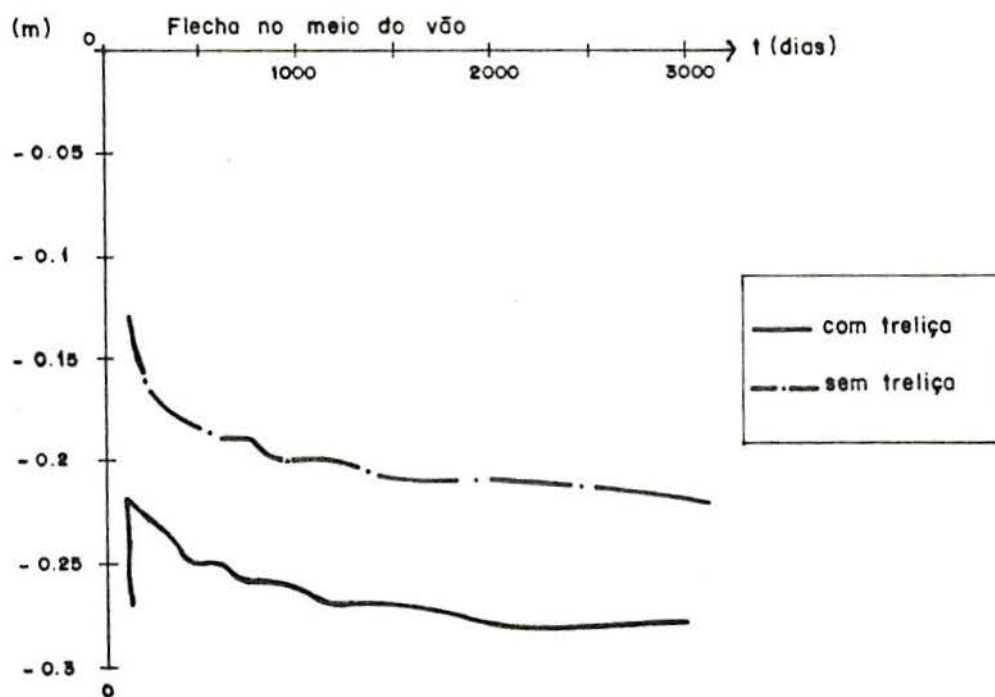


Figura 11(m) - Flecha máxima

12. CONCLUSÕES

Sob o ponto de vista teórico, significativas vantagens foram obtidas ao se assumir o comportamento mecânico como elástico linear. A distribuição das tensões na espessura segundo a lei do plano permite definir deformações axiais e curvaturas provenientes da deformação lenta, aditivas às deformações mecânicas relacionadas com as solicitações. Esse fato permite que se insira na formulação as deformações progressivas como se fossem deformações iniciais equivalentes a uma fonte de auto-deformações.

A formulação fica linear, valendo o princípio da superposição e o algoritmo convencional para pórticos elásticos pode ser adaptado de forma simples para levar em conta a deformação progressiva.

Caso se deseje inserir a resposta não-linear do concreto, com a distribuição de deformações progressivas na espessura acompanhando uma lei não-linear, não se pode mais tratar as deformações progressivas generalizadas no sentido convencional. A hipótese do plano compatibilizariam, então, a soma da deformação progressiva com a elástica, mas não cada uma separadamente. Em tal caso um modelo laminar parece inevitável.

A simplificação introduzida conduz à determinação das deformações progressivas através dos modelos reológicos

adotados e se traduz na aplicação simples das variáveis de estado sobre as deformações diferidas e, por extensão, aos deslocamentos relativos nodais. As cargas viscoelásticas surgem do produto dos deslocamentos relativos viscoelásticos pela matriz de rigidez do elemento.

As descontinuidades, por sua vez, foram abordadas de forma convencional para estruturas convencionais. A construção incremental é abordada fazendo-se a montagem da matriz de rigidez também incrementalmente, ou seja, montando-se matrizes de rigidez de dimensões variáveis com o tempo de análise.

Com respeito à modelagem das propriedades do concreto, tentou-se seguir as recomendações dos organismos internacionais, em especial do CEB. Essas recomendações foram adaptadas a uma cadeia de elementos Kelvin, que permite fácil tratamento teórico e computacional.

A vantagem de se transformar os modelos de fluência recomendados em cadeias Kelvin está no fato de então poder-se usar a formulação das variáveis de estado. Tal formulação é conveniente por transformar a formulação integral da viscoelasticidade em um processo incremental, que consiste em uma seqüência de passos lineares definidos em termos dos resultados do passo anterior e das cargas externas.

Com essas ferramentas teóricas foi elaborado um programa que pode ter ampla utilização prática. Sua principal aplicação se dá na análise de pontes em avanços sucessivos, porém muitos outros problemas podem ser

abordados com ele, como por exemplo o caso de vigas pré-fabricadas em que se dá continuidade ao longo do tempo.

O tempo de solução pode ser bastante longo. O exemplo da ponte sobre o Arroio Tega, que é uma ponte bastante modesta, levou pouco mais de nove horas para ser analisado até 3000 dias, com as condições de integração já mencionadas.

O programa poderia ter sido feito em um equipamento de grande porte, o que o tornaria bem mais veloz. Contudo, a intenção foi fazê-lo em um micro-computador da linha PC para ser mais acessíveis a possíveis usuários. Esse tempo computacional, porém, deve ser em pouco tempo bastante reduzido, uma vez que o *hardware* e os *softwares* estão cada vez mais sofisticados. Mesmo hoje já existem compiladores BASIC bem mais velozes que o utilizado (QuickBasic 2.0), e o programa pode ser adaptado com facilidade. Também esse tempo poderia ser reduzido empregando-se técnicas de otimização computacional.

Quanto ao intervalo de integração Δt a ser utilizado, esse deve ser escolhido com o máximo cuidado, por ser o método bastante sensível a ele nos primeiros tempos (cerca de 1000 a 1500 dias). Para tempos posteriores pode-se ampliar o intervalo. Na etapa inicial é aconselhável que o tempo de integração seja semelhante ao tempo de cada etapa de construção (em torno de dez dias). O programa prevê três etapas de integração com diferentes intervalos.

Ainda assim essa análise representa um avanço em relação aos métodos usualmente empregados em projetos. Porém, fica a dúvida até que ponto a modelagem viscoelástica

linear do concreto é representativa frente a resultados experimentais.

Outro ponto que deveria ser testado é a influência da torção nesse tipo de estrutura.

O trabalho ainda poderia ser melhorado com pequenos ajustes. Um desses seria a introdução de recalques progressivos e de apoios elásticos. Para análise de vigas pré-fabricadas seria interessante a introdução de nós semi-rígidos.

BIBLIOGRAFIA:

- 1 BAZANT, Z & ASGHARI, A. Computation of Kelvin Chain Retardation Spectra of Aging Concrete. Cement and Concrete Research, V.4, N° 5, september 1974.
- 2 BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. Computational methods for the solution of engineering problems. London, Pentech Press, 1979. 354 p.
- 3 COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. Structural effects of time-dependent behavior of concrete. Paris, 1984. (Bulletin d'Information, 142/142 Bis)
- 4 CHIORINO, M.A. & MOLA, F. Analysis of linear viscoelastic structures subjected to delayed restrictions. In: WITTMANN, F.N. Fundamental research on creep and shrinkage of concrete. Martinus Nijhoff Publishers, The Hage, 1982. p. 485-496
- 5 CREUS, G.J. Viscoelasticity: basic theory and applications to concrete structures. Heidelberg, Springer-Verlang, 1986.
- 6 DAROIT, E.O. Análise de deformações finitas em treliças planas viscoelásticas e pórticos planos viscoelásticos com vigas mistas. Dissertação de mestrado. CPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 1987.
- 7 FA'VE, R. et alii. Effects différents, fissuration et déformation des structures en béton. Saint-Saphorin, Georgi, 1980.

- 8 FUSCO, P.B. Estruturas de concreto protendido: projeto de norma. Estrutura, Nº 115, julho 1986. p. 13-66.
- 9 FRITSCH, E. Notas de aula.
- 10 GASTAL, F.P.S.L. Instantaneous and time-dependent response and strength jointless bridge beams. Raleigh, North Caroline State University, 1986. 289 p.
- 11 GRAVINA, P.B.J. A teoria elasto-viscosa das estruturas estruturas de concreto armado e protendido. São Paulo, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1956. 64 p.
- 12 HOLCK, C.H. Contribution à l'étude des structures en béton compte tenue du fluage et de la relaxation. Paris, l'Université de Paris, 1974. 75p. These de Docteur-Ingenieur.
- 13 ISHAI, O. Elastic and inelastic behavior of hardened mortar in torsion. In: SYMPOSIUM ON CREEP OF CONCRETE. Houston, Tex., Mar. 1964. Papers ... Detroit, American Concrete Institute, 1964. p. 65-94. (ACI. Special Publication, 9)
- 14 JOHANNSON, J. Diseno y calculo de estructuras pretensadas. Barcelona, Marcombo S.A., 1974. 581 p.
- 15 LANGEDONCK, T.V. Cálculo de concreto armado. São Paulo, Associação Brasileira de Cimento Portland, 1962. 166 p.
- 16 MACHADO, C.F. & ALBASSER, P. Evolução do processo de construção por balanços sucessivos de pontes de concreto protendido . s.n.t.

- 17 PAIM, O.D. Projeto e dimensionamento de pontes em balanços sucessivos. In: SEMINARIO DE CONCRETO PROTENDIDO, Rio de Janeiro, 1983. Anais. Rio de Janeiro, Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, 1983. p.123-218.
- 18 PAIM, O.D. Ponte sobre o arroio Tega. Porto Alegre, DAER, 1978.
- 19 PCI COMMITTEE ON PRESTRESSING LOSSES, Recommendations for estimating prestress losses. PCI Journal, V.20, N° 4, July-august, 1975.
- 20 RABOTNOV, Y.N. Elements of hereditary solid mechanics. Moscow, Mir Publishers, 1980. 387 p.
- 21 SANTOS, M.I.G. Tópicos especiais de análise matricial. Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, 1981. 36 p. (Caderno Técnico, 27).
- 22 SUTER, R.J. Influence des liaisons sur le comportement d'une structure continue réalisée à l'aide d'éléments préfabriqués. Lausanne, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1980. 164p. These de Docteur en Sciences Techniques.
- 23 ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1971. 521 p.

ANEXO I

ARRANJOS E VARIÁVEIS UTILIZADOS NO PROGRAMA APAS

I.1 Arranjos de dados

X(NN) - contém a ordenada X de cada nó

Y(NN) - contém a ordenada Y de cada nó

CON(2*NE) - contém a conectividade dos elementos

PROP(2*NE) - contém as propriedades geométricas da seção transversal (área e inércia, nesta ordem)

TEMB(NE, 2) - contém a ordem cronológica dos elementos, estando na primeira posição o tempo e na segunda o elemento (obs: os elementos devem ser colocados em ordem cronológica e dentro de um mesmo tempo, em ordem numérica)

RV(4*NNR) - contém os dados das restrições nodais. Para cada nó restringido, existem quatro posições: a primeira para o número do nó, as outras referentes a cada um dos graus de liberdade. Estes poderão estar livres(1), impedidos(0) ou com deslocamento imposto (2).

CARE(NT) - contém os valores dos deslocamentos impostos, que são colocados na posição do grau de liberdade do nó em que aparecem.

ND(5*NDES) - contém os dados relativos às descontinuidades e mudanças de sistema estático (as quais recebem tratamento semelhante ao das descontinuidades). Na

primeira posição é colocado o número da barra, na segunda o nó (1 ou 2) e as três últimas são referentes aos três graus de liberdade, contendo 0 se houver descontinuidade no deslocamento ou 1 se o deslocamento tiver continuidade. As descontinuidades devem estar em ordem cronológica.

TMU(NDES) - contém o tempo da introdução da descontinuidade ou da mudança de sistema estático.

CD(K1) - contém o número de cargas distribuídas para cada carregamento.

$Q1([6 \times \sum_{K=1}^{K1} CD(K)] + K1)$ - contém os dados para as cargas distribuídas. A primeira posição contém o número da barra, a segunda o tempo de colocação, a terceira o valor, a quarta a distância do primeiro nó até o início da carga, a quinta a distância do primeiro nó até o fim da carga e a última posição direção (X ou Y). Entre um carregamento e outro, coloca-se um zero.

Q2(K1) - contém a posição onde inicia-se cada carregamento do vetor Q1

Q3(K1) - vetor auxiliar que indica a posição da próxima carga distribuída a ser analisada, sendo no início, igual a Q2.

CC(K1) - vetor idêntico a CD, porém para cargas concentradas.

$P1([\sum_{I=1}^{K1} CC(I)] \times 5 + K1)$ - contém os dados para as cargas concentradas. A primeira posição contém o número da barra, a segunda o tempo, de colocação, a terceira o valor, a quarta a distância da carga ao primeiro nó e a quinta a direção

(X ou Y). Entre um carregamento e outro coloca-se um zero.

P2(K1) - análogo a Q2, para cargas concentradas.

P3(K1) - análogo a Q3, para cargas concentradas.

CN(K1) - análogo a CD, para cargas nodais.

PN($\begin{matrix} K1 \\ [ECN(I)]*4+K1 \end{matrix}$)- contém os dados referentes às cargas nodais. A primeira posição contém o número do nó. A segunda, o tempo de introdução, a terceira o valor e a quarta a direção global.

PN2(K1) - análogo a Q2, para cargas nodais.

PN3(K1) - análogo a Q3, para cargas globais.

AP(AP, 5) - contém os dados de cada cabo de protensão. Cada linha tem cinco colunas e contém os dados de um cabo. Na primeira coluna é colocado o tempo de protensão do cabo, na segunda coluna, o número do primeiro elemento, na terceira coluna o número do último elemento do cabo, na quarta coluna a área do cabo e na quinta coluna a força de protensão aplicada.

YP(CAB1, 4) - contém os dados de entrada de cada elemento de cada cabo. Na primeira posição, está a distância do primeiro nó do elemento à linha neutra. Na segunda, o ângulo α que o segmento forma com a horizontal, na terceira posição o comprimento L horizontal e na quarta posição a força inicial do elemento (após as perdas). Entre um cabo e outro, aparece o Y2 e a força final do último segmento.

E(NMU)- módulo de elasticidade de cada elemento da cadeia Kelvin. O primeiro é o módulo de elasticidade instantâneo, calculado para cada elemento a cada passo da

análise. Os outros são calculados em um subprograma que transforma a função do CEB em cadeia Kelvin (KELVIN)

DD(NMU) - para cada cadeia, contém o valor de $e^{-(\Delta t/\theta_1)}$,
 onde $\Delta t=DT$ e θ_i são os valores dos termos de retração,
 calculados também pelo KELVIN

II.2 Arranjos montados pelo programa

S1(6,6) - contém a matriz de rigidez de cada elemento.
 A1(6,K1) - contém cargas nodais correspondentes às cargas nas barras.
 S1A(6*NE,6) - contém as matrizes de rigidez das barras de armadura frouxa e cabos protendidos. Esses vão sendo somados a S1A a medida que são colocados .
 S(NT,SB) - matriz de rigidez global armazenada em forma de banda.
 VCL(6*NE,K1) - contém as cargas externas nodais equivalentes de cada elemento.
 LA(NT,K1) - contém o vetor de cargas externas globais.
 DV(*NE,K1*NMU) - contém as deformações viscoelásticas que aparecem em cada elemento no caso da livre deformação. Possui NMU posições, uma para cada elemento Kelvin, exceto o primeiro. Na última posição tem-se a soma de todas as cadeias. Isso é repetido para cada carregamento.
 DBA(6,K1) - vetor auxiliar, que contém os deslocamentos viscoelásticos totais para o cálculo das forças viscoelásticas.

DD1(3,3) - matriz auxiliar para a rotação da matriz de rigidez de barras.

D(6,K1) - vetor auxiliar contendo deslocamento nodais para cálculo de solicitações ou das forças de perda de protensão.

T1(6) - vetor auxiliar para cálculo de solicitações.

REAC(NT,K1) - contém as reações nodais.

AA1(6) - vetor auxiliar usado para resolução dos sistemas das descontinuidades.

AA(NT,K1) - vetor que contém os valores dos deslocamentos nodais quando de uma modificação de sistema estático.

DDL(3*NDES,K1) - conterá os deslocamentos nodais dos nós com descontinuidade quando de uma modificação do sistema estático.

DV1(6*NE,K1*NMU) - contém as deformações viscoelásticas quando da mudança do sistema estático.

AAA(NT,K1) - contém os deslocamentos nodais do tempo anterior ao que acaba de ser analisado.

S1AD(6,6*NDES) - contém as matrizes de rigidez modificadas pela presença de descontinuidade das barras de armadura frouxa e cabos de protensão.

II.3 Variáveis Principais:

NN - Número de Nós

NE - Número de Elementos

NNR - Número de Nós Restringidos

K1 - Número de Carregamentos

NDES - Número de DEScontinuidades

NNU - Número de Núcleos

- CAB1 - Número de Elementos do Cabo I + 1
- EC - Módulo de Elasticidade Secante do Concreto a 28 Dias
- EP - Módulo de Elasticidade do Aço de Protensão
- TO - Idade Inicial dos Elementos
- S - Semi-Largura da Banda

ANEXO II

SOLICITAÇÕES RESULTANTES DA SUPRESSÃO DE UMA DESCONTINUIDADE

A seguir passa-se a calcular as solicitações supramencionadas através da formulação integral de viscoelasticidade empregando o modelo standard.

$$S(t) = S_{e1} E^* [D(t, z_1) - D(z_2, z_1)] \quad (II.1)$$

onde S_{e1} é a solicitação que apareceria em uma estrutura elástica, com $E = E_1$, e contínua análoga.

Tem-se:

$$\sigma(t) = E^* \epsilon(t) \quad (II.2)$$

Fazendo

$$\sigma(t) = D(t, z_1) - D(z_2, z_1) \quad (II.3)$$

Pode-se calcular $E^* [D(t, z_1) - D(z_2, z_1)]$ pela integral de $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \epsilon(t) E_{\infty} + (E_1 - E_{\infty}) \int_{z_2}^t e^{-\frac{(E_1 + E_2)(t-z)^n}{2\tau}} \dot{\epsilon}(z) dz \quad (II.4)$$

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-(t - \tau_1)/\theta}) \right] - \\ & - \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\theta}) \right] \quad (\text{II.5}) \end{aligned}$$

onde $\theta = E_2/n$. Fazendo $\tau_1 = 0$

$$\epsilon(t) = \frac{1}{E_2} (e^{-\tau_2/\theta} - e^{-t/\theta}) \quad (\text{II.6})$$

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\theta}{E_2} e^{-t/\theta} \quad (\text{II.7})$$

Substituindo (II.6) e (II.7) em (II.4) obtêm-se:

$$\sigma(t) = \frac{E_1}{E_1 + E_2} \left[e^{-\tau_2/\theta} - e^{-(E_1 + E_2) t/n} \frac{E_1 \tau_2^n}{E_1 \tau_2^n} \right] \quad (\text{II.8})$$

Como tinha-se $\sigma(t) = E^* [D(t, \tau_1) - D(\tau_2, \tau_1)]$, substitui-se (II.8) em (II.1):

$$S(t) = S_{e1} \frac{E_1}{E_1 + E_2} \left[e^{-\tau_2/\theta} - e^{-(E_1 + E_2) t/n} \frac{E_1 \tau_2^n}{E_1 \tau_2^n} \right] \quad (\text{II.9})$$

Aplicando (II.9) para o exemplo 2:

$$S_{e1} = q l^2/24 \quad (II.10)$$

onde S_{e1} é momento no centro do vão de uma viga biengastada.

Substituindo (II.10) em (II.9) e colocando os valores dos dados do problema:

$$S(t) = 6,67 (0,74078 - e^{-(2t - 30)/100}) \text{ [kNm]} \quad (II.11)$$

Através de (II.11) pode-se obter valores analíticos e compará-los com os da solução numérica do exemplo 2.

ANEXO III

RECOMENDAÇÕES DO CEB/FIP

III.1. Função de Fluência segundo boletim CEB/FIP 1978.

Essa função de fluência foi publicada em 1978, mas em 1982 foi reeditada com fórmulas matemáticas representando o ábaco. A formulação aqui exposta encontra-se no anexo D do boletim 2 .

A deformação lenta do concreto é dada por:

$$\epsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_0}{E_{c28}} \varphi(t, t_0) \quad (\text{III.1.1})$$

onde E_{c28} : módulo de elasticidade aos 28 dias

$\mu(t, t_0)$: coeficiente de fluência

Assim, a deformação total no tempo t é dada por:

$$\epsilon_c(t, t_0) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] \quad (\text{III.1.2})$$

O coeficiente de fluência é dividido em três parcelas, a saber:

- fluência rápida (parcela da fluência que ocorre imediatamente após o carregamento e é praticamente toda irreversível);

- fluência lenta irreversível;

- fluência lenta reversível.

Essas três parcelas somadas resultam no coeficiente de fluência total.

O boletim do CEB apresenta a seguinte fórmula para o cálculo do coeficiente de fluência:

$$\varphi(t, t_0) = \beta_a(t_0) + \varphi_d \beta_d(t-t_0) + \varphi_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] \quad (\text{III.1.3})$$

onde:

$\beta_a(t_0)$: coeficiente representando a fluência rápida.

$$\beta_a(t_0) = 0,8 \{ 1 - [t_0 / (t_0 + 45)^{1/2,45}] \} \quad (\text{III.1.4})$$

φ_d : coeficiente representando a fluência lenta reversível no tempo infinito ($\varphi_d = 0,4$).

$\beta_d(t-t_0)$: coeficiente que representa a variação da fluência lenta reversível no tempo.

$$\beta_d(t-t_0) = [(t - t_0) / (t - t_0 + 328)]^{1/4,2} \quad (\text{III.1.5})$$

φ_f : coeficiente que representa a deformação lenta irreversível no tempo infinito.

$$\varphi_f = \varphi_{f1} \varphi_{f2} \quad (\text{III.1.6})$$

$$\varphi_{f1} = 4,45 - 0,035 U \quad (\text{III.1.7})$$

$$\varphi_{f2} = e^{[4,4 \cdot 10^5 H_0 - 0,357/H_0 + \ln(H_0^{-0,1667/2,6})]} \quad (\text{III.1.8})$$

$\beta_f(t)$: coeficiente representando a variação da deformação lenta irreversível com o tempo.

$$\beta_f(t) = [t / (t + K_1)]^{K_2} \quad (\text{III.1.9})$$

$$K_1 = e^{[5,02/H_0 + \ln (6,95 H_0^{1,25})]} \quad (\text{III.1.10})$$

$$K_2 = e^{[0,0014 H_0 - 1,1 / H_0 - \ln (1,005 H_0^{0,2954})]} \quad (\text{III.1.11})$$

Nas fórmulas acima apresentadas t é a idade do concreto no instante do cálculo e t_0 a idade do concreto no instante em que ele foi carregado. A idade do concret deve ser corrigida pela fórmula:

$$t = \frac{\alpha}{30} \sum_0^{T_m} \{ [T(t_m) + 10] \Delta t_m \} \quad (\text{III.1.12})$$

onde:

α : coeficiente função da velocidade de endurecimento do cimento.

- $\alpha = 1$, endurecimento lento
- 2, endurecimento normal
- 3, endurecimento rápido.

$T(t_m)$: temperatura média diária em °C

Δt_m : número de dias com temperatura T.

A espessura fictícia H_0 é calculada pela a seguinte expressão:

$$H_0 = 2 \frac{A_c}{u_c} \quad (\text{III.1.13})$$

onde:

: coeficiente em função das condições ambientais.

= 30, para água.

5, para ambientes úmidos (U = 90%)

1,5, para ambientes normais (U = 70%)

1, para ambientes secos (U = 40%).

A_C : área da seção transversal de concreto.

u_C : perímetro em contato com a atmosfera.

A espessura fictícia deve ser dada em centímetros e a umidade relativa do ar em percentagem.

III.2 Retração

Da mesma forma que a função de fluência, as fórmulas para cálculo da deformação devida a retração foram apresentadas pelo CEB em 1978 e reeditadas completas em 1982.

A deformação devida a retração que é desenvolvida em um intervalo de tempo (t-t₀) é dada por:

$$\epsilon_S(t, t_0) = \epsilon_{S0} [\beta_S(t) - \beta_S(t_0)] \quad (\text{III.2.1})$$

onde:

ϵ_{S0} : coeficiente de retração básico, correspondente ao valor da retração no tempo infinito.

$$\epsilon_{S0} = \epsilon_{S1} \epsilon_{S2} \quad (\text{III.2.2})$$

$$\epsilon_{S1} = \left[\frac{59}{90000} U^3 - 0,1254444 U^2 + 8,36888 U - 228 \right] 10^{-5} \quad (\text{III.2.3})$$

$$\epsilon_{S2} = e^{[0,00174 H_0 - 0,32 / H_0 - \ln (H_0^{0,251}/1,9)]} \quad (\text{III.2.4})$$

$\beta_S(t)$: coeficiente que expressa a variação da retração com

a idade.

$$\beta_S(t) = [t / (t+K_3)]^{K_4} \quad (\text{III.2.5})$$

$$K_3 = 11,8 H_0 + 16 \quad (\text{III.2.6})$$

$$K_4 = e^{[0,00257 H_0 + 0,32 / H_0 + \ln (0,22 H_0^{0,4})]} \quad (\text{III.2.7})$$