

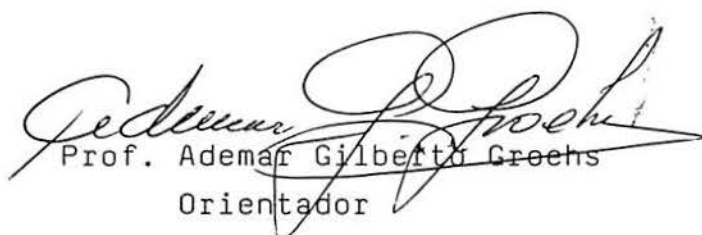
ANALISE ELASTOPLASTICA LAMINAR E NAO-LAMINAR DE PLACAS FINAS  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

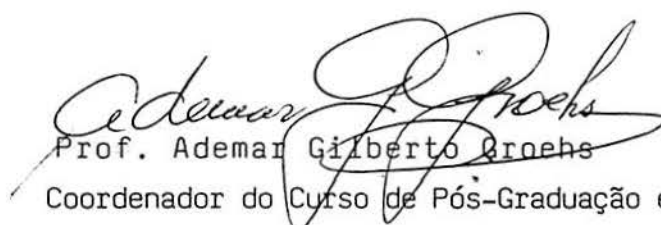
Itamar Ribeiro Gomes

Dissertação submetida ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PORTO ALEGRE  
AGOSTO/1990

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

  
Prof. Ademair Gilberto Groehs  
Orientador

  
Prof. Ademair Gilberto Groehs  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Ademair Gilberto Groehs  
D.Sc., COPPE/UFRJ
- Prof. Guillermo Juan Creus  
D.Sc., COPPE/UFRJ
- José Carlos Ferraz Hennemann  
Ph.D., SMU/USA
- Prof. Marco T.Menna Barreto de Vilhena  
Dr., UFRGS

A Giana e a  
meus pais.

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Ademar Gilberto Groehs pela dedicação na orientação deste trabalho, além do apoio e cooperação no desenvolvimento do mesmo.

Ao professor Guillermo Juan Creus pela orientação teórica e pelas valiosas sugestões ao longo deste trabalho.

A CNEN e a CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Aos professores e funcionários do Curso de Pós-Graduação.

A sra. Juliana Zart Bonilha pela preparação das referências bibliográficas.



## RESUMO

Neste trabalho desenvolveu-se um programa computacional para resolver problemas elastoplásticos de flexão de placas finas com pequenas deformações, utilizando o método dos elementos finitos.

O elemento finito utilizado é retangular linear, conhecido na literatura por R12.

Analisou-se flexão de placas discretizando sua espessura (laminar) ou representando-a por sua superfície média (não-laminar). O material é considerado com endurecimento isótropo, seguindo o critério de escoamento de MISES. O método de solução adotado foi o incremental.

Comparou-se as análises laminar e não-laminar com resultados experimentais e numéricos.

## ABSTRACT

A computational program to solve elastoplastic problems of thin plates bending with small displacements was developed in this work. The finite element method was used.

The linear rectangular and non-conforming element known in the literature as R12, was used.

The bending analyses were made representing the plate either by layers (layered analysis) or by its middle surface (non-layered analysis). Elastoplastic constitutive relations follow the MISES theory with isotropic hardening. The incremental solution method was adopted.

Comparisons among layered and nonlayered analyses, experimental data and numerical results were made.

## SUMARIO

|   |    |
|---|----|
| INTRODUÇÃO.....   |    |
| 1. FUNDAMENTOS DA TEORIA CLASSICA DE PLASTICIDADE.....  | 1  |
| 1.1. Introdução.....  | 1  |
| 1.2. Hipóteses Básicas.....   | 1  |
| 1.3. Função de Escoamento.....  | 4  |
| 1.4. Critério de Escoamento.....  | 7  |
| 1.4.1. Endurecimento Isótropo.....  | 9  |
| 1.4.2. Endurecimento Cinemático.....  | 9  |
| 1.5. Normalidade.....   | 10 |
| 2. A RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA.....   | 12 |
| 2.1. Introdução.....  | 12 |
| 2.2. A Relação Tensão-Deformação.....   | 12 |
| 2.3. A Relação Momento-Curvatura.....   | 13 |
| 2.4. A Relação Momento-Curvatura a partir de uma Relação<br>Tensão-Deformação Aproximadas por Duas Retas..... | 22 |
| 2.5. A Relação Momento-Curvatura para um Material<br>Elastoplástico Perfeito.....                             | 25 |
| 3. PLACAS.....  | 27 |
| 3.1. Introdução.....  | 27 |
| 3.2. Flexão de Placas - Noções Básicas.....   | 28 |
| 3.3. Formulação Laminar.....  | 29 |
| 3.3.1. Matriz Constitutiva Elastoplástica.....  | 30 |
| 3.4. Formulação Não-Laminar.....  | 36 |
| 3.4.1. Matriz Constitutiva Elastoplástica.....  | 37 |
| 3.5. Simplificação Adotada.....   | 42 |
| 4. MÉTODO E ALGORITMO DE SOLUÇÃO.....   | 44 |
| 4.1. Introdução.....  | 44 |
| 4.2. Princípio Variacional Incremental.....   | 44 |
| 4.3. O Método dos Elementos Finitos.....  | 46 |

|   |    |
|---|----|
| 4.3.1. O Elemento Finito Utilizado.....                                     | 47 |
| 4.4. O Método Incremental.....  | 48 |
| 4.5. Critério de Plastificação e Descarga.....                              | 50 |
| 4.6. Algoritmo de Solução.....  | 50 |
| 4.7. O Programa Computacional.....  | 53 |
| 5. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS.....   | 56 |
| 5.1. Exemplos com a Utilização de Apenas um Elemento.....                   | 56 |
| 5.2. Exemplos Comparativos.....   | 58 |
| 5.3. Placa Totalmente Engastada sob Carga Uniformemente<br>Distribuída..... | 60 |
| 5.4. Placa Simplesmente Apoiada sob Carga Uniformemente<br>Distribuída..... | 62 |
| 5.5. Placa Circular sob Carga Central.....                                  | 64 |
| 5.6. Placa Circular sob Carga e Descarga.....                               | 66 |
| 5.7. Tempos de Análise dos Exemplos.....                                    | 68 |
| 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....  | 69 |
| 6.1. Conclusões.....  | 69 |
| 6.2. Sugestões.....   | 69 |
| APÊNDICE A.....   | 71 |
| APÊNDICE B.....   | 74 |
| APÊNDICE C.....   | 82 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....   | 89 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Romanas Maiúsculas

- $R$  - constante, área da barra deformada  
 $A_0$  - área inicial  
 $B$  - matriz com as derivadas das funções interpoladoras  
 $D$  - matriz constitutiva elástica  
 $D^{ep}$  - matriz constitutiva elastoplástica  
 $E$  - módulo de deformação longitudinal  
 $F$  - função de escoamento
- $H$  - endurecimento isótropo (no diagrama tensão-deformação)  
 $H_i$  - inclinações das retas, com relação à horizontal, que definem o diagrama tensão-deformação  
 $HM$  - endurecimento isótropo (no diagrama momento-curvatura)  
 $HM_i$  - inclinações das retas, com relação à horizontal, que definem o diagrama momento-curvatura  
 $J_2$  - segundo invariante do tensor de tensões  
 $K^{e1}$  - matriz de rigidez do elemento  
 $K$  - matriz de rigidez da estrutura  
 $M$  - momento  
 $\underline{M}$  - vetor de momentos fletores e torção  
 $\underline{N}$  - vetor de forças normais  
 $\underline{P}$  - vetor de cargas nodais  
 $\underline{S}$  - matriz de tensões desviatórias  
 $S_{11}, S_{22}, S_{12}$  - elementos da matriz de tensões desviatórias  
 $S_1, \dots, S_5$  - variáveis auxiliares utilizadas para definir a matriz constitutivas elastoplástica  
 $T$  - superíndice, indicando matriz transposta

### Letras Romanas Minúsculas

- $a$  - vetor de fluxo  
 $b_i$  - vetor de forças de volume  
 $\bar{b}_i$  - vetor de forças de massa  
 $c$  - constante  
 $e$  - superíndice, referente a grandezas elásticas



- ep - superíndice, referente a grandezas elastoplásticas
- f - subíndice, referente à esforços de flexão
- g - potencial plástico
- i, j, k, l - índices da notação indicial
- $\underline{k}$  - conjunto de variáveis para modelar o endurecimento
- $\bar{k}$  - escalar
- $l_0$  - comprimento inicial
- $l(t)$  - comprimento da barra deformada
- m - subíndice, referente à esforços de membrana
- r - fator de plastificação
- s - fator de forma
- t - espessura da placa ou altura da barra
- x, y, z - sistema cartesiano de referência local
- $z_i$  - distância do eixo geométrico da barra até a tensão de escoamento  $\sigma_i$
- w - deslocamentos verticais transversais à superfície média

#### Letras Gregas Maiúsculas

- $\Delta$  - incremento, diferença
- $\Lambda$  - escalar não negativo

#### Letras Gregas Minúsculas

- $\alpha$  - escalar
- $\underline{\alpha}$  - vetor de tensões do endurecimento cinemático
- $\underline{\chi}$  - vetor de curvaturas
- $\delta$  - incremento
- $\underline{\varepsilon}$  - vetor de deformações
- $\underline{\eta}$  - vetor generalizado de deformações
- $\lambda$  - escalar
- $\nu$  - coeficiente de Poisson
- $\rho$  - massa específica
- $\sigma_{ij}$  - tensor de tensões
- $\underline{\sigma}$  - vetor de tensões

#### Símbolos

- $\partial$  - derivada parcial
- $(\dot{\quad})$  - derivada temporal

(•) - produto escalar  
|| - norma euclidiana

## INTRODUÇÃO

Os fundamentos da teoria matemática da plasticidade foram obtidos por Saint Venant em 1870. Depois do progresso inicial devido à Saint Venant, Lévy e Boussinesq, importantes contribuições foram dadas neste período por HAAR e v. KARMAN (1909) e v. MISES (1913). O tratamento ao problema de torção dado por NADAI (1923), o trabalho de HENCKY e PRANDTL sobre cisalhamento no estado plano de deformações (1923) e a inclusão dos efeitos elásticos nas equações básicas por PRANDTL (1924) e REUSS (1930) inaugura um segundo período de progresso. Desde então, o desenvolvimento da teoria da plasticidade foi bastante rápido.

Atualmente, com a crescente velocidade e maior capacidade de armazenamentos de dados dos novos computadores, agregados ao desenvolvimento de novos métodos numéricos, onde o método dos elementos finitos se destaca, e técnicas computacionais, a habilidade de resolver problemas não-lineares foi impulsionada. Assim, o campo da teoria da plasticidade pode ser ampliado à um número considerável de problemas práticos.

Este trabalho faz parte de uma linha de pesquisa da UFRGS que tem por finalidade o estudo não-linear físico e geométrico de peças metálicas submetidas a ação de cargas estáticas.

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um programa computacional para resolver, através do método dos elementos finitos, problemas de não-linearidade física para o caso de pequenas deformações e deslocamentos, para flexão de placas metálicas. Foram utilizados dois tipos distintos de análise: a primeira, denominada laminar (layered), discretiza a espessura da placa através de pontos de integração e a segunda análise, denominada não-laminar (nonlayered), representa a placa por sua superfície média.

Quanto a análise elastoplástica o material será considerado como sendo elastoplástico perfeito ou com endurecimento isotropo. Além disto, será utilizado o critério de escoamento de MI-



SES.

O elemento finito utilizado para resolver problemas de flexão de placas, é retangular com 4 nós, com 3 graus de liberdade por nó, não-conforme, conhecido na literatura por R12.

O método da matriz de rigidez tangente, também conhecido como método incremental, foi utilizado na análise.

A dissertação foi dividida em seis capítulos, cujos conteúdos são descritos a seguir:

O capítulo 1 apresenta os fundamentos da teoria clássica da plasticidade.

O capítulo 2 estabelece relações entre o diagrama tensão-deformação e o diagrama momento-curvatura.

No capítulo 3 é apresentada a teoria elementar de placas, dentro das hipóteses de KIRCHHOFF. Obtém-se as matrizes constitutivas elastoplásticas para a formulação laminar e não-laminar de placas.

O capítulo 4 mostra a obtenção do princípio variacional a ser usado na solução numérica via elementos finitos e a aplicação do método incremental para a solução do problema.

No capítulo 5 são analisados exemplos numéricos e comparados com os resultados obtidos por outros autores e a resultados experimentais.

Finalmente, no capítulo 6 estão apresentadas algumas conclusões e sugestões.

No apêndice A demonstra-se que as hipóteses fundamentais da plasticidade, apresentadas no capítulo 1 e geralmente expressas em tensões, têm uma forma idêntica quando expressas em resultantes de tensões.

A generalização das relações constitutivas elastoplásticas para cascas poliédricas está no apêndice B.

O programa foi escrito na linguagem de programação FORTRAN do computador A10 da UFRGS e faz parte da linguagem orientada ESFINGE (ESTudo Físico, Isótropo ou Não, e Geométrico de Estruturas). Os principais comandos da linguagem estão no apêndice C.

## CAPÍTULO 1

### FUNDAMENTOS DA TEORIA CLASSICA DA PLASTICIDADE.

#### 1.1. Introdução

O objetivo deste capítulo é expor, de maneira sucinta, os conceitos básicos da Teoria Clássica da Plasticidade que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Uma análise mais profunda dos conceitos e da motivação fenomenológica da teoria da plasticidade podem ser encontradas nas referências [4], [8] e [15].

#### 1.2. Hipóteses Básicas

A partir de um corpo de prova cilíndrico submetido à um ensaio de tração simples, (ver Fig. 1.2.1) pode-se definir:

$P(t)$  - carga aplicada, variando no tempo  $t$ ,

$l_0$  - comprimento inicial,

$l(t)$  - comprimento da barra deformada,

$A_0$  - área inicial,

$A$  - área da barra deformada.

Para *pequenas deformações*, define-se a deformação específica longitudinal, como

$$\epsilon = \frac{l(t) - l_0}{l_0} \quad (1.1.1)$$

a deformação específica transversal

$$\epsilon_t = \frac{r - r_0}{r} \quad (1.2.2)$$

e a tensão normal

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.2.3)$$

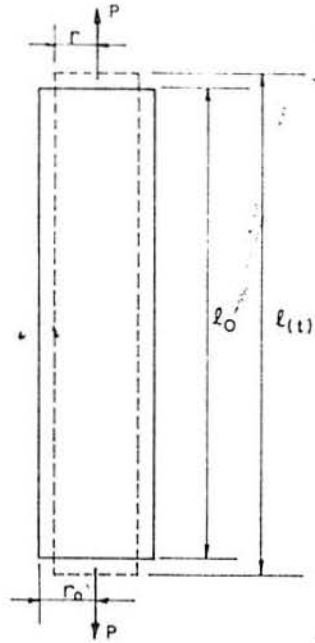


Fig. 1.2.1 - Corpo de prova cilíndrico submetido à tração simples.

Em plasticidade é freqüente usar as taxas de tensão e deformação

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad e \quad \dot{\epsilon} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad (1.2.4)$$

Plotando os valores de  $\sigma$ - $\epsilon$ , ter-se-á o gráfico mostrado na Fig. 1.2.2. A partir do gráfico, observa-se as seguintes características:

a) Um comportamento elástico linear até o ponto A, caracterizado pelo módulo de deformação longitudinal E e um coeficiente de Poisson  $\nu$  (lei de Hooke), tal que

$$\sigma = E\epsilon \quad \nu = - \frac{\epsilon_t}{\epsilon} \quad (1.2.5)$$

b) A partir de A o material apresenta um comportamento não linear, e aparece como conseqüência deformações plásticas (isto é, não recuperáveis) para tensões mais altas. A tensão  $\sigma_1$  é a maior tensão que pode ser aplicada sem produzir deformações permanentes.

c) Ao realizar-se ciclos de descarga e recarga após o escoamento inicial, aparecerá um ciclo de histerese como indicado por BCDEF. Este ciclo é bastante delgado e não é levado em consideração pela teoria clássica, que assume que a descarga e recarga acontecem ao longo de uma linha GD (tracejada) com inclinação igual ao módulo de deformação longitudinal E.

Portanto, a taxa de deformação longitudinal específica total pode ser escrita como

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (1.2.6)$$

onde  $\dot{\epsilon}^e$  é a taxa de deformação longitudinal elástica e  $\dot{\epsilon}^p$  é a taxa de deformação longitudinal plástica.

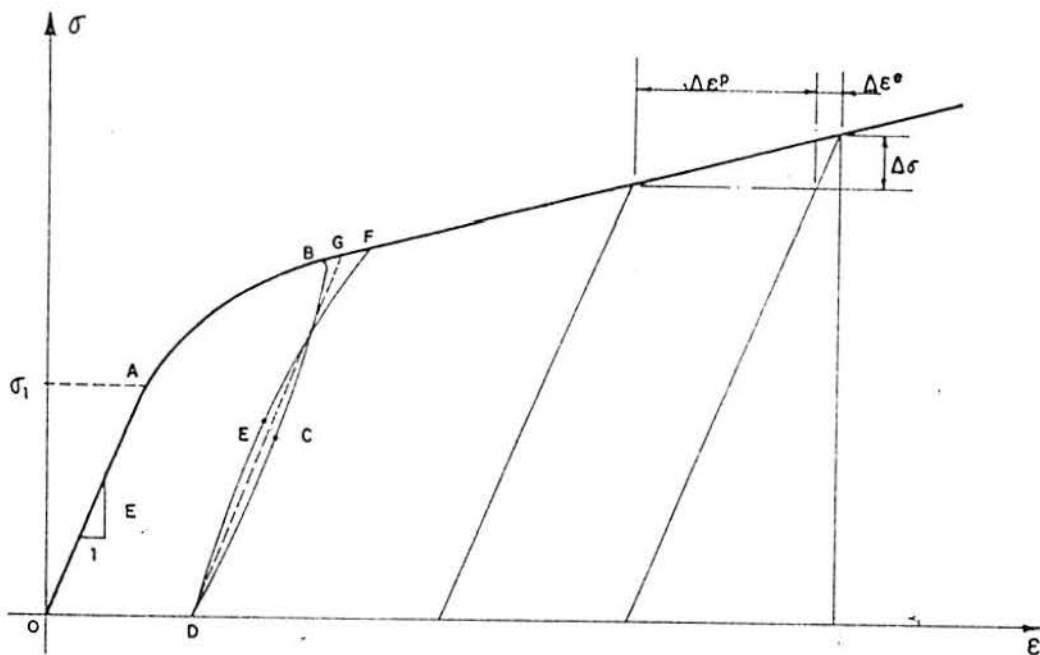


Fig. 1.2.2 - Relação tensão-deformação.

Assume-se ainda que a relação tensão-deformação independe da velocidade de carga. Na realidade existe uma certa dependência, que é particularmente importante em estruturas metálicas à altas temperaturas, em estruturas de concreto e em caso de cargas dinâmicas. Para estes casos, existem teorias específicas (creep, viscoplasticidade).

Sabe-se também que o comportamento mecânico dos materiais dependem dos fatores ambientais. Por exemplo, para metais, os



valores de E e dos parâmetros de endurecimento variam com a temperatura.

OBSERVAÇÃO: Em plasticidade, assume-se que a deformação não é função da velocidade de carga. Em consequência, o tempo indica apenas a ordem em que os eventos ocorrem.

### 1.3. Função de Escoamento

A determinação da relação constitutiva elastoplástica para um estado multiaxial de tensões utiliza:

a) Uma relação tensão-deformação correspondente ao regime elástico, da forma

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.3.1)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões de Cauchy,  $\varepsilon_{kl}$  é o tensor de deformações infinitesimais e é indicado por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.3.2)$$

sendo  $u_i$  os deslocamentos do corpo e  $E_{ijkl}$  o tensor de constantes elásticas do material.

b) Um critério de escoamento que caracteriza a transição entre o regime elástico e elastoplástico dado por uma certa combinação das nove componentes do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Este critério, também chamado de função de escoamento, pode ser representado pela relação abaixo

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{s}}, \underline{\underline{k}}) = 0 \quad (1.3.3)$$

onde  $\underline{\underline{\sigma}}$  é o tensor de tensões e  $\underline{\underline{s}}$  e  $\underline{\underline{k}}$  representam um conjunto de variáveis que determinam o estado do material e permite modelar o processo de endurecimento, ou seja, a variação desta superfície durante os processos de deformação plástica.

É de importância em plasticidade a representação da superfície de escoamento no espaço de tensões. Cada superfície de escoamento corresponde a valores fixos de  $\underline{\underline{s}} = \bar{\underline{\underline{s}}}$  e  $\underline{\underline{k}} = \bar{\underline{\underline{k}}}$ , representa a

projeção de (1.3.3) no subespaço de tensões

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\bar{\varepsilon}}, \underline{\bar{k}}) = 0 \quad (1.3.4)$$

A medida que os valores de  $\underline{\bar{\varepsilon}}$  e  $\underline{\bar{k}}$  mudam a equação (1.3.4) representa diferentes superfícies que, segundo foi exposto anteriormente, modelam o processo de endurecimento.

Assume-se ainda a existência de um estado virgem do material, isto é, antes da aplicação das cargas tem-se  $\underline{\bar{\varepsilon}} = 0$  e  $\underline{\bar{k}} = \underline{k}_0$ .

A superfície representada pela equação (1.3.4) será fechada, de tal modo que os pontos internos ( $f(\underline{\sigma}, \underline{\bar{\varepsilon}}, \underline{\bar{k}}) < 0$ ) correspondem a estados elásticos de tensão, pontos sobre a superfície ( $f(\underline{\sigma}, \underline{\bar{\varepsilon}}, \underline{\bar{k}}) = 0$ ) correspondem a estados plásticos de tensão e pontos externos à superfície correspondem a estados de tensões inacessíveis.

Neste trabalho emprega-se, como é usual, a expressão superfície de carga para especificar as superfícies de escoamento após a inicial.

Durante o processo de deformação elastoplástica, as componentes do tensor de tensões  $\underline{\sigma}$  nos pontos que estão sofrendo deformações permanentes devem permanecer sobre a superfície de carga. Esta condição é assegurada, tomando-se a derivada total em relação ao tempo da expressão (1.3.3) e igualando-se a zero:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\bar{\varepsilon}}} \dot{\underline{\bar{\varepsilon}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\bar{k}}} \dot{\underline{\bar{k}}} = 0 \quad (1.3.5)$$

sendo que

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}, \text{ etc} \quad (1.3.6)$$

Como o material apresenta diferentes comportamentos para o processo elástico (PE), processo plástico (PP) e processo de descarga (PD), deve-se distinguí-los para que se possa aplicar as respectivas equações.

No caso uniaxial, é fácil de caracterizar intuitivamen-

te os processos de carga e descarga. No caso multiaxial, ao contrário, podemos ter situações em que algumas componentes de  $\underline{\dot{\sigma}}$  aumentam enquanto que outras diminuem. Assim, o conceito de carga e descarga deve ser rigorosamente estabelecido usando a superfície de carga. Se num dado instante temos  $f=0$  (estado elástico) e  $\dot{f} < 0$ , naturalmente no instante seguinte ter-se-á  $f < 0$  (estado elástico), caracterizando assim uma descarga. Durante a descarga tem-se que  $\underline{\dot{\epsilon}}^P = 0$ , de modo que  $\underline{\dot{\epsilon}} = 0$  e  $\underline{\dot{k}} = 0$ . Assim a descarga é caracterizada por

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{\sigma}} < 0 \quad (\text{PD}) \quad (1.3.7)$$

Tem-se carga quando

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{\sigma}} > 0 \quad (\text{PP}) \quad (1.3.8)$$

A situação em que

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{\sigma}} = 0 \quad (\text{PP}) \quad (1.3.9)$$

é denominada carga neutra.

No espaço de tensões, onde  $\partial f / \partial \underline{\sigma}$  representa o vetor gradiente normal à superfície  $f=0$ , os três casos têm uma representação geométrica simples e útil, conforme Fig. 1.3.1.

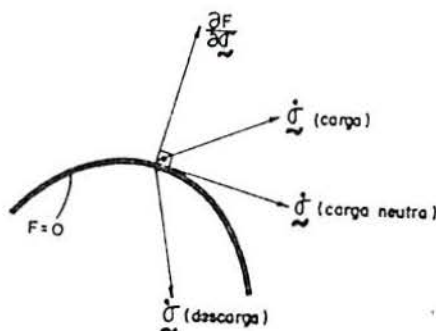


Fig. 1.3.1. - Representação geométrica dos processos de carga, descarga e carga neutra.

Através de resultados experimentais [8] e apoiados pelas teorias microestruturais, provou-se que a deformação plástica não altera o volume:

$$\text{tr } \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P = \lambda \text{ tr } \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = 0 \quad (1.3.10)$$

#### 1.4. Critério de Escoamento

Para o caso multiaxial considera-se as nove componentes do tensor  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  existirão certas combinações desta componentes que produzirão escoamento. Os dois critérios mais conhecidos para a determinação do escoamento de metais dúteis são o critério de TRESCA e o critério de MISES.

Baseado em resultados experimentais, TRESCA em 1864 lançou a hipótese onde afirmava que as deformações plásticas são produzidas por tensões de corte. TRESCA define a função de escoamento, para o caso multiaxial, com seis equações que formam um prisma hexagonal reto, no espaço de tensões principais.

A fim de evitar o inconveniente apresentado pelo critério de TRESCA que necessita de seis funções para sua definição, MISES, em 1913, propôs aproximá-lo através de uma função única. O mais simples foi utilizar o cilindro circunscrito ao prisma de TRESCA. Assim, o critério de MISES pode ser escrito

$$\sqrt{3J_2} = \sigma_e \quad (1.4.1)$$

onde  $\sigma_e$  é a tensão de escoamento variável no tempo do material e  $J_2$  é o segundo invariante do tensor de tensões

$$J_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{S}} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (1.4.2)$$

sendo que o tensor de tensões desviatórias  $\underline{\underline{S}}$ , é definido por

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ -\tau_{yx} & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix} \quad (1.4.3)$$

substituindo a expressão (1.4.3) em (1.4.2), fica-se com



$$J_2 = \frac{1}{3} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)] \quad (1.4.4)$$

que é o critério de MISES para o caso tridimensional.

O critério de MISES geralmente se aproxima mais dos resultados experimentais que o de TRESCA [8] e além disso, é mais fácil de aplicar, uma vez que não é necessário conhecer-se as tensões principais.

Devido as vantagens do critério de MISES, este foi adotado no presente trabalho.

Particularizando a expressão (1.4.4) para o estado plano de tensões, pode-se escrever

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.4.5)$$

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_e^2 \quad (1.4.6)$$

O critério de MISES pode também ser escrito em função das tensões principais,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , como:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = 0 \quad (1.4.7)$$

Representando a equação (1.4.7) no plano das tensões principais, tem-se

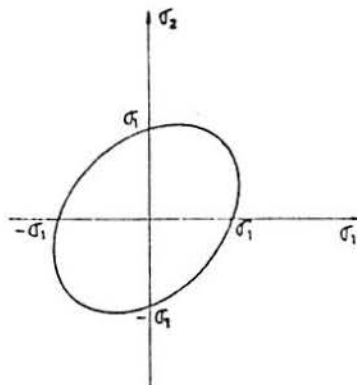


Figura 1.4.1. - Função de escoamento de MISES.

Como foi exposto anteriormente, após o início do escoamento

mento surgirão deformações plásticas ( $\underline{\underline{\epsilon}}_p$ ) e, conseqüentemente, mudanças nos valores de  $\underline{\underline{\epsilon}}$  da (1.3.2). Com isto a forma da superfície se altera. Apresenta-se a seguir dois tipos de endurecimento.

#### 1.4.1. Endurecimento isótopo

No endurecimento isótopo a superfície muda de tamanho sem mudar a forma. O nome isótopo deve-se exatamente a forma constante da superfície. A figura 1.4.1.1. mostra este critério.

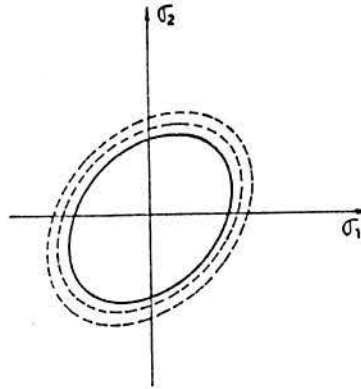


Figura 1.4.1.1. - Endurecimento isótopo.

O critério de escoamento de MISES, para o endurecimento isótopo, a tensão de escoamento  $\sigma_e$  é definida como

$$\sigma_e = \sigma_1 + \dot{k} \quad (1.4.1.2)$$

onde  $\dot{k}$  é um escalar e  $\sigma_1$  é primeira tensão de escoamento.

#### 1.4.2. Endurecimento cinemático

No endurecimento cinemático, há um movimento rígido da superfície de escoamento no espaço de tensões [17]. A expressão correspondente a este tipo de endurecimento é,

$$f(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\alpha}}) = 0 \quad (1.4.2.1.)$$

onde  $\underline{\underline{\alpha}} \in \underline{\underline{s}}$  e é definido por

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}} = c \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p \quad (1.4.2.2.)$$

A figura 1.4.2.1. representa este tipo de endurecimento.

Neste trabalho foi usado o critério de *endurecimento isotrópico* que é o mais comumente encontrado na literatura e o de estudo matematicamente mais fácil. Como inconveniente, ele não leva em conta o efeito Bauschinger, reduzindo assim, a validade dos resultados obtidos, apenas aos casos em que tal efeito é pouco importante.

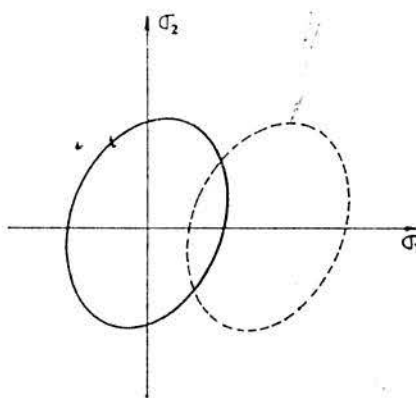


Figura 1.4.2.1. - Endurecimento cinemático.

### 1.5. Normalidade

Uma relação entre tensões e deformações plásticas pode ser escrita

$$\dot{\tilde{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (1.5.1)$$

onde  $\lambda$  é um escalar não negativo e  $g$  é uma função escalar denominada potencial plástico. Para metais, os resultados experimentais indicam que se cumpre o critério da normalidade, isto é,

$$g \equiv f \quad (1.5.2)$$

A expressão (1.5.1), fica

$$\dot{\tilde{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (1.5.3)$$

Este princípio indica que as componentes da taxa de deformação plástica são proporcionais às correspondentes componentes do gradiente da função de escoamento no espaço de tensões  $\sigma$ .

## CAPÍTULO 2

### A RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA

#### 2.1. Introdução

Geralmente, as propriedades mecânicas de um certo material são fornecidas através de um diagrama de tensão-deformação (ver Fig. 1.2.1), extraído de um ensaio de tração simples. No entanto, quando se trabalha especificamente com a *teoria clássica de flexão de placas*, o controle do processo de plastificação é realizado a partir de uma relação momento-curvatura, pois são estas as variáveis que a teoria relaciona.

O objetivo deste capítulo é estabelecer expressões que relacionem o diagrama tensão-deformação (mais facilmente determinado experimentalmente) com o diagrama momento-curvatura; dentro de hipóteses pré-estabelecidas.

#### 2.2. A Relação Tensão-Deformação

Para modelar o processo de endurecimento o estado bi ou triaxial é comparado ao estado uniaxial de tensões através da chamada tensão equivalente. Esta tensão, por sua vez, é comparada as tensões estabelecidas no diagrama tensão-deformação e determina-se se o ponto está no regime elástico ou elastoplástico. Assim, mesmo no estado multiaxial de tensões o diagrama tensão-deformação é fundamental em processos plásticos.

Na prática, o diagrama tensão-deformação é aproximado por uma poligonal constituída de um certo número de retas, conforme pode-se ver na Fig. 2.2.1.

Na figura 2.2.1, as tensões  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_5$  e deformações



$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_5$  representam tensões e deformações de escoamento correspondentes aos vértices das retas 1, 2, ..., 5, respectivamente. A inclinação, com relação a horizontal, das retas que compõem a poligonal é definida por  $H'_1, H'_2, \dots, H'_5$ . Para o caso particular da primeira reta,  $H'_1$  é igual ao módulo de deformação longitudinal  $E$ .

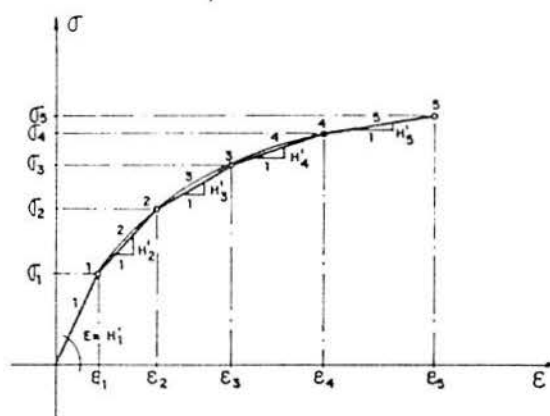


Fig. 2.2.1 - Relação tensão-deformação aproximada por uma poligonal com cinco retas.

### 2.3. A Relação Momento-Curvatura

Na determinação da relação momento-curvatura foi aceita a hipótese de deformações infinitesimais, tornando portanto, a análise geometricamente linear.

A distribuição de deformações é assumida de tal maneira que, uma seção inicialmente plana e perpendicular ao eixo geométrico da barra, permaneça plana e perpendicular na configuração deformada (hipótese de Euler-Bernoulli). Isto implica em desprezar o efeito das deformações por corte, limitando os resultados da análise à barras cuja relação altura da seção transversal pelo vão seja maior ou igual a dez. Comprova-se experimentalmente que estas hipóteses conduzem a resultados satisfatórios para metais dúcteis [15].

Supõe-se ainda que o material seja *isótropo*, ou seja, possua características mecânicas iguais em todos os pontos do corpo, e *homogêneo*, ou seja, não se admite a possibilidade de vazios e fissuras.

Para a obtenção do diagrama momento-curvatura seguiu-se um procedimento análogo ao usado na determinação da relação tensão-deformação.

Seja uma barra de comprimento  $l$  e seção transversal de

altura  $t$  e largura  $b$  unitária. Aplicando-se momentos  $M(t)$  nas extremidades da barra (em seu plano de simetria longitudinal), que cresçam ao longo do tempo, surgirão tensões normais na direção  $x$ ,  $\sigma$ , que equilibrarão os momentos fletores  $M(t)$  em todas as seções da barra (ver Fig. 2.3.1). Tais tensões formam um estado de tensões uniaxial (flexão pura) correspondente ao definido no item 1.2. Assim, a barra se deformará de modo que aparecerão curvaturas somente em uma direção. Posteriormente, tal situação será tomada como aproximação para placas.

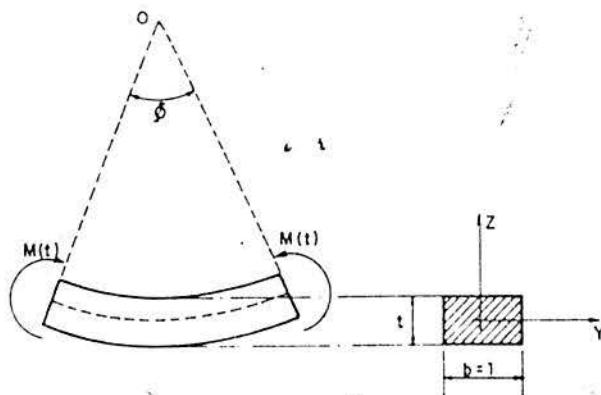


Fig. 2.3.1.- Flexão pura em uma barra prismática.

Supondo que a barra tenha uma relação tensão-deformação estabelecida no item 2.2. (Fig. 2.2.1), pode-se acompanhar o processo de carga em uma determinada seção da barra e o respectivo aumento de tensões e deformações, através das figuras 2.3.2 e 2.3.3.

No início do processo de carga, as tensões e deformações estão ainda no regime elástico ( $\sigma \leq \sigma_1$  e  $\epsilon \leq \epsilon_1$ ), ver figuras 2.3.1a e 2.3.2.a. Portanto, a relação entre tensão-deformação é linear e dada pela expressão (1.2.5). A relação entre deformação  $\epsilon$  e curvatura  $\chi$  é dada [14] por

$$\chi = \frac{\epsilon'}{z} \quad (2.3.1)$$

sendo  $z$  medido a partir do eixo geométrico da barra até a fibra com deformação  $\epsilon'$ .

Para o caso de  $z$  ser igual à  $t/2$ , tem-se

$$\chi = \frac{\epsilon'}{z} = \frac{2\epsilon}{t} \quad (2.3.2)$$

O momento de flexão é calculado através da integração

das tensões  $\sigma$

$$M = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma(z) z dz \quad (2.3.3)$$

que devido a forma simétrica da seção, torna-se

$$M = 2 \int_0^{t/2} \sigma(z) z dz \quad (2.3.4)$$

Efetuada a integração em (2.3.4), obtém-se

$$M = \sigma \frac{t^2}{6} \quad (2.3.5)$$

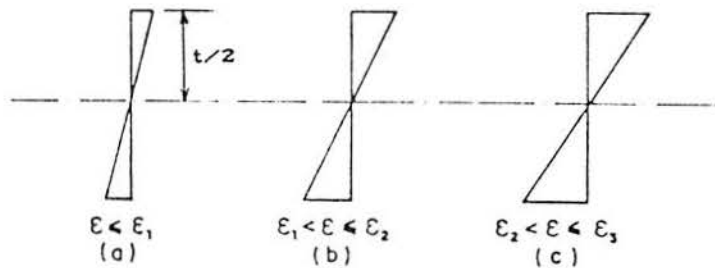


Fig. 2.3.2 - Deformações em uma seção da barra.

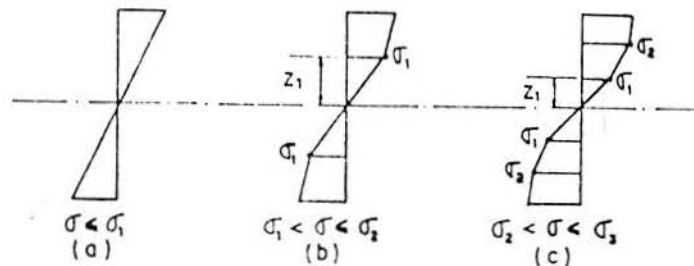


Fig. 2.3.3 - Tensões em uma seção da barra.

Quando as tensões e deformações ultrapassam o limite elástico linear, definido no diagrama por  $\sigma_1$  e  $\epsilon_1$ , assumem a configuração mostrada pelas figuras 2.3.2b e 2.3.3b. Vê-se

claramente pela Fig. 2.3.2b que a linearidade entre deformação e curvatura ainda é válida, devido à hipótese da seção normal, ou seja, vale a expressão (2.3.2). Nesta fase do carregamento, a região elástica delimitada pela distância  $z_1$  é expressiva para o cálculo do momento fletor.

Para facilitar o cálculo das integrais, decompõe-se a configuração de tensões em figuras geométricas mais simples, con-



forme mostra a Fig. 2.3.4.

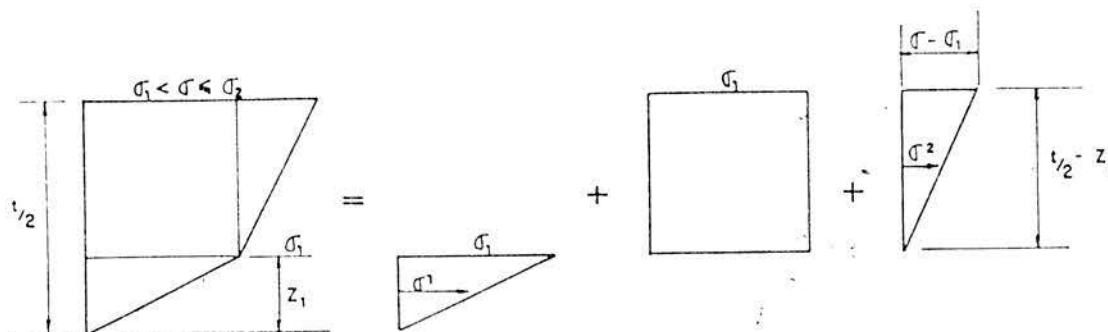


Fig. 2.3.4 - Decomposição das tensões para a obtenção do momento.

Assim a expressão (2.3.4) torna-se

$$M = 2 \int_0^{z_1} \sigma^1 z dz + 2 \int_{z_1}^{t/2} \sigma_1 z dz + 2 \int_{z_1}^{t/2} \sigma^2 z dz \quad (2.3.6)$$

onde  $\sigma^1$  varia linearmente de zero à  $\sigma_1$  e  $\sigma^2$  varia linearmente de zero à  $(\sigma - \sigma_1)$ , conforme figura acima. Integrando a expressão acima obtém-se

$$M = \frac{2}{3} \sigma_1 z_1^2 + \sigma_1 \left( \frac{t^2}{4} - z_1^2 \right) + \frac{1}{3} (\sigma - \sigma_1) \left( \frac{t}{2} - z_1 \right) (t + z_1) \quad (2.3.7)$$

onde a tensão  $\sigma$  é expressa (Fig. 2.2.1) por

$$\sigma = \sigma_1 + H_2' (\epsilon - \epsilon_1) \quad (2.3.8)$$

Lembrando as expressões (2.3.1) e (2.3.2), deduz-se o valor da distância a  $z_1$ :

$$z_1 = \frac{\epsilon_1}{\alpha} = \frac{\epsilon_1 t}{2\epsilon} \quad (2.3.9)$$

onde  $\epsilon$  é a deformação específica correspondente a tensão  $\sigma$ .

Supondo que se tenha um nível de carga que resulte em uma tensão situada entre  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  (ver Fig. 2.3.2c e 2.3.3c), o cálculo do momento fletor é feito de maneira análoga a situação anterior, ou seja, através da decomposição da configuração das tensões. Assim, pode-se escrever

$$M = 2 \int_0^{z_1} \sigma^1 z dz + 2 \int_{z_1}^{z_2} \sigma_1 z dz + 2 \int_{z_1}^{z_2} \sigma^2 z dz + 2 \int_{z_2}^{t/2} \sigma_z z dz + 2 \int_{z_2}^{t/2} \sigma^3 z dz \quad (2.3.10)$$

onde  $\sigma^1$  varia de 0 à  $\sigma_1$ ,  $\sigma^2$  varia de 0 à  $(\sigma_z - \sigma_1)$  e  $\sigma^3$  varia de 0 à  $(\sigma - \sigma_z)$ , como no caso anterior. Integrando, tem-se

$$M = \left\{ \frac{2}{3} \sigma_1 z_1^2 \right\} + \left\{ \sigma_1 (z_2^2 - z_1^2) + \frac{1}{3} (\sigma_z - \sigma_1) (z_2 - z_1) (2z_2 + z_1) \right\} \\ + \left\{ \sigma_z \left( \frac{t^2}{4} - z_2^2 \right) + \frac{1}{3} (\sigma - \sigma_z) \left( \frac{t}{2} - z_2 \right) (t + z_2) \right\} \quad (2.3.11)$$

onde  $\sigma = \sigma_z + H'_a (\varepsilon - \varepsilon_z)$  (2.3.12)

$z_1$  e  $z_2$  - são distâncias do eixo geométrico da barra até as tensões de escoamento  $\sigma_1$  e  $\sigma_z$ , respectivamente.

Surge agora o problema da determinação da distância  $z_2$ . O procedimento utilizado foi simples. No diagrama tensão-deformação prolongou-se todas as retas anteriores à reta 3 até encontrar a reta vertical para a qual tem-se a deformação  $\varepsilon$ . Nos pontos de intersecção dos prolongamentos das retas da poligonal com a reta  $\varepsilon$  pode-se imaginar tensões fictícias, denominadas  $\bar{\sigma}_1$  e  $\bar{\sigma}_2$ , as quais correspondem sempre a mesma deformação  $\varepsilon$  (ver Fig. 2.3.5).

Na configuração das tensões ao longo da altura da seção da barra, o procedimento adotado para o diagrama tensão-deformação tem como conseqüência o prolongamento das retas equivalentes até a fibra extrema onde corresponde a deformação real  $\varepsilon$ . Isto conduz ao esquema indicado na figura 2.3.6.

Por semelhança de triângulos calcula-se  $z_1$ , pois

$$\frac{z_1}{\sigma_1} = \frac{t/2}{\bar{\sigma}_1} \quad (2.3.13)$$

mas como pelo diagrama mostrado pela Fig. 2.3.5, é válido dizer que

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \quad (2.3.14)$$

e

$$\bar{\sigma}_1 = E \epsilon \tag{2.3.15}$$

de onde se chega a

$$z_1 = \frac{\epsilon_1 t}{2\epsilon} \tag{2.3.16}$$

que confirma a expressão (2.3.9).

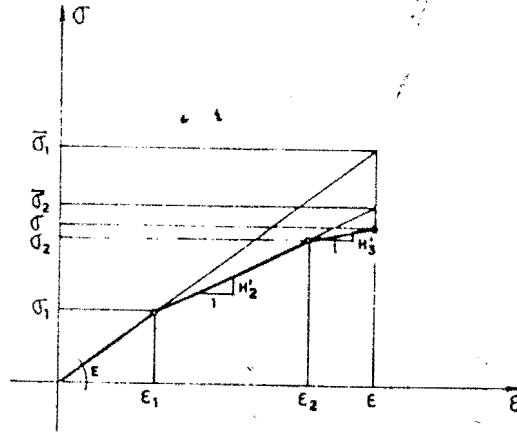


Fig. 2.3.5 - Procedimento adotado para calcular as distâncias  $z_2$  no diagrama tensão-deformação.

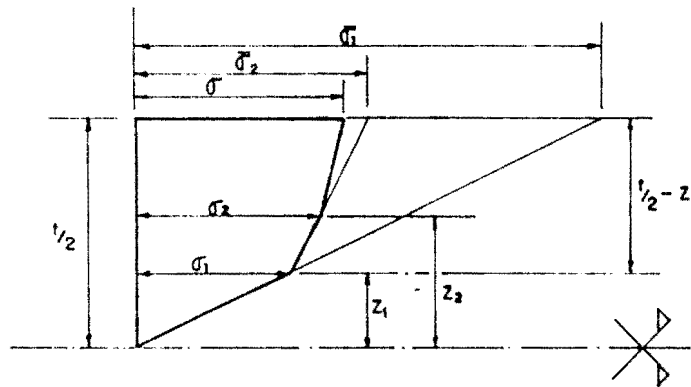


Fig. 2.3.6 - Procedimento adotado para calcular  $z_2$  na configuração de tensões.

Empregando o mesmo procedimento para o cálculo de  $z_2$ , vê-se através da figura 2.3.6. que

$$\frac{\bar{\sigma}_2 - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{t/2 - z_1}{z_2 - z_1} \tag{2.3.17}$$

donde

$$z_2 = \frac{(t/2 - z_1)(\sigma_2 - \sigma_1) + z_1(\bar{\sigma}_2 - \sigma_1)}{(\bar{\sigma}_2 - \sigma_1)} \tag{2.3.18}$$

A partir da relação tensão-deformação definem-se

$$\langle \sigma_2 - \sigma_1 \rangle = H'_2 (\epsilon - \epsilon_1) \quad (2.3.19)$$

$$\langle \sigma_2 - \sigma_1 \rangle = H'_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) \quad (2.3.20)$$

Substituindo (2.3.19), (2.3.20) e (2.3.21) em (2.3.18), obtém-se

$$z_2 = \frac{(t/2 - z_1)(\epsilon_2 - \epsilon_1) + z_1(\epsilon - \epsilon_1)}{(\epsilon - \epsilon_1)} \quad (2.3.22)$$

A equação (2.3.11) é composta por três termos. O primeiro termo entre colchetes representa a contribuição da região elástica no valor do momento, enquanto que o segundo e o terceiro termos entre colchetes representam a contribuição das tensões na região intermediária e mais próxima às fibras externas, respectivamente. Generalizando a expressão (2.3.11), para um nível de carga que resulte em uma tensão sobre uma reta genérica N, basta somar a contribuição da região intermediária, isto é,

$$M = \frac{2}{3} \sigma_1 z_1^2 + \sum_{i=2}^{N-1} \left[ \sigma_{i-1} (z_i^2 - z_{i-1}^2) + \frac{1}{3} (\sigma_i - \sigma_{i-1}) (z_i - z_{i-1}) \right. \\ \left. (2z_i + z_{i-1}) \right] + \sigma_{N-1} \left( \frac{t^2}{4} - z_{N-1}^2 \right) + \frac{1}{3} (\sigma - \sigma_{N-1}) \left( \frac{t}{2} - z_{N-1} \right) (t + z_{N-1}) \quad (2.3.23)$$

onde

$$\sigma = \sigma_N + H'_N (\epsilon - \epsilon_{N-1}) \quad (2.3.24)$$

$$z_i = \frac{(t/2 - z_{i-1})(\epsilon_i - \epsilon_{i-1}) + z_{i-1}(\epsilon - \epsilon_{i-1})}{(\epsilon - \epsilon_{i-1})} \quad (2.3.25)$$

$z_i$  é a distância do eixo geométrico da barra até a tensão de escoamento  $i$ .

Através da equação (2.3.23) observa-se que o momento fletor  $M$  é função das distâncias  $z_i$ , da espessura  $t$  da barra e da tensão  $\sigma$ . Examinando as expressões (2.3.24) e (2.3.25) vê-se que dependem da deformação  $\epsilon$ , e por consequência, da curvatura  $\chi$  (ver equação (2.3.2)).

Através da equação (2.3.2) nota-se que a relação entre as variáveis  $\epsilon$  e  $\chi$  é sempre linear.

Percebe-se entretanto, que ao substituir a equação

(2.3.2) em (2.3.25) esta se torna não-linear em  $\chi$ , pois  $z_{i-1}$  também depende de  $\chi$ . Esta não-linearidade pode ser melhor visualizada no item 2.4.

Novamente é conveniente aproximar a relação momento-curvatura por meio de poligonal, como já foi feito no diagrama tensão-deformação. Este procedimento facilita o controle dos pontos de integração e torna mais simples o cálculo do endurecimento.

A figura 2.3.7 mostra a aproximação do diagrama momento-curvatura por meio de retas. As inclinações destas retas, chamadas de  $HM'_i$ , são dadas por

$$HM'_i = \frac{\Delta M_i}{\Delta \chi_i} \quad (2.3.26)$$

sendo

$$\Delta M_i = M_i - M_{i-1} \quad (2.3.27)$$

$$\Delta \chi_i = \chi_i - \chi_{i-1} \quad (2.3.28)$$

e para

$$HM'_i = EI \quad (2.3.29)$$

onde  $I$  é o momento de inércia axial da seção transversal da barra.

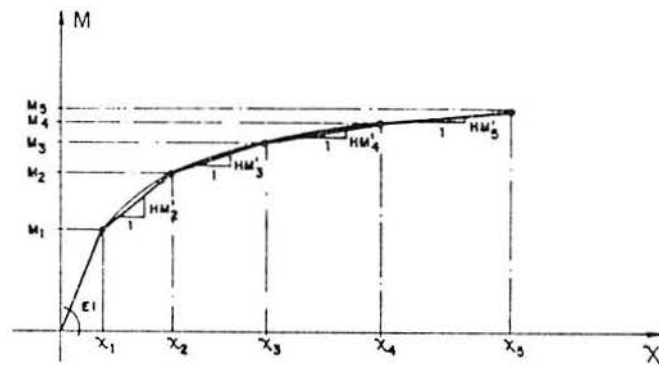


Fig. 2.3.7 - Relação momento-curvatura aproximada por uma poligonal.

As curvaturas  $\chi_1, \dots, \chi_5$  são obtidas substituindo a deformação  $\varepsilon$  na expressão (2.3.2), pelas deformações de escoamento  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$ . Para o cálculo dos momentos fletores  $M_1, \dots, M_5$  emprega-se a expressão (2.3.23) de maneira análoga à sua dedução. Por exemplo, para o cálculo do primeiro momento fletor de escoamento



(2.3.5) fazendo  $z_1$  igual a  $t/2$ . Para a obtenção de  $M_2$ , que corresponde a uma deformação igual a  $\epsilon_2$  na figura 2.3.2b, tem-se novamente a expressão (2.3.23) reduzida a expressão (2.3.11), e assim por diante, até que se esteja sobre a reta  $N=4$ .

Assim, as equações (2.3.23) à (2.3.29) definem, de maneira completa, dentro das hipóteses estabelecidas, as relações existentes entre os diagramas de tensão-deformação e de momento-curvatura.

Examinando a equação (2.3.23) distingue-se claramente que o primeiro termo é a contribuição da região elástica, no valor do momento fletor. O último termo existirá a partir do instante em que as deformações ultrapassarem o limite elástico (sobre a segunda reta do diagrama tensão-deformação); enquanto que o termo central representa a contribuição da região intermediária, e só existindo quando as deformações estiverem sobre a terceira reta.

Uma outra conclusão que se pode chegar, observando a expressão (2.3.23), é que para um determinado material, caracterizado por uma certa curva tensão-deformação, não corresponde apenas uma curva momento-curvatura, mas sim uma família de curvas, sendo que a cada curva corresponde uma altura  $t$  da barra. A Fig. 2.3.8 mostra o que foi mencionado.

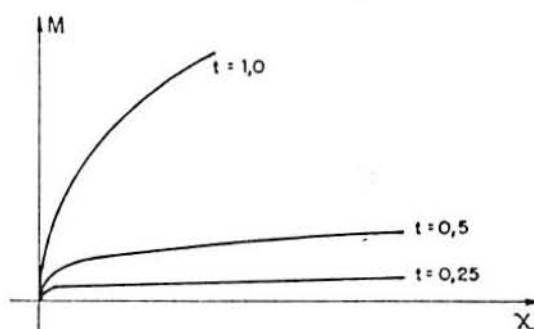


Fig. 2.3.8 - Curvas momento-curvatura para diversas alturas  $t$ .

Obviamente, a aproximação da relação momento-curvatura depende diretamente da aproximação tomada na relação tensão-deformação. Testes realizados com várias aproximações da relação tensão-deformação, de um determinado material, mostraram que a aproximação obtida no diagrama momento-curvatura é sensível a variações bruscas das inclinações das retas usadas na poligonal. Isto pode ser melhor visualizado na figura 2.3.9. A Fig.2.3.9(a)

mostra o diagrama momento-curvatura obtido a partir da relação tensão-deformação aproximada por uma poligonal formada por três retas. Na Fig. 2.3.9(b) vê-se a mesma relação aproximada por quatro retas e a relação momento-curvatura resultante. Nota-se claramente que a aproximação com quatro retas acompanha melhor a curva momento-curvatura.

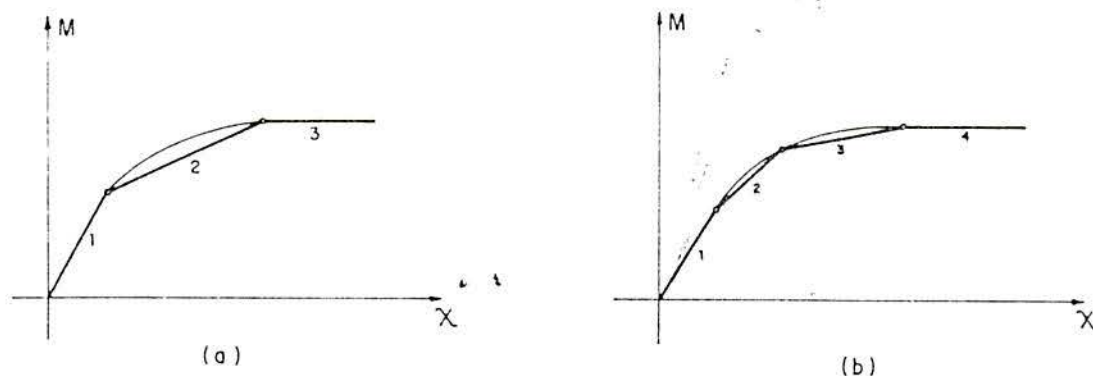


Fig. 2.3.9 - Relação momento-curvatura resultante de um diagrama tensão-deformação constituído (a) por TRÊS retas e (b) por QUATRO retas.

A partir desta constatação conclui-se que, quando for realizada uma aproximação do diagrama tensão-deformação por apenas duas retas, resultará uma aproximação grosseira do diagrama momento-curvatura. Como o controle de plastificação é feito através do diagrama momento-curvatura, resolveu-se então estudar este caso particular de maneira mais detalhada.

#### 2.4. A Relação Momento-Curvatura a partir de uma Relação Tensão-Deformação Aproximada por Duas Retas

Nesta situação particular, a expressão entre colchetes da equação (2.3.23) torna-se zero, pois  $N=2$ , confirmando portanto a equação (2.3.7).

Substituindo a equação (2.3.9) em (2.3.7) têm-se,

$$M = \frac{2}{3} \sigma_1 \left[ \frac{\epsilon_1}{\chi} \right]^2 + \sigma_1 \left[ \frac{t^2}{4} - \left[ \frac{\epsilon_1}{\chi} \right]^2 \right] + \frac{1}{3} (\sigma - \sigma_1) \left[ \frac{t}{2} - \frac{\epsilon_1}{\chi} \right] \left[ t + \frac{\epsilon_1}{\chi} \right] \quad (2.4.1)$$

onde a tensão  $\sigma$  pode ser expressa em função de  $\chi$  através da equação (2.3.8) e (2.3.2) tem-se

$$\sigma = \sigma_1 + H'_2 \left[ \frac{\chi t}{2} - \varepsilon_1 \right] \quad (2.4.2)$$

que ao substituir-se na equação (2.3.28), resulta

$$M = \frac{2}{3} \sigma_1 \left( \frac{\varepsilon_1}{\chi} \right)^2 + \sigma_1 \left[ \frac{t}{4} - \left( \frac{\varepsilon_1}{\chi} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} H'_2 \left( \frac{\chi t}{2} - \varepsilon_1 \right) \left( \frac{t}{2} - \frac{\varepsilon_1}{\chi} \right) \left( t - \frac{\varepsilon_1}{\chi} \right) \quad (2.4.3)$$

Esta expressão relaciona, para o caso de duas retas, o momento  $M$  e a curvatura  $\chi$ . Pode-se notar claramente agora, a não linearidade entre as variáveis  $M$  e  $\chi$ .

Graficando-se a equação (2.4.3), obtém-se uma curva como mostra a figura 2.4.1.

Para melhorar os resultados, optou-se por aproximar o diagrama momento-curvatura por uma poligonal com três retas, conforme indica a Fig. 2.4.1.

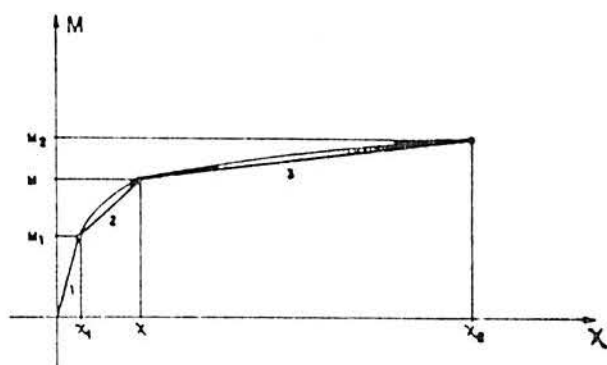


Fig. 2.4.1 - A relação momento-curvatura aproximada por três retas.

Surge agora a pergunta: qual a posição do ponto intermediário  $(\chi, M)$ , para que se consiga a melhor aproximação possível da curva (2.4.3) ?

Derivou-se a equação (2.4.3) em relação à curvatura e obteve-se

$$\frac{dM}{d\chi} = -\frac{4}{3} \sigma_1 \frac{\varepsilon_1}{\chi^3} + 2 \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{\chi^3} + \frac{H'_2 t}{12} + \frac{t \varepsilon_1 H'_2}{3 \chi^2} + 2 \frac{\varepsilon_1 H'_2}{3 \chi^3}$$

$$(2.4.4)$$



Plotando o valor do momento em função da inclinação da curva, equação (2.4.4), verifica-se que para valores superiores à  $1,5M_1$  a curva comporta-se de maneira aproximadamente linear (de  $1,5M_1$  à  $M_2$ , existe uma variação média da tangente na ordem de 5%), ver figura 2.4.2.

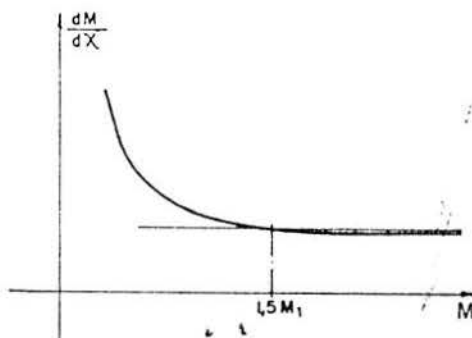


Fig. 2.4.2- Determinação do ponto intermediário  $(\chi, M)$ .

Lembrando que  $M_1$  é calculado a partir da equação (2.3.5) para  $\sigma = \sigma_1$ , e a curvatura  $\chi$ , que corresponde a este momento, é determinada pela equação (2.4.3).

Percebe-se também que o coeficiente 1,5 que multiplica o primeiro momento fletor de escoamento  $M_1$ , coincide com o *fator de forma* para uma seção retangular de um material cujo comportamento assemelhe-se ao elastoplástico perfeito. O fator de forma de uma determinada seção é definido como a razão entre o momento fletor calculado a partir de uma configuração linear das tensões, onde a tensão na fibra extrema da altura da seção é igual a primeira tensão de escoamento, denominado de  $M^o$ ; e o momento fletor que corresponde a seção completamente plastificada, denominado de  $M^P$ , ou seja

$$s = \frac{M^o}{M^P} \quad (2.4.5)$$

onde

$$M^o = \frac{\sigma_1 t^2}{6} \quad (2.4.6)$$

e

$$M^P = \frac{\sigma_1 t^2}{4} \quad (2.4.7)$$

neste caso particular.

A justificativa para tal coincidência está baseada no tipo de aproximação tomada na relação tensão-deformação. Alguns

materiais, como alguns tipos de alumínio por exemplo, tem uma curva tensão-deformação onde a região não-linear é pequena e posteriormente a curva torna-se praticamente uma reta, cuja inclinação é pequena comparada com a região linear, formando assim um "patamar".

Devido a estas características, o comportamento das tensões, depois de uma certa fase do carregamento onde a região elástica é muito pequena em presença da região elastoplástica, é semelhante ao caso do material elastoplástico perfeito. Logo, o coeficiente 1,5 usado na determinação do momento intermediário  $M$  será tanto mais preciso quanto mais próximo estiver a aproximação do diagrama tensão-deformação da aproximação tomada como referência.

Percebe-se também que a equação (2.4.6) é igual com a equação que define o primeiro momento de escoamento,  $M_1$ .

Portanto, para o caso específico de um diagrama tensão-deformação aproximado por duas retas, resultará um diagrama momento-curvatura constituído por três retas.

## 2.5. Relação Momento-Curvatura para um Material Elastoplástico Perfeito

É comum na literatura a formulação plástica especificamente para materiais cujo comportamento assemelhe-se ao elastoplástico perfeito.

Para representar esta situação particular, basta tomar  $H'_2$  igual a zero na equação (2.4.3) e obtém-se

$$M = \frac{2}{3} \sigma_1 \left[ \frac{\epsilon_1}{\chi} \right]^2 + \sigma_1 \left[ \frac{t^2}{4} - \left[ \frac{\epsilon_1}{\chi} \right]^2 \right] \quad (2.5.1)$$

A figura 2.5.1 mostra a relação tensão-deformação e a correspondente relação momento-curvatura para um material elastoplástico perfeito.

Nota-se pela figura 2.5.1 que a curva é assintótica para a reta  $M = 1,5M_1$ , ou seja, para um valor de momento fletor que plastifique completamente a seção (ver equação 2.4.7).

É importante salientar que alguns autores trabalham di-

retamente com um diagrama momento-curvatura constituído de duas retas, sendo a segunda reta horizontal, para representar um material elastoplástico perfeito. Neste trabalho, optou-se por uma melhor aproximação deste diagrama.

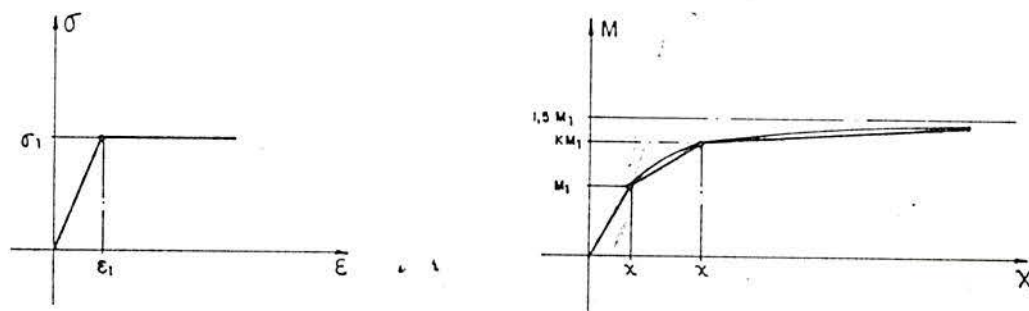


Fig.2.5.1 - Relação tensão-deformação e a correspondente relação momento-curvatura para um material elastoplástico perfeito.

Assim, novamente aproximou-se a relação momento-curvatura através de três retas. A ordenada  $M$  do ponto intermediário é dada pela equação abaixo

$$M = K M_1 \quad (2.5.2)$$

onde  $K$  é um número que varia de 1 a 1,5.

## CAPÍTULO 3

### PLACAS

#### 3.1. Introdução

As hipóteses assumidas pela teoria clássica de KIRCHHOFF para placas finas, estabelecem que as placas sejam representadas por sua superfície média. Isto implica que o estado de tensões seja definido em termos de tensões generalizadas, isto é, os momentos  $M_x$  e  $M_y$  e o momento torçor  $M_{xy}$ .

Em plasticidade, as tensões não são distribuídas linearmente ao longo da espessura da placa. Uma formulação feita através da teoria de elementos finitos requer uma integração tanto na espessura da placa, como também sobre o domínio do elemento. É evidente que um considerável esforço computacional poderá ser evitado se a integração na espessura puder ser suprimida, colocando a formulação em termos de resultantes de tensões. Para tal, é necessário expressar as condições de escoamento em termos de momentos ao invés de tensões.

Alternativamente, pode-se representar placas através de lâminas de espessura infinitesimais, distribuídas na espessura e carregadas em seu plano. Ter-se-ia agora, uma formulação em termos de tensões, já que cada lâmina está no estado plano de tensões (ver Fig. 3.1.1).

Pela análise laminar, consegue-se acompanhar melhor a configuração de tensões durante o processo de carga, pois a placa é discretizada na espessura. Este tipo de análise é mais demorada computacionalmente que a análise em termos de resultantes de tensões, devido ao maior número de pontos de integração usados para representar as lâminas.

Este capítulo propõe-se a formular as duas teorias, des-



tacar as simplificações adotadas para posteriormente compará-las entre si através de exemplos (ver Capítulo 5).

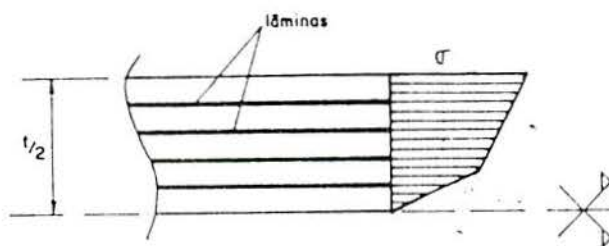


Fig. 3.1.1. - A consideração de infinitas lâminas na placa caracterizando o estado plano de tensões.

### 3.2. Flexão de Placas - Noções Básicas

A hipótese de Euler-Bernoulli adaptada à placas transforma-se na hipótese das retas normais. Esta hipótese estabelece que retas normais à superfície média da placa permaneçam retas e normais à superfície na configuração deformada.

Quando a espessura da placa for menor ou igual à décima parte da menor dimensão da superfície média (PLACAS FINAS), podem ser desprezadas as tensões  $\sigma_z$  em relação à  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ .

Também é suposto que o carregamento seja sempre normal à superfície média da placa, portanto

$$\tau_{xz} = \tau_{zy} = 0 \quad (3.2.1)$$

As deformações da placa são definidas inteiramente pelos deslocamentos verticais transversais à superfície média [18], isto é

$$w = w(x, y) \quad \beta_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \beta_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.2.2)$$

onde  $w$  é o deslocamento vertical da superfície média da placa e  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  são rotações em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Assim, as deformações expressas em função de  $w$ , são

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.2.3)$$

sendo que

$$\chi_x = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \chi_y = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \chi_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.2.4)$$

são definidas como as curvaturas nas direções  $x$ ,  $y$  e  $xy$  respectivamente.

Reescrevendo as equações (3.3.3) em função da definição citada

$$\varepsilon_x = z \chi_x \quad \varepsilon_y = z \chi_y \quad \gamma_{xy} = 2z \chi_{xy} \quad (3.2.5)$$

ou em forma matricial

$$\underline{\varepsilon} = z \underline{\chi} \quad (3.2.6)$$

onde  $\underline{\varepsilon}$  e  $\underline{\chi}$  são vetores de deformações e curvaturas, respectivamente, definidos como

$$\underline{\varepsilon}^T = ( \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} ) \quad (3.2.7)$$

$$\underline{\chi}^T = ( \chi_x \quad \chi_y \quad 2\chi_{xy} ) \quad (3.2.8)$$

### 3.3. Formulação Laminar

A representação da placa por meio de lâminas é feita através de pontos de integração colocados ao longo da espessura. Neste trabalho usou-se cinco e sete pontos de integração, conforme indica a Fig. 3.3.1.

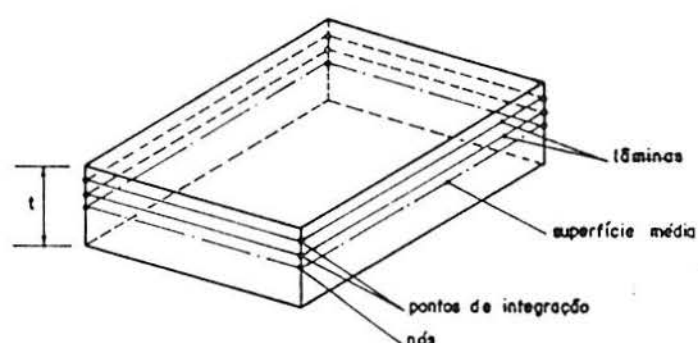


Fig. 3.3.1 - A discretização da espessura da placa por meio dos pontos de integração.

Devido a simetria da seção da placa, necessitar-se-ia de três pontos de integração, quando se usa cinco pontos por exemplo, para acompanhar a configuração de tensões na espessura. Entretanto, BARNARD e SHARMAN [1] demonstram que o ponto situado sobre a superfície média não tem influência sobre o processo, pois neste ponto ter-se-á sempre tensão nula. Em consequência, o processo de plastificação é realizado em dois pontos ao invés dos cinco pontos de integração tomados inicialmente.



Será ainda por meio destes pontos de integração que se determinará a matriz de rigidez do elemento finito utilizado para representar a placa (ver Capítulo 4).

A cada ponto de integração com mesma distância da superfície média corresponde uma lâmina. Associa-se a estes pontos de integração uma matriz constitutiva do estado plano de tensão (ver equação (3.3.1.15) e calcula-se a rigidez desta lâmina. Ao somar as rigidezes de todas as lâminas que compõem o elemento (duas ou três lâminas, no caso), tem-se a matriz de rigidez elástica do elemento.

Para carregamentos que resultem em tensões acima da primeira tensão de escoamento  $\sigma_1$  ou do primeiro momento  $M_1$ , dos diagramas tensão-deformação e momento-curvatura definidos no Capítulo 2, deve-se modificar a matriz constitutiva dos pontos de integração plastificados, pois a relação entre tensão e deformação não é mais constante.

Atualizar a matriz constitutiva tem como consequência, evidentemente, a atualização da matriz de rigidez da estrutura.

O item 3.3.1 desenvolve a matriz constitutiva elastoplástica através dos princípios básicos de plasticidade vistos no Capítulo 1.

### 3.3.1. Matriz Constitutiva Elastoplástica

A condição que impõe que os pontos já plastificados mantenham-se sobre a superfície de carga, expressa pela equação (1.3.5), pode ser reescrita da forma:

$$\dot{f} = \underline{a}^T \dot{\underline{\sigma}} - \lambda R = 0 \quad (3.3.1.1)$$

onde  $\dot{\underline{\sigma}}$  representa o vetor taxas de deformações, para o estado plano de tensões, escrito da seguinte forma

$$\dot{\underline{\sigma}}^T = \left\{ \dot{\sigma}_x \quad \dot{\sigma}_y \quad \dot{\tau}_{xy} \right\} \quad (3.3.1.2)$$

o vetor  $\underline{a}$  fica expresso como

$$\underline{a}^T = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right\} \quad (3.3.1.3)$$

sendo conhecido na literatura por vetor de fluxo e a constante  $R$  é dada por

$$R = \frac{-1}{\lambda} \frac{\partial f^T}{\partial \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \quad (3.3.1.4.)$$

A partir da aditividade de deformações (eq. (1.2.6)), e da relação constitutiva elástica, escrita em função das taxas de tensões elásticas e a taxa de deformações elásticas, tem-se

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \quad (3.3.1.5)$$

onde  $\underline{\underline{D}}$  é a matriz constitutiva elástica do estado plano de tensões

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.3.1.6)$$

Da normalidade

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \lambda \underline{\underline{a}} \quad (3.3.1.7)$$

pode-se escrever que

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \lambda \underline{\underline{a}} \quad (3.3.1.8)$$

Pré-multiplicando toda equação por  $\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}}$

$$\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \lambda \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}} \quad (3.3.1.9)$$

o primeiro termo do lado direito da equação pode ser colocado em função da equação (3.3.1.1). Assim, pode-se escrever

$$\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \lambda R + \lambda \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}} \quad (3.3.1.10)$$

Isolando  $\lambda$ , obtém-se

$$\lambda = \frac{\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}{R + \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}}} \quad (3.3.1.11)$$

Mas como a taxa de deformação elásticas é

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P \quad (3.3.1.12)$$

pode-se substituir a expressão acima na relação constitutiva (3.3.1.5), a qual torna-se

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P) \quad (3.3.1.13)$$

Lembrando porém a expressão da normalidade, (3.3.1.7), e substituindo em (3.3.1.13) tem-se

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \lambda \underline{\underline{a}}) \quad (3.3.1.14)$$

que pela expressão (3.3.1.11) chega-se a relação constitutiva elastoplástica

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \left[ \underline{\underline{D}} - \frac{\underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}} \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}}}{A + \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}}} \right] \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \quad (3.3.1.15)$$

ou

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}^{eP} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \quad (3.3.1.16)$$

onde

$$\underline{\underline{D}}^{eP} = \underline{\underline{D}} - \frac{\underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}} \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}}}{A + \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}}} \quad (3.3.1.17)$$

A constante A pode ser determinada particularizando a formulação para o estado uniaxial de tensões, onde o critério de MISES, equação (1.4.6), se reduz para

$$\sigma_x^2 = k^2 \quad (3.3.1.18)$$

pois

$$\sigma_y = 0 \quad e \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.3.1.19)$$

Portanto a normalidade fica da forma

$$\lambda = \frac{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_x^P}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}} \quad (3.3.1.20)$$

mas pela equação (3.3.1.18)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = 1 \quad (3.3.1.21)$$

logo

$$\lambda = \dot{\epsilon}_x^P \quad (3.3.1.22)$$

Para o caso isótropo considerando o endurecimento por deformação mecânica (strain hardening)[15], tem-se

$$\dot{k} = H \|\dot{\epsilon}_x^P\| \quad (3.3.1.23)$$

onde  $H$  é o ângulo tangente, com relação ao eixo  $\epsilon_x^P$ , da curva  $\sigma_x - \epsilon_x^P$ , para o caso uniaxial (ver Fig. 3.3.1.1)

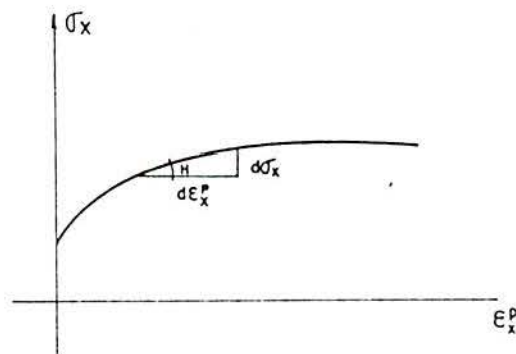


Fig. 3.3.1.1 - Relação tensão-deformações plásticas

ou seja,

$$H = \frac{d\sigma_x}{d\epsilon_x^P} \quad (3.3.1.24)$$

O símbolo  $\|\cdot\|$  representa a norma euclidiana da taxa de deformações plásticas  $\dot{\epsilon}_x^P$ .

Substituindo (3.3.1.22) em (3.3.1.23), fica

$$\dot{k} = H \lambda \quad (3.3.1.25)$$

e substituindo esta expressão na equação (3.3.1.4), obtém-se

$$R = - H \frac{\partial f}{\partial k} \quad (3.3.1.26)$$

mas, para tensões uniaxiais, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = - \frac{\partial f}{\partial k} = - \frac{df}{dk} = 1$$

Assim,

$$R = H$$

Finalmente a fórmula (3.3.1.17), toma a forma de

$$\underline{\underline{D}}^{CP} = \underline{\underline{D}} - \frac{\underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}} \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}}}{H_i + \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}}} \quad (3.3.1.27)$$

onde  $H_i$  é função da inclinação da reta  $H'_i$  do diagrama tensão-deformação. A expressão que relaciona  $H'_i$  e  $H_i$  é dado pela referência [3]

$$H_i = \frac{H'_i}{1 - \frac{H'_i}{E}} \quad (3.3.1.28)$$

Na análise linear elástica a matriz constitutiva é uma constante em função das propriedades mecânicas do material ( $E$  e  $\nu$ ). Esta linearidade deixa de existir quando se faz a análise supondo o comportamento do material mais próximo da realidade. Assim, a partir do instante em que as tensões ultrapassam o limite elástico, matriz constitutiva passa a ser calculada pela expressão (3.3.1.27). Observa-se que esta expressão é composta de um termo constante e um segundo termo que depende do estado de tensões em cada do corpo. é, portanto, diferente para cada ponto plastificado.

Faz-se necessário, na equação (3.3.1.27), o cálculo do vetor de fluxo  $\underline{\underline{a}}$  e as respectivas operações para a utilização desta expressão.

Lembrando a equação de MISES, definida pela expressão (1.4.6), no Capítulo 1, pode-se calcular o vetor de fluxo  $\underline{\underline{a}}$



$$\underline{a}^T = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2\sigma_0} (S_{11}, S_{22}, 2S_{12})^T \quad (3.3.1.29)$$

onde  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  e  $S_{12}$  são elementos da matriz definida na equação (1.4.3) e particularizados para  $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{xz} = 0$ . Assim

$$S_{11} = \frac{1}{3} (2\sigma_x - \sigma_y) \quad (3.3.1.30)$$

$$S_{22} = \frac{1}{3} (2\sigma_y - \sigma_x) \quad (3.3.1.31)$$

$$S_{12} = \frac{1}{3} \tau_{xy} \quad (3.3.1.32)$$

Pós-multiplicando o vetor  $\underline{a}$  pela matriz constitutiva elástica  $\underline{D}$  resulta

$$\underline{a}\underline{D} = \frac{3}{2\sigma_0} (S_1, S_2, S_3) \quad (3.3.1.33)$$

onde

$$S_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (S_{11} + \nu S_{22}) \quad (3.3.1.34)$$

$$S_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (S_{22} + \nu S_{11}) \quad (3.3.1.35)$$

$$S_3 = \frac{E}{1 + \nu} S_{12} \quad (3.3.1.36)$$

O produto  $\underline{D}\underline{a}\underline{a}^T\underline{D}$  fica

$$= \frac{9}{4\sigma_0^2} \begin{bmatrix} S_1^2 & S_1 S_2 & S_1 S_3 \\ S_1 S_2 & S_2^2 & S_2 S_3 \\ S_1 S_3 & S_2 S_3 & S_3^2 \end{bmatrix} = \frac{9}{4\sigma_0^2} \underline{S} \quad (3.3.1.37)$$

Analogamente

$$\underline{a}^T \underline{D} \underline{a} = \frac{9}{4\sigma_0^2} S_4 \quad (3.3.1.38)$$

onde

$$S_4 = S_1 S_{11} + S_2 S_{22} + 2 S_3 S_{12} \quad (3.3.1.39)$$

Substituindo (3.3.1.37) e (3.3.1.39) em (3.3.1.27)

$$\tilde{D}^{ep} = \tilde{D} - \frac{S_5}{\frac{4}{9} \sigma_o^2 H + S_4} \quad (3.3.1.40)$$

ou, em forma expandida

$$\tilde{D}^{ep} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1^2}{S_5} & & \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_1}{S_5} & \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_2^2}{S_5} & \\ -\frac{S_1 S_3}{S_5} & -\frac{S_2 S_3}{S_5} & \frac{E}{2(1+\nu)} - \frac{S_3^2}{S_5} \end{array} \right] \text{ simétrica} \quad (3.3.1.41)$$

onde

$$S_5 = \frac{4}{9} \sigma_o^2 H + S_4 \quad (3.3.1.42)$$

A expressão (3.3.1.41) é a forma final da equação (3.3.1.27), usada na implementação computacional.

### 3.4. Formulação Não-Laminar

Ao contrário da formulação anterior, a formulação não-laminar representa a placa de maneira convencional, isto é, através da superfície média. Portanto, as matrizes constitutivas elástica e elastoplástica devem ser expressas em função das resultantes de tensões.

As hipóteses assumidas na formulação laminar continuam válidas para resultantes de tensões.

Ver-se-á que a teoria desenvolvida para a formulação anterior será estendida para esta análise.

Por exemplo, para efetuar-se o cálculo da matriz de rigidez do elemento associa-se a cada ponto de integração (ver Fig. 3.4.1) uma matriz constitutiva (colocada em função dos momentos fletores e torção), de maneira análoga à análise anterior.

A seguir determina-se a matriz constitutiva elastoplás-

tica para esta formulação.

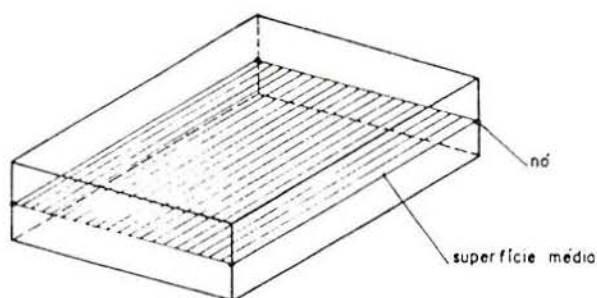


Fig. 3.4.1. - Representação da placa por superfície média.

### 3.4.1 - Matriz Constitutiva Elastoplástica

A função de escoamento de MISES, para o estado plano de tensões, é originalmente formulada em termos de *tensões*. Entretanto, é possível provar que se tem uma expressão absolutamente análoga em termos de *resultantes* de tensões (VER APENDICE A). Reescrevendo a equação (1.4.6), em resultante de tensões

$$M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2 = k^2 \quad (3.4.1.1)$$

onde  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  são momentos definidos por

$$\underline{M} = \int_{-t/2}^{t/2} \underline{\sigma}(z) z dz \quad (3.4.1.2)$$

onde  $\underline{\sigma}$  é o vetor que contém as tensões, definido na equação (2.3.2) e  $\underline{M}$  é o vetor de momento fletores

$$\underline{M}^T = ( M_x \quad M_y \quad M_{xy} ) \quad (3.4.1.3)$$

e

$$K = M_1 + K \quad (3.4.1.4)$$

onde  $M_1$  é o valor do momento para o qual tem-se tensões menores ou iguais à  $\sigma_1$ .

Portanto, o critério de escoamento de MISES, pode ser

reescrito, de maneira generalizada, como

$$f(\underline{M}, \underline{K}) = 0 \quad (3.4.1.5)$$

Tomando a derivada total em relação ao tempo e igualando-se a zero, tem-se

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{M}} \dot{\underline{M}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{K}} \dot{\underline{K}} = 0 \quad (3.4.1.6)$$

O vetor de fluxo  $\underline{a}$  pode ser, agora, escrito como

$$\underline{a}^T = \frac{\partial f}{\partial \underline{M}} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial M_x} \quad \frac{\partial f}{\partial M_y} \quad \frac{\partial f}{\partial M_{xy}} \right\} \quad (3.4.1.7)$$

e a constante  $\lambda$ , torna-se

$$\lambda = - \frac{1}{\underline{K}} \frac{\partial f}{\partial \underline{M}} \dot{\underline{M}} \quad (3.4.1.8)$$

obtendo-se, portanto, a expressão

$$\underline{a}^T \dot{\underline{M}} - \lambda \dot{\underline{K}} = 0 \quad (3.4.1.9)$$

Analogamente ao princípio da aditividade das taxas de deformações, pode-se escrever-se

$$\dot{\underline{\chi}} = \dot{\underline{\chi}}^e + \dot{\underline{\chi}}^p \quad (3.4.1.10)$$

A partir da expressão (3.2.6) que relaciona curvaturas e deformações elásticas, derivada em relação ao tempo, e da relação constitutiva elástica definida na expressão (3.3.1.5), pode-se escrever

$$\dot{\underline{\sigma}} = D_z \dot{\underline{\chi}}^e \quad (3.4.1.11)$$

que substituindo na definição do vetor de momentos fletores (3.4.1.2) é

$$\dot{\underline{M}} = \int_{-t/2}^{t/2} z^z D \dot{\underline{\chi}}^e dz \quad (3.4.1.12)$$

onde  $\underline{D}$  e  $\dot{\underline{\chi}}^o$  independem de  $z$ . Logo,

$$\underline{\dot{M}} = \left[ \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \right] \underline{D} \dot{\underline{\chi}}^o \quad (3.4.1.13)$$

que depois de feita a integração, obtém-se

$$\underline{\dot{M}} = \underline{D}^{\underline{M}} \dot{\underline{\chi}}^o \quad (3.4.1.14)$$

onde

$$\underline{D}^{\underline{M}} = \frac{t^3}{12} \underline{D} \quad (3.4.1.15)$$

sendo  $\underline{D}$  é a matriz constitutiva do estado plano de tensões.

Novamente, pode-se estabelecer uma analogia entre o princípio da normalidade em termos de tensões com o de resultantes de tensões (VER APÊNDICE A), isto é, pode-se passar da relação (1.5.4) diretamente para

$$\dot{\underline{\chi}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{M}} \quad (3.4.1.16)$$

Usando as equações (3.4.1.8), (3.4.1.10) e (3.4.1.16)

$$\dot{\underline{\chi}} = \underline{D}^{\underline{M}-1} \underline{\dot{M}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{M}} \quad (3.4.1.17)$$

Pré-multiplicando toda a equação (3.4.1.17) por  $\underline{a}^T \underline{D}^{\underline{M}}$  tem-se

$$\underline{a}^T \underline{D}^{\underline{M}} \dot{\underline{\chi}} = \underline{a}^T \underline{\dot{M}} + \lambda \underline{a}^T \underline{D}^{\underline{M}} \underline{a} \quad (3.4.1.18)$$

e recorrendo-se a expressão (3.4.1.9) pode-se determinar  $\lambda$

$$\lambda = \frac{\underline{a}^T \underline{D}^{\underline{M}} \underline{\dot{\chi}}}{\underline{a}^T \underline{D}^{\underline{M}} \underline{a}} \quad (3.4.1.19)$$

Substituindo a equação (3.4.1.10) na equação (3.4.1.14)



$$\dot{\underline{M}} = \underline{D}^M \left[ \dot{\underline{\chi}} - \dot{\underline{\chi}}^P \right] \quad (3.4.1.21)$$

Finalmente

$$\dot{\underline{M}} = \left[ \underline{D}^M - \frac{\underline{D}^M \underline{a} \underline{a}^T \underline{D}^M}{H + \underline{a}^T \underline{D}^M \underline{a}} \right] \dot{\underline{\chi}} \quad (3.4.1.22)$$

$$\underline{D}^{\bullet P} = \underline{D}^M - \frac{\underline{D}^M \underline{a} \underline{a}^T \underline{D}^M}{H + \underline{a}^T \underline{D}^M \underline{a}} \quad (3.4.1.23)$$

A expressão acima, relaciona momentos fletores  $\underline{M}$  e curvatura  $\underline{\chi}$  através da matriz constitutiva elastoplástica colocada em termos de resultantes de tensões. Ao se comparar as equações (3.3.1.27) e (3.4.1.23) nota-se que possuem a mesma forma.

O vetor de fluxo  $\underline{a}$  é calculado tomando a equação (3.4.1.1)

$$\underline{a}^T = \frac{\partial f^T}{\partial \underline{M}} = \frac{3}{2M_e} ( S_{11}, S_{22}, 2S_{12} ) \quad (3.4.1.24)$$

onde

$$S_{11} = \frac{1}{3} ( 2M_x - M_y ) \quad (3.4.1.25)$$

$$S_{22} = \frac{1}{3} ( 2M_y - M_x ) \quad (3.4.1.26)$$

$$S_{12} = \frac{2}{3} M_{xy} \quad (3.4.1.27)$$

O produto  $\underline{a}^T \underline{D}^M$  é

$$\underline{a}^T \underline{D}^M = \frac{3}{2M_e} \frac{t^3}{12} ( S_1, S_2, S_3 ) \quad (3.4.1.28)$$

onde

$$S_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} ( S_{11} + \nu S_{22} ) \quad (3.4.1.29)$$

$$S_z = \frac{E}{1 - \nu^2} (S_{zz} + \nu S_{11}) \quad (3.4.1.30)$$

$$S_a = \frac{E}{1 + \nu} S_{12} \quad (3.4.1.31)$$

O produto  $\tilde{D}_{aa}^M \tilde{D}_{aa}^T$  fica

$$= \frac{9}{4M_o^2} \left[ \frac{t^a}{12} \right]^2 \begin{bmatrix} S_1^2 & S_1 S_2 & S_1 S_a \\ S_1 S_2 & S_2^2 & S_2 S_a \\ S_1 S_a & S_2 S_a & S_a^2 \end{bmatrix} = \frac{9}{4M_o^2} \left[ \frac{t^a}{12} \right]^2 S^M \quad (3.4.1.32)$$

Analogamente

$$\tilde{D}_{aa}^T \tilde{D}_{aa}^M = \frac{9}{4M_o^2} \frac{t^a}{12} S_4 \quad (3.4.1.33)$$

onde

$$S_4 = S_1 S_{11} + S_2 S_{22} + 2 S_a S_{12} \quad (3.4.1.34)$$

Substituindo (3.4.1.32) e (3.4.1.34) em (3.4.1.23)

$$\tilde{D}^{op} = \tilde{D}^M - \frac{S}{S_a} \quad (3.4.1.35)$$

ou, em forma expandida

$$\tilde{D}^{op} = \frac{t^a}{12} \begin{bmatrix} \frac{E}{1 - \nu^2} - \frac{S_1^2}{S_a} & & & \\ \frac{\nu E}{1 - \nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S_a} & \frac{E}{1 - \nu^2} - \frac{S_2^2}{S_a} & & \\ -\frac{S_1 S_a}{S_a} & -\frac{S_2 S_a}{S_a} & \frac{E}{2(1+\nu)} - \frac{S_a^2}{S_a} & \\ & & & \end{bmatrix} \quad \text{simétrica} \quad (3.4.1.36)$$

onde

$$S_5 = \frac{12}{t^3} \left( \frac{4}{9} M_{HM}^2 \right) + S_4 \quad (3.4.1.37)$$

As duas maneiras de representar de placas adotadas neste trabalho resultam em formulações que tem suas formas bastante semelhantes, conforme pode-se constatar por simples observação, exceto pelo fator  $\frac{t^3}{12}$  da formulação não laminar de tensões.

Pode-se ver também, a utilidade da relação momento-curvatura desenvolvida no capítulo anterior.

### 3.5. Simplificações Adotadas

Na formulação em lâminas há condições de representar todos os estados de tensões, ao longo da espessura, que a placa possa vir a ter (ver Fig. 3.5.1). Assim, durante o carregamento ter-se-á sempre uma região elástica em torno da superfície média que em determinado ponto do carregamento esta região torna-se muito pequena comparada com as regiões elasto-plásticas.

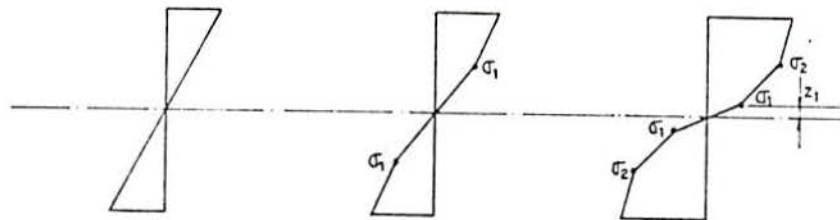


Fig. 3.5.1 - Tensões ao longo da espessura da placa.

Já na formulação não laminar de tensões a mesma representação não é possível, pois como a seção é representada por apenas um ponto de integração, este pode estar elástico ou elasto-plástico, não admitindo um estado intermediário. Conseqüentemente nesta análise não é possível ter toda a história de tensões do ponto representada.

Esta falha foi "compensada" através da relação momento-curvatura estabelecida na Capítulo 2 onde levou-se em consideração a região elástica nas deduções.

Esta aproximação será avaliada por meio dos exemplos expostos no Capítulo 5.

Deve-se lembrar também que as expressões obtidas capítulo 2, referentes a relação momento-curvatura, foram deduzidas para a flexão simples e posteriormente utilizadas em flexão de placas. Isto é, evidentemente, uma aproximação.

## CAPÍTULO 4

### MÉTODO E ALGORITMO DE SOLUÇÃO

#### 4.1. Introdução

Neste Capítulo obtém-se, primeiramente, o princípio dos trabalhos virtuais em forma incremental através das equações de equilíbrio.

A seguir, obtém-se uma formulação incremental do problema plástico e dá-se uma noção do método dos elementos finitos.

Descreve-se o elemento finito utilizado e finalmente, apresenta-se o algoritmo de solução usado no sistema ESFINGE.

#### 4.2. Princípio Variacional Incremental

Pela referência [5] pode-se escrever, para uma aplicação lenta (quasi-estática) de carga, a seguinte equação de equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} + \bar{b}_i = 0 \quad (4.2.1)$$

onde  $\bar{b}_i = \rho b_i$  é a força por unidade de volume,  $\rho$  é a massa específica,  $b_i$  é a força por unidade de massa e  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões de Cauchy.

Derivando a equação acima em relação ao tempo, obtém-se a relação de equilíbrio incremental

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial X_j} + \dot{\bar{b}}_i = 0 \quad (4.2.2)$$



Multiplicando a equação acima por um campo de velocidades  $\dot{\delta u}_i$  cinematicamente admissível, e integrando sobre o volume  $V$  do corpo, têm-se

$$\int_V \left\{ \left| \frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \dot{b}_i \right| \dot{\delta u}_i \right\} dV = 0 \quad (4.2.3)$$

A primeira parcela pode ser escrita

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \dot{\delta u}_i = (\dot{\sigma}_{ij} \dot{\delta u}_i)_{,j} - \dot{\sigma}_{ij} \dot{\delta u}_{i,j} \quad (4.2.4)$$

o que permite reescrever (4.2.3) como:

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\delta u}_{i,j} dV = \int_V \left| (\dot{\sigma}_{ji} \dot{\delta u}_i)_{,j} + \dot{b}_i \dot{\delta u}_i \right| dV \quad (4.2.5)$$

Aplicando o teorema da divergência [12] na primeira parcela do segundo termo

$$\int_V (\dot{\sigma}_{ij} \dot{\delta u}_i)_{,j} dV = \int_S n_j \dot{\sigma}_{ij} \dot{\delta u}_i dS \quad (4.2.6)$$

onde  $S$  representa a superfície externa e  $n_j$  é o vetor das componentes da normal à  $S$ . Se  $f$  representar a carga por unidade de superfície pode-se escrever

$$f_i = n_j \sigma_{ij} \quad (4.2.7)$$

que pode ser derivada em relação ao tempo para obter-se ( $n_j$  não depende do tempo já que não há mudança na geometria)

$$\dot{f}_i = n_j \dot{\sigma}_{ij} \quad (4.2.8)$$

Substituindo na (4.2.6) obtém-se

$$\int_V (\hat{\sigma}_{ij} \delta u_{i,j})_{,j} dV = \int_S \hat{f}_i \delta u_i dS \quad (4.2.9)$$

o que permite reescrever a (4.2.6) como

$$\int_V \hat{\sigma}_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_S \hat{f}_i \delta u_i dS + \int_V \hat{b}_i \delta u_i dV \quad (4.2.10)$$

Pela simetria de  $\hat{\sigma}_{ij}$  pode-se escrever que

$$\hat{\sigma}_{ij} \delta u_{i,j} = \hat{\sigma}_{ij} \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) = \hat{\sigma}_{ij} \hat{\epsilon}_{ij} \quad (4.2.11)$$

Substituindo na (4.2.10) obtém-se o princípio dos trabalhos virtuais em forma incremental

$$\int_V \hat{\sigma}_{ij} \delta \hat{\epsilon}_{ij} dV = \int_S \hat{f}_i \delta u_i dS + \int_V \hat{b}_i \delta u_i dV \quad (4.2.12)$$

### 4.3. O Método dos Elementos Finitos [21]

O método dos elementos finitos foi utilizado para discretizar o contínuo. O corpo é dividido em uma série de elementos finitos onde as velocidades  $\dot{u}$  em um ponto do elemento podem ser expressas em função das velocidades nodais  $\dot{u}^{e1}$  e em função de função de forma  $N$ , que matricialmente é

$$\dot{u} = N \dot{u}^{e1} \quad (4.3.1)$$

A relação deformação-deslocamento fica

$$\dot{\epsilon} = B \dot{u}^{e1} \quad (4.3.2)$$

Substituindo a expressão (4.3.2) na equação (3.3.1.16)

vem

$$\hat{\sigma} = \bar{D} B \dot{u}^{e1} \quad (4.3.3)$$

onde  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}$  para pontos elásticos e  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^{eP}$  para pontos já plasticificados. A partir da expressão (4.3.1) pode-se escrever que

$$\dot{\underline{\underline{u}}} = \underline{\underline{N}} \dot{\underline{\underline{u}}}^{e1} \quad (4.3.4)$$

Substituindo (4.3.2), (4.3.3) e (4.3.4) na (4.2.12) tem-se

$$\int_V (\dot{\underline{\underline{u}}}^{e1})^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \dot{\underline{\underline{u}}}^{e1} dV = \int_S (\dot{\underline{\underline{u}}}^{e1})^T \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{f}} dS + \int_V (\dot{\underline{\underline{u}}}^{e1})^T \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{b}} dV \quad (4.3.5)$$

Como  $(\dot{\underline{\underline{u}}}^{e1})^T$  é qualquer,

$$\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \dot{\underline{\underline{u}}}^{e1} dV = \int_S \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{f}} dS + \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{b}} dV \quad (4.3.6)$$

ou

$$\underline{\underline{K}}^{e1} \dot{\underline{\underline{u}}}^{e1} - \underline{\underline{P}} = 0 \quad (4.3.7)$$

onde  $\underline{\underline{K}}^{e1}$  é a matriz de rigidez tangente do elemento e  $\underline{\underline{P}}$  é o vetor de taxas de carga, logo

$$\underline{\underline{K}}^{e1} = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} dV \quad (4.3.8)$$

e

$$\underline{\underline{P}} = \int_S \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{f}} dS + \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{b}} dV \quad (4.3.9)$$

A matriz de rigidez da estrutura será a soma das matrizes de rigidez dos elementos, ou seja,

$$\underline{\underline{K}} = \sum_N \underline{\underline{K}}^{e1} \quad (4.3.10)$$

onde N é o número de elementos utilizados na discretização.

#### 4.3.1. O ELEMENTO FINITO UTILIZADO

O elemento finito utilizado para discretizar placas é

conhecido na literatura por R12. Possui as seguintes características: é linear, com quatro nós por elemento e três graus de liberdade por nó (uma translação em Z e duas rotações em torno de X e Y). As funções de forma do elemento garantem que os deslocamentos entre elementos adjacentes sejam compatíveis. Entretanto, rotações em uma fronteira comum entre elementos não são compatíveis. Em outras palavras, o elemento é chamado de *não-conforme*. A figura 4.3.1 mostra o elemento e as convenções de momento e deslocamentos [18].

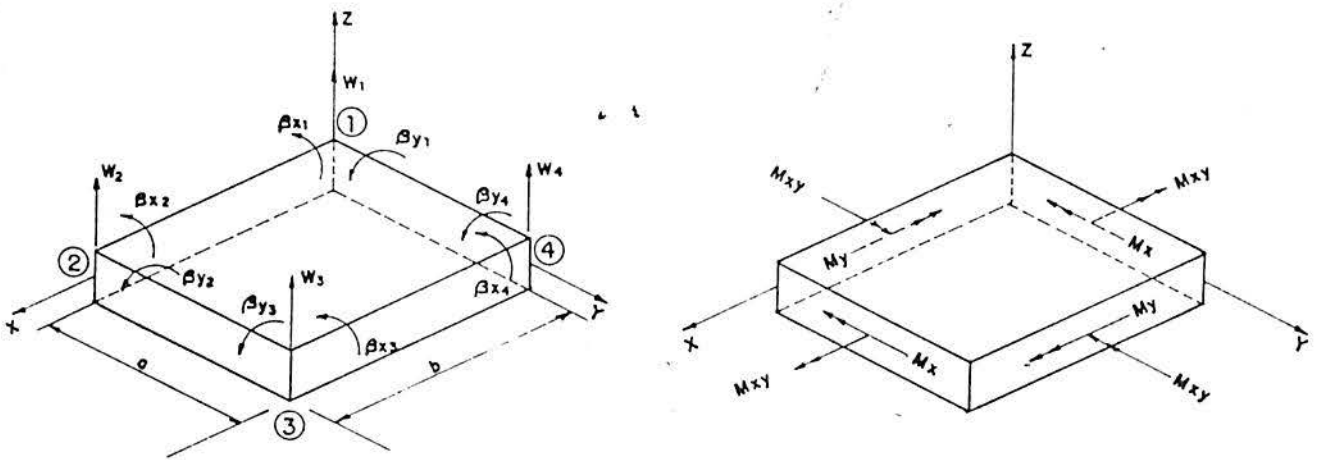


Fig. 4.3.1 - Elemento finito de flexão de placa R12.

#### 4.4. O Método Incremental

Analisar-se-á o procedimento incremental para a solução de equações do tipo

$$\Psi(\underline{u}) = F(\underline{u}) - \underline{P} = 0 \quad (4.4.1)$$

Pode-se reduzir a equação (4.4.1) a uma série de problemas lineares da forma

$$\underline{K} \dot{\underline{u}} = \dot{\underline{P}} \quad (4.4.2)$$

para os quais existem métodos e programas eficientes.

É conveniente reescrever a equação (4.4.1) da forma

$$F(\dot{\underline{u}}) - \lambda \dot{\underline{P}}_0 = 0 \quad (4.4.3)$$

onde  $\lambda$  é um escalar ( $\lambda=0$ , para  $u=0$ ). Derivando a expressão (4.4.

3) em relação a  $\lambda$  tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{u}}} \frac{\partial \dot{\underline{u}}}{\partial \lambda} - \dot{\underline{P}}_0 = 0 \quad (4.4.4)$$

ou

$$\underline{K}_t(\dot{\underline{u}}) d\dot{\underline{u}} - \underline{P}_0 d\lambda = 0 \quad (4.4.5)$$

onde  $\underline{K}_t(\dot{\underline{u}})$  é a matriz tangente da estrutura.

Numericamente, a equação acima é resolvida para incrementos finitos por

$$\underline{K}_t(\underline{u}_n) \Delta \underline{u}_n = \underline{P}_0 \Delta \lambda_n = \Delta \underline{P}_n \quad (4.4.6)$$

onde

$$\Delta \underline{u}_n = \underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n \quad (4.4.7)$$

e o subíndice  $n$  representa o atual passo da solução e refere-se ao incremento de  $\lambda$  ou  $P$ , isto é

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta \lambda_n \quad (4.4.8)$$

$$\underline{P}_{n+1} = \underline{P}_n + \Delta \underline{P}_n \quad (4.4.9)$$

A aplicação da equação (4.4.6) é equivalente a integração de (4.4.5) pelo método de Euler.

Solucionando o sistema (4.4.6) para um determinado  $\Delta \underline{P}_n$ , obtém-se um  $\Delta \underline{u}_n$ . Lembrando as expressões (4.3.2) e (4.3.3) tem-se

$$\Delta \dot{\underline{u}} = \underline{D} \underline{B} \Delta \underline{u}^{\circ 1} \quad (4.4.10)$$

$$\Delta \dot{\underline{e}} = \underline{B} \Delta \underline{u}^{\circ 1} \quad (4.4.11)$$

onde  $\underline{u}^{\circ 1}$  pode ser obtido a partir de  $\Delta \underline{u}_n$ .

O valor no final de cada passo  $n$ , será



#### 4.5. Critério de Plastificação e Descarga

Serão considerados plásticos os pontos que satisfizerem a equação (1.4.6). Para melhorar a eficiência do programa, foi definida uma faixa de plastificação. Com a adoção da faixa de plastificação a equação (1.4.6), fica

$$\left| \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} - \sigma_x \sigma_y - \sigma_e \right| < f_p \sigma_e \quad (4.5.1)$$

onde  $f_p$  varia de 0 a 1 e a tensão  $\sigma_e$  é dada pela expressão (1.4.1.2), para o endurecimento isótropo. Se a faixa de plastificação não for definida pelo usuário, é tomada  $f_p = 0,1$ .

No programa são usadas faixas de tolerância nas proximidades dos vértices, com a finalidade de tornar o programa mais rápido. Isto permite que mais de um ponto plastifique ou mude de lado, da poligonal, durante o mesmo incremento de carga. Este procedimento conduz a resultados bastantes razoáveis do ponto de vista da engenharia.

Conforme visto no Capítulo 1, o critério de descarga é estabelecido pelo produto escalar dos vetores  $\partial f / \partial \underline{\sigma}$  e  $\dot{\underline{\sigma}}$ , mostrado pela equação (1.3.7) e pela figura 1.3.1.

#### 4.6. Algoritmo de Solução

A seguir descreve-se o programa computacional do método incremental. O programa foi desenvolvido de tal maneira que ao final da primeira etapa de cargas tenha-se o primeiro ponto de integração plastificado.

a) Arbitra-se um vetor de cargas  $P$  com componentes aplicadas nos nós e nas direções desejadas. A proporção numérica adotada entre as diversas componentes é mantida constante até o fim do cálculo. Para este carregamento resolve-se o problema de forma elástica, obtendo deslocamentos e tensões elásticas, bem como as tensões equivalentes correspondentes.

b) Seleciona-se a máxima tensão equivalente ( $\sigma_{\max}$ ), calcula-se a relação  $r_e = \sigma_1 / \sigma_{\max}$ , e multiplica-se por esta relação os vetores de deslocamentos, tensão e cargas. Tem-se assim plasti-

ma tensão equivalente. Chama-se ao vetor de carga resultante desta operação de  $\underline{P}_e$ .

c) Calcula-se a matriz elastoplástica  $\underline{D}^{EP}$ , conforme foi visto no Capítulo 3, para os pontos já plastificados e, a partir daí, uma nova matriz de rigidez para o elemento plastificado ou parcialmente plastificado.

Esta operação repetir-se-á no início de cada etapa usando as tensões que foram encontradas na etapa anterior.

d) O próximo passo é modificar a matriz de rigidez global da estrutura. Isto é feito retirando-se a contribuição, correspondente à etapa anterior, do elemento que já estava plastificado ou que plastificou na etapa atual, e acrescentando-se a nova contribuição de cada elemento plastificado à matriz de rigidez global.

e) Escolhe-se o incremento de carga  $\Delta P$  adequado. Este será sempre dado por uma certa fração de  $\underline{P}_e$ . No programa, se este incremento não é dado, é tomado como  $\Delta P = 0,1 \underline{P}_e$ .

f) Resolve-se a matriz de rigidez global  $K$  (obtida em "d") submetida ao vetor de cargas  $\Delta P$  (obtido em "e"). O resultado é o vetor de deslocamentos  $\Delta u$ . Para a solução deste sistema o método escolhido foi o *método de Choleski* dotado de vetor perfil e decomposição parcial [7].

g) Obtido o vetor  $\Delta u$ , determina-se os incrementos de deformações e tensões da seguinte forma

$$\Delta \underline{\epsilon} = \underline{B} \Delta u \quad (4.6.1)$$

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{D} \Delta \underline{\epsilon} \quad (4.6.2)$$

Para a formulação não-laminar [18] as expressões acima ficam

$$\Delta \underline{\chi} = \underline{B}^M \Delta u \quad (4.6.3)$$

$$\Delta \underline{M} = \underline{D}^M \Delta \underline{\chi} \quad (4.6.4)$$

h) O próximo passo do programa é a determinação do valor "r<sup>1</sup>" para cada ponto de integração. Este é o valor necessário para

fazer com que a tensão equivalente no ponto de integração, em fase elástica, atinja linearmente, na etapa considerada, a tensão de escoamento do material. Se o ponto estiver na região plástica, deve-se determinar em que lado da poligonal ele se encontra bem como o valor de  $r$  necessário para que seu estado de tensões atinja o próximo vértice.

Para determinar o valor de " $r^i$ ", deve-se aplicar o critério de MISES, para o escoamento inicial, considerando o acréscimo ( $\Delta\sigma_i$ ) ocorrido no vetor  $\sigma_i$  devido à aplicação de  $\Delta P$ . Para o estado plano de tensões a equação (1.4.6) torna-se:

$$(\sigma_x^i + r^i \Delta\sigma_x^i)^2 + (\sigma_y^i + r^i \Delta\sigma_y^i)^2 - (\sigma_x^i + r^i \Delta\sigma_x^i)(\sigma_y^i + r^i \Delta\sigma_y^i) + 3(\tau_{xy}^i + r^i \Delta\tau_{xy}^i)^2 = 0 \quad (4.6.5)$$

Desenvolvendo esta equação pode-se retirar o valor de " $r^i$ ":

$$r^i = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4|A||C|}}{2|A|} \quad (4.6.6)$$

donde

$$A = (\Delta\sigma_x^i)^2 + (\Delta\sigma_y^i)^2 - \Delta\sigma_x^i \Delta\sigma_y^i + 3(\Delta\tau_{xy}^i)^2 \quad (4.6.7)$$

$$B = 2(\sigma_x^i \Delta\sigma_x^i + \sigma_y^i \Delta\sigma_y^i) - \sigma_x^i \Delta\sigma_y^i - \sigma_y^i \Delta\sigma_x^i + 6\tau_{xy}^i \Delta\tau_{xy}^i \quad (4.6.8)$$

$$C = (\sigma_x^i)^2 + (\sigma_y^i)^2 - \sigma_x^i \sigma_y^i + 3(\tau_{xy}^i)^2 \quad (4.6.9)$$

onde  $| |$  indicam que a grandeza deve ser tomada em seu valor absoluto e o sinal positivo dentro da raiz quadrada é devido ser  $C < 0$ . O sinal negativo antes da raiz quadrada não teria sentido, pois resultaria em  $r^i < 0$ , ou seja, um acréscimo de carga negativa (ver referências [2], [3]).

i) De todos os valores de  $r$  calculados conforme foi visto em h, escolhe-se o menor deles que se denomina de  $r_{\min}$ . O incremento de carga  $r_{\min} \Delta P$  é necessário para levar o ponto de integra-



ção ao escoamento ou ao próximo vértice conforme esteja elástico ou plástico.

Se o valor de  $r_{\min}$  for maior que 1(um) faze-se  $r_{\min} = 1$ .

Além deste primeiro controle, existe um outro que tem a finalidade de controlar o aumento das tensões, nos pontos de integração já plastificados, não permitindo que a tensão equivalente dos acréscimos de tensão seja maior que 8% da tensão de escoamento inicial. Quando isto ocorre, adota-se um novo  $r_{\min}$  que satisfaça esta condição, ou seja

$$r_{\min} = 0.08 \frac{\sigma_1}{\Delta \sigma_{eq}} \quad (4.6.10)$$

Para o caso de material elastoplástico perfeito, quando todos os pontos de integração estiverem plastificados, todos os " $r$ " serão nulos. Neste caso, adota-se o valor de  $r_{\min}$  calculados por (4.6.10). Isto permite continuar a análise depois que todos os elementos estiverem plastificados.

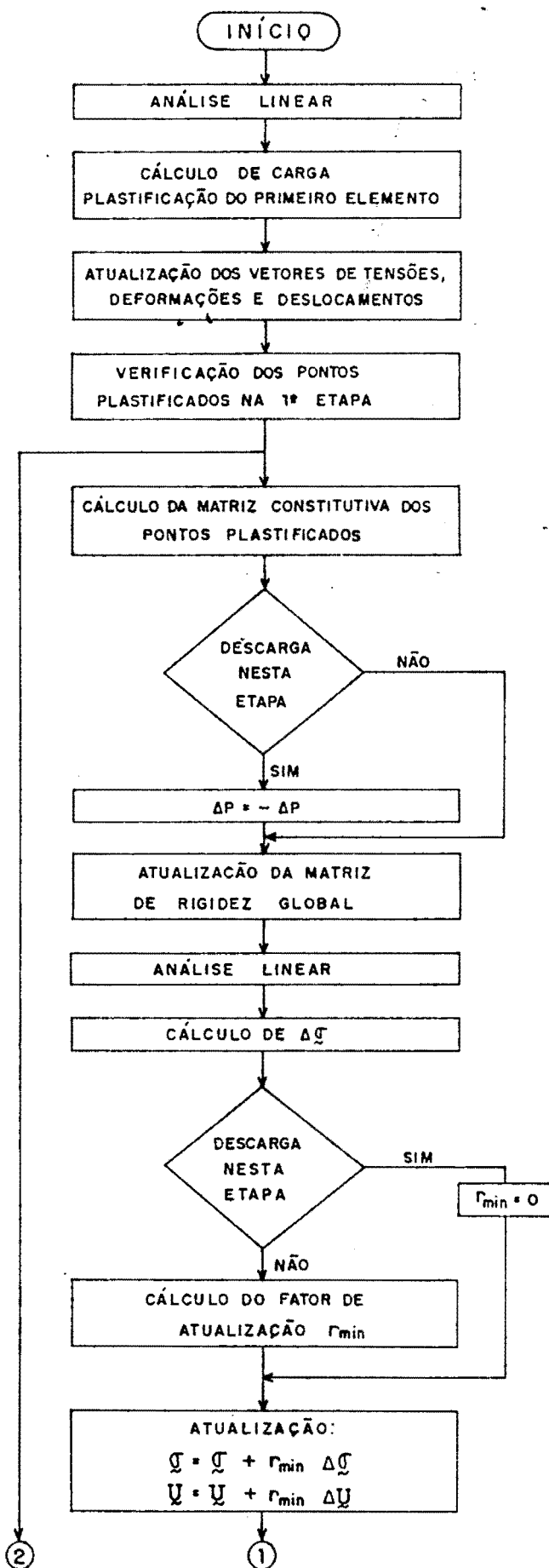
Calculado o  $r_{\min}$  volta-se ao item c e repete-se o processo.

O cálculo do  $r_{\min}$  é idêntico para as duas análises. Basta substituir nas equações (4.6.7) a (4.6.9),  $\Delta \sigma_x^1$  por  $\Delta M_x^1$ ,  $\tau_{xy}^1$  por  $M_{xy}^1$ , etc., no caso da análise não-laminar, por exemplo.

#### 4.7. O Programa Computacional

Com base no item anterior, desenvolveu-se um programa computacional, apresentado na Fig. 4.7.1, em forma de um macro diagrama de blocos. O usuário deve definir sempre o diagrama tensão-deformação, para os dois tipos de análise mencionadas. Se a análise for laminar, o controle de plastificação é feito diretamente através do diagrama tensão-deformação. Se a análise for não-laminar, o diagrama tensão-deformação é convertido no diagrama momento-curvatura, por meio das expressões deduzidas no Capítulo 2, e o controle passa a ser feito por meio deste diagrama.

Instruções sobre a entrada de dados são encontradas no Apêndice C.





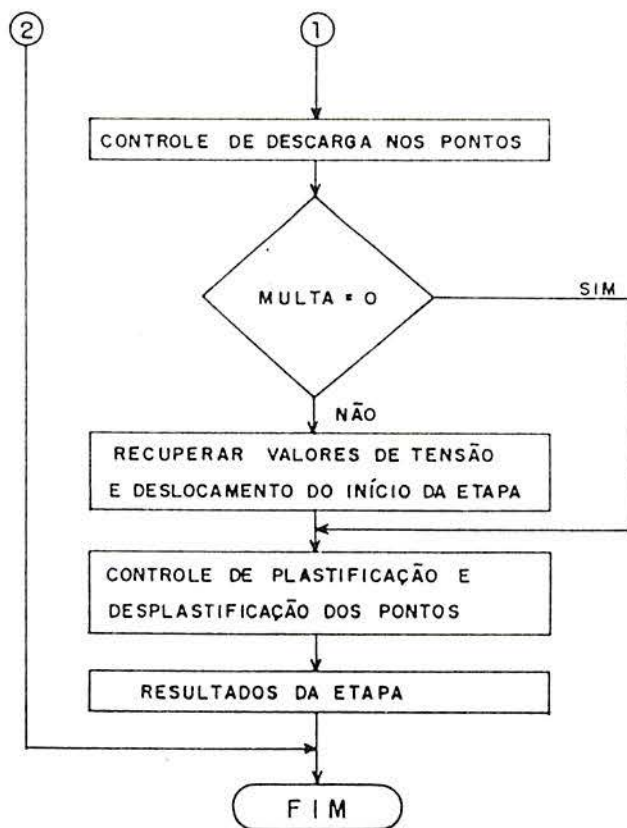


Fig. 4.7.1 - Diagrama de blocos do programa computacional.

## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÕES NUMÉRICAS. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo procura-se estabelecer algumas comparações dos resultados obtidos, através da implementação dos procedimentos e aproximações feitas nos capítulos anteriores.

Alguns resultados são comparados com os obtidos por diversos autores, outros confrontados com resultados experimentais.

Serão apresentados, também, resultados de exemplos constituídos por um único elemento, que foram úteis na depuração do programa e na avaliação das hipóteses feitas na relação momento-curvatura. O computador utilizado foi o BURROUGHS A10.

#### 5.1. Exemplos com a Utilização de Apenas um Elemento

Nestes exemplos, além de fornecer subsídios para o desenvolvimento de novos programas, compara-se os resultados obtidos pela análise laminar e não-laminar para um caso simples.

Foi analisada uma placa quadrada em balanço, com carga linear distribuída vertical na extremidade livre (ver Fig. 5.1.1.a).

Os dados utilizados nestes exemplos são: dimensão da placa  $a = 10\text{cm}$ , espessura  $t = 2\text{cm}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,325$ . A relação tensão-deformação é bilinear, sendo que  $E = 10,05 \times 10^8 \text{ N/cm}^2$ , a constante de endurecimento  $H = 1.908 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$  e as tensões de escoamento são  $\sigma_1 = 8000 \text{ N/cm}^2$  e  $\sigma_2 = 35000 \text{ N/cm}^2$ , (ver Fig. 5.1.b). Adotou-se uma faixa de plastificação de 10%.

A figura 5.1.1 mostra as curvas carga-deslocamento para as análises não-laminar (curva a), laminar com dois pontos de integração (curva b) e laminar com três pontos de integração (curva c).

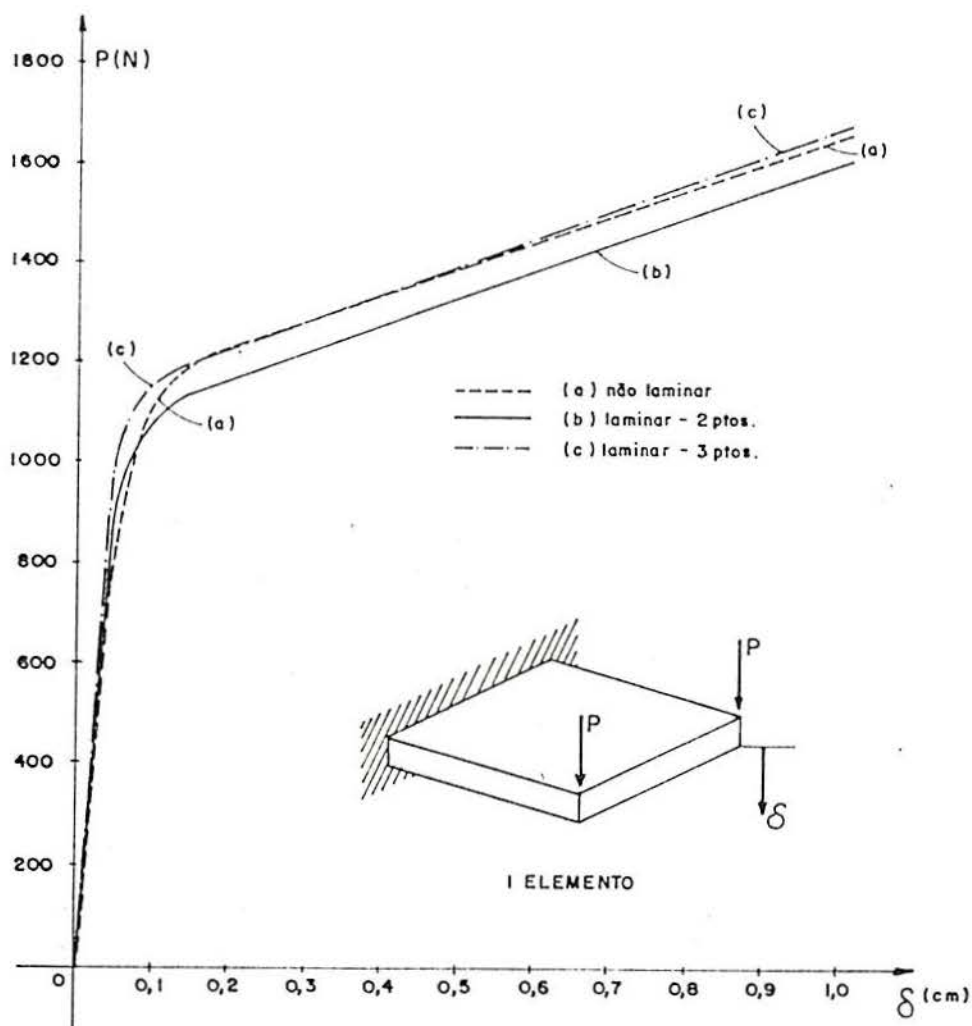


Fig. 5.1.1 - Curvas carga-deslocamento para placa engastada-livre.

A princípio, supunha-se que a curva da análise laminar com três pontos de integração estivesse mais próxima da curva da análise laminar com dois pontos, do que da análise não-laminar. Esperava-se que a análise não-laminar, devido as simplificações

feitas na relação momento-curvatura e por haver uma representação incompleta da história de tensões no ponto de integração, fosse a formulação mais imprecisa. No entanto, observa-se pela figura, que os resultados da análise não-laminar e laminar com três pontos de integração praticamente coincidem. Isto deve-se ao fato da análise laminar com dois pontos de integração não conseguir representar, de maneira exata, as tensões na etapa elástica, onde se percebe, para este exemplo específico, um erro de aproximadamente 10%.

Como a relação tensão-deformação é constituída por duas retas, a relação momento-curvatura resulta definida por três retas (ver item 2.4). Pode-se avaliar também, através destes exemplos,

se os critérios utilizados para a determinação do ponto intermediário da relação momento-curvatura deram bons resultados. No Capítulo 2, viu-se que a aproximação do diagrama seria tão exata quanto mais próxima estivesse a relação tensão-deformação do material da relação tensão-deformação tomada como referência. Pelos resultados, confirma-se uma boa aproximação.

Assim, além da depuração de erros no programa, estes exemplos mostram que as hipóteses adotadas nas relações constitutivas, deram bons resultados. É importante notar que este tipo de exemplo é particularmente sensível a relação constitutiva, pois tem-se um estado de tensões próximo a flexão pura.

| ANÁLISE         | TEMPO<br>(seg.) |
|-----------------|-----------------|
| Não-laminar     | 0.572           |
| Laminar - 2ptos | 0.785           |
| Laminar - 3ptos | 0.801           |

Tab. 5.1. - Comparação dos tempos para a montagem da matriz de rigidez de um elemento.

A tabela 5.1 compara os tempos de processamento para a montagem da matriz de rigidez do elemento, para as formulações deste trabalho.

Esses tempos, devido a maneira como as teorias foram desenvolvidas, no Capítulo 3, eram aguardados, pois a formulação não-laminar monta a matriz de rigidez do elemento apenas uma vez, enquanto que na formulação laminar esta matriz é montada tantas vezes quanto forem o número de pontos de integração utilizados para discretizar a espessura.

## 5.2. Exemplos Comparativos

O objetivo desta série de exemplos é estabelecer se os resultados obtidos pelo programa são coerentes. Nos exemplos anteriores, comparou-se as análises não-laminar e laminar entre si. Pretende-se agora comparar os resultados da placa do exemplo 5.1 com o estado plano de tensões e deformações.

Para efeito de comparação com o estado plano de tensões







nar, com dois pontos de integração na espessura, e não-linear. As curvas resultantes são praticamente coincidentes com a mostrada na figura 5.2.1, que por razões de clareza não foram representadas.

A malha de elementos finitos da placa foi refinada até conseguir representar as curvaturas que aparecem perpendiculares as curvaturas principais, no plano YZ. Estas curvaturas ocorrem devido ao coeficiente de Poisson impedido e têm sempre sinal oposto as curvaturas na direção de flexão (denominadas curvaturas anticlásticas). O coeficiente de Poisson impedido aumenta a rigidez da placa.

A figura 5.2.1 mostra que os resultados da placa são coerentes.

Especificamente, na análise da viga em estado plano de deformações teve-se problemas de incompressibilidade nos elementos [6]. Foi necessário refazer a análise tornando-os compressíveis, pois a rigidez da viga era maior que a rigidez real.

Fez-se ainda a análise da placa para um coeficiente de Poisson  $\nu=0,45$ . Pode-se ver pela figura 5.2.1 que a curva tende a aproximar-se da curva do estado plano de deformações.

### 5.3. Placa Totalmente Engastada sob Carga Uniformemente Distribuída

Neste exemplo, analisou-se uma placa quadrada, engastada em seus bordos, sujeita a carga uniforme.

A placa tem dimensão  $a=254\text{mm}$ , espessura  $t=2,54\text{ mm}$ , módulo de deformação longitudinal  $E=65,3\text{kN/mm}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$ . A relação tensão-deformação foi aproximada por uma poligonal com quatro retas. As tensões de escoamento são:  $\sigma_1=255$ ,  $\sigma_2=308$ ,  $\sigma_3=330$  e  $\sigma_4=360\text{N/mm}^2$ . Os endurecimentos são:  $H_1=166416$ ,  $H_2=19692$  e  $H_3=6326\text{N/mm}^2$ .

Posteriormente, os resultados são comparados com a análise numérica feita por BARNARD e SHARMAN [1]. Os autores analisam flexão de placas elastoplásticas pelo método dos elementos finitos. Utilizam um elemento finito híbrido com campo de tensões arbitradas. O critério de escoamento é de PRANDTL-REUSS(MISES) e o endurecimento é assumido isotrópico. O método de solução numérica adotado para resolver problemas não-lineares, foi o método incre-

mental com forças residuais.

Devido a dupla simetria, analisou-se um quarto da placa. As curvas deslocamento-carga adimensionais e a malha de elementos finitos utilizada, são mostradas na figura 5.3.1.

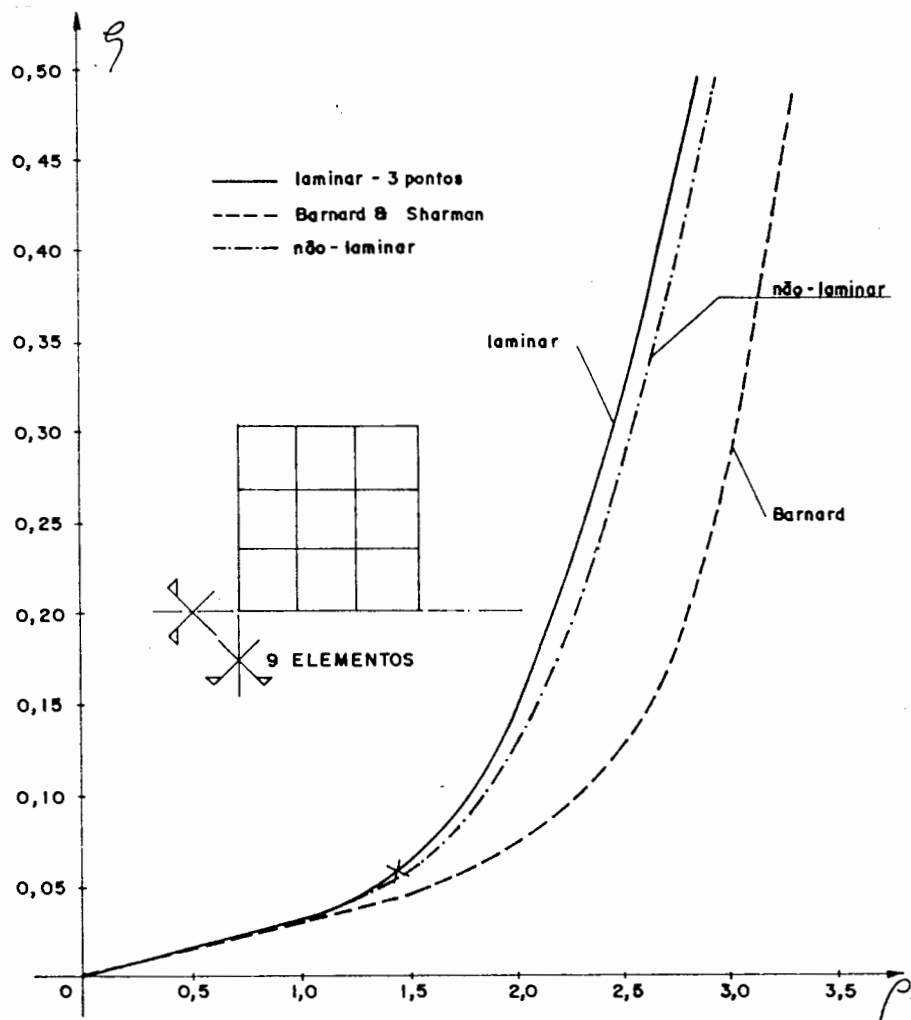


Fig. 5.3.1 - Placa quadrada engastada sob carga uniforme.

O deslocamento do ponto central ( $\zeta$ ) e a carga distribuída adimensionais ( $\rho'$ ), são definidas como:

$$\zeta = \frac{w_c D}{\alpha_1 t^2 a^2}$$

e

$$\rho' = \frac{2qa^2}{3\alpha_1 t^2}$$

onde  $w_c$  denota o deslocamento do ponto central da placa,  $q$  denota

carga uniformemente distribuída e  $D$  é a rigidez à flexão de placas, isto é

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Vê-se pela figura 5.3.1 que os resultados são próximos até certo nível de carga. No ponto da curva marcado com um X as tensões equivalentes na placa ultrapassaram a tensão limite,  $\sigma_1 = 360 \text{ N/mm}^2$ , e o programa parou. Analisando-se os resultados, observou-se que o deslocamento do ponto central, ainda na etapa elástica, é aproximadamente três vezes o valor da espessura. Isto é incompatível com a hipótese de pequenas deformações, onde a maioria dos autores admite que os deslocamentos tenha, como limite metade da espessura da placa. Em nenhuma parte do referido artigo, os autores mencionam a hipótese de grandes deformações. Majorou-se o valor da tensão limite e obteve-se, apenas para comparação, o restante da curva. Fica evidente que houve erro na conversão de unidades.

#### 5.4. Placa Simplesmente Apoiada sob Carga Uniformemente Distribuída

Neste item, compara-se as curvas carga-deslocamento adimensionais para uma placa quadrada simplesmente apoiada, discretizada com 9 elementos finitos, determinadas através da análise numérica com as curvas obtidas, também numericamente, por UEDA e YAO [20].

Os autores resolvem problemas plásticos pelo método dos elementos finitos. Utilizam um elemento triangular linear com três graus de liberdade por nó, não conforme. Trabalham com o critério de escoamento de MISES, para o exemplo em questão, e consideram o material elasto-plástico perfeito. O método numérico utilizado é chamado pelos autores de "MÉTODO DOS NÓS PLÁSTICOS".

A placa analisada é quadrada com  $a=1200\text{mm}$ , espessura  $t=60\text{mm}$ . As características mecânicas do material, são: módulo de deformação  $E=210000\text{N/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$  e tensão de escoamento  $\sigma_1=280\text{N/mm}^2$ .

A figura 5.4.1 mostra as curvas carga-deslocamento adimensionais obtidas da análise numérica deste trabalho e dos auto-

res, bem como a malha usada na discretização.

Observa-se que os resultados foram próximos aos obtidos pelos autores. Teve-se alguma dificuldade em ajustar os resultados da análise não-laminar, principalmente devido a localização do ponto intermediário no diagrama momento-curvatura.

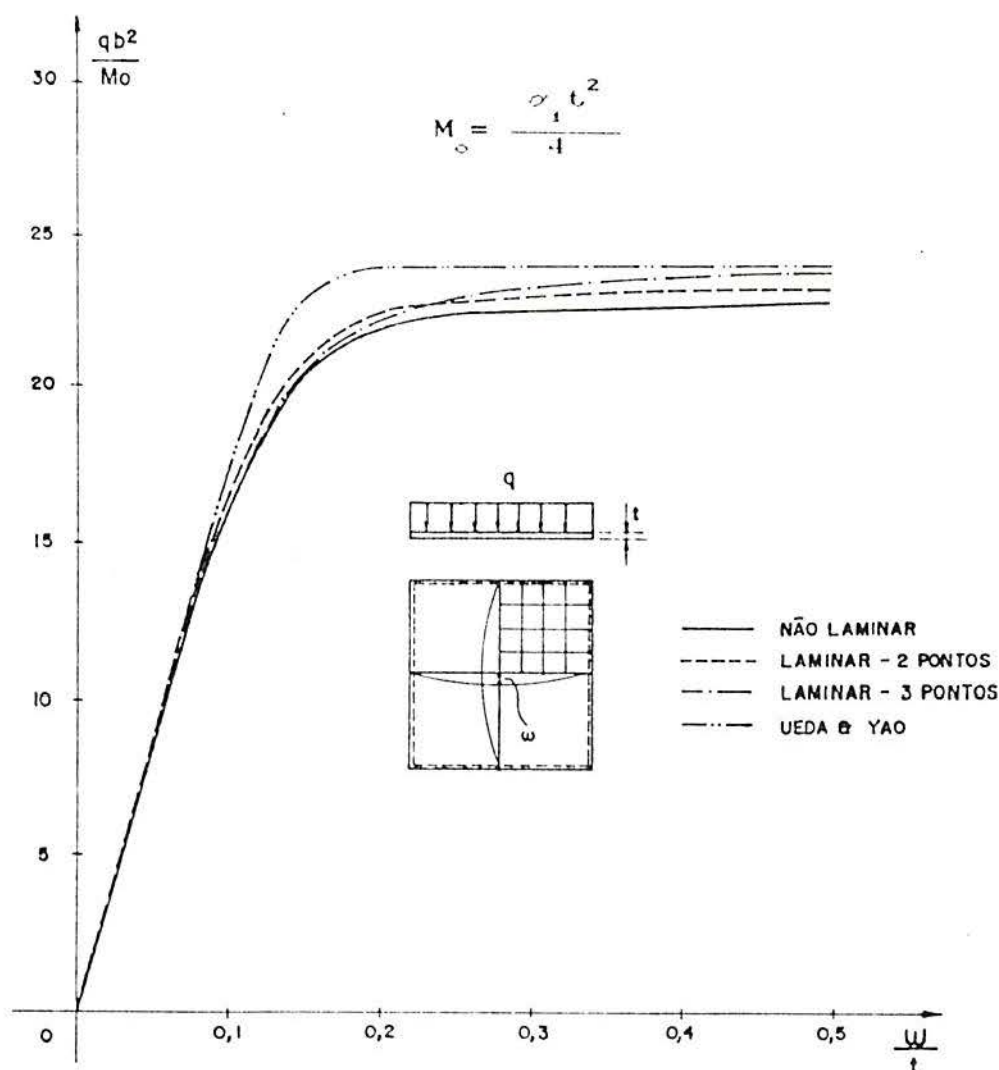


Fig. 5.4.1 - Curvas carga-deslocamento para uma placa quadrada apoiada sob carga uniforme.

Adotando-se um valor para  $K$  próximo da unidade conseguiu-se uma melhor aproximação da curva na região mais fortemente não linear, mas em compensação, a curva convergia para os resultados dos autores em um nível de deformação bem maior. Assim, após várias tentativas, tomou-se  $K=1,35$ , em que tentou-se obter um meio termo, isto é, uma curva que convergisse aos resultados do artigo sem perder a precisão numérica.

Nenhuma análise conseguiu uma boa aproximação dos resultados na região mais fortemente não-linear, o que leva a crer que os autores utilizaram uma relação momento-curvatura aproximada por duas retas, sendo a segunda reta horizontal, para representar o



comportamento do material elastoplástico perfeito.

A carga limite da placa foi de aproximadamente  $1120\text{N/cm}^2$ . A faixa de plastificação foi de 10%.

### 5.5 Placa Circular Apoiada sob Carga Concentrada

Nesta série de exemplos, pretende-se comparar os resultados obtidos experimentalmente por HUNSAKER [10], com a teoria desenvolvida nesta dissertação e os resultados apresentados por GROEHS [7].

GROEHS considera a placa circular um corpo axissimétrico. Utiliza um elemento finito axissimétrico isoparamétrico linear compressível, no regime de grandes deslocamentos.

A figura 5.5.1 mostra a malha de elementos finitos utilizada. Como o elemento é retangular há uma natural dificuldade em representar o contorno da placa. Os nós marcados com um X estão com os deslocamentos verticais ( $w$ ) impedidos.

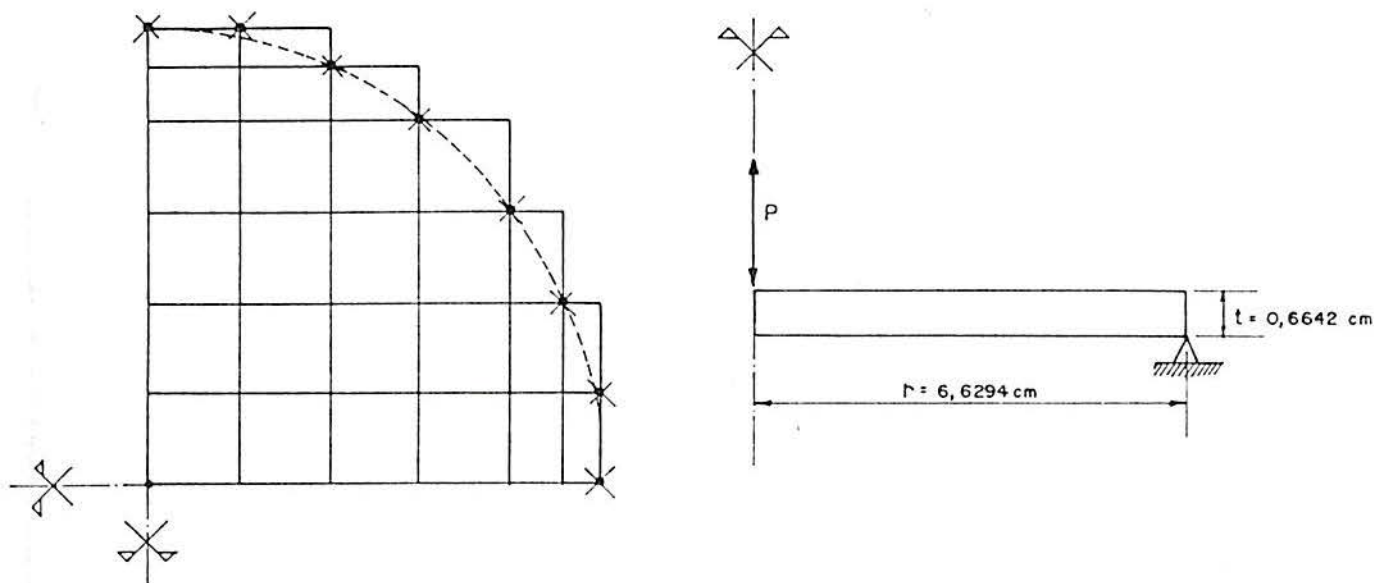


Fig. 5.5.1 - Malha de elementos finitos utilizada na discretização placa circular apoiada.

A placa circular tem raio  $r=6,6294\text{cm}$ , espessura  $t=0,6642\text{ cm}$ ,  $E=70651\text{MPa}$ ,  $\nu=0,325$  e uma curva tensão-deformação definida pelos pares ordenados  $(\epsilon=0,000995; \sigma=70,3\text{MPa})$ ,  $(\epsilon=0,0131; \sigma=140,6\text{MPa})$ ,  $(\epsilon=0,04502; \sigma=196,8\text{MPa})$ ,  $(\epsilon=0,118; \sigma=253,1\text{MPa})$  e  $(\epsilon=0,36311; \sigma=337\text{MPa})$ . Os valores de  $H$  correspondentes as quatro retas de endurecimento são respectivamente:  $6327\text{MPa}$ ,  $4200\text{MPa}$ ,  $779\text{MPa}$  e  $346\text{MPa}$ . A carga



foi considerada concentrada no centro da placa.

A análise experimental considerou a placa em grandes deformações, por isso limitou as curvas até deslocamentos compatíveis com a hipótese de pequenas deformações.

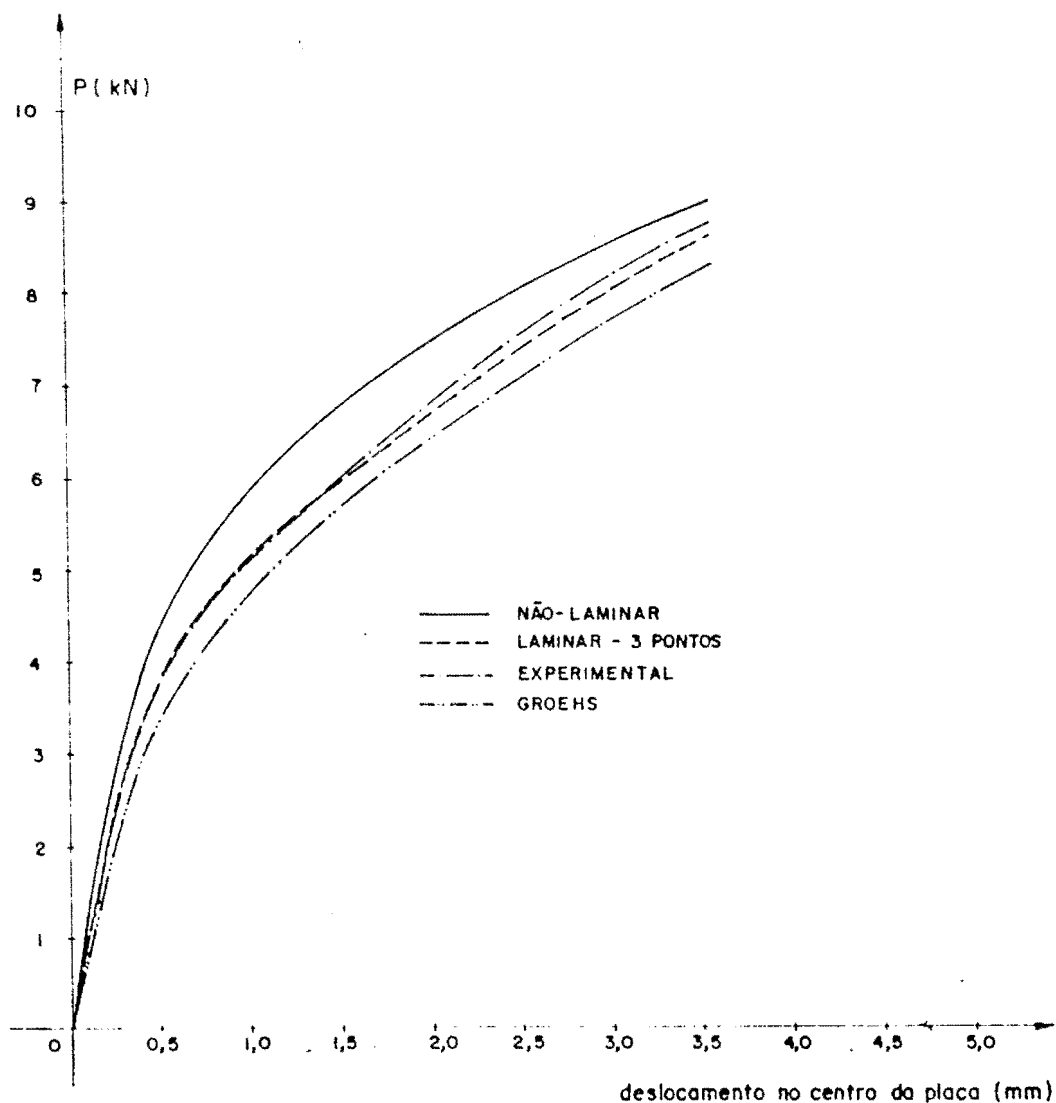


Fig. 5.5.2 - Curvas carga-deslocamentos para uma placa circular sob carga concentrada.

Pela figura 5.5.2, vê-se que a análise laminar, com três pontos de integração na espessura, praticamente coincide com os resultados experimentais. As curvas tendem a se afastar quando os deslocamentos aumentam. Isto ocorre porque a mudança de geometria da placa faz com que os esforços de membrana passem a ser significativos. Evidentemente, este efeito não pode ser simulado, admitindo-se a hipótese de pequenos deslocamentos.

Os resultados obtidos pela formulação não-laminar não foram tão precisos quanto os da formulação laminar. Pode-se expli-

car este fato pela relação tensão-deformação adotada pelo autor. Conforme foi visto no Capítulo 2, a relação momento-curvatura é sensível a variações bruscas no valor das inclinações das retas que compõem a poligonal da relação tensão-deformação. Não foi possível uma melhor aproximação das curvas, pois os autores não fornecem a curva tensão-deformação, mas apenas os pares ordenados que as definem.

Ao contrário do que acontece com GROEHS, os resultados mostram que não houve qualquer problema de incompressibilidade dos elementos.

### 5.6. Placa Circular sob Carga e Descarga

Para finalizar esta série de exemplos, estudou-se uma placa circular de mesmas características geométricas da placa anterior. As características mecânicas do material, neste exemplo, são:  $E=70651\text{MPa}$ ,  $\nu=0,325$  e a curva tensão-deformação é dada pelos pares  $(\epsilon=0,000796; \sigma=56,24\text{MPa})$ ,  $(\epsilon=0,0025; \sigma=84,36\text{MPa})$ ,  $(\epsilon=0,0925; \sigma=126,54\text{MPa})$  e  $(\epsilon=0,1; \sigma=246,05\text{MPa})$ . Os endurecimentos que correspondem as três retas são:  $21531,56\text{MPa}$ ,  $6855,2\text{MPa}$  e  $1341\text{MPa}$ , respectivamente. É aplicada uma carga concentrada no centro da placa que cresce até um determinado valor, depois decresce até zero.

A malha de elementos finitos é a mesma do exemplo anterior.

Novamente, comparou-se os resultados numéricos com HUNSAKER [10] e GROEHS [7].

Vê-se pela figura 5.6.1 que os resultados obtidos na análise laminar, utilizando três pontos de integração, foram muito bons, coincidindo com os dados experimentais. Como no exemplo anterior, os resultados da análise não-laminar não foram tão precisos quanto da análise laminar. A justificativa para isto, é novamente, a aproximação do diagrama momento-curvatura.

Neste exemplo, GROEHS considera a análise em deformações infinitesimais e representa a placa, como no exemplo anterior, como um corpo axissimétrico.

O problema da incompressibilidade não foi detectado, talvez porque a análise de placa seja análoga ao estado plano de tensões.

Segundo GROEHS, problemas de estado plano de deformações, axissimétricos e tridimensionais podem apresentar resultados inadequados.

Muitas vezes, para um material elastoplástico perfeito, por exemplo, o resultado obtido através do método dos elementos finitos é mais rígido, se comparado com os dados experimentais. A causa deste comportamento é devido ao fato que o estado de deformação próximo a carga limite, é altamente restringido, ou seja, os incrementos de deformações seriam incompressíveis.

Para resolver o problema a referência propõe a modificação do funcional a ser minimizado, ou ainda, a adoção da integração reduzida, que segundo ZIENKIEWICZ [21], é equivalente a alteração do funcional.

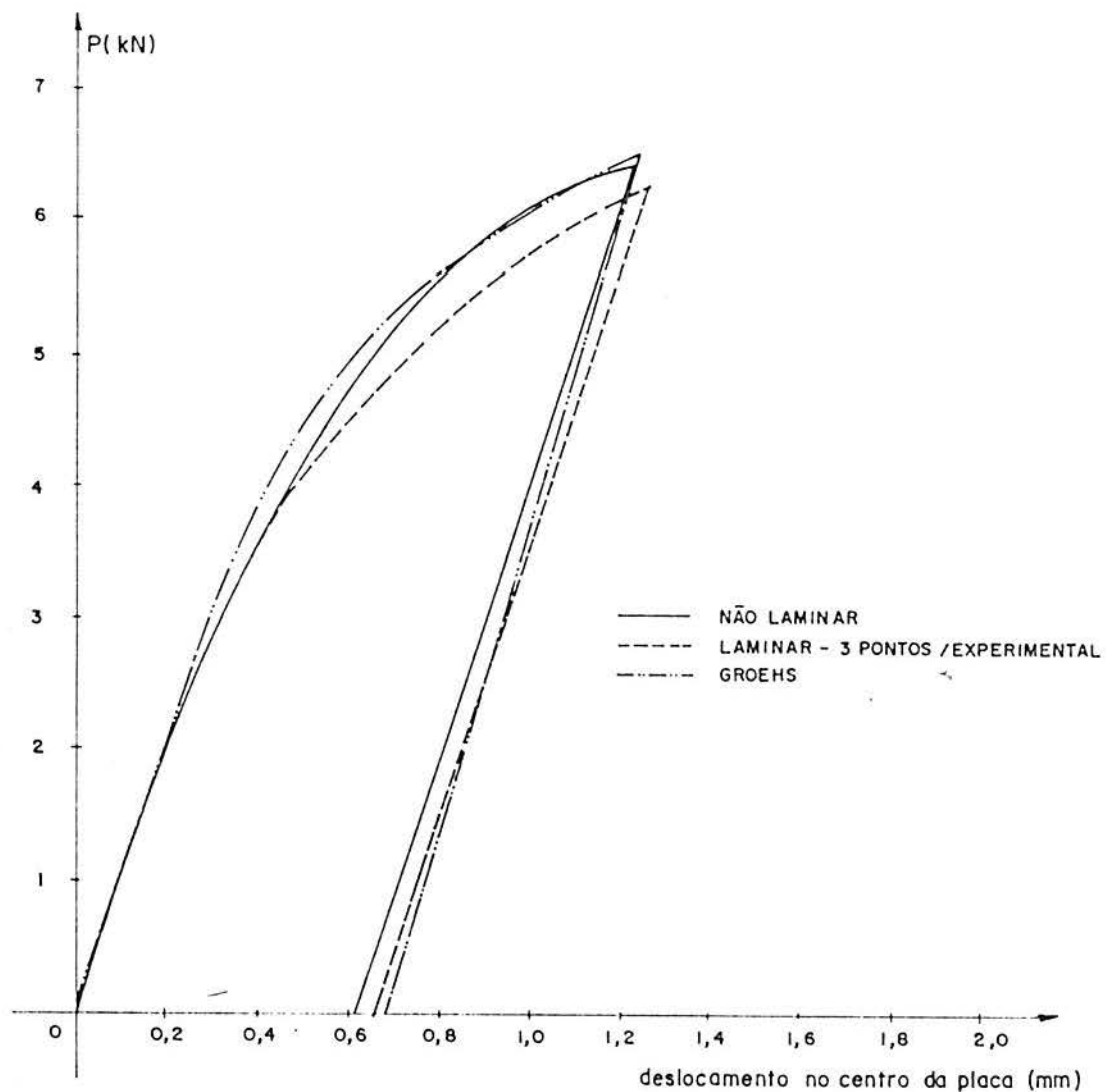


Fig. 5.6.1 - Curvas carga-deslocamentos para uma placa circular sob carga cíclica.

### 5.7. Tempos de Análise dos Exemplos

A seguir apresenta-se, em forma de tabela, os tempos computacionais gastos em todos os exemplos rodados.

É importante notar que estes tempos não são diretamente comparáveis com tempos publicados por outros autores, pois os equipamentos utilizados são os mais variados possíveis e apresentam velocidade de operação diferentes (ver referência [7]).

A tabela mostra também o número de etapas necessário em cada exemplo.

Em todos exemplos, tanto a faixa de plastificação como o incremento de carga foram tomados 10%.

| E X E M P L O S |                  | ETAPAS | TEMPOS<br>(seg.) |
|-----------------|------------------|--------|------------------|
| 1               | Não-laminar      | 66     | 78,3             |
|                 | Laminar - 2 ptos | 63     | 93,1             |
|                 | Laminar - 3 ptos | 61     | 111,2            |
| 2               | Não-laminar      | 152    | 201,1            |
|                 | Laminar - 2 ptos | 145    | 257,9            |
|                 | Laminar - 3 ptos | 140    | 266,0            |
| 3*              | Não-laminar      | 16     | 50,2             |
|                 | Laminar - 2 ptos | 20     | 55,2             |
| 4               | Não-laminar      | 34     | 230,0            |
|                 | Laminar - 2 ptos | 41     | 297,4            |
|                 | Laminar - 3 ptos | 45     | 309,7            |
| 5               | Não-laminar      | 54     | 269,6            |
|                 | Laminar - 3 ptos | 51     | 497,5            |
| 6               | Não-laminar      | 55     | 277,7            |
|                 | Laminar - 3 ptos | 42     | 335,6            |

\* Tempos até a tensão equivalente ultrapassar a tensão fornecida pelo autor.

Tab. 5.7.1 - Tempos de análise dos exemplos.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 6.1. Conclusões

Com base no desenvolvimento teórico e nos resultados obtidos apresenta-se a seguir algumas conclusões deste trabalho.

São evidentes as vantagens de uma linguagem orientada, tornando bastante simples o uso do programa.

Os resultados foram satisfatórios para todos os exemplos considerados.

As hipóteses adotadas na definição do diagrama momento-curvatura deram bons resultados.

A análise laminar com três pontos de integração deu os melhores resultados.

Como era esperado, a análise não-laminar mostrou-se mais econômica, computacionalmente, do que a análise laminar. A análise não-laminar pode tornar-se vantajosa, desde que a aproximação do diagrama tensão-deformação seja a melhor possível.

A análise não-laminar para os materiais com comportamento elastoplástico perfeito ou para materiais cujo diagrama tensão-deformação foi aproximado por duas retas, mostrou-se sensível a localização do ponto intermediário que define a diagrama momento-curvatura (ver item 2.4).

#### 6.2. Sugestões

Embora a linguagem orientada tenha vantagens evidentes, a implementação de uma geração automática de malhas de elementos finitos é importante.

O comportamento do material, neste trabalho, foi consi-



derado isotrópico. Poder-se-ia implementar a análise com endurecimento cinemático ou misto, isto é, isotrópico-cinemático.

Alguns exemplos não deram melhores resultados principalmente por causa da aproximação grosseira do diagrama momento-curvatura. Seria interessante a possibilidade de aproximar-se o diagrama momento-curvatura de maneira exata, a partir do diagrama tensão-deformação, ao invés da aproximação por poligonal.

Para tornar a análise mais geral, dever-se-ia implementar a análise não-linear geométrica para placas, levando em consideração a energia de deformação do esforço cortante.

## APÊNDICE A

Neste apêndice pretende-se demonstrar que as relações básicas da teoria clássica da plasticidade, expostas no capítulo 1 e utilizadas no capítulo 3, tanto podem ser expressas em tensões como em resultantes de tensões.

### A.1 Aditividade das Curvaturas

No capítulo 1, viu-se que a deformação específica longitudinal pode ser calculada pela soma da deformação elástica e plástica, ou seja

$$\varepsilon^t = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (\text{A.1})$$

Sabe-se que há uma relação linear entre deformação elástica e curvatura elástica, devido a hipótese de Euler-Bernoulli, como também deve existir uma dependência linear entre deformação total e curvatura total. Assim, pode-se escrever

$$\varepsilon^e = \chi^e z \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon = \chi z \quad (\text{A.3})$$

Como a soma de expressões lineares resulta em uma outra expressão linear, pode-se dizer que

$$\varepsilon^p = \chi^p z \quad (\text{A.4})$$

Assim, substituindo (A.2), (A.3) e (A.4) em (A.1), e simplificando  $z$ , obtém-se

$$\chi = \chi^e + \chi^p \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Função de Escoamento

A função de escoamento de MISES, para o estado plano de tensões, é

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = k^2 \quad (\text{A.6})$$

De maneira genérica, pode-se dizer que existe uma relação entre tensões e resultantes de tensões, da forma

$$M_x = \sigma_x \alpha \quad (\text{A.7})$$

$$M_y = \sigma_y \alpha \quad (\text{A.8})$$

$$M_{xy} = \tau_{xy} \alpha \quad (\text{A.9})$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva. Substituindo as expressões acima na equação (A.6), fica

$$\frac{M_x^2}{\alpha^2} + \frac{M_y^2}{\alpha^2} + \frac{3M_{xy}^2}{\alpha^2} - \frac{M_x M_y}{\alpha^2} = \frac{K^2}{\alpha^2} \quad (\text{A.10})$$

ou

$$M_x^2 + M_y^2 + 3M_{xy}^2 - M_x M_y = K^2 \quad (\text{A.11})$$

Uma demonstração semelhante pode ser encontrada em PRAGER [17].

## A.3 Normalidade

No capítulo 1, a relação entre a taxa de deformações plástica e o vetor de fluxo  $\underline{a}$ , conhecida como normalidade, é escrita como

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{A.12})$$

Comparando as expressões (A.6) e (A.11), pode-se afirmar que

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \underline{M}} \quad (\text{A.13})$$

Lembrando a expressão (A.4), (A.12) torna-se

$$\chi^P z = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{M}} \quad (\text{A.14})$$

Definindo  $\Lambda = \frac{\lambda}{z}$ , a expressão acima fica

$$\chi^P = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{M}} \quad (\text{A.15})$$

## APÊNDICE B

### CASCAS POLIÉDRICAS

#### B.1 Introdução

Neste apêndice descreve-se o procedimento para determinar a matriz constitutiva elastoplástica de estruturas denominadas de cascas poliédricas. Cascas poliédricas, ou folhas poliédricas, são definidas geometricamente como uma associação espacial de várias placas (para exemplos, ver referência [8]).

A determinação da matriz constitutiva elastoplástica é feita a partir da hipótese que esforços de flexão e membrana estão dissociados.

#### B.2. Matriz Constitutiva Elastoplástica

Como o método de resoluções de problemas não-lineares, descrito no Capítulo 4 é geral, somente com algumas pequenas alterações é possível adapta-lo para cascas poliédricas. Para isto, basta desenvolver a matriz constitutiva elastoplástica para o caso específico em questão (como foi realizado para o caso laminar e não laminar).

Reescrevendo a função de escoamento de MISES, vista no Capítulo 1, tem-se

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + \tau_{xy}^2 = k^2 \quad (\text{B.2.1})$$

Além disto pode-se escrever para as tensões de membrana

$$\sigma_{xm} = k_1 k \quad \sigma_{ym} = k_2 k \quad \tau_{xym} = k_3 k \quad (\text{B.2.2})$$

Para as tensões de flexão pode-se escrever

$$\sigma_{xf} = l_1 k \quad \sigma_{yf} = l_2 k \quad \tau_{xyf} = l_3 k \quad (\text{B.2.3})$$

As solicitações de membrana podem ser representadas na forma adimensional como



$$n_x = N_x / N_o = k_1 k \alpha t / \sigma_1 t = k_1 \left[ \frac{k}{\sigma_1} \right] \alpha \quad (\text{B.2.4})$$

ou

$$k_1 = \frac{n_x}{\alpha} \frac{\sigma_1}{k} \quad (\text{B.2.5})$$

$$n_y = N_y / N_o = k_2 k \alpha t / \sigma_1 t = k_2 \left[ \frac{k}{\sigma_1} \right] \alpha \quad (\text{B.2.6})$$

ou

$$k_2 = \frac{n_y}{\alpha} \frac{\sigma_1}{k} \quad (\text{B.2.7})$$

$$n_{xy} = N_{xy} / N_o = k_3 k \alpha t / \sigma_1 t = k_3 \left[ \frac{k}{\sigma_1} \right] \alpha \quad (\text{B.2.8})$$

ou

$$k_3 = \frac{n_{xy}}{\alpha} \frac{\sigma_1}{k} \quad (\text{B.2.9})$$

Substituindo a equação (B.2.2) em (B.2.1), obtém-se

$$k_1^2 k^2 - k_1 k_2 k^2 + k_2^2 k^2 + 3k_3^2 k^2 = k^2 \quad (\text{B.2.10})$$

que substituindo as equações (B.2.5), (B.2.7) e (B.2.9) em (B.2.10)

$$\frac{n_x^2}{\alpha^2} \frac{\sigma_1^2}{k^2} - \frac{n_x n_y}{\alpha^2} \frac{\sigma_1^2}{k^2} + \frac{n_y^2}{\alpha^2} \frac{\sigma_1^2}{k^2} + \frac{n_{xy}^2}{\alpha^2} \frac{\sigma_1^2}{k^2} = 1 \quad (\text{B.2.11})$$

Donde

$$n_x^2 - n_x n_y + n_y^2 + 3 n_{xy}^2 = \alpha^2 \frac{k}{\sigma_1^2} \quad (\text{B.2.12})$$

De maneira semelhante, as solicitações de flexão podem ser representadas sob a forma adimensional, por

$$m_x = M_x / M_o = (l_1 k t^2 / 4 - l_1 k (\alpha t)^2 / 4) / (\sigma_e t^2 / 4) \quad (\text{B.2.13})$$

$$m_x = \frac{l_1 k}{\sigma_e} (1 - \alpha^2) \quad \rightarrow \quad l_1 = \frac{\sigma_e}{k} \frac{m_x}{1 - \alpha^2} \quad (\text{B.2.14})$$

$$m_y = M_y / M_o = (l_2 k t^2 / 4 - l_2 k (\alpha t)^2 / 4) / (\sigma_e t^2 / 4) \quad (\text{B.2.15})$$

$$m_y = \frac{l_2 k}{\sigma_e} (1 - \alpha^2) \quad \rightarrow \quad l_2 = \frac{\sigma_e}{k} \frac{m_y}{1 - \alpha^2} \quad (\text{B.2.16})$$

$$m_{xy} = M_{xy} / M_o = (l_3 k t^2 / 4 - l_3 k (\alpha t)^2 / 4) / (\sigma_e t^2 / 4) \quad (\text{B.2.17})$$

$$m_{xy} = \frac{l_3 k}{\sigma_e} (1 - \alpha^2) \quad \rightarrow \quad l_3 = \frac{\sigma_e}{k} \frac{m_{xy}}{1 - \alpha^2} \quad (\text{B.2.18})$$

Substituindo (B.2.3) em (B.2.1), tem-se

$$l_1^2 k^2 + l_1 l_2 k^2 + l_2^2 k^2 + 3 l_3^2 k^2 = k^2 \quad (\text{B.2.19})$$

usando as equações (B.2.14), (B.2.16) e (B.2.18) em (B.2.19)

$$\frac{\sigma_e^2}{k^2} \frac{m_x^2}{(1 - \alpha^2)} - \frac{\sigma_e^2}{k^2} \frac{m_x m_y}{(1 - \alpha^2)} + \frac{\sigma_e^2}{k^2} \frac{m_y^2}{(1 - \alpha^2)} + 3 \frac{\sigma_e^2}{k^2} \frac{m_{xy}^2}{(1 - \alpha^2)} = 1 \quad (\text{B.2.20})$$

Donde

$$m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3 m_{xy}^2 = \frac{k^2}{\sigma_e^2} (1 - \alpha^2)^2 \quad (\text{B.2.21})$$

Representando por

$$m^2 = m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3 m_{xy}^2 \quad (\text{B.2.22})$$

$$n^2 = n_x^2 - n_x n_y + n_y^2 + 3 n_{xy}^2 \quad (\text{B.2.23})$$

Usando a equação (B.2.22), pode-se reescrever a equação (B.2.21) como

$$|m| = \frac{k}{\sigma_e} (1 - \alpha^2) \quad (\text{B.2.24})$$

Pela equação (B.2.22) e (B.2.24)

$$n^2 = \alpha^2 \frac{k^2}{\sigma_e^2} \quad \rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{\sigma_e^2}{k^2} n^2 \quad (\text{B.2.25})$$

Donde

$$m = \frac{k}{\sigma_e} \left(1 - \frac{\sigma_e^2}{k^2} n^2\right) = \frac{k}{\sigma_e} - \frac{\sigma_e}{k} n^2 \quad (\text{B.2.26})$$

$$F = |m| + \frac{\alpha_e}{k} n^2 - \frac{k}{\alpha_e} \quad (\text{B.2.27})$$

Tomando a derivada total em relação ao tempo:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \underline{m}} \dot{\underline{m}} + \frac{\partial F}{\partial \underline{n}} \dot{\underline{n}} + \frac{\partial F}{\partial \underline{k}} \dot{\underline{k}} \quad (\text{B.2.28})$$

Fazendo

$$\underline{a}^T = \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{n}}, \frac{\partial F}{\partial \underline{m}} \right) \quad (\text{B.2.29})$$

$$\underline{a}^T = \left\{ \frac{\partial F}{\partial n_x}, \frac{\partial F}{\partial n_y}, \frac{\partial F}{\partial n_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial m_x}, \frac{\partial F}{\partial m_y}, \frac{\partial F}{\partial m_{xy}} \right\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \right\} \quad (\text{B.2.30})$$

sendo

$$\dot{\underline{s}}^T = \left\{ \dot{\underline{n}}, \dot{\underline{m}} \right\} \quad (\text{B.2.31})$$

e

$$\underline{A} = - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{k}} \quad (\text{B.2.32})$$

assim

$$\underline{a}^T \dot{\underline{s}} + \lambda \underline{A} \quad (\text{B.2.33})$$

A equação (B.2.28) pode então ser reescrita

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \dot{\underline{s}} + \frac{\partial F}{\partial \underline{k}} \dot{\underline{k}} \quad (\text{B.2.34})$$

Supondo válido o princípio da aditividade das taxas de curvatura elástica e plástica e dos deslocamentos elástico e plásticos

$$\underline{\eta} = \begin{Bmatrix} \underline{\delta} \\ \underline{\chi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\delta}^e \\ \underline{\chi}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{\delta}^p \\ \underline{\chi}^p \end{Bmatrix} = \dot{\underline{\eta}}^e + \dot{\underline{\eta}}^p \quad (\text{B.2.34})$$

A relação entre as taxas de deslocamentos  $\dot{\underline{\eta}}^e$  e taxas de

solicitações  $\dot{\xi}$  é dada por

$$\dot{\xi} = D^S \dot{\gamma}^e \quad (\text{B.2.35})$$

A rigidez  $D^S$  pode ser calculada, lembrando que a equação (xxxxx) e a definição dos esforços adimensionais, dados por

$$\dot{n} = \dot{N} / N_0 \quad \text{e} \quad \dot{m} = \dot{M} / M_0 \quad (\text{B.2.36})$$

Sabe-se também que para as taxas de momentos específicas e curvaturas elásticas

$$\dot{M} = D^M \dot{\chi} \quad (\text{B.2.37})$$

onde

$$D = \frac{t^3}{12} D \quad (\text{B.2.38})$$

Donde

$$\dot{m} = \frac{t^3}{12 M_0} D \dot{\chi}^e = D^m \dot{\chi}^e \quad (\text{B.2.39})$$

onde

$$D^m = \frac{t^3}{12 M_0} D \quad (\text{B.2.40})$$

Por outro lado, a relação entre taxas de tensão de deformação específica elástica é

$$\dot{\sigma} = D \dot{\epsilon}^e \quad (\text{B.2.41})$$

pode-se obter uma relação entre taxas de solicitações e deformações de membrana

$$\dot{N} = \int_A \dot{\sigma} dA \quad (\text{B.2.42})$$

onde

$$dA = dt$$

Assim

$$\dot{N} = \int_{-t/2}^{t/2} \dot{\sigma} dt = \dot{\sigma} t \quad (\text{B.2.43})$$

ou 
$$\dot{\underline{N}} = t \underline{D} \dot{\underline{\zeta}}^e \quad (\text{B.2.44})$$

como

$$\dot{\underline{\zeta}}^e = \underline{B} \dot{\underline{\zeta}}^e \quad (\text{B.2.45})$$

obtém-se

$$\dot{\underline{N}} = t \underline{D} \underline{B} \dot{\underline{\zeta}}^e \quad (\text{B.2.46})$$

Pela equação (B.2.36)

$$\underline{n} = \frac{t}{N_0} \underline{D} \underline{B} \dot{\underline{\zeta}}^e = \underline{D}^m \dot{\underline{\zeta}}^e \quad (\text{B.2.47})$$

onde

$$\underline{D}^m = \frac{t}{N_0} \underline{D} \underline{B} \quad (\text{B.2.48})$$

Pelas equações (B.2.47), (B.2.48), (B.2.39) e (B.2.40)

$$\dot{\underline{s}} = \begin{Bmatrix} \dot{\underline{n}} \\ \dot{\underline{m}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D}^n & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{D}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\zeta}}^e \\ \dot{\underline{\chi}}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D}^n & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{D}^m \end{bmatrix} \underline{y}^e = \underline{D}^s \underline{y}^e \quad (\text{B.2.49})$$

Supondo válido o princípio da normalidade pelo qual a taxa de deformação plástica será perpendicular à superfície de escoamento

$$\dot{\underline{y}}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \quad (\text{B.2.50})$$

Usando (B.2.34), (B.2.49) e (B.2.50)

$$\dot{\underline{y}} = -\underline{D}^s^{-1} \dot{\underline{s}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \quad (\text{B.2.51})$$

Pré-multiplicando ambos os lados por  $\frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \underline{D}^s$



$$\frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \underline{D}^S \dot{\underline{y}} = \lambda \underline{A} + \lambda \frac{\partial F^T}{\partial \underline{s}} \underline{D}^S \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \quad (\text{B.2.52})$$

Lembrando

$$\frac{\partial F^T}{\partial \underline{s}} \underline{D}^S \dot{\underline{y}} = \lambda \left[ \underline{A} + \frac{\partial F^T}{\partial \underline{s}} \underline{D}^S \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \right] \quad (\text{B.2.53})$$

Donde

$$\lambda = \frac{\frac{\partial F^T}{\partial \underline{s}} \underline{D}^S \dot{\underline{y}}}{\underline{A} + \frac{\partial F^T}{\partial \underline{s}} \underline{D}^S \frac{\partial F}{\partial \underline{s}}} \quad (\text{B.2.54})$$

que substituída na equação da normalidade (B.2.50)

$$\dot{\underline{y}}^P = \frac{\frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \frac{\partial F^T}{\partial \underline{s}} \underline{D}^S \dot{\underline{y}}}{\underline{A} + \frac{\partial F^T}{\partial \underline{s}} \underline{D}^S \frac{\partial F}{\partial \underline{s}}} \quad (\text{B.2.55})$$

Combinando (B.2.34) e (B.2.35)

$$\dot{\underline{s}} = \underline{D}^S (\dot{\underline{y}} - \dot{\underline{y}}^P) \quad (\text{B.2.56})$$

Donde usando a (B.2.55)

$$\underline{s} = \left[ \underline{D}^S - \frac{\underline{D}^S \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \frac{\partial F^T}{\partial \underline{s}} \underline{D}^S}{\underline{A} + \frac{\partial F^T}{\partial \underline{s}} \underline{D}^S \frac{\partial F}{\partial \underline{s}}} \right] \dot{\underline{y}} \quad (\text{B.2.57})$$

Particularizando as expressões acima para o caso de corpo em tração, tentar-se-á expressar  $\underline{A}$  em função da curva tensão-deformação do material. Da equação da normalidade (B.2.50)

$$\lambda = \dot{\underline{y}}^P / \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\lambda} = \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \right) / \dot{\underline{y}} \quad (\text{B.2.58})$$

que substituindo na (B.2.32)

$$\underline{A} = - \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \frac{1}{\dot{\underline{y}}^P} \frac{\partial F}{\partial \underline{k}} \dot{\underline{k}} = \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} \frac{1}{\dot{\eta}_{ij}^P} \frac{\partial F}{\partial k} \dot{k} \quad (\text{B.2.59})$$

onde

$$\dot{k} = -R \frac{\frac{\dot{\eta}_1^P}{\eta_1^P}}{\frac{\partial F}{\partial s_i}} \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial k}} \quad (\text{B.2.60})$$

Da expressão (B.2.27) pode-se escrever que

$$\frac{\partial F}{\partial k} = - \frac{\sigma_e}{k^2} n^z - \frac{1}{\sigma_e} = - \left( \sigma_e \frac{n^z}{k^2} + \frac{1}{\sigma_e} \right) \quad (\text{B.2.61})$$

Para um corpo submetido a tração simples, apenas ter-se-á somente  $\sigma_1 = n_1 \neq 0$  e as demais  $s_i = 0$  para  $i, j \neq 1$ . Para este caso tem-se  $n^z = n_1^z = k^z / \sigma_e^z$

$$F = \frac{\sigma_e}{k} n_1^z - \frac{k}{\sigma_e} = 0 \quad (\text{B.2.62})$$

onde

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} = \frac{\partial F}{\partial n_1} = 2 \frac{\sigma_e}{k} n_1 = 2 \quad (\text{B.2.63})$$

substituindo em (B.2.60)

$$\dot{k} = R \frac{\frac{\dot{\eta}_1^P}{\eta_1^P}}{2 \left[ \sigma_e \frac{n_1^z}{k^z} + \frac{1}{\sigma_e} \right]} = R \frac{1}{\bar{k}} \frac{\dot{\eta}_1^P}{\eta_1^P} \quad (\text{B.2.64})$$

onde

$$\bar{k} = 2 \left[ \sigma_e \frac{n_1^z}{k^z} + \frac{1}{\sigma_e} \right] = \frac{4}{\sigma_e} \quad (\text{B.2.65})$$

Pode-se escrever que

$$R = \bar{k} \frac{\dot{k}}{\frac{\dot{\eta}_1^P}{\eta_1^P}} = \frac{4}{\sigma_e} \frac{dk}{d\eta_1^P} \quad (\text{B.2.66})$$

onde  $dk/d\eta_1^P$  é a inclinação no diagrama  $(n_1, \eta_1^P)$ .

## A P Ê N D I C E C

### ENTRADA DE DADOS

#### C.1. Introdução

Este apêndice descreve os principais comandos do sistema ESFINGE. A entrada de dados é feita através das seguintes etapas:

- a) Dados de Malha
- b) Dados Estruturais
- c) Dados de Carga
- d) Dados de Análise

O problema deve começar e terminar com os comando TÍTULO e FIM.

A malha ou geometria dos elementos é definida na etapa DADOS DE MALHA. Os comandos específicos desta etapa são:

COORDENADAS  
COORDENADAS MULTIPLAS  
SIMETRIA NODAL  
SEMELHANÇA NODAL  
CONETIVIDADE  
  
CONETIVIDADE MULTIPLAS  
SEMELHANÇA DE CONETIVIDADE  
TIPO DE ELEMENTOS  
ORDEM DE NOS

Os quatro primeiros comandos são utilizados para especificar as coordenadas nodais, em forma individual, múltipla ou aproveitando simetrias e semelhanças. Os próximos três comandos são úteis na especificação da conectividades dos elementos, em

forma individual, múltiplas ou aproveitando semelhanças. O comando do TIPO DE ELEMENTOS serve para especificar o tipo de elemento que se deseja usar. Com o comando ORDEM DE NOS pode-se, após especificar as coordenadas explorando semelhanças e simetrias ou usando o comando COORDENADAS MULTIPLAS, reordenar internamente os nós de maneira a obter, com a conectividade fornecida, a menor largura de banda possível.

Na etapa DADOS ESTRUTURAIS pode-se especificar os seguintes comandos:

CONSTANTES  
 CONSTANTES PLASTICAS  
 PROPRIEDADES  
 RESTRIÇÕES NODAIS

O comando CONSTANTES permite especificar as constantes físicas como o módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, módulo de elasticidade transversal, etc. No comando CONSTANTES PLASTICAS pode-se especificar dados sobre a relação tensão-deformação do material, limites de escoamento, incremento de carga, faixa de plastificação e limite de deformação. Em PROPRIEDADES especifica-se dados como: espessura do elemento, área da seção transversal, momentos de inércia, etc. As condições de contorno são especificadas através do comando RESTRIÇÕES. Neste comando são fornecidas informações sobre restrições nodais, vínculos elásticos e rotação de nós.

O carregamento é especificado na etapa DADOS DE CARGA. Nesta etapa tem-se disponíveis os seguintes comandos:

CARREGAMENTO  
 CARGAS NODAIS  
 INCOGNITAS PRESCRITAS

Outros comandos como CARGA NOS ELEMENTOS, PESO PROPRIO E VARIACAO DE TEMPERATURA NOS ELEMENTOS estão previstos mas ainda não disponíveis. Com o comando CARREGAMENTO identifica-se o carregamento a ser especificado. Para o caso de análise plásticas, sempre tem-se único carregamento. O comando CARGAS NODAIS permite fornecer as cargas aplicadas nos nós da estrutura, assim como o

comando INCOGNITAS PRESCRITAS especifica deslocamentos impostos nos nós da estrutura.

Na etapa DADOS DE ANALISE fornece-se dados sobre o tipo de análise (elástica, física, geométrica), sobre o tipo de endurecimento (isótropo, cinemático, etc...), sobre a teoria a ser utilizada (v. MISES, DRUCKER-PRAGER, etc...) e sobre o método de solução a ser usado (método incremental, NEWTON-RAPHSON, etc...).

A seguir apresenta-se a sintaxe dos comandos mencionados.

### C.2. Comandos

TITULO → "títulos" → |  
 FIM → |

#### COORDENADAS

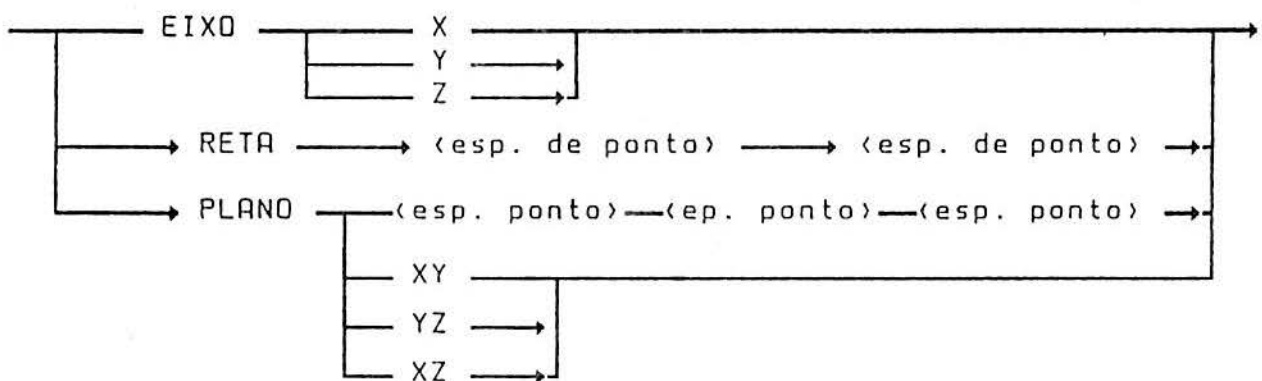
(nome dos nós) → | (X) r<sub>1</sub> (Y) r<sub>2</sub> (Z) r<sub>3</sub> | → |

#### COORDENADAS MULTIPLAS

<lista de nomes de nós> → INICIO → | (X)r<sub>1</sub> (Y)r<sub>2</sub> (Z)r<sub>3</sub> | →  
 → FIM → | (X)r<sub>1</sub> (Y)r<sub>2</sub> (Z)r<sub>3</sub> | → |

#### SIMETRIA NODAL

<lista de nós> — COM — <lista de nós> — <esp. simetria> → |  
 <esp. de simetria> :: =



#### CONETIVIDADE

(nome do elemento) → <lista de nós> → |

#### CONETIVIDADE MULTIPLA

<lista de elementos> → NOS → <lista de nós> → PASSO → i<sub>1</sub> →

#### SEMELHANCA DE CONETIVIDADE



<lista de elementos> ———— MAIS ————  $i_r$  ———— IGUAL ———— <lista elem> ———— |

## SEMELHANCA NODAL

<lista de nós> ———— COM ———— |  $X_{r_1} Y_{r_2} Z_{r_3}$  | ———— |  
 ———— IGUAL ———— <lista de nos> ———— |

## RESTRICOES NODAIS

<lista de nós> ———— TOTAL ———— |  
 ———— INCOGNITAS ———— <lista de incognitas> ———— |  
 ———— |  $T_{1r_1} T_{2r_2} T_{3r_3} K_{xr_4} K_{yr_5} K_{zr_6} KM_{xr_7} KM_{yr_8} KM_{zr_9}$  | ———— |

## TIPO DE ELEMENTO

<lista de elementos> ———— <tipo> ———— |

## CONSTANTES

<lista del elementos> ———— |  $E_{r_1} G_{r_2} \text{POISSON}_{r_3} \text{PESO}_{r_4}$  | ———— |  
 ————  $\text{ALFA}_{r_5} \text{BETA}_{r_6}$  | ———— |

## PROPRIEDADES

<lista de elementos> ———— ESPESSURA  $r_1$  ———— |  
 ————  $AX_{r_1} AY_{r_2} AZ_{r_3} IX_{r_4} IY_{r_5} IZ_{r_6}$  ———— |  
 ————  $EY_{r_7} EZ_{r_8}$  ———— |  
 ———— SECAO <nome de seção> ———— <lista de dados> ———— |

CARREGAMENTO ———— COMBINADOS ———— <nome> ———— |

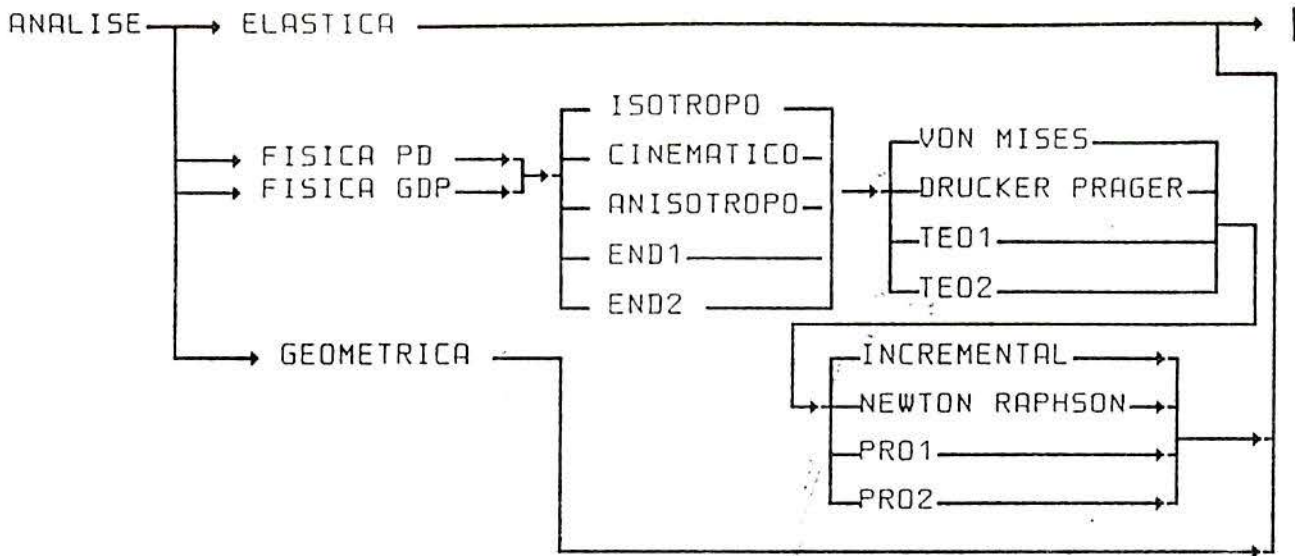
## CARGAS NODAIS

<lista de nós> ———— 1 ———— FORCA |  $X_{r_1} Y_{r_2} Z_{r_3}$  | ———— |  
 ———— 1 ———— MOMENTO |  $X_{r_1} Y_{r_2} Z_{r_3}$  | ———— |

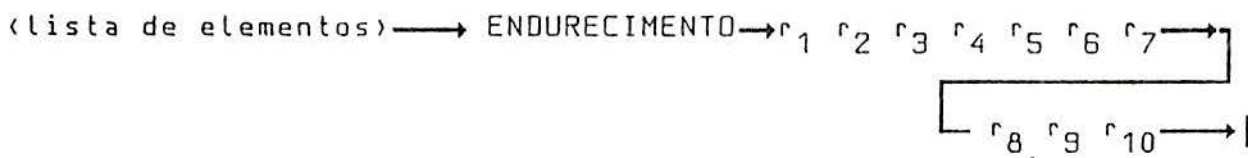
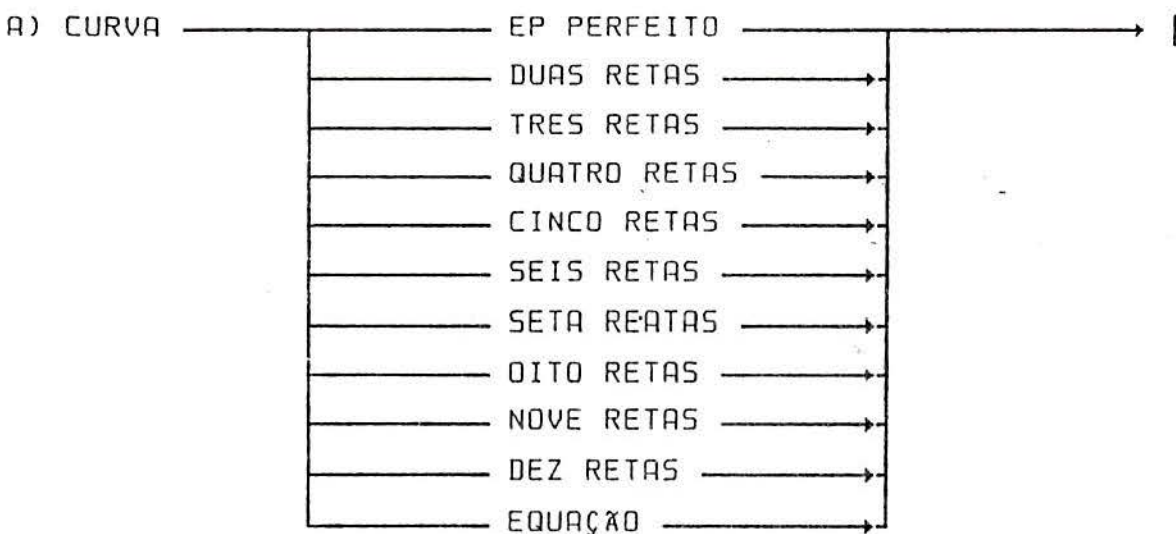
## INCOGNITAS PRESCRITAS

<lista de nós> INCOGNITAS ———— <nome de incógnitas> ———— |

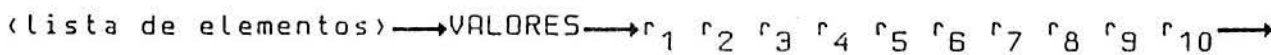
ORDEM ———— DE NOS ———— <lista de nós> ———— |



CONSTANTES PLASTICAS → |



B) LIMITES DE ESCOAMENTO



C) INCREMENTO DE CARGA → r<sub>1</sub> → |

D) LIMITE DE DEFORMAÇÃO  
 <lista de elementos> → VALORES → r<sub>1</sub> → |

E) FAIXA DE PLASTICAÇÃO → r<sub>1</sub> → |

F) NUMERO DE INTERVALOS → r<sub>1</sub> → |

C.3 EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DA LINGUAGEM

Como ilustração apresenta-se a seguir os comandos necessários para a análise da placa apresentada na Fig. C.3.1.

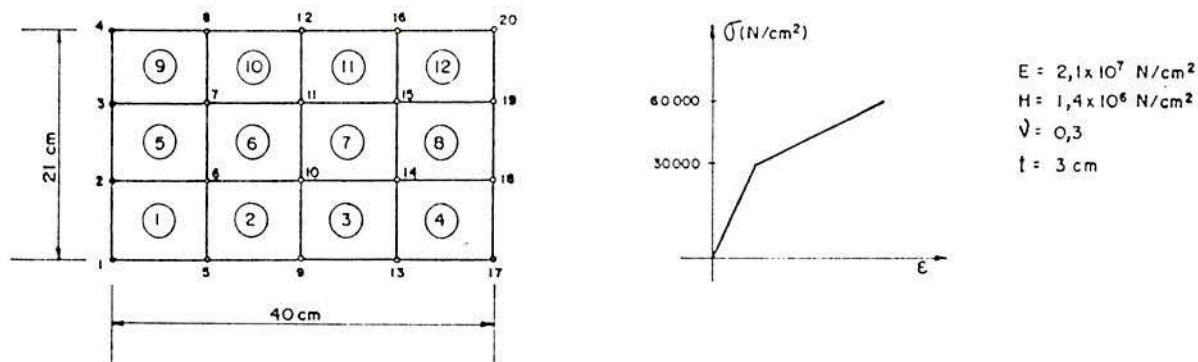


Fig. C.3.1 - Placa retangular engastada-livre.

Os comandos necessários para a análise são:

TITULO " PLACA RETANGULAR ENGASTADA-LIVRE "

DADOS DE MALHA

COORDENADAS MULTIPLAS

1 5 9 12 17 INICIO X 0. Y 0. FIM X 40. Y 0.

2 6 10 14 18 INICIO X 7. Y 0. FIM X 40. Y 7.

3 7 11 15 19 INICIO X 14. Y 0. FIM X 40. Y 14.

4 8 12 16 20 INICIO X 21. Y 0. FIM X 40. Y 21.

CONETIVIDADES MULTIPLAS

1 ATE 4 NOS 1 5 6 2 PASSO 4

5 ATE 8 NOS 2 6 7 3 PASSO 4

9 ATE 12 NOS 3 7 8 4 PASSO 4

TIPO DE ELEMENTO

TODOS FPRE

DADOS ESTRUTURAIIS

PROPRIEDADES

TODOS ESPESSURA 3.

CONSTANTES

TODOS E 2.1E7 POISSON 0.3

CONSTANTES PLASTICAS

CURVA DUAS RETAS

TODOS ENDURECIMENTO 1.4E6

LIMITE DE ESCOAMENTO

TODOS OS VALORES 30000 60000

RESTRICOES NODAIS

1 ATE 4 TOTAL

DADOS DE CARGA

CARREGAMENTO 1  
CARGAS NODAIS  
17 ATE 20 FORCA Z -1.  
DADOS DE ANALISE  
IMPRIMIR TODOS  
ANALISE FISICA PD ISOTROPO VON MISES INCREMENTAL  
FIM

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BARNARD, A. J. , SHARMAN, P. W. The elasto-plastic of plates using hybrid finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.10, p.1343-1356, 1976.
2. CHEROBIM, J. C. R. *Análise elastoplástica de estados planos de tensões e deformações*. Porto Alegre: CPGEC, 1980. 94p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia, UFRGS.
3. DUTRA, S. C. *Resolução de problemas elastoplásticos com endurecimento isótropo e cinemático pelo método dos elementos finitos*. Porto Alegre: CPGEC, 1982. 95p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia, UFRGS.
4. FEIJÓD, R. A., TAROCO, E. Introducción a plasticidad y su formulación variacional. In: CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS. Laboratório de Cálculo. *Métodos variacionais em mecânica dos sólidos*. Rio de Janeiro, 1980. v.2, p 1-156 (Escola de Matemática Aplicada,2)
5. FUNG, Y. C *Foundations of solid mechanics*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1965,
6. GROEHS, A. G. *ESFINGE - Uma linguagem orientada para cálculo elastoplástico de estruturas*. Rio de Janeiro: COPPE, 1983. 239p. Tese (Doutorado em Ciências) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
7. GROEHS, A. G. *Um estudo de tensões e deformações em folhas poliédricas utilizando o método dos elementos finitos*. Porto Alegre: CPGEC, 1975. 154p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia, UFRGS.
8. HILL, R. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford: Clarendon, 1950. 356p.
9. HODGE Jr., P. G *Plastic analysis of structures*. New York: McGraw-Hill, 1959. 364p.
10. HUNSAKER Jr., B., HAISLER, W. E., STRICKLIN, J. A. On the use of two hardening rules of platicity in incremental and



- pseudo force analysis. In: MEETING OF THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERING, 1976, New York, **Constitutive equations in viscoplasticity: computational and engineering aspects**. New York, ASME, 1976. p.139-70.
11. KACHANOW, L. M. **Foundations of the theory of plasticity**. Amsterdam: North-Holland, 1971. 482p.
  12. MALVERN, L. E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1969. 713p.
  13. MARTIN, J. B. **Plasticity: fundamentals and general results**. Cambridge: MIT Press, 1975. 931p.
  14. MASSONNET, Ch., SAVE, M. **Calculo plastico de las construcciones**. Barcelona: Montaner y Simon, 1966. v.1: Estructuras planas.
  15. MENDELSON, A. **Plasticity: theory and application**. New York: MacMillan, 1968.
  16. OWEN, D. R. J., HINTON, E. **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea: Pineridge Press, 1980. 594p.
  17. PRAGER, W., HODGE Jr., P. G. **Theory of perfectly plastic solids**. New York: Dover, 1968. 264p.
  18. PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of matrix structural analysis**. New York: McGraw-Hill, 1968. 468p.
  19. SZILARD, R. **Theory and analysis of plates: classical and numerical methods**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1974. 724p.
  20. UEDA, Y. & YAO, T. The plastic node methods: a new method of plastic analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.34, n.1/3, p.1089-1104, Sept. 1982.
  21. ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method**, 3.ed. London: McGraw-Hill, 1977. 787p.