

**ANÁLISE DINÂMICA INELÁSTICA DE PÓRTICOS
DE CONCRETO ARMADO**

VICTORIO ENRIQUE SONZOGNI

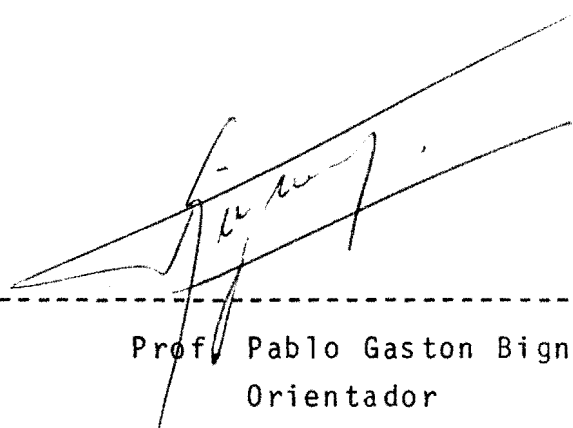
Tese apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título "MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL".

Porto Alegre

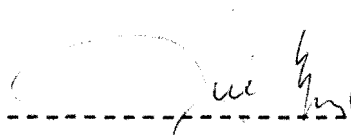
Estado do Rio Grande do Sul - Brasil

Fevereiro de 1981

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Pablo Gaston Bignon
Orientador



Prof. José Serafim Gomes Franco
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

A meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao professor Pablo Gastõn Bignon, pela segura orientação e o constante apoio recebidos no decorrer deste trabalho.

Ao professor Jorge Daniel Riera, pelas valiosas discussões em diversas etapas da pesquisa.

Ao professor José Serafim Gomes Franco, coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela confiança e o apoio que possibilitaram a realização deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e à Financiadora de Estudos e Projetos, pelo auxílio financeiro proporcionado.

Aos professores e colegas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, pela espontânea e sempre importante cooperação recebida no transcurso deste trabalho.

À srta. Liliani Gaeversen e à sra. Carmen Rodrigues pela dedicação na datilografia dos originais.

À sra. Juliana Z. de Bonilha pela preparação das referências bibliográficas.

SINOPSE

Analisa-se a resposta determinística de pórticos planos de concreto armado, submetidos a ações dinâmicas, considerando-se o seu comportamento elastoplástico. A análise é realizada numericamente, pelo método dos elementos finitos.

Apresenta-se um elemento que possui zonas extremas elastoplásticas de comprimento finito. Nas seções transversais dessas zonas, os momentos fletores e as curvaturas descrevem ciclos histeréticos bilineares, com degradação da rigidez elástica em função das deformações plásticas. No modelo estão incorporados, também, as deformações de cisalhamento, a rigidez dos nós e a interação entre os momentos de plastificação e os esforços normais.

Utilizam-se algoritmos implícitos para efetuar a integração numérica no tempo. Para a solução das equações não-lineares, segue-se um processo iterativo de rigidez constante.

Apresentam-se resultados obtidos com programas computacionais, elaborados para estudar a resposta transiente de estruturas de edifícios.

ABSTRACT

Deterministic response of reinforced concrete plane frames, subjected to dynamic actions, taking into account their elasto-plastic behavior, is analysed. Finite element method is used to perform the numerical analysis.

An element having elasto-plastic end regions of finite length is presented. Bending moments and curvatures in the transversal sections within those regions follow bilinear hysteretic cycles, with degrading elastic stiffness as a function of plastic deformations. Shear deformations, nodal rigidity and interaction between yield moments and axial forces, are also incorporated in the model.

Implicit algorithms are used to perform numerical integration in time. In order to solve the non-linear equations, an iterative process of constant stiffness is followed.

Results obtained with the aid of computer programs developed for studying transient response of building structures, are presented.

SUMÁRIO

1	- INTRODUÇÃO	1
2	- MÉTODOS DE ANÁLISE	7
2.1	- <u>GENERALIDADES</u>	7
2.2	- <u>EQUAÇÕES DO MOVIMENTO</u>	7
2.3	- <u>MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA</u>	11
2.3.1	- Desempenho dos Diferentes Métodos.....	11
2.3.2	- Método de Newmark.....	15
2.3.3	- Método Wilson - θ	18
2.3.4	- Método de Park.....	22
2.4	- <u>ALGORITMO PARA A INTEGRAÇÃO PASSO A PASSO</u>	24
3	- MODELO ESTRUTURAL	30
3.1	- <u>DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA</u>	30
3.2	- <u>CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO</u> ...	31
3.3	- <u>RIGIDEZ ELEMENTAR</u>	33
3.3.1	- Rigidez Elástica.....	33
3.3.2	- Rigidez Plástica.....	37
3.4	- <u>COMPRIMENTO DAS ZONAS PLASTIFICADAS</u>	44
3.5	- <u>INÉRCIA DO ELEMENTO</u>	49
3.6	- <u>AMORTECIMENTO</u>	51
4	- ESTRUTURA DE CONCRETO ARMADO	52
4.1	- <u>ADEQUAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO</u>	52
4.2	- <u>COMPORTAMENTO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO</u> <u>ARMADO</u>	53
4.2.1	- Resultados de Ensaios Quase-Estáticos	54
4.2.2	- Resultados de Ensaios Dinâmicos.....	58
4.3	- <u>EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DE SEÇÕES FLEXO-</u> <u>-COMPRIMIDAS</u>	60

4.4 -	<u>DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO CICLO HISTERÉTICO</u> ...	67
4.5 -	<u>RIGIDEZ AO CISALHAMENTO</u>	74
5 -	PROGRAMAS COMPUTACIONAIS IMPLEMENTADOS	75
5.1 -	<u>GENERALIDADES</u>	75
5.2 -	<u>POSSIBILIDADES DO PROGRAMA ANDEN</u>	78
5.2.1 -	Tipo de Estrutura.....	78
5.2.2 -	Formas de Solicitação.....	78
5.2.3 -	Modos de Análise e Resultados.....	79
5.3 -	<u>CARACTERÍSTICAS ESPECÍFICAS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL</u>	82
5.3.1 -	Cálculo das Forças Incrementais Não-Lineares.....	82
5.3.2 -	Teste da Convergência das Iterações..	88
5.3.3 -	Cálculo do vetor das forças resistentes.....	89
5.3.4 -	Solução do Sistema de Equações Lineares.....	90
6 -	RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO PROGRAMA	91
6.1 -	<u>GENERALIDADES</u>	91
6.2 -	<u>SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE</u>	91
6.3 -	<u>VIGA SOBRE APOIO ELASTOPLÁSTICO</u>	98
6.4 -	<u>PÓRTICO SIMPLES DE CONCRETO ARMADO</u>	102
6.5 -	<u>PÓRTICO DE SEIS ANDARES</u>	111
6.6 -	<u>EDIFÍCIO DE DEZ ANDARES</u>	119
7 -	CONCLUSÕES	129
8 -	ANEXOS	133
8.1 -	<u>RELAÇÃO ENTRE OS DIAGRAMAS P-δ e M-X PARA UMA VIGA</u>	133

8.2 - <u>COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES 3.3.2.12</u>	137
LISTA DE SÍMBOLOS	138
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento da estrutura de edifícios de concreto armado frente a solicitações dinâmicas determinísticas. Estas solicitações podem provir de cargas aplicadas sobre o edifício, como no caso do vento, impacto ou explosões, ou de um movimento da base, como no caso de terremotos. Na análise, considerar-se-ão as não-linearidades físicas decorrentes do comportamento elastoplástico da estrutura, não sendo levadas em conta as não-linearidades de ordem geométrica.

A resposta da estrutura frente a solicitações que acontecem várias vezes na vida da construção, pode ser estudada mediante análises lineares. Já para eventos extremos ou mesmo moderados, é necessário fazer uma análise não linear para se obter um conhecimento mais realístico da resposta. No caso de sismos, por exemplo, o comportamento plástico da estrutura desempenha um papel muito importante na absorção de parte da energia transmitida ao edifício pelo terremoto, e uma análise linear da resposta frente a sismos moderados evidenciaria solicitações muito além das que a estrutura poderia resistir [26].

A idealização estrutural segue os lineamentos do método dos elementos finitos, onde a estrutura contínua, com infinitos graus de liberdade, é discretizada, resultando um sistema com um número finito de graus de liberdade.

Essa discretização pode ser feita em diferentes níveis [49]. Em um primeiro nível, uma idealização macroscópica baseia-se em modelos mecânicos simplificados de partes do edifício, como um piso completo, por exemplo. Este tipo de idealização é interessante para edifícios altos pelo pouco esforço computacional requerido e muito útil pa

ra se obterem estimativas da resposta global nas primeiras etapas do projeto. O principal inconveniente que apresenta é a dificuldade para modelar adequadamente o edifício e encontrar as relações força-deslocamento necessárias.

Um segundo nível da discretização consiste em representar cada elemento estrutural (pilar, cortina, ou viga) com um modelo discreto, adotando uma distribuição das deformações inelásticas e relações força-deformação simplificadas. Assim, é possível analisar edifícios de tamanho moderado com um esforço computacional razoável.

O terceiro nível corresponde a uma representação microscópica, na qual os membros estruturais são subdivididos em elementos. Este tipo de idealização é empregado para estudar o comportamento local de seções críticas, como extremos de vigas ou pilares, uniões e zonas de momentos máximos. As relações constitutivas são consideradas através das leis tensão-deformação dos materiais componentes. A utilização destes modelos para a análise da estrutura global em geral resulta proibitiva devido ao tamanho do problema e ao custo do processamento.

A modelação estrutural feita neste trabalho corresponde ao segundo nível descrito.

Muitas pesquisas têm sido realizadas na busca de uma melhor representação do comportamento das estruturas de concreto armado, especialmente em conexão com problemas sísmicos [29, 49, 55, 78].

Uma idealização comumente utilizada é a de supor as deformações inelásticas concentradas nas extremidades dos membros. Por este caminho, foram desenvolvidos elementos baseados em dois componentes paralelos, dos quais um é elástico e o outro elastoplástico com rótulas concentradas nas extremidades [29]. Desta forma, é possível re-

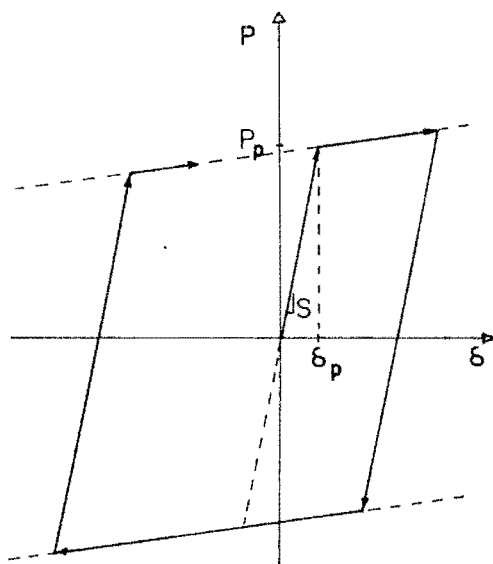
presentar uma relação bilinear entre momentos e rotações.

Outros elementos têm sido desenvolvidos baseados em um único componente elástico unido aos nós através de molas rotacionais, de comprimento nulo, que podem ter diferentes diagramas momento-rotação [49].

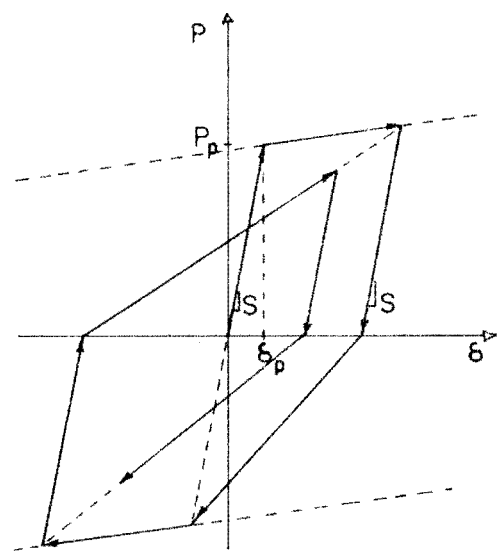
As relações força-deslocamento propostas para estruturas de concreto armado submetidas à flexão, em geral, têm seguido o padrão do ciclo bilinear (figura 1.1.a). Uma característica observada experimentalmente é a degradação de rigidez com o avanço das deformações plásticas [14]. Para incorporar este efeito, têm sido propostas diferentes soluções. Baseados em resultados experimentais, Clough e Johnston [3] desenvolveram um modelo hysterético trilinear (figura 1.1.b). Takeda e colaboradores formularam um conjunto de regras para acompanhar as respostas medidas em pilares flexionados de concreto armado, resultando em um ciclo hysterético do tipo da figura 1.1.c [42]. Um modelo relativamente simples foi apresentado por Imbeault e Nielsen [42], no qual considera-se uma deterioração da rigidez elástica em função dos máximos deslocamentos atingidos, da forma indicada na figura 1.1.d.

Yoshioka e colaboradores elaboraram um modelo composto de um segmento elástico unido aos nós através de molas rotacionais não-lineares que seguem o ciclo hysterético de Takeda [49]. Umemura e colaboradores consideraram uma distribuição parabólica das rigidezes do elemento. As rigidezes nas extremidades seguiam um ciclo hysterético trilinear degradante e, no ponto de inflexão, tomava-se a rigidez inicial [49].

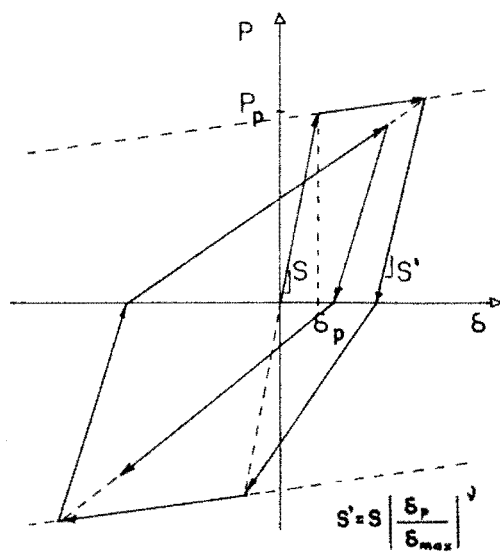
Uma parcela importante das deflexões são devidas ao escorregamento da armadura nas uniões de vigas com pilares ou em zonas de momentos máximos. Isto foi conside-



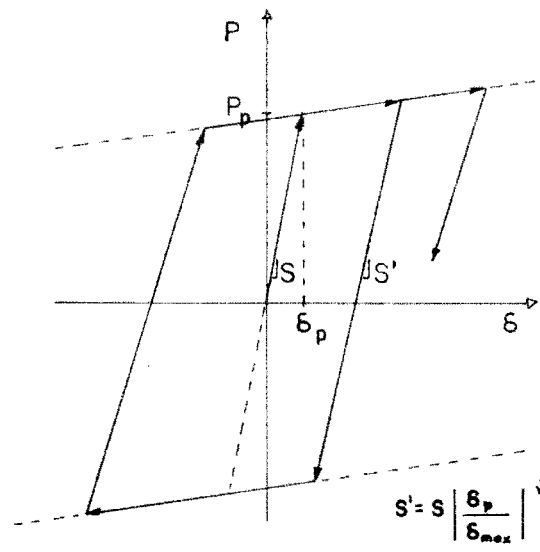
a) Modelo bilinear



b) Modelo de Clough



c) Modelo de Takeda



d) Modelo de Imbeault e Nielsen

Fig. 1.1. Modelos histeréticos para as relações força-deslocamento em peças flexionadas de concreto armado [42].

rado num modelo implementado por Otani através de molas rotacionais nos extremos de um elemento baseado em dois componentes [55]. Anderson e Townsend utilizaram um modelo composto de um segmento central e dois segmentos extremos com suas rigidezes reduzidas, seguindo todos eles diagramas momento-curvatura do tipo da figura 1.1.b [3]. Um elemento similar foi proposto por Soleimani [69], porém adicionando molas rotacionais nas extremidades, a fim de levar em conta explicitamente a deterioração da ancoragem.

No presente trabalho, foi desenvolvido um elemento para pórtico plano que apresenta um comportamento elástico até serem atingidos, nas extremidades, os momentos de plastificação dessas seções. Para momentos crescentes, aparecem zonas plastificadas, cujos comprimentos dependem da distribuição dos momentos fletores na peça. As seções dessas regiões plásticas têm uma relação momento-curvatura do tipo bilinear, com uma degradação da rigidez inicial da seção seguindo a lei da figura 1.1.d. Os momentos de plastificação, por sua vez, são funções das forças axiais que solicitam o elemento. Além disso, o modelo, cuja descrição é feita na seção 3, possui dois extremos rígidos para simular as conexões de dimensão finita entre as vigas e os pilares ou tabiques.

A determinação dos parâmetros necessários para que o modelo possa representar o comportamento das estruturas de concreto armado é tratada na seção 4, seguindo-se as diretrizes da Norma Brasileira NB-1/78 [4].

A integração das equações do movimento é realizada em forma direta, passo a passo, e os métodos utilizados estão apresentados na seção 2. Indicam-se, na seção 5, algumas características do programa computacional elaborado para efetuar a análise. A seção 6 contém os resultados obtidos na aplicação do programa e as principais con-

clusões tiradas deste estudo.

2. MÉTODOS DE ANÁLISE

2.1 - GENERALIDADES

Nesta seção apresentam-se os métodos para a integração numérica das equações não-lineares do movimento, utilizados neste trabalho.

A discretização da estrutura é feita pelo método dos elementos finitos que se baseia na representação da resposta do sistema, que, em geral, tem uma distribuição espacial contínua, em um espaço de dimensão finita definido por um conjunto de coordenadas generalizadas. Esta discretização será tratada na seção 3. No entanto, observar-se-á aqui que a estrutura será representada através de um modelo com um número finito N de graus de liberdade. Com o vetor \underline{U} de N componentes, indica-se o conjunto de deslocamentos generalizados associados aos graus de liberdade.

2.2 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

As equações do movimento para um sistema estrutural podem ser formuladas por aplicação do princípio de D'Alembert a cada um dos seus graus de liberdade [30]. Assim, verifica-se para o grau de liberdade j , no instante t

$$F_a^j + F_e^j - F_i^j = P_t^j \quad (2.2.1)$$

onde F_i representa a força de inércia, F_a a força amortecedora, F_e a força resistente interna e P a força externa aplicada. Todas elas associadas ao grau de liberdade j e avaliadas no tempo t . Com a palavra força está indicando-se uma ação generalizada em correspondência com o respectivo grau de liberdade. As N equações 2.2.1 expres

sam-se na forma matricial

$$\underline{F}_a_t + \underline{F}_e_t - \underline{F}_i_t = \underline{P}_t \quad (2.2.2)$$

sendo \underline{F}_i o vetor das forças de inércia, \underline{F}_a o vetor das forças de amortecimento, \underline{F}_e o vetor das forças resistentes internas e \underline{P} o vetor das forças externas aplicadas.

As forças de inércia \underline{F}_i podem ser escritas

$$\underline{F}_i_t = - \underline{M} \underline{\ddot{U}}_t \quad (2.2.3)$$

onde $\underline{\ddot{U}}_t$ é um vetor que contém as acelerações dos graus de liberdade e \underline{M} é a matriz de massa da estrutura. Desse modo, a equação 2.2.2 fica na forma

$$\underline{M} \underline{\ddot{U}}_t + \underline{F}_a_t + \underline{F}_e_t = \underline{P}_t \quad (2.2.4)$$

considerando-se a matriz de massa invariante no tempo.

Se a estrutura, em vez de estar solicitada por um carregamento externo, encontra-se submetida a um movimento da base u_t^0 na direção de um dos eixos coordenados, nas expressões anteriores modifica-se apenas o vetor das forças de inércia. Este deve agora ser expresso em termos da aceleração total das massas:

$$\underline{F}_i_t = - \underline{M} (\underline{\ddot{U}}_t + \underline{L} \ddot{u}_t^0) \quad (2.2.5)$$

sendo \underline{U}_t o vetor dos deslocamentos relativos à base e \underline{L} um vetor topológico com valores unitários em correspondência aos graus de liberdade paralelos ao movimento e com valores nulos nas restantes posições. A equação 2.2.2 fica então

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}_t + \underline{F}_a \dot{\underline{U}}_t + \underline{F}_e \underline{U}_t = - \underline{M} \underline{L} \ddot{u}_t^0 \quad (2.2.6)$$

A partir daqui, a equação do movimento escrever-se-á na forma 2.2.4, incluindo-se no vetor \underline{P}_t tanto as ações externas quanto as forças equivalentes que resultam de movimentos da base, como aparece no segundo membro da equação 2.2.6. Salienta-se que em todos os casos o vetor \underline{U}_t refere-se a deslocamentos relativos à base.

Em problemas lineares, o vetor das forças resistentes internas \underline{F}_e é de natureza elástica e tem a forma:

$$\underline{F}_e \underline{U}_t = \underline{K} \underline{U}_t \quad (2.2.7)$$

e o vetor \underline{F}_a , admitindo-se um amortecimento do tipo viscoso, escreve-se

$$\underline{F}_a \dot{\underline{U}}_t = \underline{C} \dot{\underline{U}}_t \quad (2.2.8)$$

Nessas expressões, \underline{K} e \underline{C} são, respectivamente, as matrizes de rigidez e de amortecimento da estrutura, invariantes no tempo, e $\dot{\underline{U}}_t$ é a derivada primeira de \underline{U}_t em relação ao tempo. A equação 2.2.4, portanto, fica:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}_t + \underline{C} \dot{\underline{U}}_t + \underline{K} \underline{U}_t = \underline{P}_t \quad (2.2.9)$$

Se a matriz \underline{C} escreve-se como uma combinação linear das matrizes \underline{M} e \underline{K} , uma transformação da equação 2.2.9, tomando-se como base os modos normais da estrutura não amortecida, fornece um sistema de equações desacopladas. Por esta via, pode-se obter a resposta linear em qualquer instante t por superposição modal [30]. Uma outra forma de resolução é por integração direta das equações do movimento. Este processo pode resultar conveniente em problemas

lineares, quando se deseja obter a resposta para tempos relativamente curtos e quando a participação dos modos superiores é significativa.

Em problemas não-lineares, onde a superposição das respostas não é mais válida, utilizam-se métodos de integração direta⁽¹⁾. Este é o caminho seguido no presente estudo e, para isso, a equação do movimento deve ser escrita na forma incremental.

Se, para um acréscimo de tempo Δt indica-se como $\Delta \underline{U}_t$ o incremento do vetor de deslocamentos, isto é

$$\Delta \underline{U}_t = \underline{U}_{t+\Delta t} - \underline{U}_t \quad (2.2.10)$$

e utiliza-se uma designação análoga para os outros vetores, a equação 2.2.4 no tempo $t+\Delta t$ fica:

$$\underline{M} \Delta \ddot{\underline{U}}_t + \Delta \underline{F}_{a_t} + \Delta \underline{F}_{e_t} = \underline{P}_{t+\Delta t} - \underline{M} \ddot{\underline{U}}_t - \underline{F}_{a_t} - \underline{F}_{e_t} \quad (2.2.11)$$

Nesta análise, admitir-se-á um amortecimento do tipo viscoso com a matriz \underline{C} invariante no tempo, pelo que o vetor \underline{F}_{a_t} é dado pela fórmula 2.2.8. Deste modo, as não-linearidades consideradas ficam restritas às forças resistentes internas \underline{F}_{e_t} . O acréscimo destas forças pode ser decomposto em uma parte linear e outra não-linear:

$$\Delta \underline{F}_{e_t} = \underline{K} \Delta \underline{U}_t + \Delta \underline{F}_{e_t}^{NL} \quad (2.2.12)$$

sendo \underline{K} a matriz de rigidez inicial. Levando em conta 2.2.8 e 2.2.12, a equação 2.2.11 toma a forma

(1) No entanto, técnicas baseadas na decomposição modal têm sido utilizadas na análise de problemas não-lineares [73, 43].

$$\underline{M} \Delta \ddot{\underline{U}}_t + \underline{C} \Delta \dot{\underline{U}}_t + \underline{K} \Delta \underline{U}_t = \underline{P}_{t+\Delta t} - \underline{M} \ddot{\underline{U}}_t - \underline{C} \dot{\underline{U}}_t - \underline{F}_{e_t} - \Delta \underline{F}_{e_t}^{NL} \quad (2.2.13)$$

Esta é a forma incremental da equação do movimento, que será resolvida em cada passo no tempo pelos métodos descritos na seção seguinte.

2.3 - MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

2.3.1 - Desempenho dos Diferentes Métodos

Existem numerosos métodos para a integração no tempo da equação 2.2.13. Em geral, eles se baseiam na assunção de uma forma de variação dos deslocamentos, velocidades e acelerações dentro do intervalo de tempo, podendo-se substituir as derivadas por fórmulas em diferenças envolvendo um incremento de tempo, nos métodos de passo único, ou vários incrementos de tempo, nos métodos de passo múltiplo.

Os processos nos quais os valores dos deslocamentos, ou suas derivadas, são expressos totalmente em termos dos valores obtidos em passos anteriores, denominam-se explícitos. Entre estes, o método das diferenças finitas centrais tem sido indicado como o mais eficiente em problemas lineares e não-lineares [1, 59]. Este algoritmo é simples de implementar computacionalmente. Seu principal inconveniente, no entanto, reside na sua estabilidade condicional, mesmo para problemas lineares.

Nos processos denominados implícitos, as fórmulas para representar as derivadas dos deslocamentos num passo determinado, contêm os próprios deslocamentos correspondentes a esse passo. Têm sido desenvolvidos vários algoritmos que utilizam fórmulas implícitas e para os quais pode-se garantir, em problemas lineares, uma estabilidade

incondicional. Entre os processos que demonstram melhor desempenho, três deles foram estudados visando as aplicações computacionais: os métodos de Newmark ($\beta = 0,25$), Wilson- θ ($\theta = 1,4$) e de Park. As fórmulas correspondentes são apresentadas nas três seções seguintes, enquanto o algoritmo unificado para a integração da equação do movimento vem tratado na seção 2.4.

Em problemas lineares, os três métodos são incondicionalmente estáveis. O de Newmark, sempre que $\beta \geq 0,25$. O de Wilson, para $\theta \geq 1,37$ (vide seções 2.3.2 e 2.3.3).

No que diz respeito à precisão, na figura 2.1 apontam-se os resultados da análise de um sistema de um grau de liberdade reportados na referência 57. Pode-se observar que o método de Newmark não introduz amortecimento numérico, isto é, não produz distorção na amplitude da resposta. O comportamento do método Wilson- θ é similar ao de Park, exibindo este um menor amortecimento numérico para tamanhos do passo inferiores a 20% do período da resposta. Verifica-se que os três métodos modificam a frequência da resposta, sendo que o de Newmark apresenta os menores valores de distorção, e o de Park, os maiores.

Em problemas não lineares, trabalhos de Park [59], com equações de um grau de liberdade, mostram que os limites de estabilidade, isto é, o maior tamanho do passo para o qual mantêm-se a estabilidade da solução, são maiores, no método de Park, do que nos outros dois. O de Newmark apresenta os menores limites de estabilidade (figura 2.2). Adeli e colaboradores [1] constataram que, em problemas com não-linearidade física e geométrica, o algoritmo de Park foi um pouco melhor que o de Newmark. Têm sido apresentados critérios energéticos de convergência para o processo iterativo que garantem a estabilidade incondicio-

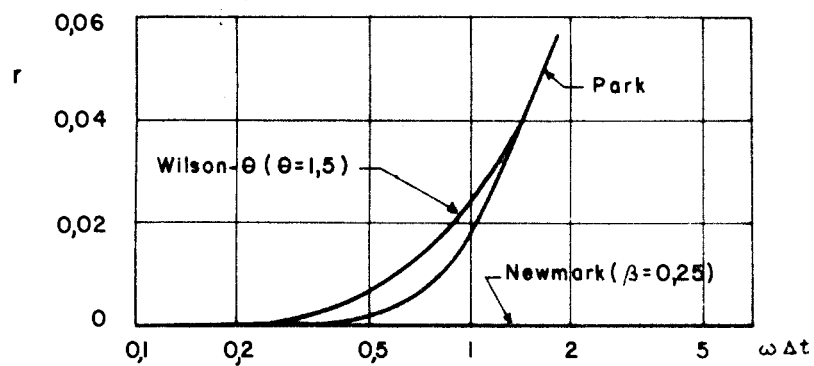
Equação: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Período linear: $T = 2\pi/\omega$

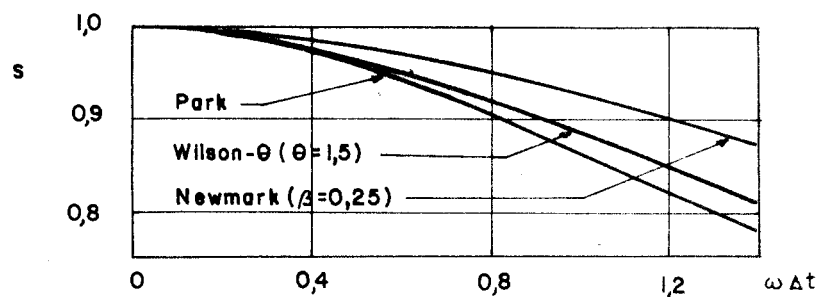
Solução Exata: $x_n = \text{EXP} [\pm i \omega n \Delta t]$

Solução Numérica: $x_n = \text{EXP} [-(r \pm is) \omega n \Delta t]$

a) Solução do problema



b) Distorção da amplitude



c) Distorção da frequência

Fig. 2.1. Desempenho dos métodos de integração numérica em problemas lineares [57].

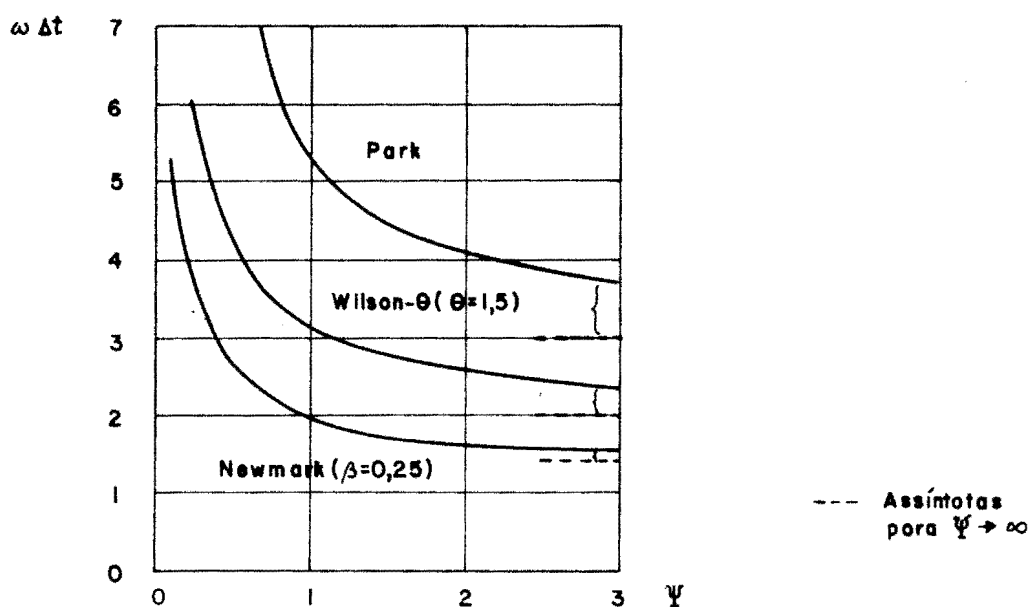
Equação: $\ddot{x} + \omega^2 x + p(x) = 0$

Termo de força não-linear: $p(x_n) = 2 p(x_{n-1}) - p(x_{n-2})$

Parâmetro de não-linearidade: $\Psi = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial p(x)}{\partial x}$

Período linear: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

- a) Problema resolvido pelo método da pseudo-força, com extrapolação linear do termo de força não-linear.



- b) Limites de estabilidade em função da não-linearidade

Fig. 2.2. Desempenho dos métodos de integração numérica em problemas não-lineares [59].

nal do método de Newmark ($\beta = 0,25$) em problemas com não-linearidade física e geométrica [10, 41].

2.3.2 - Método de Newmark

O método de Newmark é um processo de passo único, no qual a velocidade e o deslocamento num instante $t+\Delta t$ são dados pelas expressões 2.3.2.1 e 2.3.2.2. Nesta seção, como nas duas seguintes, as variáveis serão tratadas como escalares por simplicidade na notação, sendo que todas as fórmulas apresentadas valem também quando se tratar de vetores.

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \left[(1 - \gamma) \ddot{U}_t + \gamma \ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (2.3.2.1)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \dot{U}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}_t + \beta \ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (2.3.2.2)$$

Estas duas, junto com a equação do movimento, completam o sistema de equações que permite determinar as três incógnitas U , \dot{U} e \ddot{U} no instante $t+\Delta t$.

Variando-se os parâmetros γ e β , obtêm-se diferentes fórmulas para a interpolação das incógnitas no intervalo de tempo. Podem ser escolhidos valores apropriados para estes parâmetros de modo a satisfazer exigências de estabilidade e precisão. É possível demonstrar que o processo introduz um amortecimento numérico proporcional a $(\gamma - 0,5)$. Assim, valores de γ menores que 0,5 fornecem um amortecimento negativo que conduz a uma vibração auto-excitada do ponto de vista numérico. Por outro lado, $\gamma > 0,5$ produz uma diminuição na amplitude da resposta, ainda que no problema físico não exista amortecimento [53]. Em

conseqüência disso, o valor de γ toma-se igual a 0,5, não introduzindo-se distorção da amplitude devido ao processo numérico de integração, em problemas lineares.

O parâmetro β está relacionado com a variação da aceleração dentro do intervalo de tempo. Alguns desses valores têm uma correspondência física como se indica na figura 2.3. O valor $\beta = 1/6$ corresponde a uma variação linear das acelerações; $\beta = 1/4$ representa uma aceleração média constante; uma função salto com os valores de aceleração correspondentes aos extremos do intervalo é obtida com $\beta = 1/8$ e $\beta = 0$ representa pulsos duplos no começo e fim de cada intervalo, com valor igual à metade da aceleração vezes o intervalo de tempo. É possível demonstrar que, para problemas lineares, o algoritmo é incondicionalmente estável para valores de $\beta \geq 1/4$. Valores menores que 1/4 incrementam o velocidade de convergência do processo, perdendo, porém, a estabilidade incondicional [53].

Assim, com base no anteriormente apontado, adotar-se-ão os valores de $\gamma = 0,5$ e $\beta = 0,25$ para este algoritmo.

Das equações 2.3.2.1 e 2.3.2.2, os incrementos na velocidade e na aceleração podem ser escritos como funções do incremento do deslocamento. Assim, da equação 2.3.2.2, tira-se

$$\Delta \ddot{U}_t = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta U_t - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{U}_t - \frac{1}{2\beta} \ddot{U}_t \quad (2.3.2.3)$$

Introduzindo esta expressão na 2.3.2.1, tem-se

$$\Delta \dot{U}_t = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta U_t - \frac{\gamma}{\beta} \dot{U}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{U}_t \quad (2.3.2.4)$$

As incógnitas correspondentes ao tempo $t + \Delta t$ ficam da

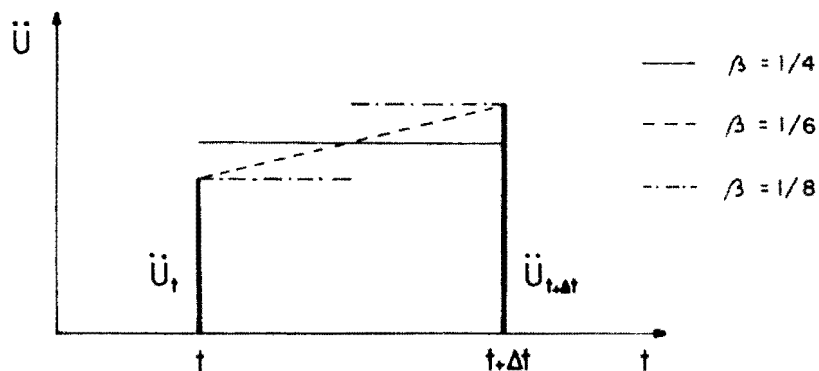


Fig. 2.3. Interpolação das acelerações no intervalo de tempo para o método de Newmark.

forma

$$U_{t+\Delta t} = \Delta U_t + U_t \quad (2.3.2.5)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = a_1 \Delta U_t - a_4 \dot{U}_t - a_5 \ddot{U}_t \quad (2.3.2.6)$$

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = a_0 \Delta U_t - a_2 \dot{U}_t - a_3 \ddot{U}_t \quad (2.3.2.7)$$

onde as constantes a_i têm os seguintes valores:

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}$$

$$a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}$$

$$a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1$$

$$a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1$$

$$a_5 = \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \Delta t \quad (2.3.2.8)$$

2.3.3 - Método Wilson - θ

O método Wilson - θ é uma modificação do método da aceleração linear. Este último baseia-se em assumir uma variação linear das acelerações dentro do intervalo de tempo e corresponde ao método de Newmark com $\gamma = 0,5$ e $\beta = 1/6$ (figura 2.4).

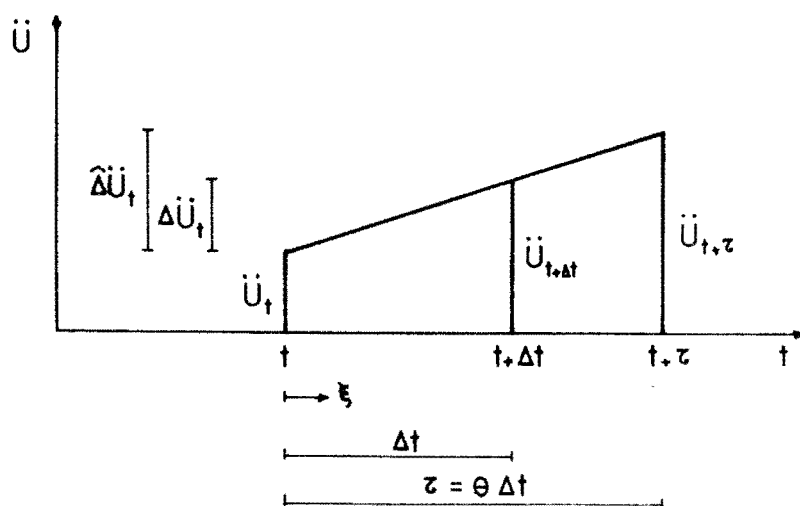


Fig. 2.4. Distribuição das acelerações no intervalo de tempo para o método Wilson- θ .

Definindo-se uma variável ξ interior ao intervalo Δt , a aceleração no interior desse intervalo é

$$\ddot{U}(\xi) = \ddot{U}_t + \frac{\xi}{\Delta t} \Delta \ddot{U}_t \quad (2.3.3.1)$$

Integrando, têm-se a velocidade e o deslocamento:

$$\dot{U}(\xi) = \dot{U}_t + \xi \ddot{U}_t + \frac{\xi^2}{2 \Delta t} \Delta \ddot{U}_t \quad (2.3.3.2)$$

$$U(\xi) = U_t + \xi \dot{U}_t + \frac{\xi^2}{2} \ddot{U}_t + \frac{\xi^3}{6 \Delta t} \Delta \ddot{U}_t \quad (2.3.3.3)$$

Avaliando estas expressões no extremo do intervalo ($\xi = \Delta t$), podem ser obtidos os incrementos da velocidade e do deslocamento

$$\Delta \dot{U}_t = \Delta t \ddot{U}_t + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{U}_t \quad (2.3.3.4)$$

$$\Delta U_t = \Delta t \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{6} \Delta \ddot{U}_t \quad (2.3.3.5)$$

a partir dos quais conseguem-se escrever os acréscimos da aceleração e da velocidade em termos de ΔU_t :

$$\Delta \ddot{U}_t = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta U_t - \frac{6}{\Delta t} \dot{U}_t - 3 \ddot{U}_t \quad (2.3.3.6)$$

$$\Delta \dot{U}_t = \frac{3}{\Delta t} \Delta U_t - 3 \dot{U}_t - \frac{\Delta t}{2} \ddot{U}_t \quad (2.3.3.7)$$

Estas fórmulas conduzem a um algoritmo que, como foi mencionado, apresenta uma estabilidade condicional.

A modificação introduzida por Wilson [8] consiste em se fazer uma previsão dos valores das incógnitas por aplicação do método da aceleração linear num intervalo ampliado $\tau = \theta \Delta t$, corrigindo-se posteriormente os valores para o intervalo real Δt . Aplicando 2.3.3.6 e 2.3.3.7 para $\tau = \theta \Delta t$, chega-se a

$$\widehat{\Delta}\ddot{U}_t = \frac{6}{\tau^2} \widehat{\Delta}U_t - \frac{6}{\tau} \dot{U}_t - 3 \ddot{U}_t \quad (2.3.3.8)$$

$$\widehat{\Delta}\dot{U}_t = \frac{3}{\tau} \widehat{\Delta}U_t - 3 \dot{U}_t - \frac{\tau}{2} \ddot{U}_t \quad (2.3.3.9)$$

onde com $(\widehat{\quad})$ indica-se que os incrementos correspondem ao intervalo τ . Assim, as incógnitas, para o tempo $t+\tau$, escrevem-se

$$U_{t+\tau} = \widehat{\Delta}U_t + U_t \quad (2.3.3.10)$$

$$\dot{U}_{t+\tau} = a_1 \widehat{\Delta}U_t - a_4 \dot{U}_t - a_5 \ddot{U}_t \quad (2.3.3.11)$$

$$\ddot{U}_{t+\tau} = a_0 \widehat{\Delta}U_t - a_2 \dot{U}_t - a_3 \ddot{U}_t \quad (2.3.3.12)$$

sendo

$$a_0 = \frac{6}{\tau^2}$$

$$a_1 = \frac{3}{\tau}$$

$$a_2 = \frac{6}{\tau}$$

$$a_3 = a_4 = 2$$

$$a_5 = \frac{\tau}{2} \quad (2.3.3.13)$$

Resolvida a equação do movimento para o passo ampliado τ , é necessário calcular os valores correspondentes ao intervalo real Δt . Da forma linear da aceleração segue-se que

$$\Delta \ddot{U}_t = \frac{1}{\theta} \widehat{\Delta \ddot{U}}_t \quad (2.3.3.14)$$

Utilizando a equação 2.3.3.8 e relações análogas às 2.3.3.4 e 2.3.3.5 escritas para o intervalo τ , podem-se expressar $\Delta \ddot{U}_t$, $\Delta \dot{U}_t$ e ΔU_t como funções de $\widehat{\Delta U}_t$. Finalmente, as incógnitas no instante $t+\Delta t$ resultam

$$U_{t+\Delta t} = a_{12} \widehat{\Delta U}_t + U_t + a_{13} \dot{U}_t + a_{14} \ddot{U}_t \quad (2.3.3.15)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = a_6 \widehat{\Delta U}_t + a_7 \dot{U}_t + a_8 \ddot{U}_t \quad (2.3.3.16)$$

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = a_9 \widehat{\Delta U}_t + a_{10} \dot{U}_t + a_{11} \ddot{U}_t \quad (2.3.3.17)$$

com os valores das constantes a_i dadas por:

$$a_6 = \frac{3}{\theta^3 \Delta t}$$

$$a_7 = 1 - \frac{3}{\theta^2}$$

$$a_8 = \left(1 - \frac{3}{2\theta}\right) \Delta t$$

$$a_9 = \frac{6}{\theta \tau^2}$$

$$a_{10} = -\frac{6}{\theta \tau}$$

$$a_{11} = 1 - \frac{3}{\theta} \quad (2.3.3.18)$$

$$a_{12} = \frac{1}{\theta^3}$$

$$a_{13} = \left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right) \Delta t$$

$$a_{14} = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \frac{\Delta t^2}{2}$$

Quando $\theta = 1$, o método coincide com o da aceleração linear. É possível demonstrar que, em problemas lineares, tem-se estabilidade incondicional para valores de $\theta \geq 1$, 37. Por outro lado, a precisão diminui ao se aumentar o valor de θ |8|. O valor $\theta = 1,4$ é normalmente utilizado na prática.

2.3.4 - Método de Park

O método de Park pertence ao grupo dos processos de passo múltiplo que utilizam fórmulas implícitas envolvendo deslocamentos e suas primeiras derivadas, correspondentes aos k últimos passos da integração. Estas fórmulas podem ser escritas na forma

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i U_{t-i\Delta t} = \Delta t \sum_{i=0}^k \beta_i \dot{U}_{t-i\Delta t} + E_k \quad (2.3.4.1)$$

onde E_k é o erro de truncamento da fórmula, e os coeficientes α_i e β_i devem ser escolhidos de maneira que satisfaçam determinadas condições de consistência |57|.

O fundamento do método de Park é que uma combinação linear de fórmulas de passo múltiplo do tipo da 2.3.4.1 conduz a uma outra fórmula de passo múltiplo. Assim, ele pesquisou combinações de tais fórmulas de modo a obter um algoritmo que fosse acurado e estável para os componentes de baixa frequência e estável para os de alta frequência. Este tipo de método é denominado rigida-

mente estável e é adequado para problemas estruturais, nos quais os componentes de baixa frequência são os que dominam a resposta.

Uma combinação linear das fórmulas de Gear de dois passos:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \frac{1}{2 \Delta t} (3 U_{t+\Delta t} - 4 U_t + U_{t-\Delta t}) \quad (2.3.4.2)$$

e de três passos:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6 \Delta t} (11 U_{t+\Delta t} - 18 U_t + 9 U_{t-\Delta t} - 2 U_{t-2\Delta t}) \quad (2.3.4.3)$$

conduz à fórmula de Park [58]:

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6 \Delta t} (10 U_{t+\Delta t} - 15 U_t + 6 U_{t-\Delta t} - U_{t-2\Delta t}) \quad (2.3.4.4)$$

Esta fórmula 2.3.4.4 pode ser utilizada para representar a derivada segunda em termos das derivadas primeiras. Após as necessárias substituições e rearranjos de termos, obtêm-se

$$U_{t+\Delta t} = \Delta U_t + U_t \quad (2.3.4.5)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = a_1 \Delta U_t - a_4 A_t \quad (2.3.4.6)$$

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = a_0 \Delta U_t - a_2 A_t - a_3 B_t \quad (2.3.4.7)$$

onde

$$A_t = 5 U_t - 6 U_{t-\Delta t} + U_{t-2\Delta t} \quad (2.3.4.8)$$

$$B_t = 15 \dot{U}_t - 6 \dot{U}_{t-\Delta t} + \dot{U}_{t-2\Delta t} \quad (2.3.4.9)$$

e os coeficientes a_i são:

$$a_0 = \frac{25}{9 \Delta t^2}$$

$$a_1 = \frac{5}{3 \Delta t}$$

$$a_2 = \frac{5}{18 \Delta t^2}$$

$$a_3 = a_4 = \frac{1}{6 \Delta t} \quad (2.3.4.10)$$

2.4 - ALGORITMO PARA A INTEGRAÇÃO PASSO A PASSO

As fórmulas para a integração numérica no tempo representam as derivadas dos deslocamentos, num instante $t+\Delta t$, em termos do incremento do vetor de deslocamentos $\Delta \underline{U}_t$ e de um vetor de estado ao instante t :

$$\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = a_1 \Delta \underline{U}_t - a_4 \underline{A}_t - a_5 \underline{B}_t \quad (2.4.1)$$

$$\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = a_0 \Delta \underline{U}_t - a_2 \underline{A}_t - a_3 \underline{B}_t \quad (2.4.2)$$

Os vetores \underline{A} e \underline{B} calculam-se, nos métodos de passo único (Newmark e Wilson - θ), a partir dos deslocamentos, velocidades e acelerações conhecidas no instante t . Nos métodos de passo múltiplo (Park), calculam-se com os vetores dos deslocamentos e velocidades no instante t e em etapas anteriores da integração. Esses vetores, assim como os coeficientes a_i , foram obtidos nas seções anteriores, para os métodos implementados, e estão resumidos no quadro 2.1.

Quadro 2.1 - Coeficientes e vetores de estado para os diferentes métodos de integração

Método	Newmark	Wilson - θ	Park
	$\gamma=1/2; \beta=1/4$	$\theta=1,4; \tau=\theta \Delta t$	
a_0	$1/(\beta \Delta t^2)$	$6/\tau^2$	$25/(9 \Delta t^2)$
a_1	$\gamma/(\beta \Delta t)$	$3/\tau$	$5/(3 \Delta t)$
a_2	$1/(\beta \Delta t)$	$6/\tau$	$5/(18 \Delta t^2)$
a_3	$(0,5/\beta) - 1$	2	$1/(6 \Delta t)$
a_4	$(\gamma/\beta) - 1$	2	a_3
a_5	$[(0,5\gamma/\beta) - 1] \Delta t$	$\tau/2$	0
a_6	a_1	$3/(\theta^3 \Delta t)$	a_1
a_7	$- a_4$	$1 - (3/\theta^2)$	$- a_4$
a_8	$- a_5$	$[1 - (1,5/\theta)] \Delta t$	0
a_9	a_0	$6/(\theta \tau^2)$	a_0
a_{10}	$- a_2$	$- 6/(\theta \tau)$	$- a_2$
a_{11}	$- a_3$	$1 - (3/\theta)$	$- a_3$
a_{12}	1	$1/\theta^3$	1
a_{13}	0	$[1 - (1/\theta^2)] \Delta t$	0
a_{14}	0	$[1 - (1/\theta)] \Delta t^2/2$	0
\underline{A}_t	$\underline{\dot{U}}_t$	$\underline{\dot{U}}_t$	$5\underline{U}_t - 6\underline{U}_{t-\Delta t} + \underline{U}_{t-2\Delta t}$
\underline{B}_t	$\underline{\ddot{U}}_t$	$\underline{\ddot{U}}_t$	$15\underline{\dot{U}}_t - 6\underline{\dot{U}}_{t-\Delta t} + \underline{\dot{U}}_{t-2\Delta t}$

Nota: Embora neste trabalho adotam-se para β , γ e θ os valores indicados, os coeficientes a_j dados por esta tabela são de caráter geral.

A equação do movimento 2.2.13 pode ser reescrita na forma:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \underline{C} \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \underline{K} \Delta \underline{U}_t = \underline{P}_{t+\Delta t} - \underline{F}e_t - \Delta \underline{F}e_t^{NL} \quad (2.4.3)$$

e, substituindo-se nela as expressões 2.4.1 e 2.4.2, a equação 2.4.3 fica, após rearranjar seus termos,

$$\begin{aligned} (\underline{a}_0 \underline{M} + \underline{a}_1 \underline{C} + \underline{K}) \Delta \underline{U}_t &= \underline{P}_{t+\Delta t} + \underline{M}(\underline{a}_2 \underline{A}_t + \underline{a}_3 \underline{B}_t) + \\ &+ \underline{C}(\underline{a}_4 \underline{A}_t + \underline{a}_5 \underline{B}_t) - \underline{F}e_t - \Delta \underline{F}e_t^{NL} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Introduzindo-se as definições:

$$\underline{K}^* = \underline{a}_0 \underline{M} + \underline{a}_1 \underline{C} + \underline{K} \quad (2.4.5)$$

e

$$\underline{P}_{t+\Delta t}^* = \underline{P}_{t+\Delta t} + \underline{M}(\underline{a}_2 \underline{A}_t + \underline{a}_3 \underline{B}_t) + \underline{C}(\underline{a}_4 \underline{A}_t + \underline{a}_5 \underline{B}_t) - \underline{F}e_t \quad (2.4.6)$$

a equação 2.4.4 reduz-se à forma:

$$\underline{K}^* \Delta \underline{U}_t = \underline{P}_{t+\Delta t}^* - \Delta \underline{F}e_t^{NL} \quad (2.4.7)$$

A matriz \underline{K}^* é invariante no tempo. O vetor $\underline{P}_{t+\Delta t}^*$ pode ser calculado, para cada etapa, em função dos valores das etapas anteriores e do acréscimo das cargas externas. O termo $\Delta \underline{F}e_t^{NL}$, no entanto, depende da própria incógnita $\Delta \underline{U}_t$, constituindo-se no termo não-linear.

A equação não-linear 2.4.7 resolve-se iterativamente. Isto constitui uma forma do método das tensões iniciais [18, 64, 81]. A matriz \underline{K} (equações 2.2.12 e 2.4.5) permanece constante e igual à matriz elástica inici-

a1. Em cada passo calcula-se o vetor de incrementos não-lineares das forças resistentes $\Delta \underline{F}_t^{NL}$, em forma iterativa. Desta maneira, a matriz \underline{K}^* da equação 2.4.7 deve ser montada e triangularizada apenas uma vez em todo o processo.

Em cada passo no tempo, começa-se assumindo um valor para o vetor $\Delta \underline{F}_t^{NL(0)}$. No caso mais simples, assume-se um vetor nulo, se bem que numa tentativa para acelerar a convergência pode-se estimar o seu valor por extrapolação a partir dos valores obtidos em etapas anteriores. Com esse valor de $\Delta \underline{F}_t^{NL(0)}$ resolve-se a equação 2.4.7, obtendo-se uma primeira estimativa do incremento do vetor de deslocamentos $\Delta \underline{U}_t^{(1)}$. Atualiza-se o vetor de deslocamentos $\underline{U}_t^{(1)}$ e, para cada elemento, determina-se o incremento não-linear das forças resistentes mediante as relações inelásticas conhecidas entre deslocamentos nodais e forças elementares. Por montagem das contribuições de cada elemento, obtêm-se o vetor $\Delta \underline{F}_t^{NL(1)}$. Com este valor reinicia-se o processo, que se repete até ser atingida a convergência requerida.

O algoritmo para realizar a análise passo a passo está sumarizado no esquema 2.1. As operações 2 e 5 dos cálculos iniciais e a atualização dos vetores \underline{A} e \underline{B} na operação 4 de cada etapa de tempo são diferentes para cada um dos métodos de integração implementados. As fórmulas correspondentes estão apresentadas no quadro 2.1.

A atualização do vetor das forças internas se faz, por acumulação dos acréscimos calculados em cada passo, com a fórmula

$$\underline{F}_{t+\Delta t} = \underline{F}_t + \Delta \underline{F}_t \quad (2.4.8)$$

A determinação do vetor de incrementos $\Delta \underline{F}_t$ trata-se na seção 5.3.3.

Esquema 2.1

SUMÁRIO DO ALGORITMO PARA A INTEGRAÇÃO NO TEMPO
DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR 2.4.7Cálculos Iniciais

- 1) Formação das matrizes \underline{K} , \underline{M} e \underline{C} .
- 2) Cálculo das constantes a_j ($j=1,14$). (vide quadro 2.1)
- 3) Formação da matriz $\underline{K}^* = \underline{K} + a_0 \underline{M} + a_1 \underline{C}$.
- 4) Introdução das condições de contorno e triangularização da matriz \underline{K}^* .
- 5) Cálculo de \underline{A}_0 e \underline{B}_0 a partir das condições iniciais. (vide quadro 2.1)

Para cada Passo de Tempo

- 1) Formação do vetor

$$\underline{P}_{t+\tau}^* = \underline{P}_t + \theta(\underline{P}_{t+\Delta t} - \underline{P}_t) + \underline{M}(a_2 \underline{A}_t + a_3 \underline{B}_t) + \underline{C}(a_4 \underline{A}_t + a_5 \underline{B}_t) - \underline{F}e_t$$

- 2) Inicialização: $i=0$, $\underline{\Delta F}e_t^{NL(0)} = \underline{0}$
- 3) Iteração
 - a. $i = i + 1$
 - b. formação do vetor $\underline{P}_{t+\tau}^{(i)} = \underline{P}_{t+\tau}^* - \underline{\Delta F}e_t^{NL(i-1)}$
 - c. introdução das condições do contorno em $\underline{P}_{t+\tau}^{(i)}$
 - d. cálculo de $\underline{\Delta U}_t^{(i)}$: solução de $\underline{K}^* \underline{\Delta U}_t^{(i)} = \underline{P}_{t+\tau}^{(i)}$ por retrossubstituição
 - e. cálculo do vetor de deslocamentos $\underline{U}_{t+\tau}^{(i)} = \underline{U}_t + \underline{\Delta U}_t^{(i)}$
 - f. cálculo do vetor das não-linearidades $\underline{\Delta F}e_t^{NL(i)}$
 - g. teste da convergência: $\epsilon = \|\underline{\Delta F}e_t^{NL(i)} - \underline{\Delta F}e_t^{NL(i-1)}\| / \|\underline{\Delta F}e_t^{NL(i)}\|$
se $\epsilon >$ tolerância e $i <$ número máximo de iterações, ir para a (3.a); caso contrário, ir para a (4).

(continuação do esquema 2.1)

4) Atualização dos vetores:

$$\underline{U}_{t+\Delta t} = a_{12} \widehat{\Delta U}_t + a_{13} \underline{A}_t + a_{14} \underline{B}_t + \underline{U}_t$$

$$\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = a_6 \widehat{\Delta U}_t + a_7 \underline{A}_t + a_8 \underline{B}_t$$

$$\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = a_9 \widehat{\Delta U}_t + a_{10} \underline{A}_t + a_{11} \underline{B}_t$$

$$\underline{A}_{t+\Delta t} \quad (\text{vide quadro 2.1})$$

$$\underline{B}_{t+\Delta t} \quad (\text{vide quadro 2.1})$$

$$\underline{F}_{e,t+\Delta t} = \underline{F}_{e,t} + \Delta \underline{F}_{e,t} \quad (\text{vide 5.3.3})$$

5) Impressão dos resultados, se corresponder.

Nota: Os acréscimos $\widehat{\Delta}$ correspondem ao intervalo $\tau = \theta \Delta t$.

Para o método Wilson- θ $\theta=1,4$.

Para os métodos de Newmark e de Park $\theta=1$ e, conseqüentemente, $\tau=\Delta t$ e $\widehat{\Delta}=\Delta$.

3. MODELO ESTRUTURAL

3.1 - DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA

A solução do problema estrutural de um sistema contínuo, com propriedades distribuídas, por aplicação do método dos elementos finitos, reduz-se a resolver o problema formulado para um número finito de graus de liberdade. As incógnitas, que, no caso de modelos de deslocamentos, são deslocamentos generalizados, são interpoladas por subdomínios denominados elementos, a partir dos valores que essas incógnitas assumem nos pontos nodais do elemento. Do número de nós e da escolha das funções interpoladoras depende a fidelidade da representação [21, 81].

Em elementos do pórtico plano, quando se desprezam as deformações de cisalhamento, utilizam-se polinômios cúbicos para interpolar os deslocamentos transversais. Essas funções correspondem à deformação real do elemento prismático, sem cargas interiores, em problemas estáticos lineares. Nestes casos, a adoção de um elemento por cada viga ou pilar conduz à solução exata do problema.

Já em problemas dinâmicos, as propriedades inerciais estão distribuídas ao longo do elemento e, em geral, não é possível expressar os deslocamentos internos do elemento em função dos deslocamentos nos extremos através de funções espaciais exclusivamente. No entanto, nas estruturas principais dos edifícios, as massas concentradas a nível de cada andar são comparativamente maiores do que as massas do próprio pórtico, e tanto o modelo quanto a discretização indicada para os problemas estáticos, podem ser tidos como adequados para se fazer uma análise aproximada do edifício frente a solicitações dinâmicas.

As forças generalizadas resistentes, amortece-

doras e inerciais expressam-se em função dos deslocamentos, velocidades e acelerações, respectivamente, através das matrizes de rigidez, amortecimento e massa (equação 2.2.13). A determinação dessas matrizes para o elemento de pórtico plano, assim como das forças resistentes incrementais não-lineares, será tratada a seguir.

3.2 - CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO

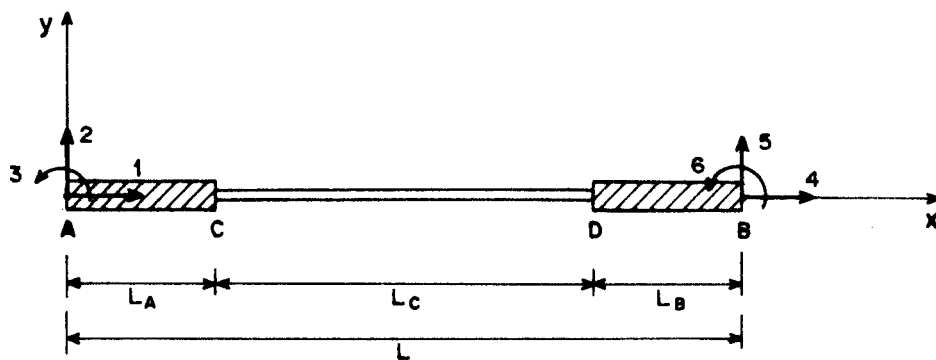
O elemento de pórtico plano está representado na figura 3.1.a onde se indicam o sistema de referência local e os graus de liberdade numerados de 1 até 6. Suas características são as seguintes:

O elemento tem dois nós nas extremidades e três graus de liberdade por nó: dois deslocamentos translacionais e uma rotação.

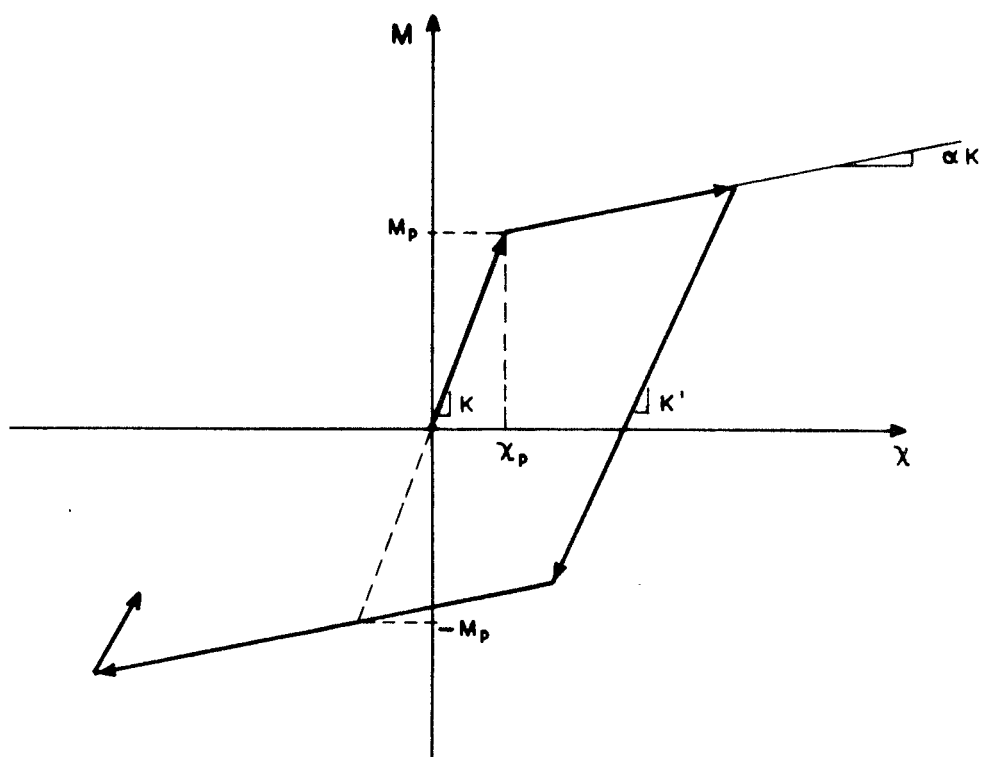
Os segmentos AC e DB são rígidos a fim de poderem representar conexões de dimensão finita.

O segmento central CD é prismático e retilíneo. Consideram-se as suas deformações axial, de flexão e cisalhamento. Não são levados em conta efeitos geométricos de segunda ordem devidos à interação entre a carga axial e as deformações por flexão e cisalhamento.

Esse segmento CD comporta-se elasticamente até serem atingidos, nas suas extremidades, os momentos de plastificação, produzindo-se zonas plásticas de comprimento finito. Considera-se que a plastificação envolve apenas a rigidez à flexão dessas zonas plásticas e não as suas rigidezes axial e cortante. Leva-se em conta a interação entre a carga axial e o momento de plastificação da seção. Considera-se que as relações entre os momentos fletores e as curvaturas na seção das zonas plásticas são do tipo bilinear como se mostra na figura 3.1.b. Excedido o momento



a) Elemento de nrtico plano



b) Diagrama momento-curvatura para as seções plastificadas

Fig. 3.1. Características do elemento de nrtico

de plastificação M_p , um aumento da deformação se produz com uma rigidez plástica igual a α vezes a rigidez elástica inicial. A descarga se realiza por uma paralela à reta elástica inicial, admitindo-se a possibilidade de uma degradação da rigidez em função das máximas deformações plásticas atingidas, a fim de representar o comportamento histerético do concreto armado, como será explicado na seção 4.1.

A inércia do elemento é considerada através de massas discretas nos seis graus de liberdade.

3.3 - RIGIDEZ ELEMENTAR

3.3.1 - Rigidez Elástica

a) Matriz de rigidez para um elemento elástico prismático:

Considerar-se-á em primeiro lugar o segmento prismático CD da figura 3.2. A nomenclatura utilizada nas expressões seguintes é:

E : módulo de elasticidade longitudinal;

G : módulo de elasticidade transversal;

A : área da seção transversal;

I : momento de inércia da seção transversal para flexão no plano do elemento;

c_f : coeficiente de forma de cisalhamento, igual a 1,2 para seção retangular homogênea.

Levando em conta a deformação devida ao cisalhamento, a matriz de rigidez do elemento CD, em coordenadas locais, é: |36|.

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_1 & & & & & \\ & k_2 & & & & \\ & \frac{k_2 L_c}{2} & \frac{k_2 L_c^2 (1+3\psi)}{3} & & & \\ -k_1 & & & k_1 & & \\ & -k_2 & -\frac{k_2 L_c}{2} & & k_2 & \\ \frac{k_2 L_c}{2} & \frac{k_2 L_c^2 (1-6\psi)}{6} & & -\frac{k_2 L_c}{2} & \frac{k_2 L_c^2 (1+3\psi)}{3} & \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

(3.3.1.1)

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{E A}{L_c} \\ k_2 &= \frac{12 E I}{L_c^3 (1+12\psi)} \\ \psi &= \frac{c_f E I}{L_c^2 G A} \end{aligned} \quad (3.3.1.2)$$

Se, na equação 3.3.1.1, se faz $\psi=0$ (ou $G=\infty$), obtêm-se a conhecida matriz de rigidez para pórtico plano em que se despreza a deformação por cisalhamento. Esta matriz corresponde a um campo cúbico de deslocamentos transversais.

b) Matriz de rigidez para o elemento com extremos rígidos:

Os deslocamentos \bar{u}_i ($i=1,6$) nas extremidades do segmento prismático CD (figura 3.2) podem ser expressos em função dos deslocamentos u_j ($j=1,6$) das extremida

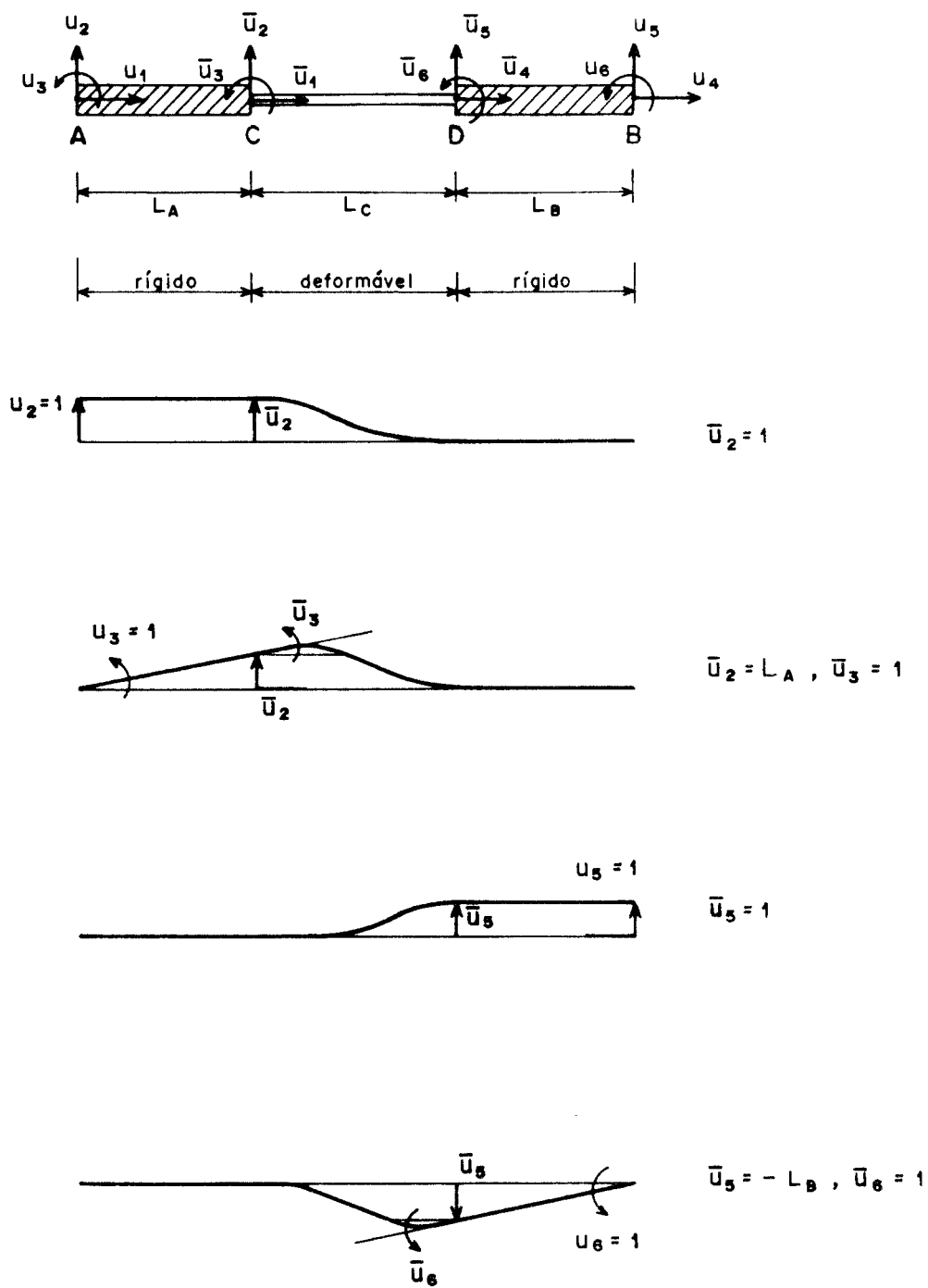


Fig. 3.2. Relação entre os deslocamentos extremos e os deslocamentos do segmento elástico.

des do elemento AB, através da relação

$$\bar{\underline{u}} = \underline{G} \underline{u} \quad (3.3.1.3)$$

onde $\bar{\underline{u}}$ e \underline{u} são vetores colunas que contêm, respectivamente, os deslocamentos \bar{u}_i e u_i ($i=1,6$). A matriz de conexão \underline{G} determina-se por considerações geométricas, como sugeridas na figura 3.2, resultando em:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.1.4)$$

A energia de deformação elástica do elemento \bar{e}

$$E_D = \frac{1}{2} \bar{\underline{u}}^T \bar{\underline{k}} \bar{\underline{u}} \quad (3.3.1.5)$$

Se, nesta expressão, substitui-se $\bar{\underline{u}}$ pela relação 3.3.1.3, obtêm-se

$$E_D = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{k} \underline{u} \quad (3.3.1.6)$$

onde

$$\underline{k} = \underline{G}^T \bar{\underline{k}} \underline{G} \quad (3.3.1.7)$$

\bar{e} é a matriz de rigidez elástica para o elemento AB. Por montagem destas matrizes \underline{k} , elementares, constrói-se a matriz \underline{K} , global, na etapa 1 dos cálculos iniciais do esquema 2.1.

3.3.2 - Rigidez Plástica

No processo sumarizado no esquema 2.1 é preciso se calcular, na etapa 3.f de cada passo no tempo, o vetor de incrementos não-lineares das forças internas $\Delta \underline{F_e}^{NL}$. Este vetor pode-se calcular, da equação 2.2.12, por diferença entre o incremento total das forças internas $\Delta \underline{F_e}$ e o incremento linear $\underline{K} \Delta \underline{U}$. Esta diferença é realizada a nível das forças elementares, obtendo-se o vetor $\Delta \underline{F_e}^{NL}$ por montagem das contribuições de cada elemento. Nesta seção apresentam-se as expressões para o cálculo dos incrementos totais das forças internas para cada elemento.

Devido ao tipo de estrutura e de carregamento, admitir-se-á que o elemento estrutural plastifica apenas nas extremidades do seu segmento deformável central CD (figura 3.1.a). As zonas plastificadas têm comprimentos finitos Λ_1 e Λ_2 .

O segmento deformável central CD é idealizado como se indica na figura 3.3.a. Está formado por uma zona central C*D*, elástica, com rigidez à flexão EI e duas zonas extremas CC* e D*D, também elásticas, mas com rigidez à flexão $\eta_i EI$ ($i=1,2$). Variando-se o valor dos η_i pode-se obter incrementos das forças internas correspondentes aos casos em que os extremos estão em estado elástico ou plástico. Os parâmetros η_i determinam-se em função da história e do estado atual das deformações e podem ser unitários ou iguais ao coeficiente α de endurecimento ("strain hardening"). Quando um extremo permanece em estado elástico, o η_i associado é unitário. Se um extremo está plastificado, toma-se $\eta_i = \alpha$. Ainda, quando se considera degradação da rigidez, os parâmetros η_i assumem os valores dos coeficientes da degradação dados na fórmula 4.1.1.

Na figura 3.3.b, designam-se os deslocamentos transversais e rotações incrementais compatíveis para os três subelementos. As ações incrementais que atuam em cada um dos segmentos estão indicadas na figura 3.3.c, aceitando-se, implicitamente, que não existem cargas ao longo das zonas plásticas.

Para o subelemento I, a equação de equilíbrio de momentos é

$$\Delta M_1^* = \Delta M_1 - \Delta Q_1 \Lambda_1 \quad (3.3.2.1)$$

As relações entre as ações e os deslocamentos incrementais podem ser obtidas utilizando-se uma matriz análoga à 3.3.1.1, escrita para este subelemento. Colocando em evidência os deslocamentos generalizados do extremo C*, tem-se:

$$\Delta \phi_1^* = \Delta \phi_1 - \frac{\Delta M_1 \Lambda_1}{\eta_1 E I} + \frac{\Delta Q_1 \Lambda_1^2}{2\eta_1 E I} \quad (3.3.2.2)$$

$$\Delta v_1^* = \Delta v_1 + \Delta \phi_1 \Lambda_1 - \frac{\Delta M_1 \Lambda_1^2}{2\eta_1 E I} + \frac{\Delta Q_1 \Lambda_1^3}{6\eta_1 E I} - \frac{c_f \Delta Q_1 \Lambda_1}{GA} \quad (3.3.2.3)$$

Analogamente, para o subelemento II pode escrever-se a equação de equilíbrio

$$\Delta M_2^* = \Delta M_2 + \Delta Q_2 \Lambda_2 \quad (3.3.2.4)$$

e as relações entre as ações e os deslocamentos incrementais

$$\Delta \phi_2^* = \Delta \phi_2 - \frac{\Delta M_2 \Lambda_2}{\eta_2 E I} - \frac{\Delta Q_2 \Lambda_2^2}{2\eta_2 E I} \quad (3.3.2.5)$$

$$\Delta v_2^* = \Delta v_2 - \Delta \phi_2 \Lambda_2 + \frac{\Delta M_2 \Lambda_2^2}{2\eta_2 E I} + \frac{\Delta Q_2 \Lambda_2^3}{6\eta_2 E I} - \frac{c_f \Delta Q_2 \Lambda_2}{G A} \quad (3.3.2.6)$$

Para o subelemento III, limitando-se ao caso em que não existam cargas no interior do elemento, as equações de equilíbrio são as seguintes:

$$\Delta Q_2 = -\Delta Q_1 \quad (3.3.2.7)$$

$$\Delta Q_1 = \frac{\Delta M_1^* + \Delta M_2^*}{L_c(1 - \lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{\Delta M_1 + \Delta M_2}{L_c} \quad (3.3.2.8)$$

Na última expressão, considerou-se o equilíbrio do elemento CD. Além disso, foi introduzida a definição

$$\lambda_i = \Lambda_i / L_c, \quad i=1,2 \quad (3.3.2.9)$$

As relações entre os momentos ΔM_1^* e ΔM_2^* e os deslocamentos generalizados incrementais para o subelemento III, obtidas com auxílio da matriz \bar{k} (equação 3.3.1.1), podem ser expressas como:

$$\Delta M_i^* = k_M \left[4(1 + 3\phi) \Delta \phi_i^* + 2(1 - 6\phi) \Delta \phi_j^* + \frac{6(\Delta v_1^* - \Delta v_2^*)}{L_c(1 - \lambda_1 - \lambda_2)} \right], \quad i=1,2, \quad j=3-i \quad (3.3.2.10)$$

onde

$$k_M = E I / [L_c(1 - \lambda_1 - \lambda_2)(1 + 12\phi)] \quad (3.3.2.11)$$

e

$$\phi = \psi / (1 - \lambda_1 - \lambda_2)^2$$

Se, nas equações 3.3.2.10, substituem-se as

expressões 3.3.2.1 a 3.3.2.8, chega-se a uma relação entre os acréscimos de momentos ΔM_1 e ΔM_2 , nos extremos da barra CD, e os deslocamentos incrementais desses extremos, que pode ser expressa da seguinte forma:

$$b_{11} \Delta M_1 + b_{12} \Delta M_2 = b_{10} \quad (3.3.2.12)$$

$$b_{21} \Delta M_1 + b_{22} \Delta M_2 = b_{20}$$

Os coeficientes b_{mn} ($m, n = 1, 2$) são funções dos comprimentos plásticos relativos λ_i e das relações de rigidezes η_i . Os coeficientes b_{10} e b_{20} são funções dos λ_i e dos deslocamentos incrementais nos extremos (vide anexo 8.2).

Para o caso particular em que os comprimentos das zonas plastificadas sejam iguais ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) e desprezando-se a deformação devida ao cisalhamento ($\psi=0$), os coeficientes das equações 3.3.2.12 tomam a forma

$$\begin{aligned} b_{11} &= (1 - 2\lambda)^2 (1 - \lambda) + \lambda \left(\frac{4 - 7\lambda + 3\lambda^2}{\eta_1} + \frac{\lambda^2 - \lambda}{\eta_2} \right) \\ b_{12} &= \lambda \left[\frac{3\lambda^2 - 2\lambda}{\eta_1} + \frac{2 - 2\lambda + \lambda^2}{\eta_2} - (1 - 2\lambda)^2 \right] \\ b_{21} &= \lambda \left[\frac{2 - 2\lambda + \lambda^2}{\eta_1} + \frac{3\lambda^2 - 2\lambda}{\eta_2} - (1 - 2\lambda)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.3.2.13)$$

$$b_{22} = (1 - 2\lambda)^2 (1 - \lambda) + \lambda \left(\frac{\lambda^2 - \lambda}{\eta_1} + \frac{4 - 7\lambda + 3\lambda^2}{\eta_2} \right)$$

$$b_{10} = \frac{EI}{L_c} \left[(4 - 2\lambda) \Delta \phi_1 + (2 + 2\lambda) \Delta \phi_2 + \frac{6(\Delta v_1 - \Delta v_2)}{L_c} \right]$$

$$b_{20} = \frac{EI}{L_c} \left[(2 + 2\lambda) \Delta \phi_1 + (4 - 2\lambda) \Delta \phi_2 + \frac{6(\Delta v_1 - \Delta v_2)}{L_c} \right]$$

As equações 3.3.2.12 e 3.3.2.13 são válidas somente para valores dos η_i diferentes de zero. Se os η_i são nulos, o cálculo dos momentos e curvaturas incrementais se faz admitindo a formação de uma rótula no meio da zona plastificada. A parte desta zona compreendida entre a rótula e o extremo do segmento CD considera-se rígida, enquanto que o resto do segmento comporta-se elasticamente. Nesse caso, os momentos incrementais são calculados com a expressão:

$$\begin{aligned} \Delta M_i = & R_i \frac{EI}{L_c} \left\{ \frac{6}{(2 - \lambda_j)} \left[\Delta \phi_i + \frac{2}{(2 - \lambda_j)} \frac{(\Delta v_1 - \Delta v_2)}{L_c} \right] + \right. \\ & \left. + R_j \left[\left(4 - \frac{6}{(2 - \lambda_j)}\right) \Delta \phi_i + 2\Delta \phi_j + \left(6 - \frac{12}{(2 - \lambda_j)^2}\right) \frac{(\Delta v_1 - \Delta v_2)}{L_c} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3.2.14)$$

onde i e j são os extremos do elemento e $R_i=0$ se o extremo i está plastificado e $R_i=1$ se o extremo i permanece na fase elástica.

Em cada iteração de cada passo no tempo, e para cada elemento, são calculados os acréscimos dos momentos extremos ΔM_i ($i=1,2$), resolvendo o sistema 3.3.2.12 (ou com a equação 3.3.2.14), para um incremento dos deslocamentos Δv_i e $\Delta \phi_i$ ($i=1,2$). Por aplicação das equações 3.3.2.7 e 3.3.2.8 obtêm-se os ΔQ_i ($i=1,2$). Destes ΔM_i e ΔQ_i são diminuídos os incrementos lineares calculados com auxílio da matriz \bar{k} (3.3.1.1), obtendo-se, assim, os vetores elementares de incrementos não-lineares que serão montados no vetor $\Delta \underline{F}_e^{NL}$. As contribuições das forças normais elementares, para o vetor $\Delta \underline{F}_e^{NL}$, são nulas.

Para poder reconhecer os extremos que plastificam, segue-se a história dos esforços e deformações do elemento, acumulando, em cada passo, os incrementos dos mo-

mentos e curvaturas nas duas extremidades. Os acréscimos dos momentos nos extremos calculam-se com as expressões indicadas (sistema 3.3.2.12 ou equações 3.3.2.14). Os incrementos das curvaturas nas extremidades, $\Delta\chi_i$ ($i=1,2$), são calculados, quando os η_i são diferentes de zero, com a fórmula: ⁽¹⁾

$$\Delta\chi_i = \frac{\Delta M_i}{\eta_i E I} \quad (3.3.2.15)$$

Se os η_i são nulos, sob as mesmas considerações feitas para a determinação da equação 3.3.2.14, três casos devem ser analisados:

a) Ambos os extremos elásticos:

$$\Delta\chi_i = \frac{\Delta M_i}{E I} \quad (3.3.2.16.a)$$

b) Um extremo elástico e outro plástico:

$$\begin{aligned} \Delta\chi_i = & R_i \frac{6}{(2 - \lambda_j) L_c} \left[\Delta\phi_i + \frac{2(\Delta v_1 - \Delta v_2)}{(2 - \lambda_j) L_c} \right] + \\ & + \frac{R_j}{4 \lambda_i L_c} \left[4\Delta\phi_i + 2\Delta\phi_j + \frac{12(\Delta v_1 - \Delta v_2)}{(2 - \lambda_i) L_c} \right] \end{aligned} \quad (3.3.2.16.b)$$

c) Ambos os extremos plásticos:

$$\Delta\chi_i = \frac{1}{\lambda_i L_c} \left[\Delta\phi_i + \frac{2(\Delta v_1 - \Delta v_2)}{(2 - \lambda_i - \lambda_j) L_c} \right] \quad (3.3.2.16.c)$$

Aqui os símbolos têm o mesmo significado que na equação 3.3.2.14.

⁽¹⁾ A 3.3.2.15 vale, ainda para uma formulação que inclui a deformação por corte, nos casos em que o cortante não varia no elemento.

3.4 - COMPRIMENTO DAS ZONAS PLASTIFICADAS

A seguir trata-se da determinação dos comprimentos das zonas plásticas Δ_i ($i=1,2$) do modelo da figura 3.2. Para isso estabelecer-se-á a equivalência das rotações plásticas, relativas incrementais, produzidas entre os pontos de momento máximo e nulo de uma viga flexionada, cujas seções seguem a lei momento-curvatura da figura 3.4, e das mesmas rotações obtidas no elemento da figura 3.3.

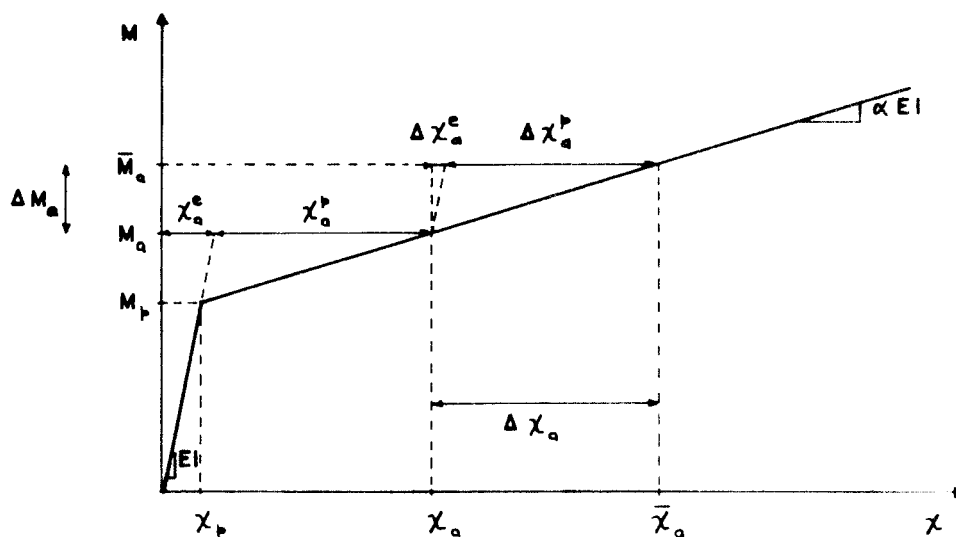


Fig. 3.4. Diagrama momento-curvatura.

Para o diagrama momento-curvatura da figura 3.4, a distribuição das curvaturas em uma viga submetida a uma variação linear de momentos está mostrada na figura 3.5.b. Nessa figura, a e h são os pontos de momento máximo e nulo, respectivamente. Em linha tracejada está indicado o

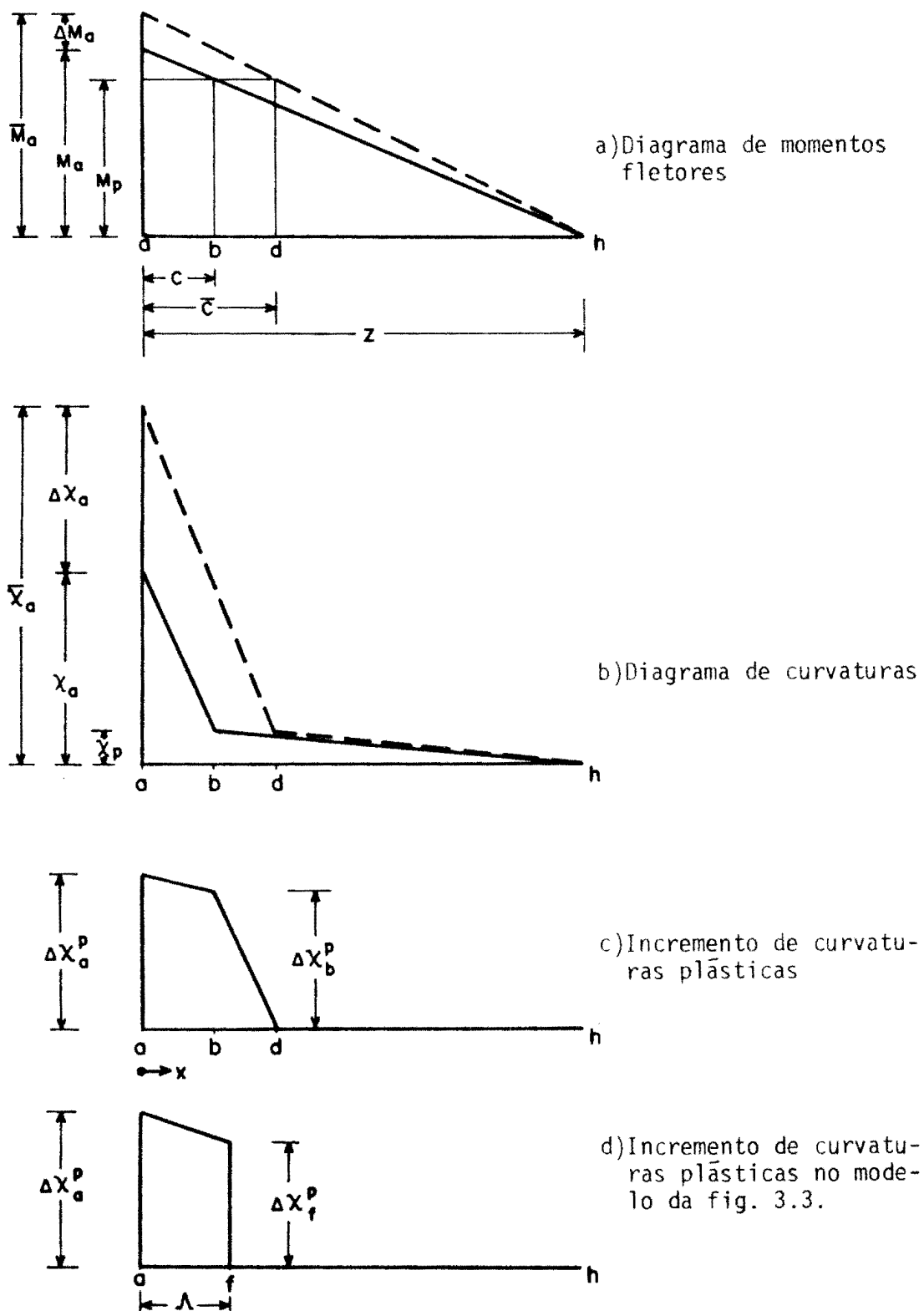


Fig. 3.5. Determinação do comprimento das zonas plastificadas

novo diagrama que se obtêm quando os momentos são incrementados de M para \bar{M} (figura 3.4). Considera-se que o ponto de inflexão h não se desloca durante esse incremento dos momentos. O comprimento de plastificação c passa a ser \bar{c} . Introduzindo a notação (figura 3.4):

$$\rho = M_p / M_a \quad (3.4.1)$$

e

$$\zeta = \Delta M_a / M_a \quad (3.4.2)$$

da figura 3.5.a tiram-se as seguintes expressões:

$$c = (1 - \rho) Z \quad (3.4.3)$$

$$\bar{c} = (1 - \rho \frac{1}{1 + \zeta}) Z \quad (3.4.4)$$

As curvaturas χ estão compostas por duas parcelas: uma elástica χ^e e outra plástica χ^p (figura 3.4). Do diagrama momento-curvatura obtêm-se, para a seção a ,

$$\chi_a = \chi_a^e + \chi_a^p = \frac{M_p}{EI} + \frac{(M_a - M_p)}{\alpha EI} \quad (3.4.5)$$

$$\chi_a^e = \frac{M_a}{EI} \quad (3.4.6)$$

$$\chi_a^p = \frac{(M_a - M_p)}{EI} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \quad (3.4.7)$$

Analogamente pode-se escrever para os incrementos das curvaturas, no trecho inelástico,

$$\Delta \chi_a = \Delta \chi_a^e + \Delta \chi_a^p \quad (3.4.8)$$

$$\Delta\chi_a^e = \frac{\Delta M_a}{E I} \quad (3.4.9)$$

$$\Delta\chi_a^p = \frac{\Delta M_a}{E I} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \quad (3.4.10)$$

A parcela plástica das curvaturas incrementais mostra-se na figura 3.5.c, enquanto que na figura 3.5.d aparece o mesmo diagrama para o elemento da figura 3.3. O comprimento Λ de plastificação para este elemento será fixado de modo a fornecer as mesmas rotações plásticas relativas entre os extremos do vão $a h$ que as obtidas na viga da figura 3.5.c.

A rotação plástica incremental relativa entre os pontos a e h é:

$$\Delta\theta_{a h}^p = \int_a^h \Delta\chi^p dx \quad (3.4.11)$$

Para a figura 3.5.c tem-se que

$$\Delta\chi_a^p = \frac{\Delta M_a}{E I} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \quad (3.4.12)$$

$$\Delta\chi_b^p = \frac{\Delta M_b}{E I} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) = \rho \frac{\Delta M_a}{E I} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \quad (3.4.13)$$

e, aplicando-se 3.4.11, chega-se a

$$\Delta\theta_{a h}^p = \frac{\Delta M_a}{E I} \frac{Z}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left[1 - \rho^2 \frac{1}{1+\zeta} \right] \quad (3.4.14)$$

Da mesma forma para a figura 3.5.d, os incrementos da curvatura são dados pela 3.4.12 e pela seguinte expressão

$$\Delta\chi_f^p = \Delta\chi_a^p \left(1 - \frac{\Lambda}{Z} \right) = \frac{\Delta M_a}{E I} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left(1 - \frac{\Lambda}{Z} \right) \quad (3.4.15)$$

Aplicando a fórmula 3.4.11, tem-se

$$\Delta\theta_{\alpha}^p h = \frac{\Delta M_{\alpha}}{E I} \frac{Z}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \left[\left(2 - \frac{\Lambda}{Z}\right) \left(\frac{\Lambda}{Z}\right) \right] \quad (3.4.16)$$

Igualando as expressões 3.4.14 e 3.4.16 e levando-se em conta que a solução física requer $|\Lambda/Z| < 1$, obtêm-se

$$\frac{\Lambda}{Z} = 1 - \rho \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \quad (3.4.17)$$

Passando agora a considerar o elemento completo, sendo L_c o comprimento do segmento elástico e M_1 e M_2 os momentos nas suas extremidades (figura 3.3), as distâncias destas extremidades ao ponto de inflexão estão dadas por:

$$|Z_i| = L_c \left| \frac{M_i}{M_1 + M_2} \right|, \quad i=1,2 \quad (3.4.18)$$

Introduzindo esta expressão na 3.4.17, resulta

$$\lambda_i = \frac{\Lambda_i}{L_c} = \left(1 - \rho \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\right) \left| \frac{M_i}{M_1 + M_2} \right| \quad (3.4.19)$$

Com esta fórmula calcula-se o comprimento de plastificação para cada extremo do elemento e em cada passo da análise. O valor de ζ não é conhecido no começo de cada passo, devendo ser determinado iterativamente.

Quando o denominador da fórmula 3.4.18 se anula, os momentos fletores são constantes ao longo do elemento e os comprimentos Λ_i ($i=1,2$) são tomados praticamente iguais à metade do comprimento $L_c^{(1)}$.

(¹) No programa toma-se $\lambda_i=0,48$ ($i=1,2$). O valor de $\lambda_i=1/2$ não é adotado por tratar-se de um ponto singular.

Se a carga elástica, ou a descarga, são tomadas paralelas à reta inicial do diagrama $M-x$, o valor de λ_i é irrelevante por quanto as seções nesse comprimento têm rigidez igual ao resto do segmento deformável. Neste caso arbitra-se $\lambda_i = 0,10$.

Se a degradação da rigidez elástica é considerada, esse valor de $\lambda_i = 0,10$ é levado em conta na adoção do expoente do coeficiente da degradação (vide seção 4.4).

3.5 - INÉRCIA DO ELEMENTO

As propriedades inerciais distribuídas no elemento são levadas em conta através de uma matriz de massa diagonal.

Os termos da matriz de massa consistente calculam-se com a expressão

$$m_{ij} = \int_V \delta \phi_i \phi_j dV \quad (3.5.1)$$

onde δ é a massa específica do material, V é o volume do elemento e ϕ_i e ϕ_j são as funções de interpolação para os deslocamentos correspondentes aos graus de liberdade i e j respectivamente. Utilizando-se as mesmas funções cúbicas de interpolação usadas para calcular a matriz de rigidez, a matriz de massa consistente, em coordenadas locais, resulta em: [62]

$$\underline{m} = \frac{A L \delta}{420} \begin{bmatrix} 140 & & & & & & \text{simétrica} \\ 0 & 156 & & & & & \\ 0 & 22L & 4L^2 & & & & \\ 70 & 0 & 0 & 140 & & & \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & & \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 & \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

3.6 - AMORTECIMENTO

Toma-se para a estrutura um amortecimento de tipo viscoso. Costuma-se escrever a matriz \underline{C} como uma combinação linear das matrizes globais de massa \underline{M} e de rigidez \underline{K} :

$$\underline{C} = d_0 \underline{M} + d_1 \underline{K} \quad (3.6.1)$$

Esta forma de representar o amortecimento (amortecimento de Rayleigh) fornece uma matriz \underline{C} que satisfaz as condições de ortogonalidade dos modos de vibração livre não amortecida.

Adotar-se-á a matriz \underline{C} como proporcional à matriz de massa, isto é,

$$\underline{C} = d_0 \underline{M} \quad (3.6.2)$$

Assim, os coeficientes de amortecimento para cada modo de vibração são inversamente proporcionais à sua frequência. Para o n ésimo modo:

$$\xi_n = \frac{d_0}{2 \omega_n} \quad (3.6.3)$$

sendo ξ_n e ω_n o coeficiente de amortecimento e a frequência correspondentes ao modo n .

4. ESTRUTURA DE CONCRETO ARMADO

4.1 - ADEQUAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

O elemento descrito na seção 3 tem a possibilidade de desenvolver zonas plásticas de comprimento finito nas suas extremidades. As relações momento-curvatura das seções nestas zonas seguem diagramas bilineares do tipo mostrado na figura 4.1, podendo apresentar uma degradação da sua rigidez com o progresso das deformações plásticas. A rigidez elástica, depois de ter plastificado a se-

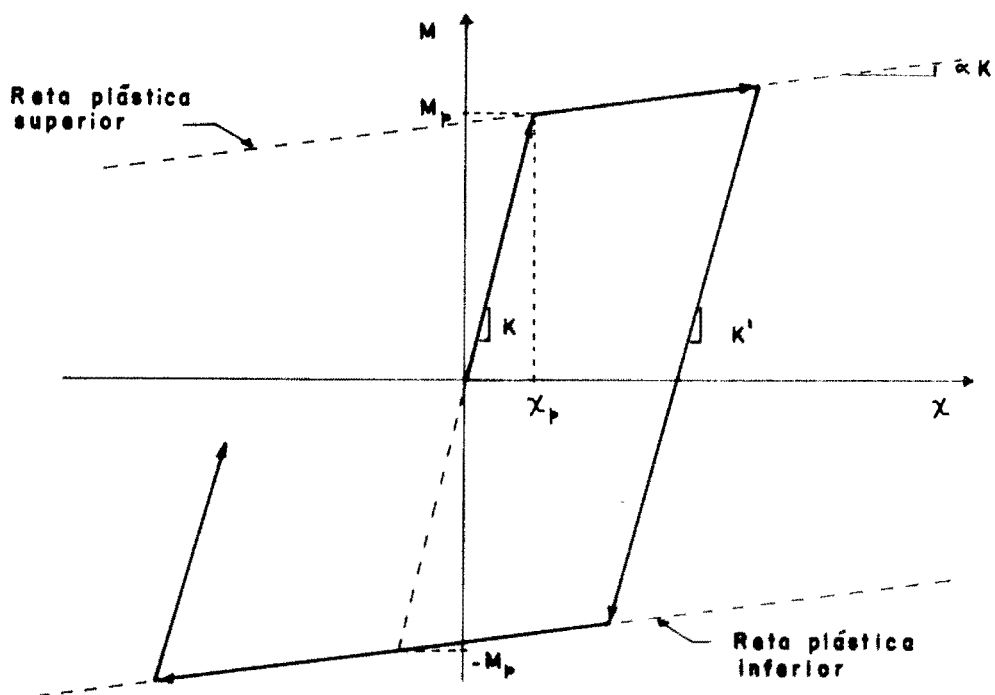


Fig. 4.1. Ciclo histerético para a relação momento-curvatura das rótulas plásticas.

ção, será calculada com a fórmula:

$$K' = K (x_p / |x_m|)^Y \quad (4.1.1)$$

onde x_m é a máxima curvatura, em valor absoluto, atingida pela seção. Isto é uma adaptação ao diagrama momento-curvatura do modelo proposto por Imbeault e Nielsen para os diagramas carga-deslocamento [42].

Este capítulo tratará da determinação dos parâmetros que definem o ciclo histerético bilinear da figura 4.1, para que o elemento possa representar uma peça estrutural de concreto armado. Tais parâmetros são: o momento de plastificação M_p , a rigidez elástica K , a rigidez plástica αK e, no caso de rigidez degradante, o expoente Y da fórmula 4.1.1. Ainda, um outro parâmetro a determinar, que não será tratado aqui, é o valor máximo das deformações plásticas que a seção pode desenvolver.

4.2 - COMPORTAMENTO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

A realização de ensaios sobre edifícios completos em escala natural está limitada por fatores de ordem econômica. Uma solução para isto é tentar prever a resposta da estrutura a partir das propriedades observadas em seus elementos componentes. Este tem sido o caminho seguido pela maioria dos pesquisadores. Porém nem sempre é possível inferir o comportamento da estrutura com base nos resultados obtidos para os seus componentes, devido à complexa interação entre estes, que depende do carregamento. Em razão disto, e tentando se obter um melhor conhecimento do desempenho global, têm-se realizado ensaios não apenas para os elementos estruturais mas também para subestruturas, onde se evidenciam os efeitos das ligações entre aqueles elementos.

A maioria dos ensaios têm sido feita com carregamentos quase estáticos que são mais apropriados para acompanhar detalhadamente a evolução das características e modos de falha dos modelos ou protótipos. A adequação dos modelos matemáticos elaborados é conferida através da resposta obtida em ensaios dinâmicos.

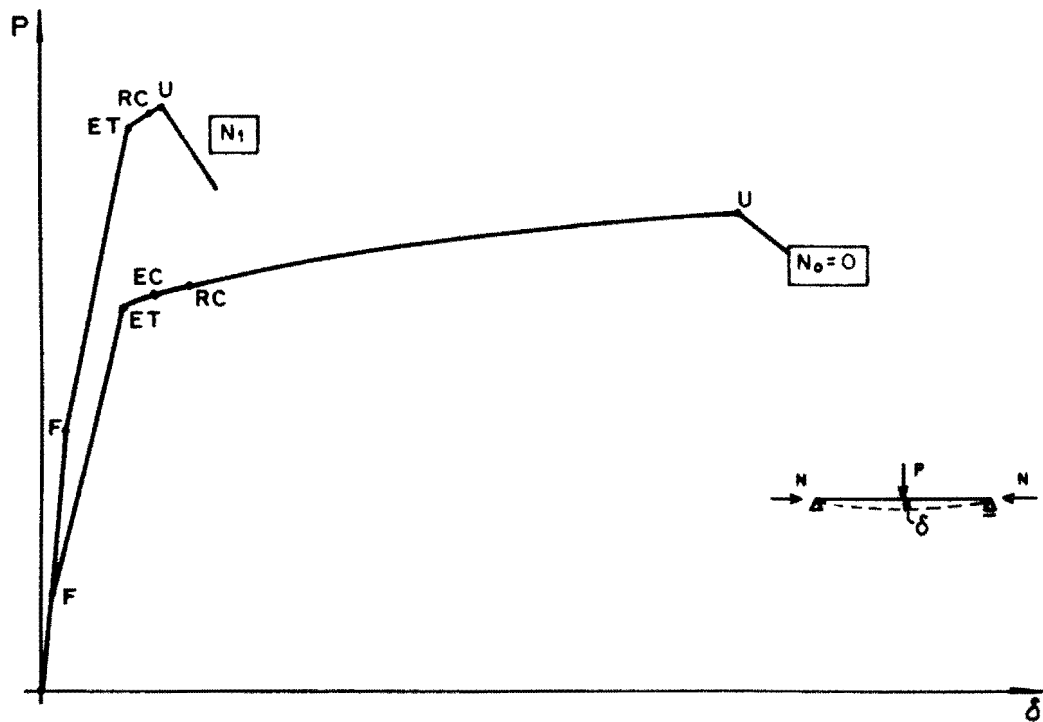
A seguir, descrever-se-ão brevemente as características principais dos resultados dos ensaios sobre pórticos, ou vigas e pilares componentes, reportados na literatura.

4.2.1 - Resultados de Ensaios Quase-Estáticos

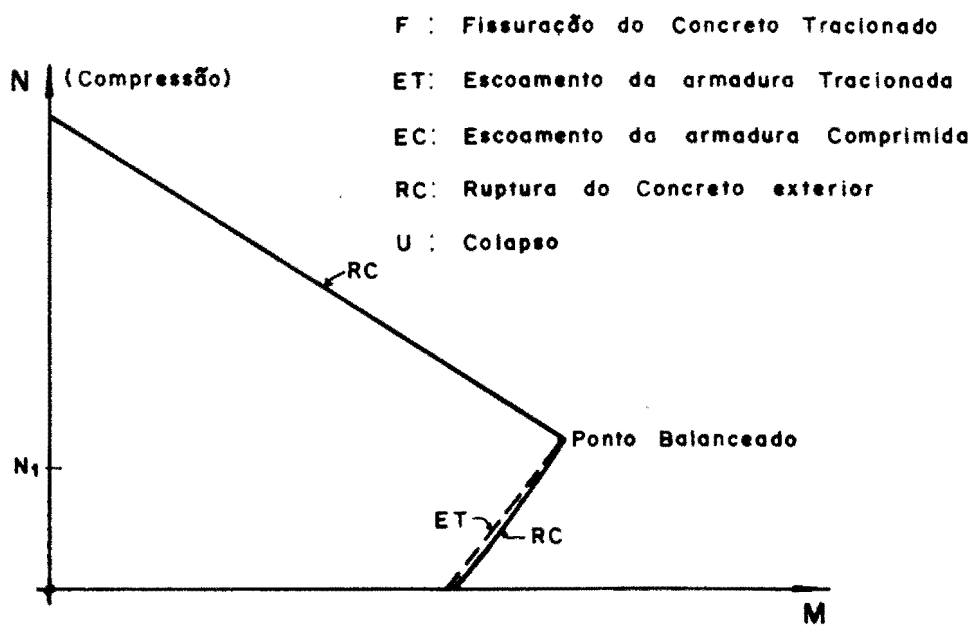
a) Ensaios com carregamento monótono:

Os resultados de ensaios de flexão em pilares apresentam diagramas carga-deslocamento do tipo esquematizado na figura 4.2.a [54]. Para esforços normais pequenos as curvas apresentam três pontos notáveis. O primeiro deles corresponde à fissuração do concreto tracionado. O ponto anguloso mais acentuado da curva se dá quando a armadura tracionada atinge seu limite de escoamento. Posteriormente são atingidos o escoamento da armadura comprimida e as deformações de ruptura do concreto nas bordas externas da seção, que, no entanto, não produzem mudanças significativas no diagrama. O último ponto corresponde ao esgotamento da capacidade resistente do pilar.

À medida que cresce o esforço normal, as cargas de fissuração, de escoamento e de ruptura aumentam. Os deslocamentos de ruptura diminuem sensivelmente. Isto se mantém até um limite próximo do ponto balanceado ("balance point"). Este ponto balanceado é definido pelos valores de momento fletor e carga normal que fazem com que sejam atingidos simultaneamente o escoamento da armadura de tração e as deformações de ruptura do concreto (fig. 4.2.b).



a) Curva carga-deslocamento



b) Diagrama de interação momento-esforço normal

Fig. 4.2. Curvas típicas para pilares flexo-comprimidos.

Para esforços normais acima dessa carga de balanceado é atingido, em primeiro lugar, o escoamento da armadura comprimida e, logo depois, a ruptura do concreto por esmagamento, na zona mais comprimida da seção, seguida pelo colapso da peça. As deformações últimas estão perto das de escoamento.

As curvas momento-curvatura para as seções críticas têm o mesmo padrão que os diagramas da figura 4.2.a |15,19,50|.

b) Ensaios com carregamento reversível:

Os ensaios realizados em vigas submetidas à flexão simples mostram diagramas carga-deslocamento como a figura 4.3 |33,54,19,60|. Da análise dos resultados pode-se observar que, em geral, a envolvente para as curvas de carga e descarga se aproxima bastante da curva que se obtém com um carregamento monótono. No entanto, algumas características próprias do comportamento da viga, sob momentos reversíveis, são as seguintes:

- a rigidez inicial se reduz depois de cada reversão da carga em que a deformação tenha excedido seu valor máximo anterior;

- o comportamento histerético depende da história do carregamento |14|;

- superado o primeiro escoamento da armadura, a curva passa a ser controlada pelas características mecânicas do aço |33|.

O comportamento descrito corresponde a vigas controladas pela flexão. Se as tensões de cisalhamento são importantes e a armadura transversal não é adequada, ocorre uma diminuição ainda maior da rigidez inicial, bem como da energia dissipada pelas deformações inelásticas |14|.

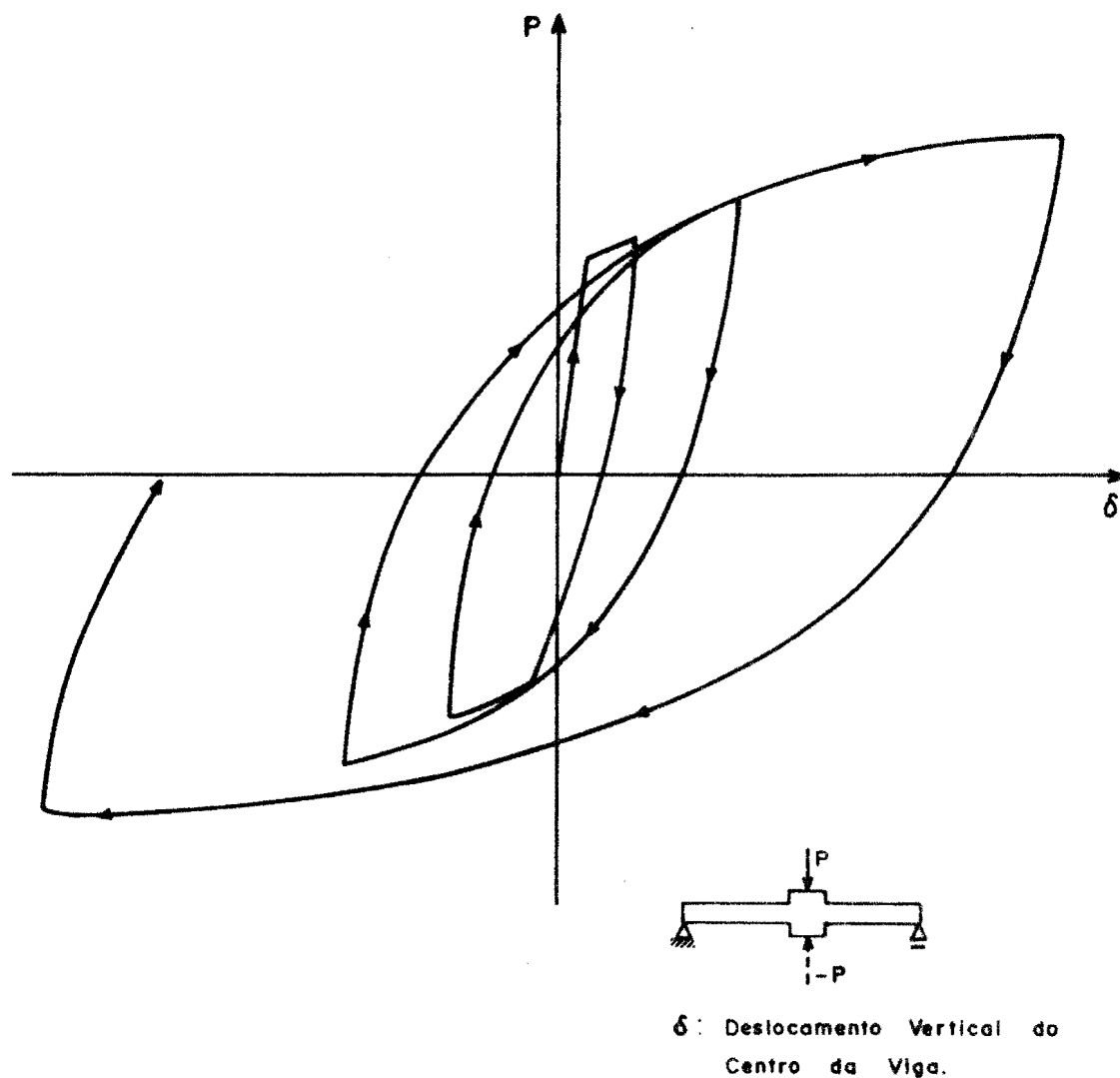


Fig. 4.3. Ciclo carga-deslocamento para uma viga retangular de concreto com armadura simétrica.

A presença de esforços normais modifica os momentos resistentes e a capacidade de desenvolver deformações plásticas, como foi observado na figura 4.2. Neste caso, têm grande importância o detalhe e a separação dos estribos, uma vez que o núcleo de concreto confinado pode incrementar as deformações de colapso evitando um comportamento frágil da estrutura [33].

Ensaaios realizados em uniões de vigas e pilares mostram que entre as diversas causas que contribuem para a deflexão total da subestrutura, tem importância significativa o escorregamento da armadura tracionada nas seções de união de vigas com pilares. Este alongamento das barras na ancoragem produz uma rotação concentrada na seção de engaste, cuja contribuição para a deflexão da viga pode, em alguns casos, superar a parcela devida às curvaturas ao longo do vão [14,70,75].

4.2.2 - Resultados de Ensaaios Dinâmicos

Alguns ensaios dinâmicos têm sido feitos para testar modelos desenvolvidos para análise inelástica de pórticos [27,75,56]. Uma característica que pode ser observada em todos eles é o aumento no período das respostas com o aumento das deformações. Este alongamento do período, ou decrescimento da frequência, que traduz uma diminuição da rigidez, aparece como função das deformações máximas atingidas durante o ensaio, como se mostra na figura 4.4 [46]. Deve-se salientar, também, que em todos os casos reportados a frequência da estrutura no primeiro ensaio, ainda na fase elástica, foi sempre inferior à computada com a rigidez das seções não-fissuradas (Estádio I). O cálculo das frequências com a rigidez das seções fissuradas (Estádio II) deu valores inferiores, porém mais próximos, das frequências medidas (figura 4.5).

Na figura 4.4 apresenta-se também a variação do coeficiente de amortecimento com as deformações. A dispersão dos valores é maior, porém mostra, na média, um crescimento com as deformações máximas registradas no ensaio. Este aumento é menor que o experimentado pelo período.

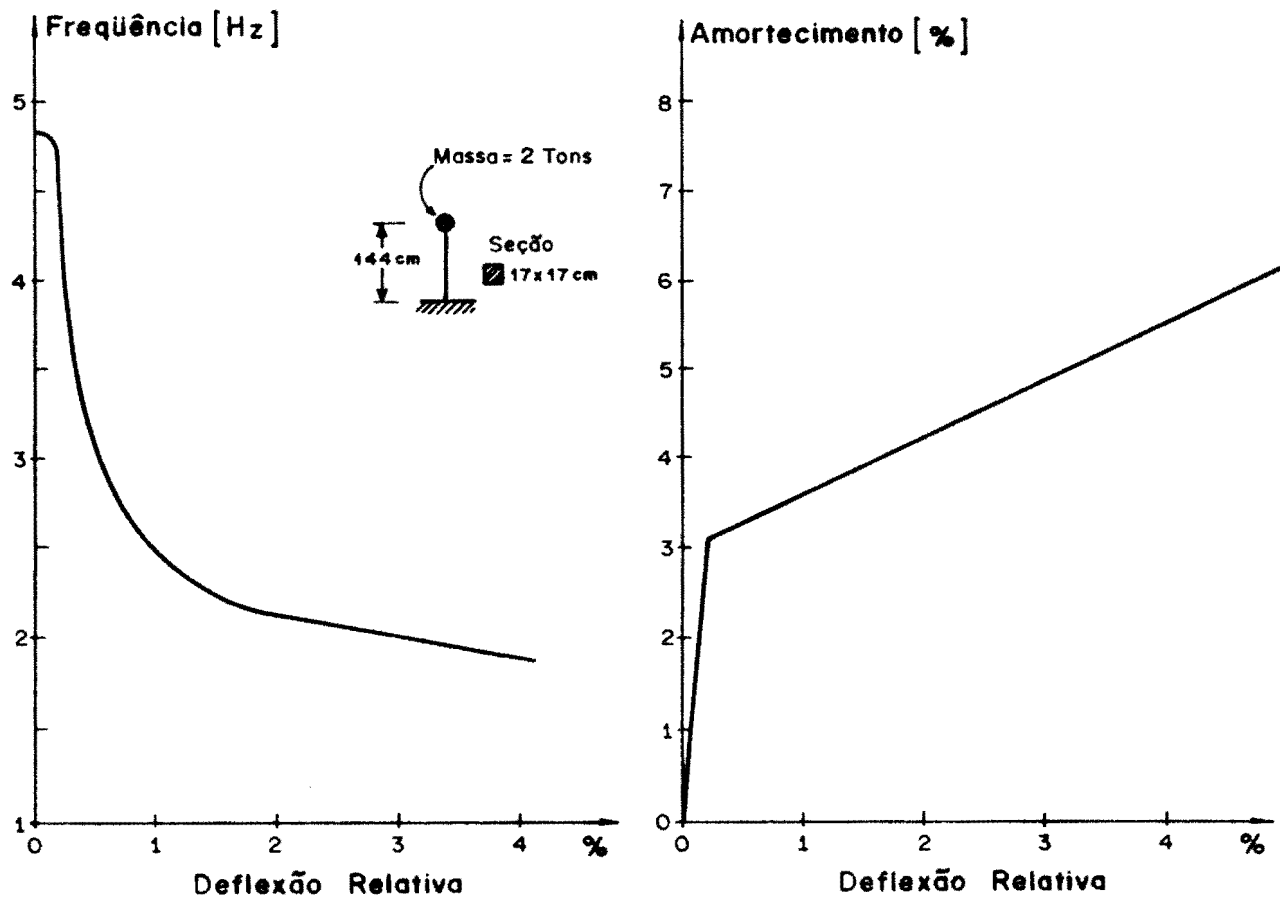


Fig. 4.4. Variação da frequência e do amortecimento com as deflexões [46].

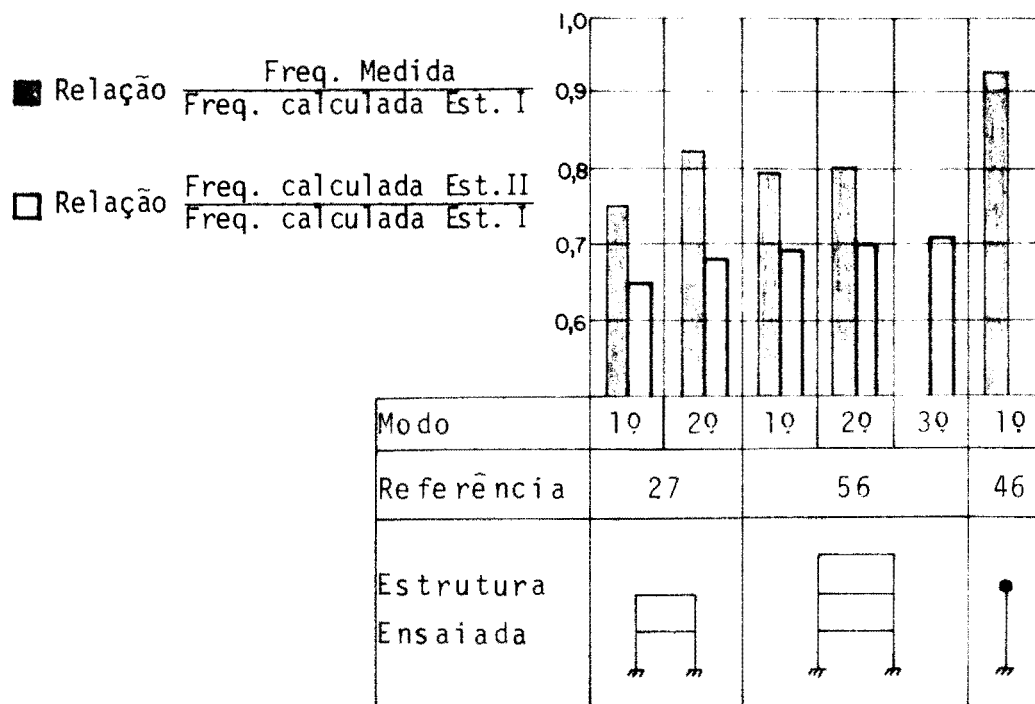


Fig. 4.5. Frequências medidas e calculadas em diferentes ensaios.

4.3 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DE SEÇÕES FLEXO-COMPRESSADAS

Serão apresentadas, nesta seção, as equações teóricas do equilíbrio de seções retangulares de concreto com armadura dupla submetidas a flexo-compressão. Seguem-se, em geral, as prescrições da Norma Brasileira para Obras de Concreto Armado NB-1 [4]. Fazer-se-ão as seguintes hipóteses:

- armaduras distribuídas simetricamente em relação ao eixo da seção, isto é, os recobrimentos inferior e superior são iguais;
- as seções transversais planas permanecem planas depois da deformação;
- despreza-se a resistência do concreto em tração;
- os diagramas tensão-deformação para o concre-

to e o aço são os da figura 4.6.

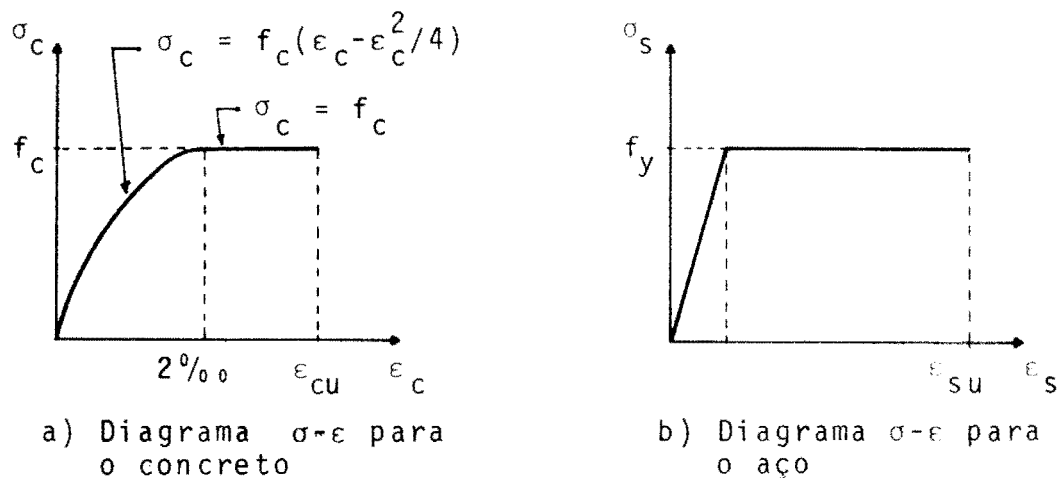


Fig. 4.6. Diagramas tensão-deformação dos materiais

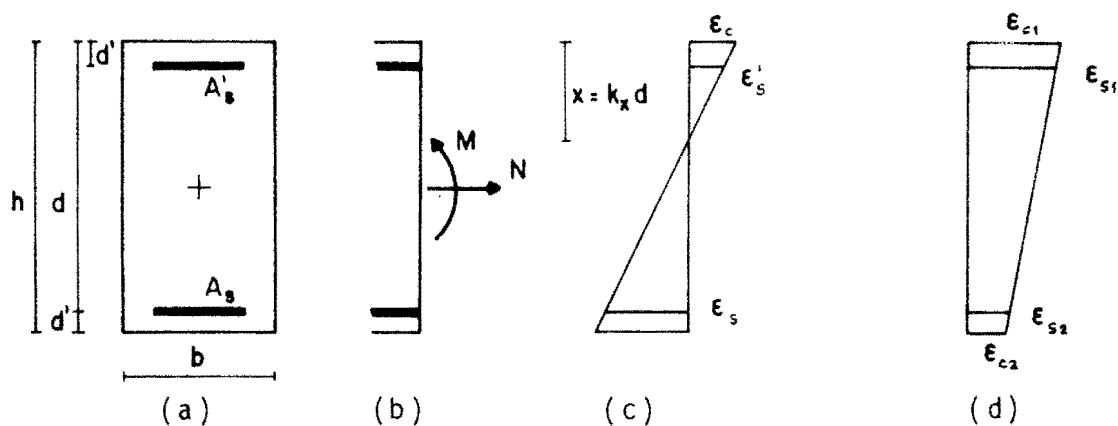
Utilizando a nomenclatura adotada pela NB-1 e indicada na figura 4.7, introduzem-se as seguintes definições:

$$\mu = A_s / (b h)$$

$$\mu' = A'_s / (b h) \quad (4.3.1)$$

$$r = d' / h$$

Deve distinguir-se o caso em que a linha neutra é interna à seção, do caso em que fica fora dela. Sob as hipóteses adotadas, essas situações correspondem aos Estádios II e I, respectivamente [45].



- a) Seção transversal
 b) Esforços solicitantes
 c) Deformações - Linha neutra interna à seção
 d) Deformações - Linha neutra externa à seção

Fig. 4.7. Nomenclatura da geometria da seção flexo-comprimida, ações e deformações.

a) Caso da linha neutra dentro da seção:

O diagrama de deformações, para este caso, está representado na figura 4.7.c. Dali, por considerações geométricas, resulta

$$k_x = x/d = \epsilon_c / (\epsilon_c + \epsilon_s)$$

$$k_x^* = x/h = k_x (1 - r) \quad (4.3.2)$$

$$\epsilon_s' = \epsilon_c (1 - r/k_x^*)$$

Escrevendo as equações de equilíbrio da seção quando solicitada por um momento fletor e um esforço normal, como se mostra na figura 4.7.b, obtêm-se para as forças normais

$$N = b h \left[-\bar{\alpha}_1 k_x^* \sigma_c + \mu \sigma_s - \mu' \sigma_s' \right] \quad (4.3.3)$$

e para os momentos em relação ao baricentro da seção

$$M = b h^2 \left[\bar{\alpha}_1 k_x^* \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_2 k_x^* \right) \sigma_c + \left(\frac{1}{2} - r \right) (\mu \sigma_s + \mu' \sigma_s') \right] \quad (4.3.4)$$

Os coeficientes $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$ definem, respectivamente, a área e o momento estático do diagrama de tensões do concreto, segundo o indicado na figura 4.8, e são dados pelas expressões [45]:

$$\bar{\alpha}_1 = \begin{cases} \frac{\epsilon_c}{12} (6 - \epsilon_c) & \text{para } \epsilon_c \leq 2 \text{ ‰} \\ \frac{(3 \epsilon_c - 2)}{3 \epsilon_c} & \text{para } \epsilon_c \geq 2 \text{ ‰} \end{cases} \quad (4.3.5)$$

$$\bar{\alpha}_2 = \begin{cases} \frac{(8 - \epsilon_c)}{4(6 - \epsilon_c)} & \text{para } \epsilon_c \leq 2 \text{ ‰} \\ \frac{\epsilon_c (3 \epsilon_c - 4) + 2}{2 \epsilon_c (3 \epsilon_c - 2)} & \text{para } \epsilon_c \geq 2 \text{ ‰} \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Nestas fórmulas, ϵ_c está em tanto por mil (‰) e em valor absoluto.

As tensões σ_c , σ_s e σ_s' são obtidas a partir das deformações ϵ_c , ϵ_s e ϵ_s' , respectivamente, dos diagra

mas tensão-deformação da figura 4.6, e nas equações 4.3.3 e 4.3.4 entram com seus valores absolutos.

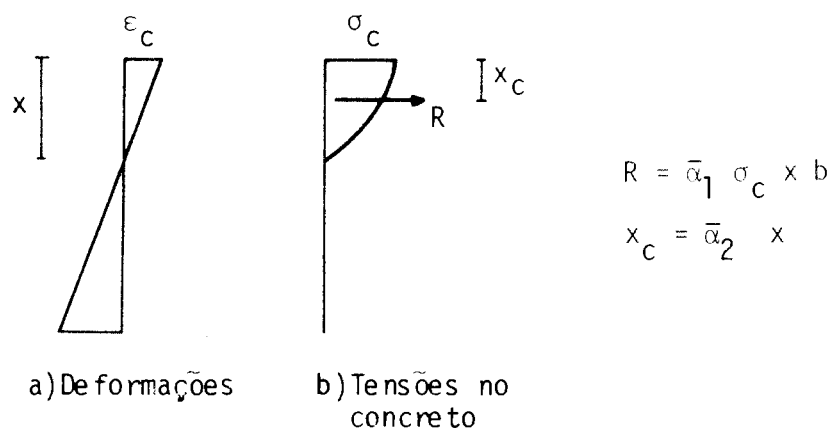


Fig. 4.8. Resultante das tensões no concreto, caso da linha neutra dentro da seção

Definindo as taxas mecânicas da armadura como

$$\omega = \mu f_y / f_c \quad (4.3.7)$$

$$\omega' = \mu' f_y / f_c$$

e as sollicitações adimensionais

$$n = N / (b h f_c) \quad (4.3.8)$$

$$m = M / (b h^2 f_c)$$

e introduzindo-as nas equações 4.3.3 e 4.3.4, obtêm-se finalmente

$$n = - \bar{\alpha}_1 k_x^* \frac{\sigma_c}{f_c} + \omega \frac{\sigma_s}{f_y} - \omega' \frac{\sigma_s'}{f_y} \quad (4.3.9)$$

$$m = \bar{\alpha}_1 k_x^* \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_2 k_x^* \right) \frac{\sigma_c}{f_c} + \left(\frac{1}{2} - r \right) \left(\omega \frac{\sigma_s}{f_y} + \omega' \frac{\sigma_s'}{f_y} \right) \quad (4.3.10)$$

b) Caso da linha neutra fora da seção:

O diagrama de deformações correspondentes a este caso está representado na figura 4.7.d. Este Estádio subsiste apenas para forças normais de compressão ($N < 0$). As equações de equilíbrio são as seguintes:

$$N = - b h \left[\bar{\alpha}_3 \sigma_{c1} + \mu_1 \sigma_{s1} + \mu_2 \sigma_{s2} \right] \quad (4.3.11)$$

$$M = b h^2 \left[\bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_4 \sigma_{c1} + \left(\frac{1}{2} - r \right) (\mu_1 \sigma_{s1} - \mu_2 \sigma_{s2}) \right] \quad (4.3.12)$$

Os coeficientes $\bar{\alpha}_3$ e $\bar{\alpha}_4$ são utilizados para definir a área e o momento estático do diagrama de tensões do concreto, tal como se indica na figura 4.9. A determinação desses coeficientes, que são funções de ϵ_{c1} e ϵ_{c2} , é dada na referência [40].

As taxas geométricas da armadura μ_1 e μ_2 , são definidas como (figura 4.7)

$$\mu_1 = A_s' / (b h) \quad (4.3.13)$$

$$\mu_2 = A_s / (b h)$$

Introduzindo as seguintes definições para as taxas mecânicas da armadura

$$\omega_1 = \mu_1 f_y / f_c \quad (4.3.14)$$

$$\omega_2 = \mu_2 f_y / f_c$$

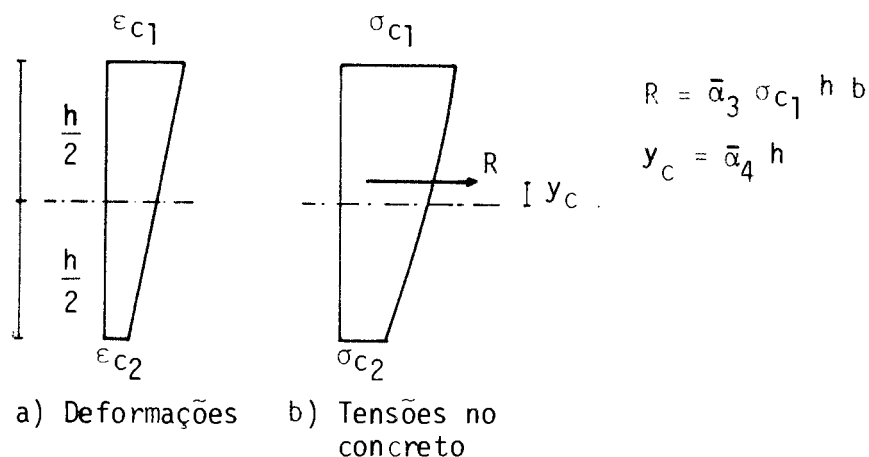


Fig. 4.9. Resultante das tensões no concreto, caso da linha neutra fora da seção.

e com as solicitações adimensionais 4.3.8, as equações 4.3.11 e 4.3.12 podem ser expressas na forma:

$$n = -\bar{\alpha}_3 \frac{\sigma_{c1}}{f_c} - \omega_1 \frac{\sigma_{s1}}{f_y} - \omega_2 \frac{\sigma_{c2}}{f_y} \quad (4.3.15)$$

$$m = \bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_4 \frac{\sigma_{c1}}{f_c} + \left(\frac{1}{2} - r\right) \left(\omega_1 \frac{\sigma_{s1}}{f_y} - \omega_2 \frac{\sigma_{s2}}{f_y}\right) \quad (4.3.16)$$

que são as fórmulas para as solicitações adimensionais em Estádio I. As tensões σ_{c1} , σ_{s1} e σ_{s2} são calculadas a partir das deformações ϵ_{c1} , ϵ_{s1} e ϵ_{s2} com os diagramas da figura 4.6 e, nas fórmulas acima, devem entrar em valor absoluto.

4.4 - DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO CICLO HISTERÉTICO

Os momentos e as curvaturas nas seções plásticas do modelo descrevem um ciclo histerético como o da figura 4.1. A curva esqueleto bilinear deste ciclo depende do esforço normal no elemento.

Na figura 4.10 estão desenhadas as curvas teóricas $M - \chi$, para um valor particular da taxa de armadura e do recobrimento, obtidas variando-se os esforços normais à seção $|40|$. Na mesma figura, em linha tracejada, estão representadas as curvas esqueleto bilineares adotadas para o modelo. A colaboração do concreto em tração não é levada em conta. Determina-se a rigidez elástica inicial, para o caso do esforço normal nulo, unindo-se mediante uma reta a origem com o ponto correspondente ao primeiro escoamento da armadura. Este ponto define o momento de plastificação M_p . A reta plástica tem uma inclinação igual a α vezes a reta inicial. A rigidez elástica inicial é considerada independente dos esforços normais. Estes influenciam os momentos de plastificação e o parâmetro de endurecimento, produzindo as diferentes curvas, em linha tracejada, da figura 4.10.

A descarga, após ter plastificado, segue uma reta com uma inclinação igual à inicial multiplicada por um fator que depende das deformações máximas experimentadas pela seção, segundo a fórmula 4.1.1 (figura 4.1). As sucessivas cargas e descargas, na fase elástica, são realizadas com essa rigidez degradada da fórmula 4.1.1. A seção torna a plastificar quando é atingida uma das duas retas plásticas da figura 4.1.

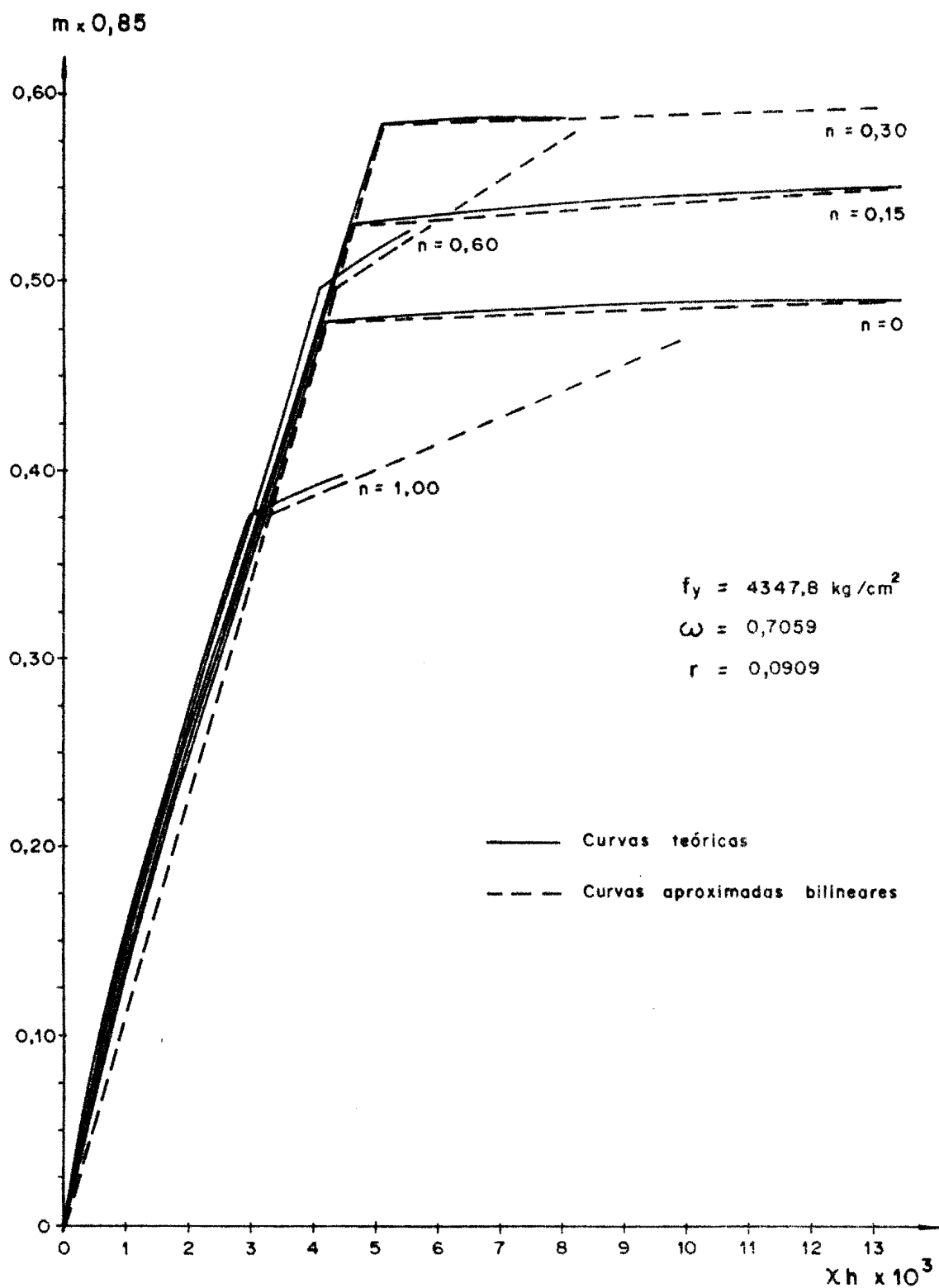


Fig. 4.10. Curvas esqueleto momento-curvatura teóricas e aproximadas.

O momento de plastificação M_p é função do esforço normal na seção como se indica na figura 4.11. Os pontos T, F, B e C estão unidos por linhas retas. A análise limitar-se-á a seções com armadura simétrica. Nesse caso, os momentos de plastificação para flexão em ambos os sentidos são iguais.

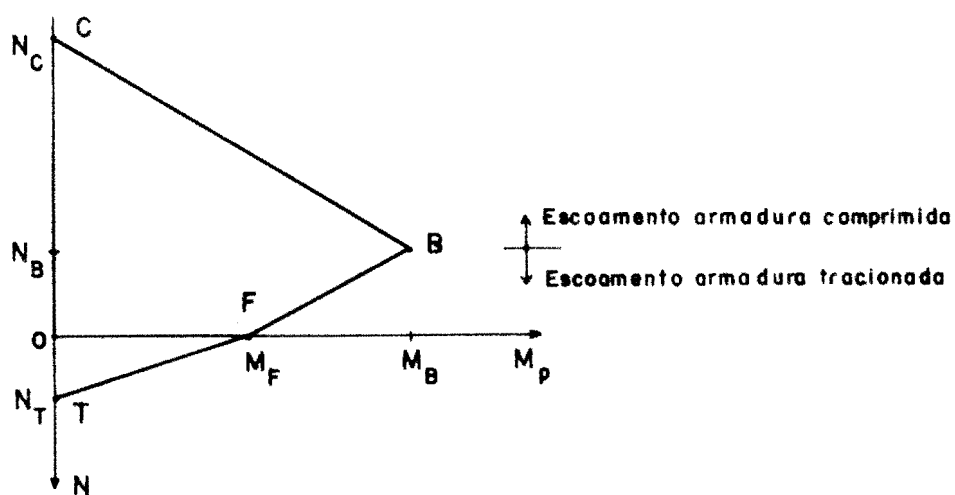


Fig. 4.11. Diagrama de interação M-N

O ponto T corresponde ao escoamento da armadura quando a seção está submetida a tração pura. O momento é nulo e a carga normal é

$$N_T = 2 \omega b h f_c \quad (4.4.1)$$

já que $\omega' = \omega \quad (4.4.2)$

O escoamento da seção quando submetida a compressão pura define o ponto C do diagrama. O momento para este ponto também é nulo, e o esforço normal resulta, das expressões 4.3.15 e 4.3.8, em

$$N_C = \left(-\frac{\sigma_C}{f_C} - 2\omega \right) b h f_C \quad (4.4.3)$$

Por sua vez, sendo ϵ_y ‰ a deformação do escoamento do aço da armadura,

$$\frac{\sigma_C}{f_C} = \begin{cases} (\epsilon_y - \epsilon_y^2/4) & \text{para } \epsilon_y \leq 2 \\ 1 & \text{para } \epsilon_y > 2 \end{cases} \quad (4.4.4)$$

O ponto B está caracterizado pelo escoamento simultâneo das armaduras comprimidas e tracionadas, e os esforços associados a ele são obtidos particularizando as equações 4.3.9 e 4.3.10 para $\epsilon_s = \epsilon'_s = \epsilon_y$ e levando em conta 4.3.8. Nesse caso

$$k_x^* = \frac{1}{2}$$

e a força normal e o momento fletor são

$$N_B = \left(-\frac{\bar{\alpha}_1}{2} \frac{\sigma_C}{f_C} \right) b h f_C \quad (4.4.5)$$

$$M_B = \left[\frac{\bar{\alpha}_1}{4} (1 - \bar{\alpha}_2) \frac{\sigma_C}{f_C} + (1 - 2r) \omega \right] b h^2 f_C \quad (4.4.6)$$

sendo $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$ calculados com as equações 4.3.5 e 4.3.6 fazendo-se

$$\epsilon_c = \epsilon_y / (1 - 2r) \quad (4.4.7)$$

Com este valor de ϵ_c , obtêm-se σ_c/f_c do diagrama da figura 4.6.

Finalmente, o ponto F do diagrama de interação, que corresponde ao caso de flexão pura, tem esforço normal nulo, e o momento fletor deve ser determinado em forma iterativa. O processo pode ser esquematizado nos seguintes passos:

- 1º) Para um dado valor de ϵ_c determinam-se: k_x^* e ϵ_s' (eqs. 4.3.2), σ_s' e σ_c (figura 4.6), e $\bar{\alpha}_1$ (eq. 4.3.5). Com esses valores calcula-se a força normal adimensional n (eq. 4.3.9).
- 2º) Compara-se o valor absoluto de n com uma tolerância estabelecida. Se $|n|$ for maior que essa tolerância, determina-se uma nova estimativa para ϵ_c com a fórmula

$$\epsilon_c^{(i+1)} = \epsilon_c^{(i-1)} - n^{(i-1)} \frac{[\epsilon_c^{(i)} - \epsilon_c^{(i-1)}]}{[n^{(i)} - n^{(i-1)}]} \quad (4.4.8)$$

na i -ésima iteração. Volta-se ao primeiro passo e repete-se o ciclo até ser atingida a convergência. Se $|n|$ for menor que a tolerância, calcula-se o momento M_F com as equações 4.3.10 e 4.3.8(b).

Os v̄rtices da função poligonal da figura 4.11 são determinados, para cada extremo de cada elemento, no início da análise. Posteriormente, mediante essa função calcula-se, em cada passo da análise, o momento de plastificação nos extremos dos elementos para o nível de esforços normais do passo anterior.

A rigidez inicial calcula-se com a expressão

$$K = M / \chi \quad (4.4.9)$$

onde $M \bar{e}$ é o momento calculado para o ponto F do diagrama de iteração na forma indicada anteriormente, e $X \bar{e}$ é a curvatura, para esse ponto, dada por (vide figura 4.7):⁽¹⁾

$$X = \epsilon_c / x \quad (4.4.10)$$

Essa rigidez determina-se no começo da análise, para cada elemento, tomando a média dos valores calculados em cada extremidade e permanece invariante frente aos esforços normais.

A rigidez plástica é função dos esforços normais, segundo se mostra na figura 4.12.

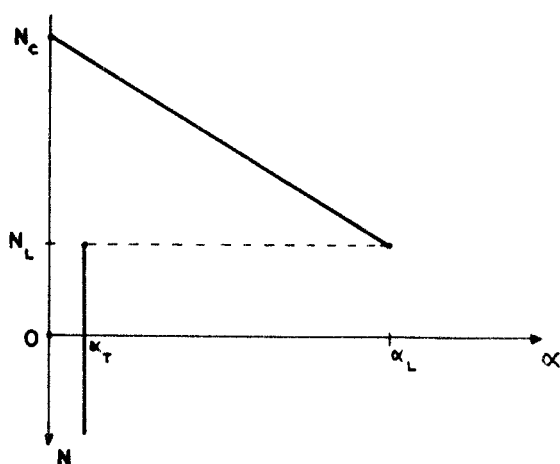


Fig. 4.12. Parâmetro de endurecimento em função dos esforços normais

(1) Quando o cortante não varia ao longo do elemento, a distribuição das deformações longitudinais, no caso elástico, não é alterada pela inclusão das deformações de cisalhamento e a curvatura pode ser calculada com a expressão 4.4.10, a qual admite-se que continua sendo válida para o concreto armado.

A descontinuidade se produz em correspondência com a carga de balanceado, definida pelo escoamento da armadura tracionada, simultaneamente com o esmagamento do concreto exterior. Essa carga resulta em:

$$N_L = \left[0,8095 k_x^* + \left(\frac{\sigma_s'}{f_y} - 1 \right) \omega \right] b h f_c \quad (4.4.11)$$

onde

$$k_x^* = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_s} (1 - r) \quad (4.4.12)$$

e σ_s' determina-se a partir do diagrama da figura 4.6 com a deformação:

$$\epsilon_s' = 3,5 (k_x^* - r) / k_x^* \quad (4.4.13)$$

A carga N_c é dada pela expressão 4.4.3.

A função da figura 4.12 responde à análise de curvas tais como as desenhadas na figura 4.10, obtidas numericamente [40]. Os valores adotados para α_T e α_L são, respectivamente, 0,02 e 0,20.

Quando se realiza o cálculo do momento de plastificação, em cada passo, como função dos esforços normais, se efetua também a interpolação, segundo a figura 4.12, para a determinação do parâmetro α de endurecimento.

No modelo histerético da figura 1.1.d, a degradação da rigidez estrutural pode ser levada em conta, satisfatoriamente, mediante o coeficiente

$$\frac{S'}{S} = \left| \frac{\delta_p}{\delta_{m\acute{a}x}} \right|^v \quad (4.4.14)$$

com valores do expoente v compreendidos entre 0,5 e 0,6

[42]. A relação entre este expoente e o γ da fórmula 4.1.1, para a rigidez das seções que tem plastificado, depende do comprimento relativo das zonas plásticas λ , do parâmetro de endurecimento α e da ductilidade. Esta relação, para uma viga em balanço, é apresentada no anexo 8.1. Para esse caso, tomando-se $\lambda = 0,10$ e $\alpha = 0,02$, os valores para ν apontados acima obtêm-se com $\gamma = 0,6$.

4.5 - RIGIDEZ AO CISALHAMENTO

A rigidez ao cisalhamento GA/c_f utilizada no capítulo 3 (eq. 3.3.1.2), com $c_f = 1,2$, é válida para seções de concreto armado não fissuradas (Estádio I). Nas aproximações feitas neste capítulo considerou-se que as seções têm fissuras de tração no concreto (Estádio II). Neste caso não é possível, conceitualmente, utilizar o módulo G para o cálculo das deformações de corte. Este tema é objeto de discussões e intensivas pesquisas. No entanto, as fórmulas do capítulo 3 podem ser aplicadas tomando, para o coeficiente c_f algum valor estabelecido a partir de critérios simplificativos. Por exemplo, da expressão sugerida por Leonhardt [45] para a rigidez ao cisalhamento no Estádio II, de uma viga com estribos verticais, pode obter-se:

$$c_f = \frac{G}{E_c} \frac{k_\tau E_c + 4 \mu_{sw} E_s}{k_z (1-r) \mu_{sw} E_s} \quad (4.4.15)$$

onde $k_z = (1 - \bar{\alpha}_2 k_x)$, $k_\tau \leq 1$ é um coeficiente empírico de redução [45], e $\mu_{sw} = A_{sw}/(e_{sw} b)$ sendo A_{sw} a área da seção transversal dos estribos e e_{sw} o seu espaçamento.

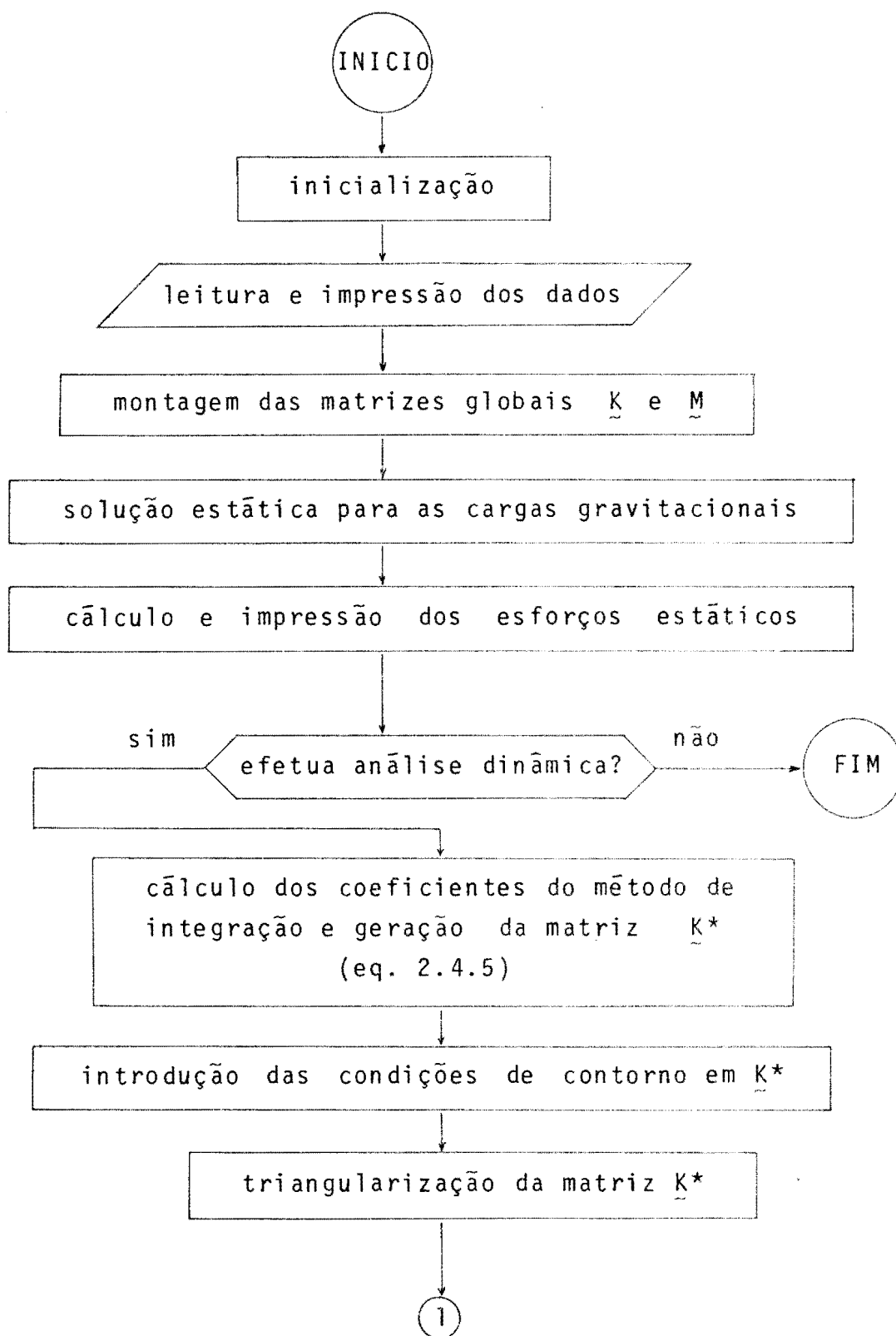
5 - PROGRAMAS COMPUTACIONAIS IMPLEMENTADOS

5.1 - GENERALIDADES

Dois programas computacionais foram implementados para analisar a resposta da estrutura de edifícios, considerando-se o seu comportamento inelástico, frente a ações dinâmicas: o programa ANDINO (ANálise DINâmica Não-linear) e o programa ANDEN (ANálise Dinâmica de Edifícios Não-linear). A diferença entre os dois reside em que, neste último, orientado especialmente para estruturas de concreto armado, o cálculo dos momentos de inércia e dos momentos de plastificação para cada elemento é feito automaticamente segundo as fórmulas apresentadas na seção 4.4. Além disso, é considerada a influência de carga axial sobre o momento de plastificação e, para tanto, leva-se em conta o efeito das cargas gravitacionais. Fora disso, os dois programas são iguais, e a descrição feita nesta seção corresponde ao programa ANDEN, cujo fluxograma geral vem apresentado na figura 5.1. Codificados na linguagem FORTRAN, os programas foram processados no computador BURROUGHS 6700 da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Na seção 5.2, são discutidas as possibilidades do programa ANDEN quanto a tipos de estrutura a serem analisadas, formas de carregamento e excitação, modos de análise e resultados.

O processo para a determinação das forças resistentes incrementais não-lineares, em cada iteração da análise passo-a-passo, está indicado na seção 5.3, juntamente com outras características particulares do programa.



(continua)

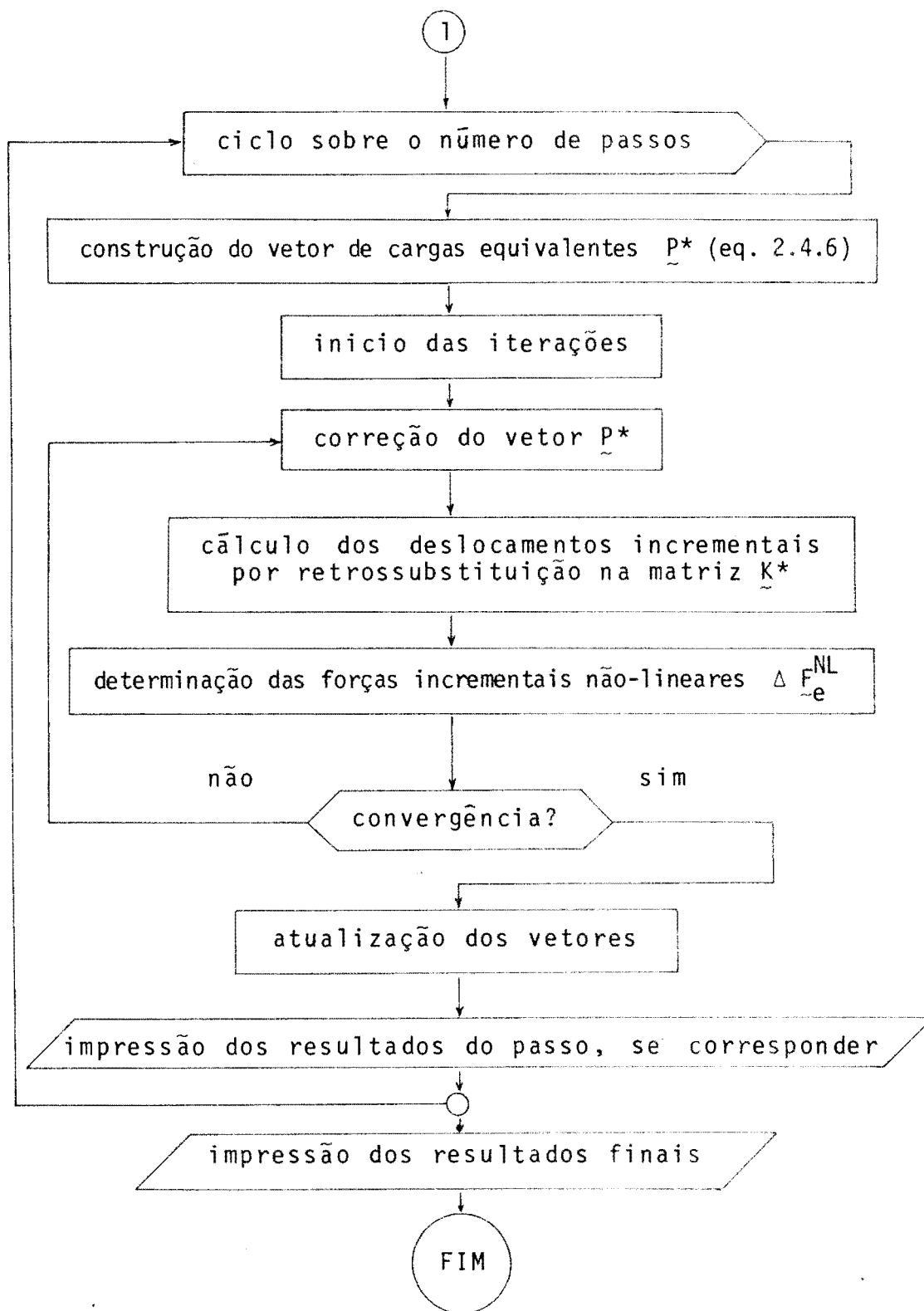


Figura 5.1 - Fluxograma geral do programa ANDEN

5.2 - POSSIBILIDADES DO PROGRAMA ANDEN

5.2.1 - Tipo de Estrutura

O objetivo do programa é a análise de estruturas de edifícios, e o elemento implementado, basicamente, é de pórtico plano. Na formulação das suas características de rigidez, considerou-se a deformação devida ao cisalhamento, assim como a existência de extremos rígidos para representar uniões de dimensão finita.

Os elementos estruturais são todos de seção retangular e com armadura simétrica, isto é, as armaduras de tração e de compressão são iguais. As resistências do concreto e do aço podem variar entre os elementos.

5.2.2 - Formas de Solicitação

A estrutura pode estar solicitada simultaneamente por ações dinâmicas e por cargas estáticas. Devido à não-linearidade do problema, o princípio de superposição dos efeitos não é aplicável, e as cargas estáticas, ou cargas gravitacionais, devem ser incluídas na análise junto com as ações dinâmicas. Estas últimas, por sua vez, admitem dois tipos: um carregamento variável no tempo, ou um movimento da base do edifício.

As cargas dinâmicas são aplicadas sobre os nós da estrutura, na direção dos graus de liberdade, e podem ser dadas de duas maneiras. A primeira é através de uma forma espacial fixa de carregamento, modulada por uma função do tempo. Nesse caso, são lidos, no começo do processo, um vetor com a distribuição espacial da carga e outro com a distribuição temporal ou função do tempo. A segunda possibilidade de se especificar o carregamento é fazendo a leitura do mesmo em cada etapa do tempo. Assim, a forma espacial de carregamento não precisa ser fixa como no caso

anterior.

O movimento da base é indicado através dos valores da aceleração do solo como funções do tempo. Todos os apoios experimentam o mesmo movimento e este pode ser vertical ou horizontal.

A função temporal, tanto para modular o carregamento, como para as acelerações da base, é especificada de uma das duas formas. A primeira é como função poligonal, fornecendo-se as coordenadas (tempo e amplitude) dos seus vértices. A segunda é fazendo-se a leitura dos valores discretos da função correspondentes a cada passo da análise.

As cargas gravitacionais são introduzidas como forças nodais e como cargas distribuídas nos elementos. Com este carregamento, efetua-se uma análise estática linear antes de começar a determinação da resposta dinâmica. A ação destas forças estáticas é levada em conta como valores iniciais apenas nos esforços de extremo de membro, não sendo considerada nos deslocamentos. A validade desta forma de análise limita-se aos casos em que a estrutura, sob a ação das cargas gravitacionais, permanece em fase elástica linear.

5.2.3 - Modos de Análise e Resultados

O programa permite a realização de uma análise estática linear ou de uma análise de resposta transiente. Esta última é feita por integração direta das equações do movimento, passo a passo, pelos métodos de Newmark ou de Park.

A saída do programa, quando se efetua uma análise estática, fornece os deslocamentos nodais, as forças nodais e reações, e as ações de extremo de membro. Estas últimas são os esforços normais e cortantes, e os momentos

fletores nos extremos do elemento e nos extremos do segmento elástico (vide figura 3.1).

Quando se realiza uma análise dinâmica é possível especificar quantos passos de tempo medeiam entre cada impressão dos resultados. Esse número de passos entre duas impressões pode ser mudado, uma vez em qualquer etapa do cálculo. Os resultados fornecidos durante a integração são os seguintes: para cada grau de liberdade: o deslocamento, a velocidade, a aceleração, a força resistente interna e o incremento não-linear da força resistente interna; para cada elemento: o momento fletor, a curvatura, a parte plástica acumulada da curvatura e o esforço normal, todos eles nas duas extremidades.

Completados todos os passos, no fim da análise são impressos: para cada grau de liberdade, os envolventes dos deslocamentos e, para cada elemento, os envolventes dos momentos fletores, assim como as ductilidades de curvatura.

A ductilidade é uma medida das deformações inelásticas que se produzem na estrutura, apresentando-se, geralmente, como a relação entre a máxima deformação e a correspondente à plastificação. Assim, a ductilidade pode ser determinada com base em deslocamentos, rotações, curvaturas ou deformações específicas. Porém, os índices obtidos com estes diferentes parâmetros não são comparáveis diretamente [33]. A definição baseada nas curvaturas aparece como um melhor indicador das deformações inelásticas [47].

Todavia, podem ser empregadas várias definições para a ductilidade [34,37]. A mais comumente usada é

$$\mu_{\chi} = \frac{|\chi_{\max}|}{\chi_p} = 1 + \frac{|M_{\max}| - M_p}{\alpha M_p} \quad (5.2.2.1)$$

sendo $\chi_{\bar{m}ax}$ e $M_{\bar{m}ax}$, a curvatura e o momento de maior valor absoluto atingidos, e os demais parâmetros segundo a figura 5.2. A definição 5.2.2.1 complica-se quando é considerado o efeito das forças axiais sobre o momento de plastificação, uma vez que χ_p e M_p não possuem valores fixos. No programa ANDEN, o momento M_p é calculado para o nível de esforços normais da estrutura sob a ação das cargas gravitacionais exclusivamente. Para uma excitação com valores médios nulos, como é o caso de um movimento sísmico, o M_p assim calculado representa uma média dos valores atingidos.

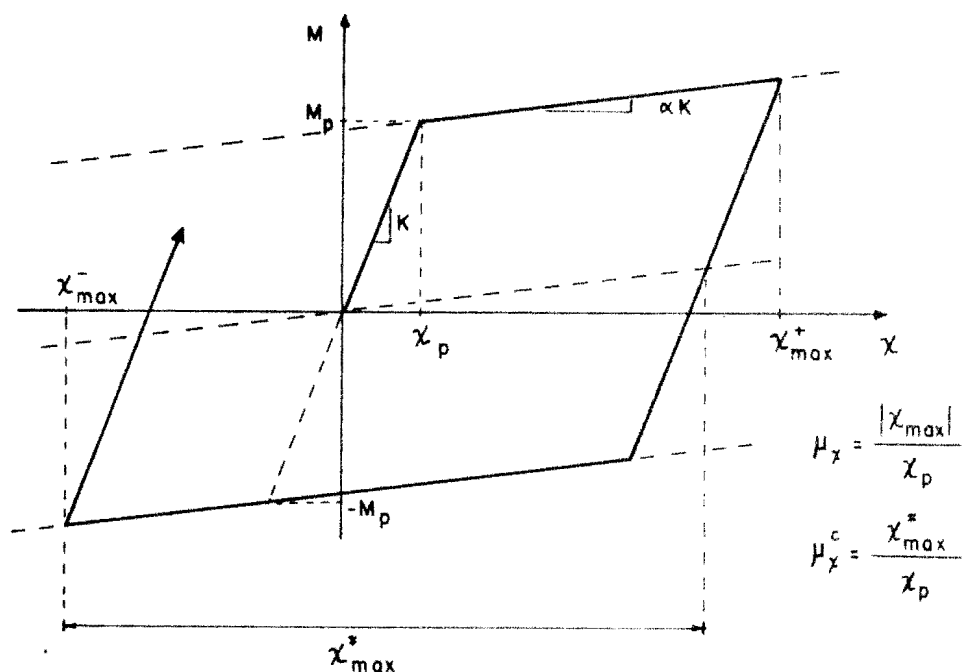


Fig. 5.2. Definições do fator de ductilidade

Um outro coeficiente, denominado fator de ductilidade cíclica [47], é dado por:

$$\mu_X^c = \frac{\chi_{\max}^*}{\chi_p} = 1 + \frac{\sum |M_{\max} - M_p|}{\alpha M_p} \quad (5.2.2.2)$$

onde o somatório é efetuado para cada sentido da flexão em que se tenha produzido plastificação, M_{\max} é o máximo momento na seção, sendo as outras grandezas definidas na figura 5.2. Um extremo superior para o valor de μ_X^c é calculado no programa com a fórmula

$$\text{Max } \mu_X^c = \frac{\chi_{\max}^+ + |\chi_{\max}^-|}{\chi_p} - 1 \quad (5.2.2.3)$$

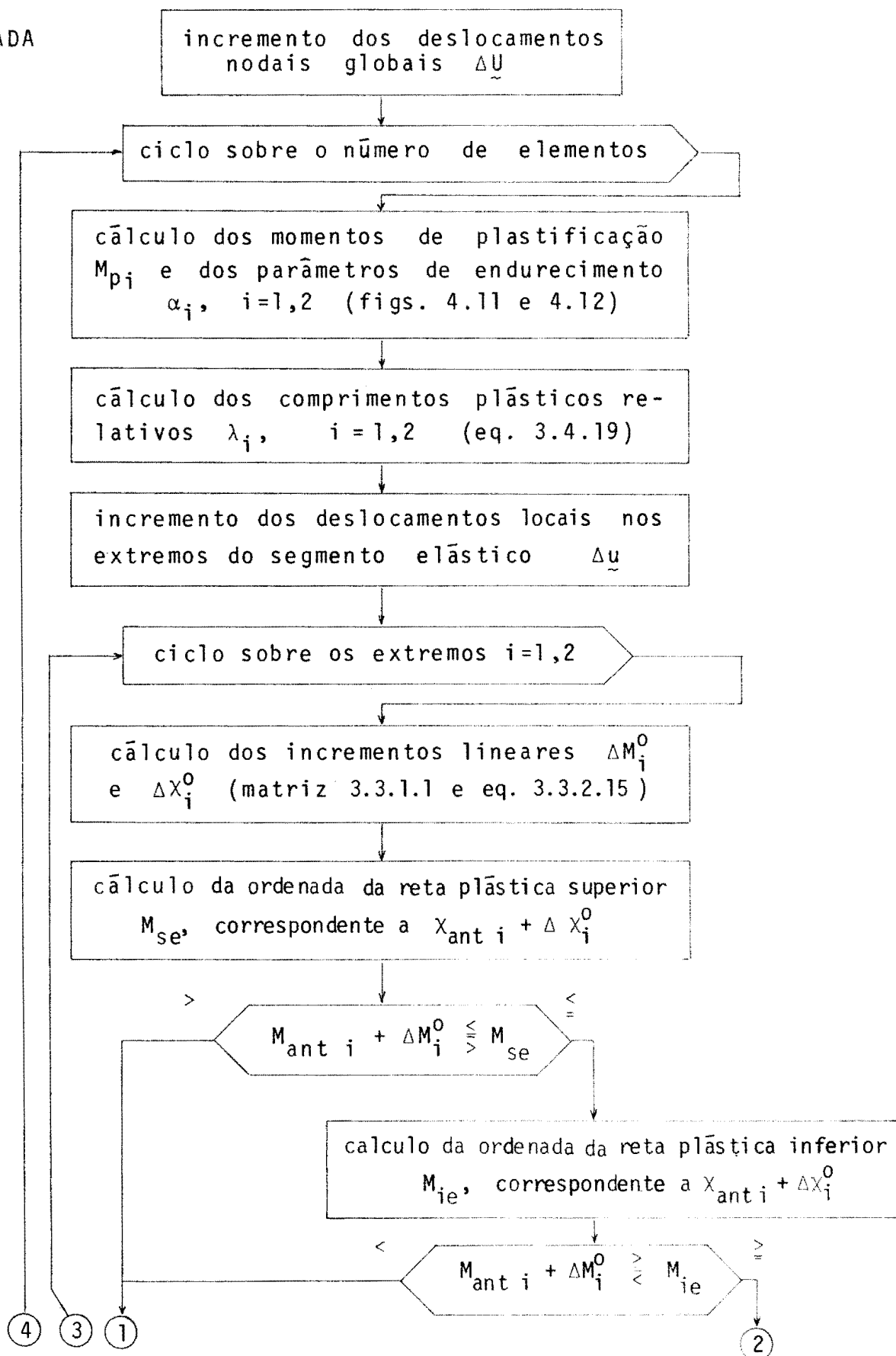
Os valores calculados com as expressões 5.2.2.1 e 5.2.2.3 são impressos com os resultados anteriormente indicados.

5.3 - CARACTERÍSTICAS ESPECÍFICAS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

5.3.1 - Cálculo das Forças Incrementais Não-Lineares

O ponto crucial do processo de integração no tempo das equações não lineares é o cálculo da parte não-linear do vetor de incremento das forças resistentes ΔF_{NL} , na etapa 3.f do esquema 2.1. Esta operação é realizada, no programa, pela sub-rotina DLTNL, cujo fluxograma geral mostra-se na figura 5.3. Nessa sub-rotina ingressa-se com o vetor de incremento dos deslocamentos e, para cada elemento, é calculado o incremento não-linear das forças resistentes, realizando-se posteriormente a montagem destas no vetor global.

ENTRADA



(continua)

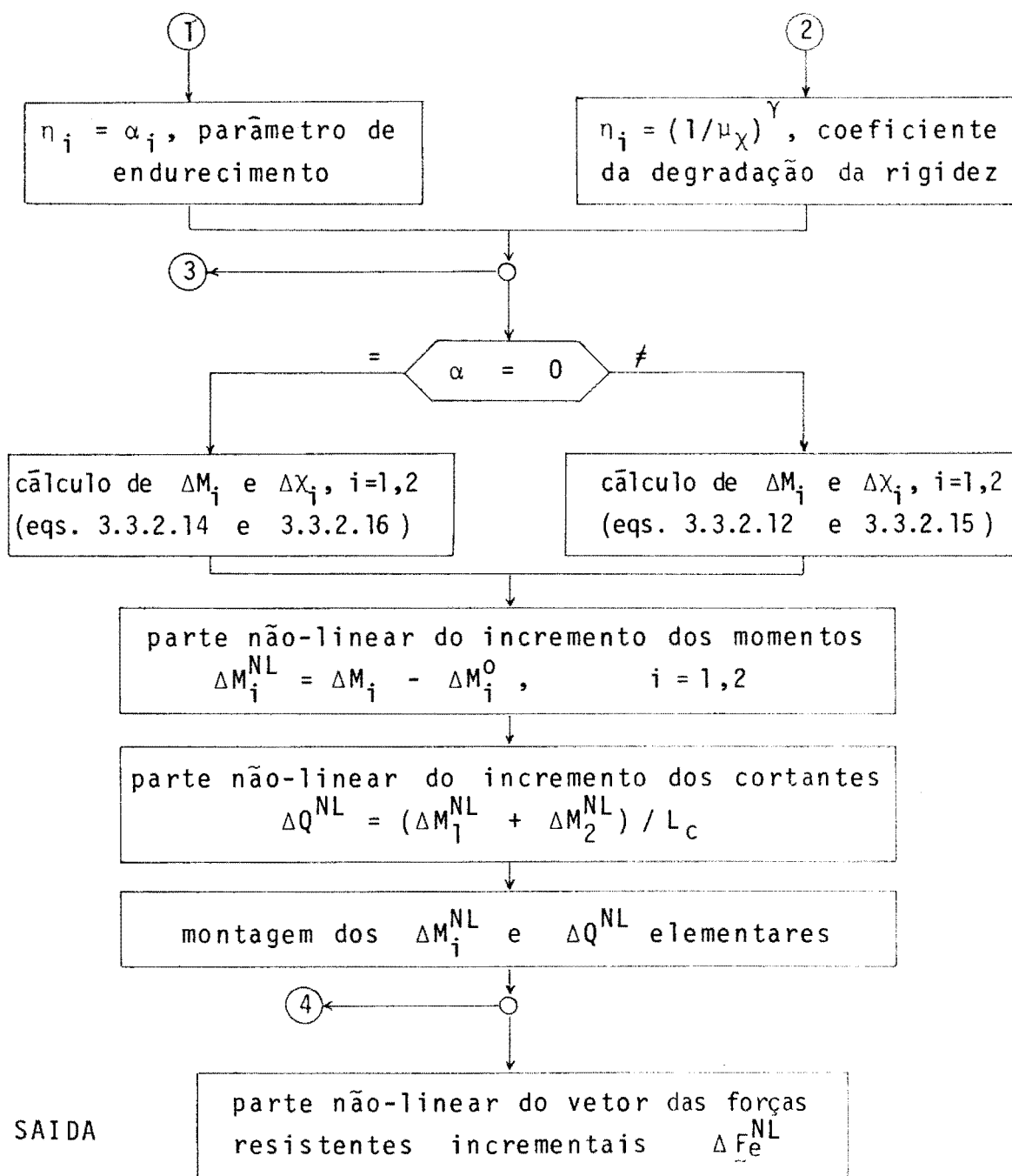


Figura 5.3 - Fluxograma geral da sub-rotina DLTNL

Na figura 5.4 indica-se o segmento deformável do elemento, submetido a um incremento nos deslocamentos extremos, e os diagramas de momentos fletores e de curvaturas produzidas no regime elástico (b) e no regime plástico (c). Todavia podem ocorrer outros casos, que não aparecem na figura 5.4, em que apenas um dos extremos esteja plastificado. Em todos eles o incremento dos momentos fletores tem uma distribuição linear, devido a considerações de equilíbrio, por não existirem cargas interiores ao elemento. Já o diagrama de curvaturas, quando algum dos extremos está plastificado, apresenta descontinuidade (figura 5.4.c). Os incrementos dos momentos fletores são calculados com o sistema de equações 3.3.2.12, sendo que, no caso de comportamento elástico, os coeficientes η_i ($i = 1, 2$) das fórmulas 3.3.2.13 são tomados como unitários.

Na sub-rotina DLTNL, realiza-se um ciclo sobre o número de elementos e, dentro dele, efetuam-se as seguintes operações:

1º) Determinam-se os momentos de plastificação de cada extremo do membro e os parâmetros de endurecimento, com as funções das figuras 4.11 e 4.12.

2º) Calcula-se o comprimento relativo das zonas plastificadas com a equação 3.4.19:

3º) São isolados os incrementos dos deslocamentos nas extremidades do segmento deformável (figura 3.2) em coordenadas locais.

4º) Identificam-se os extremos que plastificam. Para isto, em cada extremo calculam-se os incrementos elásticos dos momentos, ΔM^0 , e das curvaturas, $\Delta \chi^0$, com as relações elásticas (matriz \bar{k} , expressão 3.3.1.1), e somam-se aos momentos e curvaturas acumulados, M_{ant} e χ_{ant} . Determina-se a ordenada M_{se} da reta plástica superior,

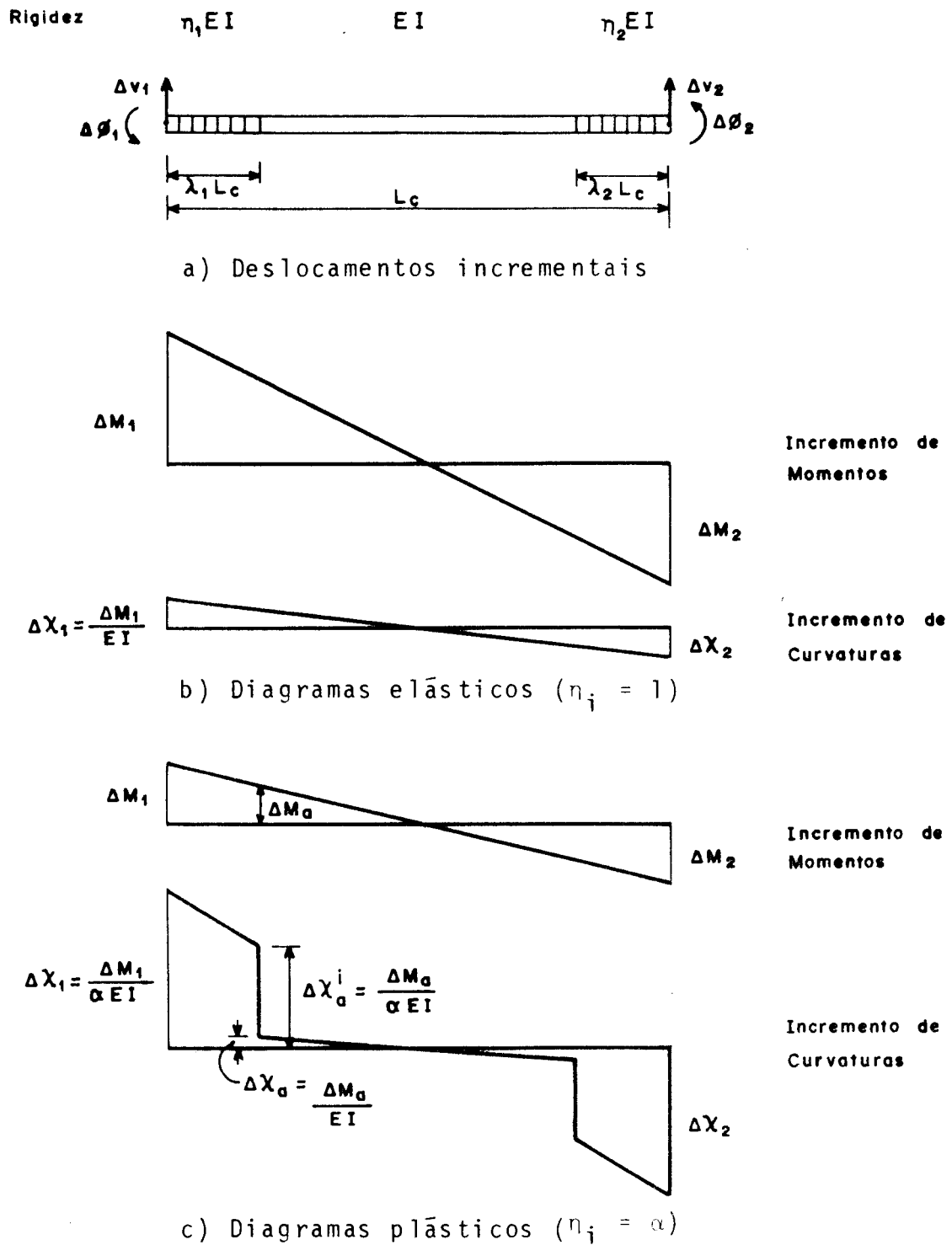


Fig. 5.4. Diagramas incrementais de momentos e de curvaturas no segmento deformável do elemento.

correspondente à curvatura $\chi_{ant} + \Delta\chi^0$, segundo se indica na figura 5.5 e compara-se com o momento atualizado. Se este último excede o valor da reta plástica superior, faz-se o coeficiente η igual ao parâmetro de endurecimento α . Caso contrário, efetua-se um teste similar, considerando-se a reta plástica inferior. Para pontos situados entre essas duas retas, toma-se η igual ao coeficiente da degradação da rigidez elástica (equação 4.1.1).

59) Calcula-se o incremento dos momentos ΔM em cada extremo, com as equações 3.3.2.14 ou 3.3.2.12, segundo o parâmetro de endurecimento seja nulo ou não.

60) Determinam-se as partes não-lineares dos acréscimos dos momentos

$$\Delta M^{NL} = \Delta M - \Delta M^0 \quad (5.3.1.1)$$

e das forças cortantes (vide equação 3.3.2.8).

$$\Delta Q^{NL} = (\Delta M_1^{NL} + \Delta M_2^{NL}) / L_c \quad (5.3.1.2)$$

70) Efetua-se a montagem dos incrementos não-lineares das ações, obtendo-se finalmente o vetor $\underline{\Delta F_e}^{NL}$.

Nos vetores que contêm os esforços normais e momentos fletores atualizados, nos extremos de cada elemento, estão considerados os efeitos das cargas gravitacionais. A determinação dos momentos de plastificação é feita para o nível de esforços normais correspondente ao passo anterior.

Uma precaução deve ser tomada no passo que contém a passagem da fase elástica à plástica, para que a curva $M - \chi$ se desloque por as retas plásticas e não por uma paralela a elas. Para isso, nesse passo em particular, toma-se como valor atual do momento fletor a ordenada da re-

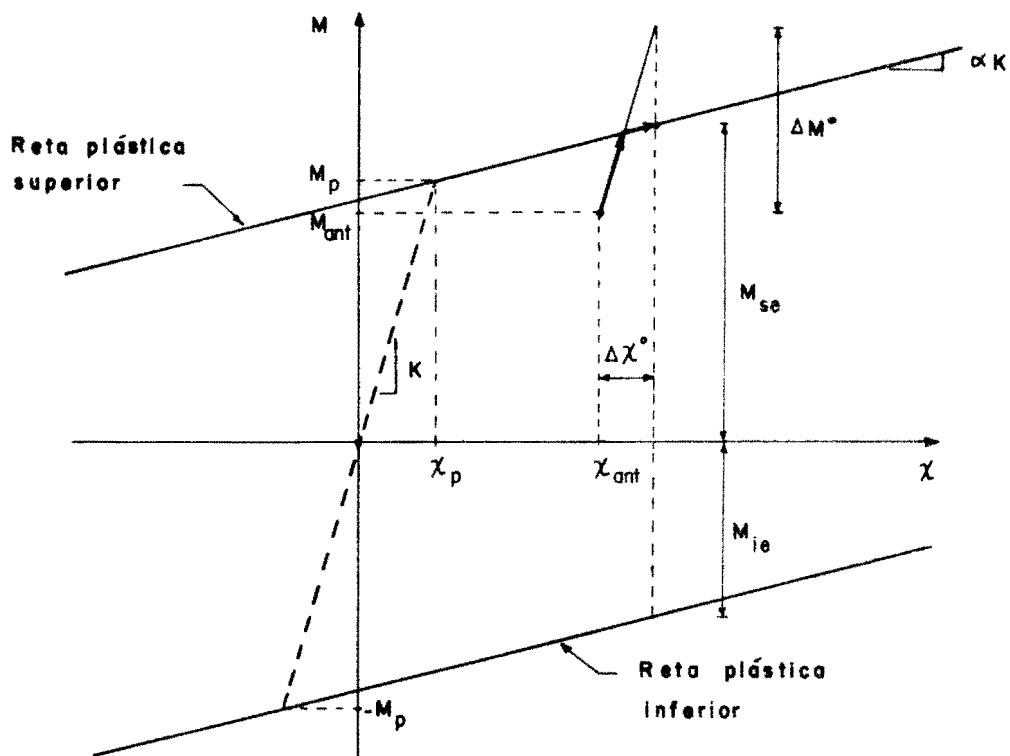


Fig. 5.5. Identificação da seção plastificada

ta plástica calculada na quarta operação do processo (figura 5.5).

5.3.2 - Teste da Convergência das Iterações

Na etapa 3.g do esquema 2.1, efetua-se o teste da convergência do processo iterativo. O erro no cálculo do vetor de incrementos não-lineares \bar{a} é avaliado tomando-se a norma da diferença entre o vetor obtido na iteração presente e o da iteração anterior e dividindo-se pela norma do vetor da presente iteração. A tolerância é intro

duzida no programa como dado.

Um outro teste deve ser feito, para evitar operações desnecessárias, quando os vetores envolvidos são muito pequenos. Assim, tanto o numerador quanto o denominador da fórmula do erro são comparados com um outro valor de tolerância. Se aqueles resultam menores que este valor, considera-se que a convergência foi atingida. Esta segunda tolerância foi fixada, arbitrariamente, em 10^{-3} .

5.3.3 - Cálculo do Vetor das Forças Resistentes

A atualização do vetor de forças resistentes na etapa 4 do esquema 2.1 se faz acrescentando ao valor anterior o incremento $\Delta \underline{F}_t$ obtido nesse passo. Este incremento tem uma parte não-linear que é fornecida diretamente pela sub-rotina DLTNL e uma parte linear que pode ser determinada multiplicando-se a matriz de rigidez pelo incremento de deslocamentos. No entanto, pode-se chegar ao mesmo resultado sem necessidade de realizar um produto matricial, observando que, em relação às equações 2.2.12 e 2.4.5,

$$\Delta \underline{F}_t = \underline{K} \Delta \underline{U}_t + \Delta \underline{F}_t^{NL} \quad (5.3.3.1)$$

e

$$\underline{K} \Delta \underline{U}_t = \underline{K}^* \Delta \underline{U}_t - (a_0 \underline{M} + a_1 \underline{C}) \Delta \underline{U}_t \quad (5.3.3.2)$$

assim

$$\Delta \underline{F}_t = \underline{K}^* \Delta \underline{U}_t + \Delta \underline{F}_t^{NL} - (a_0 \underline{M} + a_1 \underline{C}) \Delta \underline{U}_t \quad (5.3.3.3)$$

e introduzindo a 2.4.7:

$$\Delta \underline{F}_t = \underline{P}_{t+\Delta t}^* - (a_0 \underline{M} + a_1 \underline{C}) \Delta \underline{U}_t \quad (5.3.3.4)$$

Esta última expressão é utilizada no programa para se cal-

cularem os incrementos das forças resistentes.

Quando se utiliza o método Wilson - θ , porém, a fórmula 5.3.3.4 não é aplicável, já que os vetores \underline{p}^* e $\Delta \underline{Fe}^{NL}$ correspondem ao passo $\tau = \theta \Delta t$ e não ao passo real. Nesse caso, deve-se calcular o incremento linear como produto da matriz de rigidez pelo vetor de deslocamentos incrementais, e o incremento não-linear com auxílio da sub-rotina DLTNL, aplicando-se finalmente a equação 5.3.3.1 para o cálculo de $\Delta \underline{Fe}_t$.

5.3.4 - Solução do Sistema de Equações Lineares

A matriz de rigidez é armazenada num vetor por colunas da matriz banda. A sub-rotina de resolução do sistema de equações lineares está baseada no algoritmo de eliminação de Gauss modificado pelo processo de redução de Crout e leva em conta a característica da matriz esparsa através de um vetor perfil [51].

A matriz do sistema é triangularizada uma única vez no começo do processo. Em cada etapa, atualizado o vetor de termos independentes, efetua-se apenas uma retrossubstituição em cada iteração (operação 3.d em cada passo do esquema 2.1).

6 - RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO PROGRAMA

6.1 - GENERALIDADES

Nesta seção apresentar-se-ão os resultados obtidos na aplicação do programa a vários exemplos. Aqueles das seções 6.2 e 6.3 foram resolvidos com o programa AN-DINO, enquanto que os exemplos das seções 6.4 e 6.6, referidos a estruturas de concreto armado, resolveram-se com o programa ANDEN.

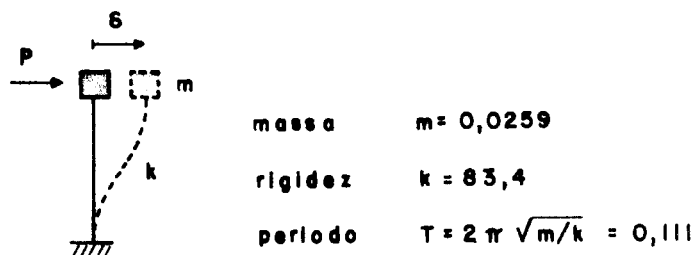
6.2 - SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

Resolveram-se vários exemplos de um sistema, com um grau de liberdade, para testar os algoritmos de integração numérica e a influência do tamanho do passo.

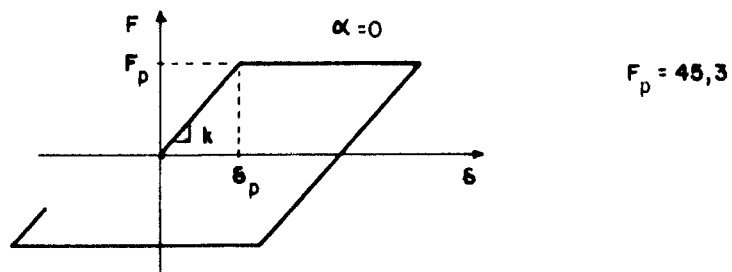
a) Resposta elastoplástica a uma carga repentina:

Um sistema simples de comportamento elastoplástico perfeito, cujas características estão dadas na figura 6.1, foi submetido a uma força aplicada em forma repentina no instante inicial, mantendo posteriormente um valor constante. Este sistema foi representado mediante uma viga biengastada, tendo num dos seus extremos liberdade de se deslocar perpendicularmente ao eixo da viga. As características do modelo determinaram-se, em função das do sistema simples, com as fórmulas apresentadas no anexo 8.1. A análise foi feita com uma tolerância de 1% para o cálculo do vetor de incrementos não-lineares das forças internas. Os resultados obtidos mostram-se nas figuras 6.2 a 6.4 junto com a solução exata do problema [16].

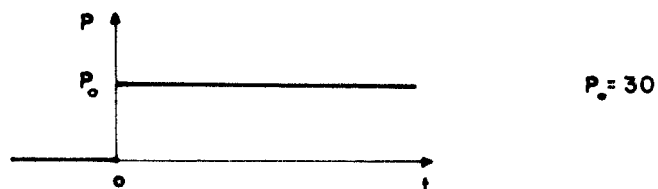
Para este exemplo observa-se que o método de Newmark forneceu resultados mais próximos da solução exata do que o de Park. Quanto ao tamanho do passo, com intervalos de 1/12 do período fundamental T os resultados aparecem pouco precisos. Já para $\Delta t = T/24$ obtêm-se valores



a) Sistema simples



b) Diagrama força resistente-deslocamento



c) Carga repentina

Fig. 6.1. Sistema de um grau de liberdade com carregamento repentino.

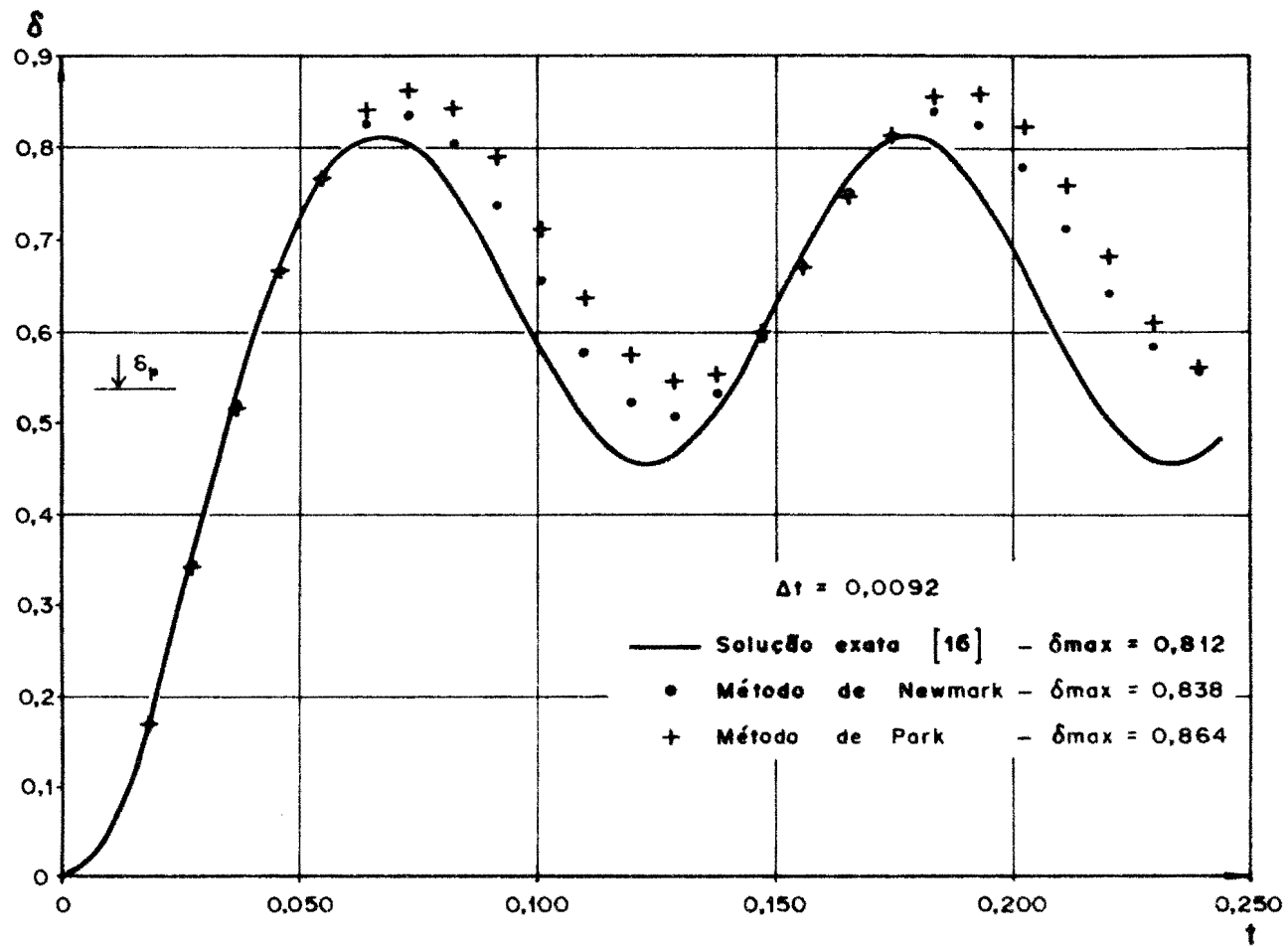


Fig. 6.2. Resposta do sistema simples elastoplástico a uma carga repentina - $\Delta t = 0,0092$.

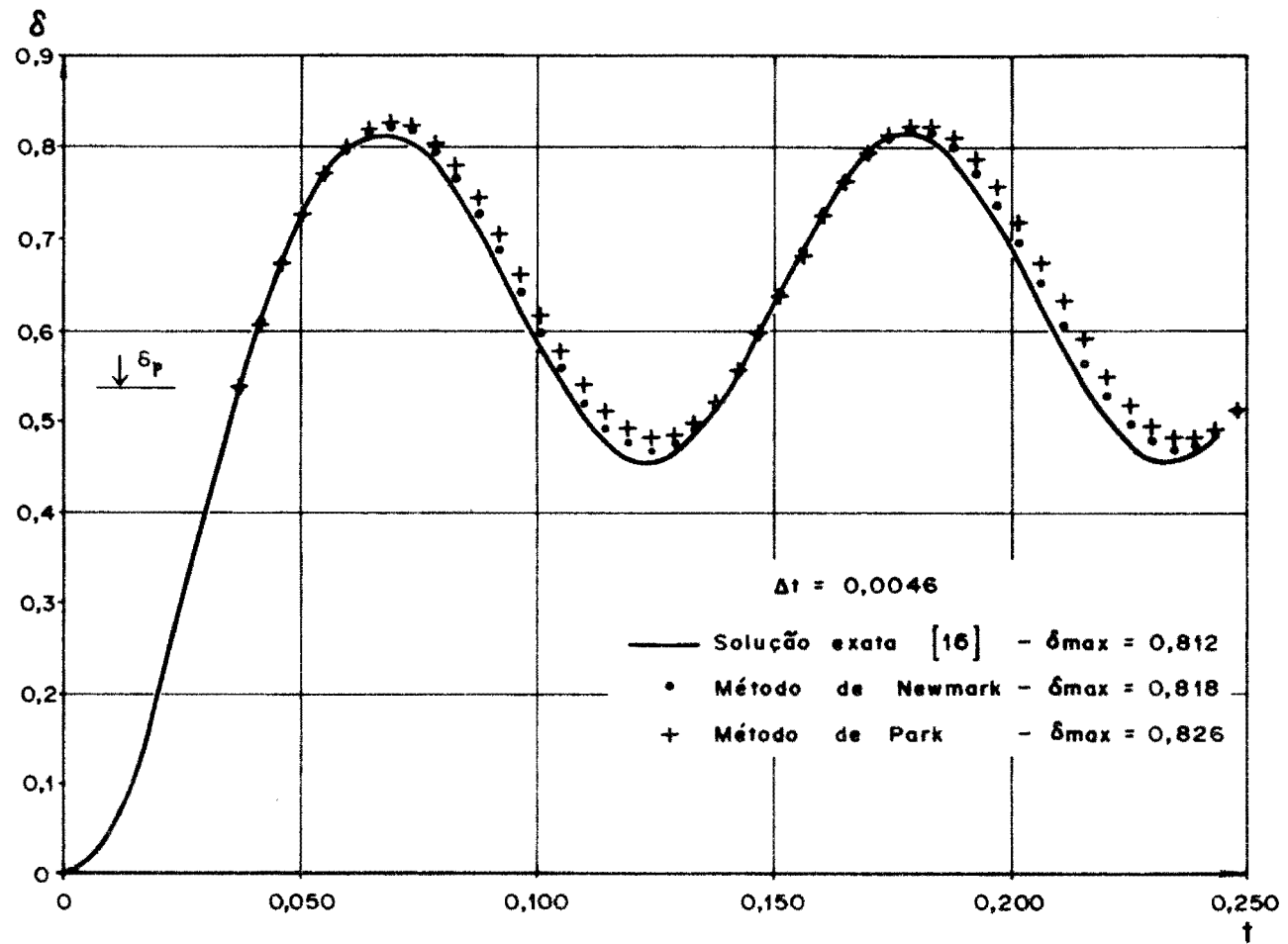


Fig. 6.3. Resposta do sistema simples elastoplástico a uma carga repentina - $\Delta t = 0,0046$.

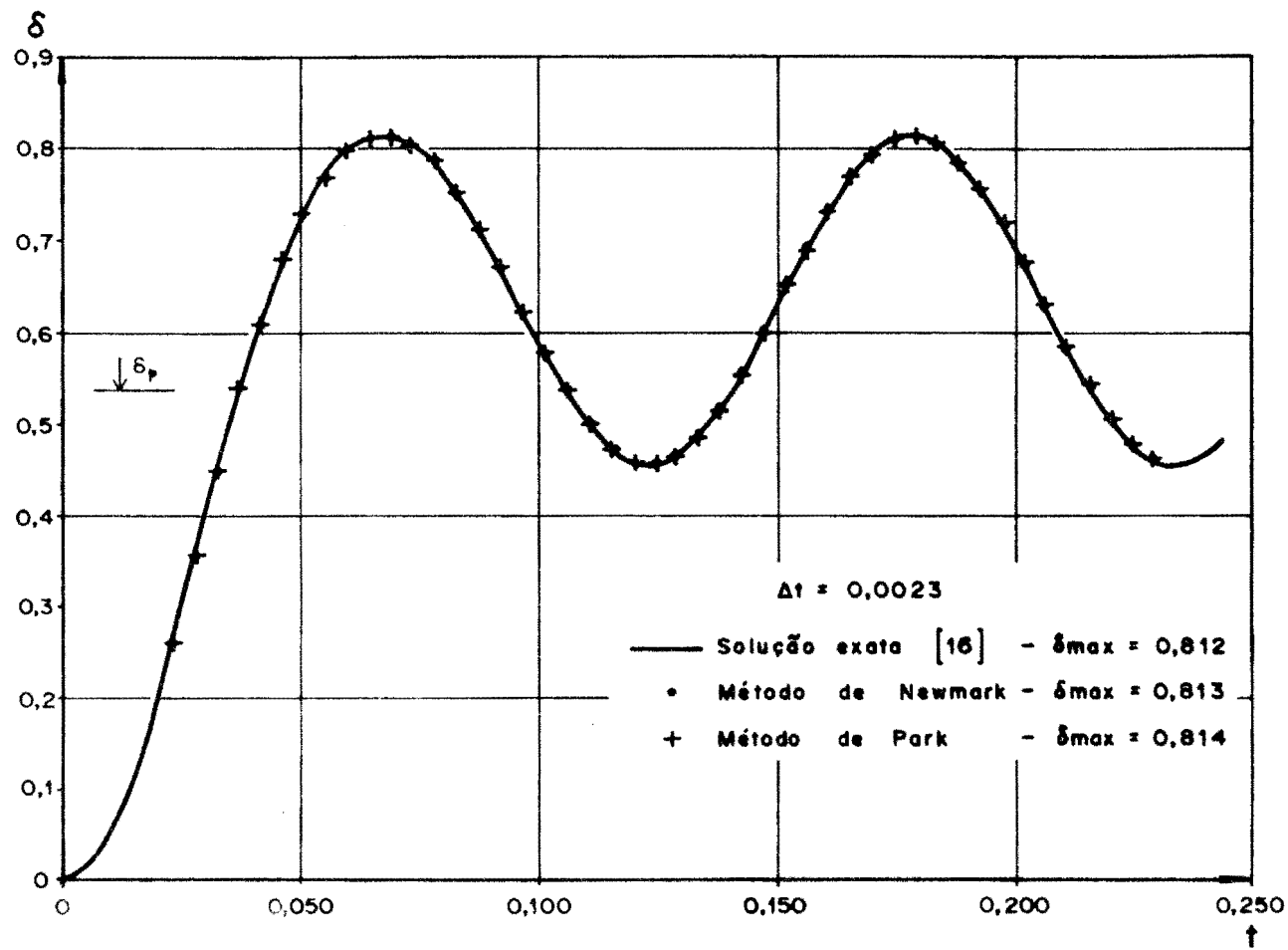


Fig. 6.4. Resposta do sistema simples elastoplástico a uma carga repentina - $\Delta t = 0,0023$.

aceitáveis, enquanto que com $\Delta t = T/48$ as curvas praticamente coincidem com a solução exata.

b) Resposta elastoplástica a um movimento sísmico:

Um sistema similar ao da figura 6.1 foi excitado por um movimento horizontal da base, cujas acelerações estão mostradas, como função do tempo, na figura 6.5. Esta figura representa, aproximadamente, o registro dos primeiros 5 segundos do componente NS do terremoto de El Centro do 18 de maio de 1940.

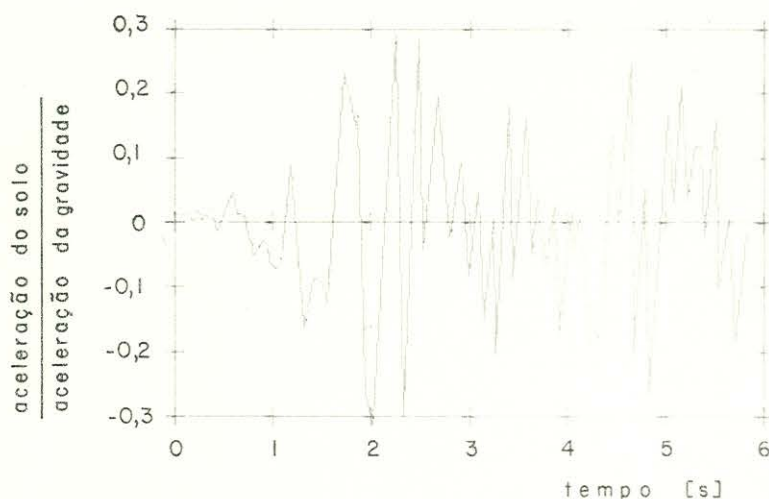


Fig. 6.5. Acelerograma do movimento sísmico

Mantendo-se a mesma rigidez que no exemplo anterior, a massa foi mudada para 2,1125 obtendo-se assim um sistema de período fundamental unitário. O deslocamento de plastificação tomou-se $\delta_p = 1,64$. Integrou-se pelo método de Newmark, com um passo $\Delta t = 0,01$ e consideran-

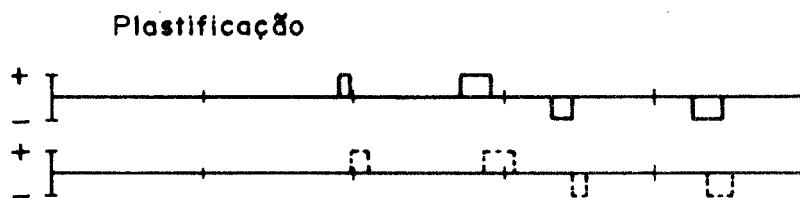
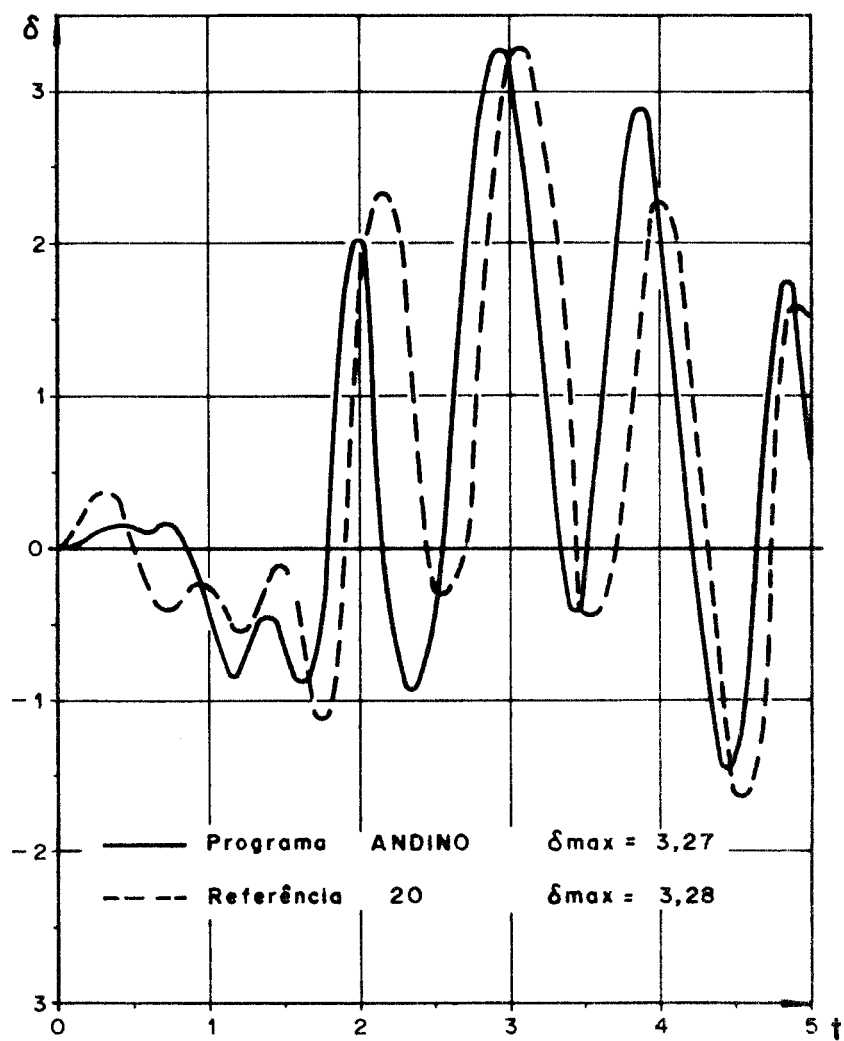


Fig. 6.6. Resposta do sistema simples ao acelerograma da fig. 6.5.

do-se um valor de 10% do amortecimento crítico. O resultado indica-se na figura 6.6 junto com a resposta do mesmo sistema ao sismo de El Centro, dada na referência 20.

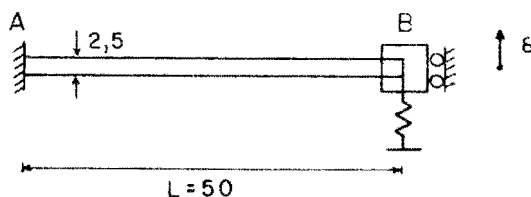
A diferença entre as curvas de resposta pode ser atribuída ao fato de que o acelerograma da figura 6.5 é levemente diferente do utilizado na referência 20. Nota-se, no entanto, uma correspondência entre os valores máximos atingidos, bem como entre as frequências na região das maiores amplitudes da resposta.

6.3 - VIGA SOBRE APOIO ELASTOPLÁSTICO

Uma viga elástica, com um extremo engastado e o outro com rotação impedida e apoiado sobre uma mola elastoplástica (figura 6.7.a), foi analisada com o programa ANDINO. A viga foi discretizada com três elementos e a mola foi representada por uma outra viga, de comportamento elastoplástico, cujos extremos, impedidos de rotar, encontram-se um unido ao extremo deslocável da viga e o outro engastado (figura 6.7.b). As propriedades da viga elastoplástica, que representa a mola, foram determinadas com base nas equações apresentadas no anexo 8.1.

Este exemplo foi analisado, também, com um programa elaborado para o estudo de placas elásticas sobre apoios pontuais elastoplásticos [76]. A viga foi discretizada, neste caso, com 3 elementos de placas de grande espessura e o apoio, com elementos próprios de molas com características inelásticas.

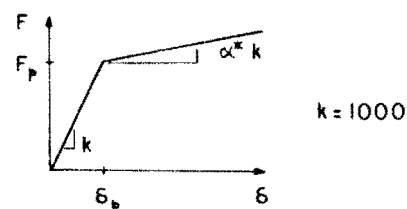
Os resultados obtidos na aplicação de ambos os programas estão apresentados nas figuras 6.8 e 6.9. A integração realizou-se pelo método de Park com um passo $\Delta t = 0,2$, o que equivale ao período fundamental elástico dividido por 46, e com uma tolerância de 1% para o contro



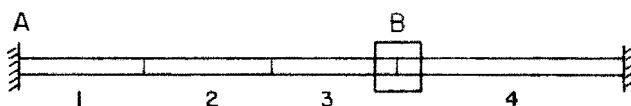
VIGA ELÁSTICA

Área transversal $A = 25$
 Momento de inércia $I = 13,0208$
 Módulo elástico $E = 10^6$
 Massa específica $= 7,8$

MOLA ELASTOPLÁSTICA



a) Estrutura



O nó B está impedido de rotar

ELEMENTOS 1, 2 E 3 ELÁSTICOS:

Área $A = 25$
 Mom. inércia $I = 13,0208$

ELEMENTO 4 ELASTOPLÁSTICO:

Rigidez $12 E I_4 / L_4^3 = k = 1000$
 Momento de plastificação $M_{p4} = F_p L_4$
 Comprimento plástico relativo $\lambda = L_p / L_4 = 0,10$
 Parâmetro de endurecimento $\alpha = \frac{[1 - (1 - 2\lambda)^3] \alpha^*}{1 - (1 - 2\lambda)^3 \alpha^*}$

b) Idealização

Fig. 6.7. Viga sobre apoio elastoplástico: estrutura e idealização.

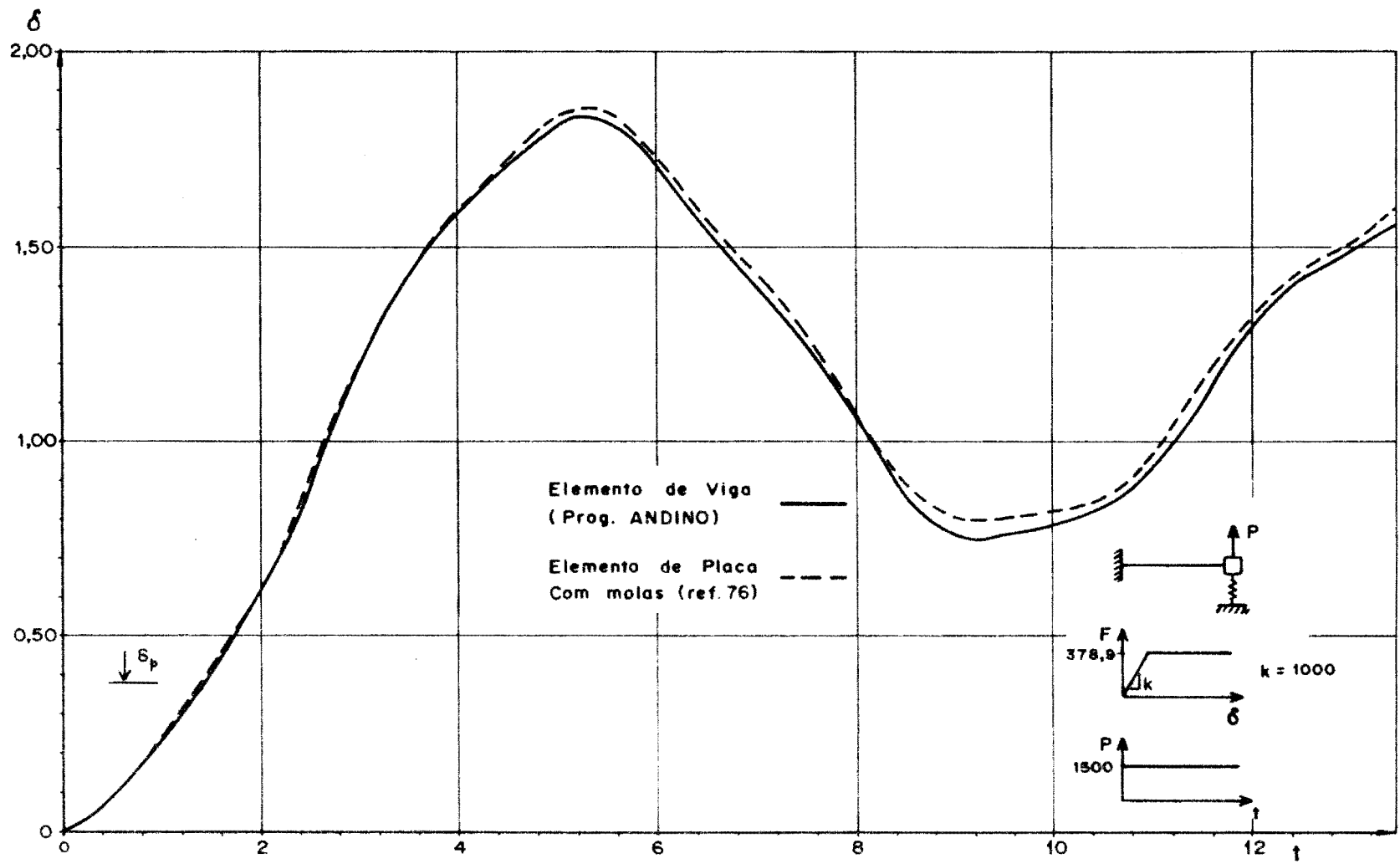


Fig. 6.8. Resposta da viga da fig. 6.7 a uma carga repentina: deslocamentos verticais do ponto B.

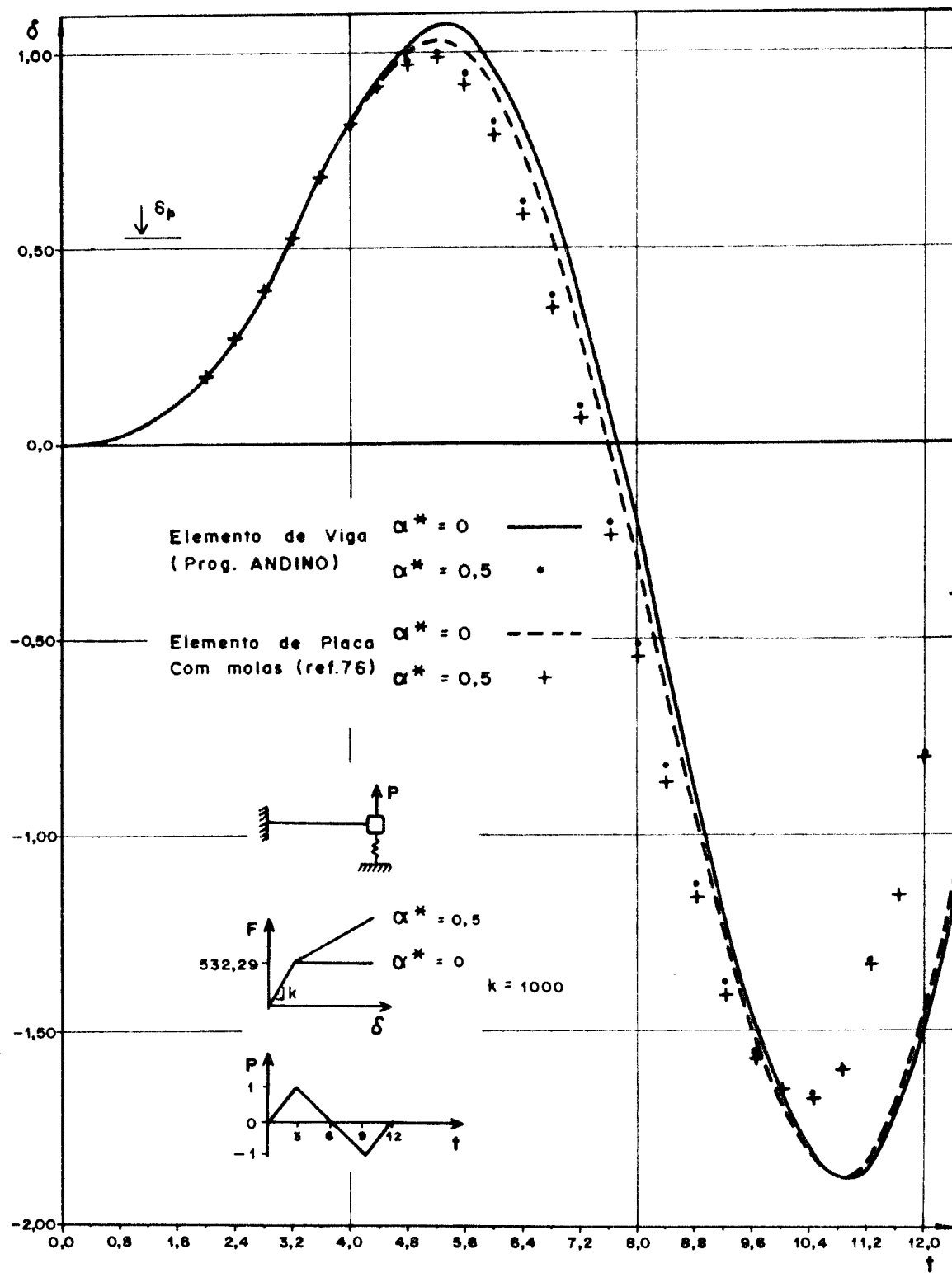


Fig. 6.9. Resposta da viga da fig. 6.7 a um pulso triangular duplo: deslocamentos verticais do ponto B.

le das iterações. Na figura 6.8 mostram-se os deslocamentos verticais do extremo B para uma carga vertical aplicada no mesmo ponto, em forma repentina, mantendo-se com um valor constante de 1500. A força de plastificação da mola é $F_p = 378,9$ e o parâmetro de endurecimento α^* é nulo.

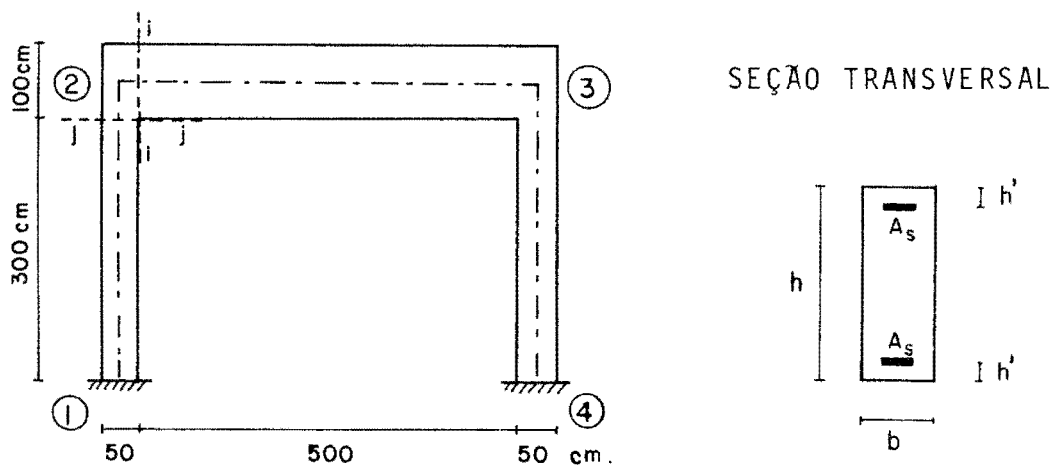
Na figura 6.9 está plotado o deslocamento vertical do mesmo ponto para uma carga vertical consistente em um pulso triangular duplo como está indicado na figura. Neste caso, a força de plastificação da mola foi $F_p = 532,29$, considerando-se dois valores diferentes para o parâmetro da rigidez plástica: $\alpha^* = 0$ e $\alpha^* = 0,5$.

Em todos os casos pode ser observada uma boa correspondência entre os resultados, visto que os modelos de um e outro programa respondem a teorias diferentes.

6.4 - PÓRTICO SIMPLES DE CONCRETO ARMADO

O pórtico de concreto armado da figura 6.10 utilizou-se para observar a influência que tem sobre a resposta não amortecida, a rigidez dos nós nas uniões das vigas e pilares, a variação do momento de plastificação, o comprimento das zonas plastificadas e o parâmetro α de endurecimento da curva momento-curvatura.

A massa do pórtico foi concentrada nos graus de liberdade translacionais dos nós 2 e 3. A estrutura foi discretizada com 3 elementos atribuindo-se um comprimento das zonas rígidas extremas de 25cm à viga e de 50cm aos pilares, para levar em conta a rigidez nodal. Os momentos de plastificação foram independentes das forças axiais, com valores correspondentes à flexão pura. O parâmetro de endurecimento α tomou-se com valor constante igual a 0,02. Fixou-se para as zonas plásticas um compri



PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

CARACTERÍSTICAS DAS SEÇÕES

		<u>Pilares</u>	<u>Vigas</u>
$E_c = 300 \text{ t/cm}^2$	$b \text{ [cm]}$	20	20
$f'_c = 0,3 \text{ t/cm}^2$	$h \text{ [cm]}$	50	100
$E_s = 2100 \text{ t/cm}^2$	$h' \text{ [cm]}$	2,5	5
$f_y = 4,4 \text{ t/cm}^2$	$A_s \text{ [cm}^2]$	10	20
Massa específica = $2,4 \times 10^{-6} \text{ ts}^2/\text{cm}^4$			

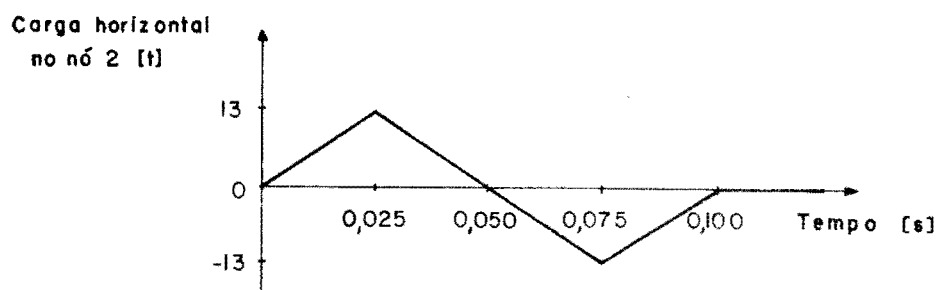


Fig. 6.10. Características do pórtico simples e carregamento

mento igual à altura da seção. O tamanho do passo foi de 0,002 segundos, que equivale aproximadamente ao período fundamental elástico dividido por 40. Não foi levada em conta a degradação da rigidez elástica. O erro no cálculo do vetor das forças não-lineares foi menor do que 1% da norma. As rigidezes iniciais das seções, calcularam-se no Estádio I.

Estas características são comuns a todas as análises dinâmicas efetuadas com este pórtico, com exceção das alterações indicadas em cada caso particular.

a) Rigidez nodal:

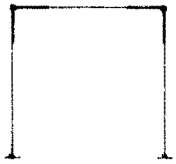


Em primeiro lugar efetuou-se uma análise estática linear do pórtico carregado com uma força horizontal de 4 toneladas aplicada no nó 2. Os resultados estão sumarizados no quadro 6.1. Três idealizações da estrutura foram utilizadas. A primeira (A) corresponde à discretização anteriormente apontada, onde estão consideradas as zonas rígidas nos extremos dos membros. Esta característica não foi considerada na segunda idealização (B), também com 3 elementos, mas com comprimentos dos segmentos indeformáveis nulos. Uma terceira representação (C) foi incluída, com fins de comparação, na qual as regiões rígidas correspondentes as uniões foram representadas com elementos adicionais de pórtico, com valores elevados do momento de inércia.

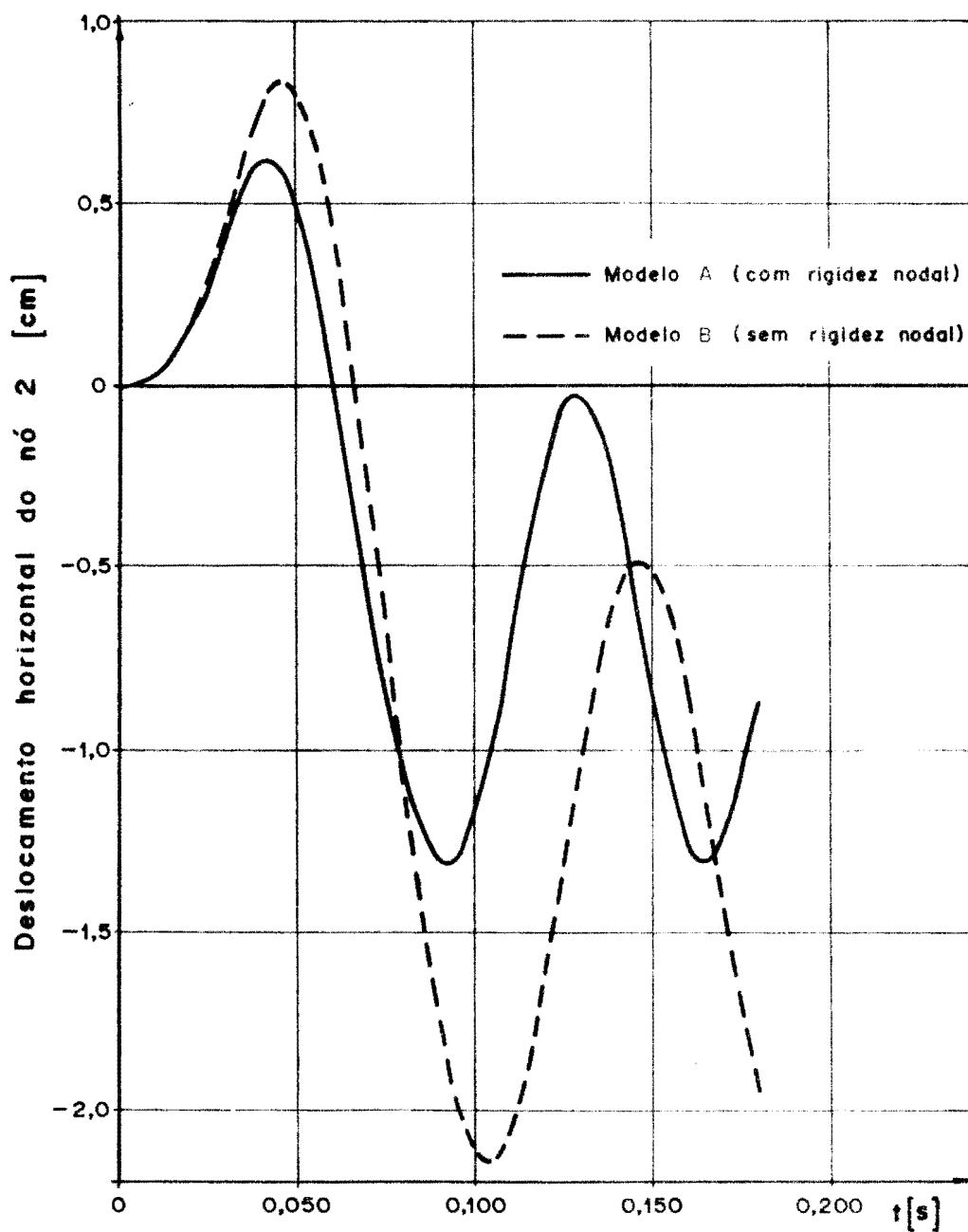
O aumento na rigidez da idealização A em relação à B, evidencia-se no decréscimo do deslocamento horizontal, bem como no acréscimo dos momentos fletores nas uniões.

Em segundo lugar, analisou-se a resposta dinâmica do pórtico submetido a uma força horizontal aplicada ao nó 2, cuja variação no tempo mostra-se na figura 6.10.

Os deslocamentos horizontais desse nó, em função do tempo, estão plotados na figura 6.11, para as idealizações A e B. O enrijecimento já apontado da idealização A fica manifestado, novamente, pela diminuição dos deslocamentos máximos atingidos, bem como pelo encurtamento do período da resposta. Os resultados são fortemente influenciados pela inclusão da rigidez dos nós.

Quadro 6.1 - Influência da consideração da rigidez nodal na resposta estática do pórtico a uma carga horizontal de 4 toneladas aplicada no nó 2

MODELO		A	B	C
Malha				
nº de elementos		3	3	7
consideração da rigidez dos nós		sim	não	sim, através dos 4 elem. adicionais
deslocamento horizontal do nó 2 [cm]		0,1303	0,1872	0,1302
momentos fletores na viga [t cm]	nó 2	440,15	389,41	440,10
	seção i-i	400,33	-	400,28
momentos fletores nos pilares [t cm]	seção j-j	339,63	-	339,54
	nó 1	363,97	414,04	363,88



Idealização	Deslocamento		Mom. no 1		Mom. seção i-i	
	max	min	max	min	max	min
A	0,614	-1,309	1717	-1965	1603	-1956
B	0,829	-2,141	1834	-2005	1280	-1500
	[cm]		[t cm]		[t cm]	

Fig. 6.11. Resposta do pórtico simples: influência da rigidez nodal.

b) Variação do momento de plastificação:

Quando foi permitido que o momento fletor variasse com as forças axiais (figura 4.11), obteve-se a resposta da figura 6.12. As cargas do tipo gravitacional não foram incluídas, sendo a variação das solicitações normais devida ao carregamento dinâmico. Para este exemplo, a consideração das forças axiais produziu uma mudança sensível da resposta.

c) Comprimento das regiões plastificadas:

Na figura 6.13 mostram-se os resultados obtidos quando o comprimento das zonas plastificadas foi calculado em função dos diagramas dos momentos fletores (eq. 3.4.19) e quando esse comprimento foi considerado fixo, com valores iguais à altura da seção do elemento e à metade deste valor. Pode-se observar que a redução do comprimento plástico de h para $h/2$ não modificou praticamente a resposta. Já para a zona plastificada variável com o diagrama dos momentos fletores, tem-se uma mudança mais acentuada.

d) Rigidez plástica:

O parâmetro α do endurecimento, que define a rigidez do trecho plástico da curva momento-curvatura, foi variado tomando-se valores de 0,001, 0,02 e 0,05, independentes das forças axiais. As respostas obtidas estão apresentadas na figura 6.14. A medida que α cresce, a tendência das curvas é para a resposta elástica da estrutura.

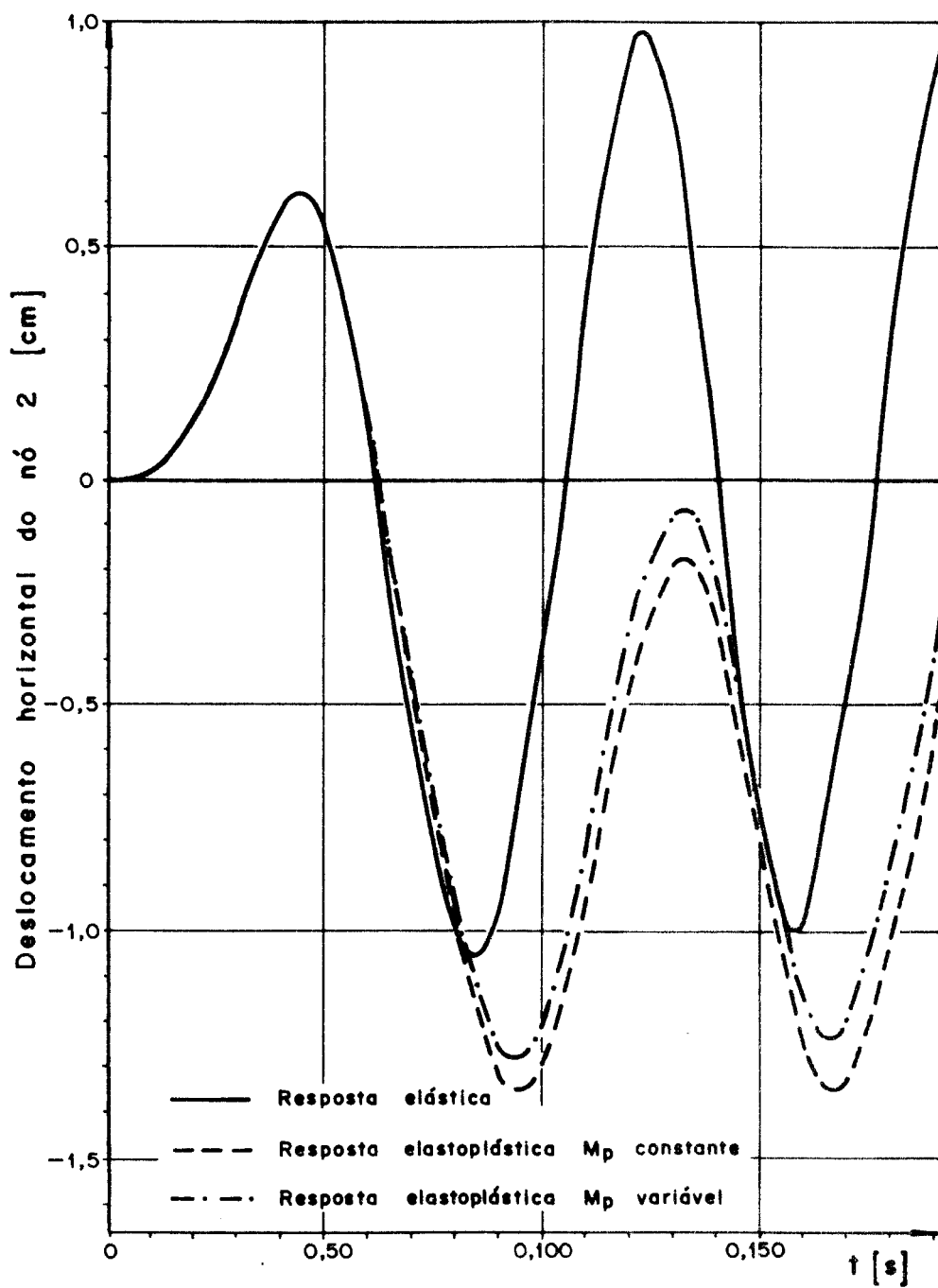


Fig. 6.12. Resposta do pórtico simples: influência da variação do momento de plastificação

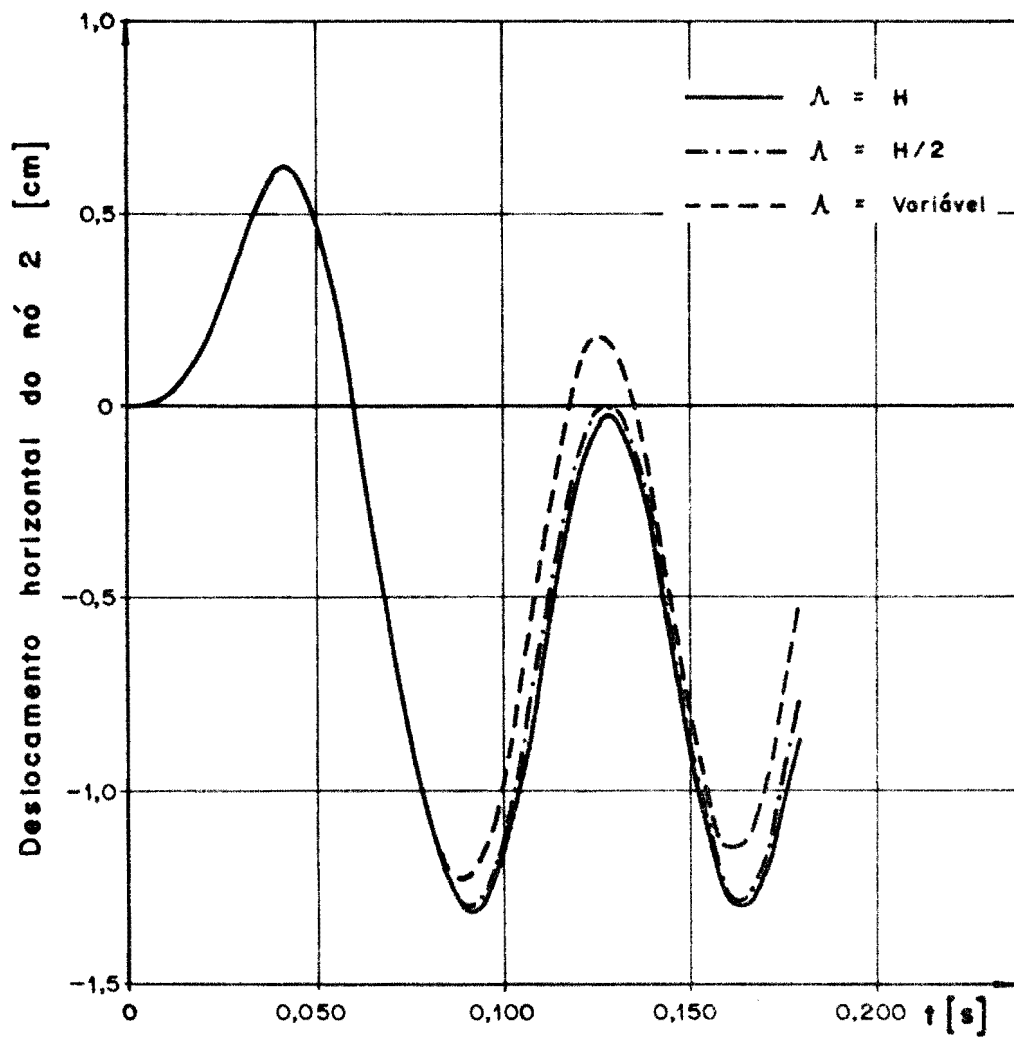


Fig. 6.13. Resposta do pórtico simples: influência do comprimento das zonas plastificadas.

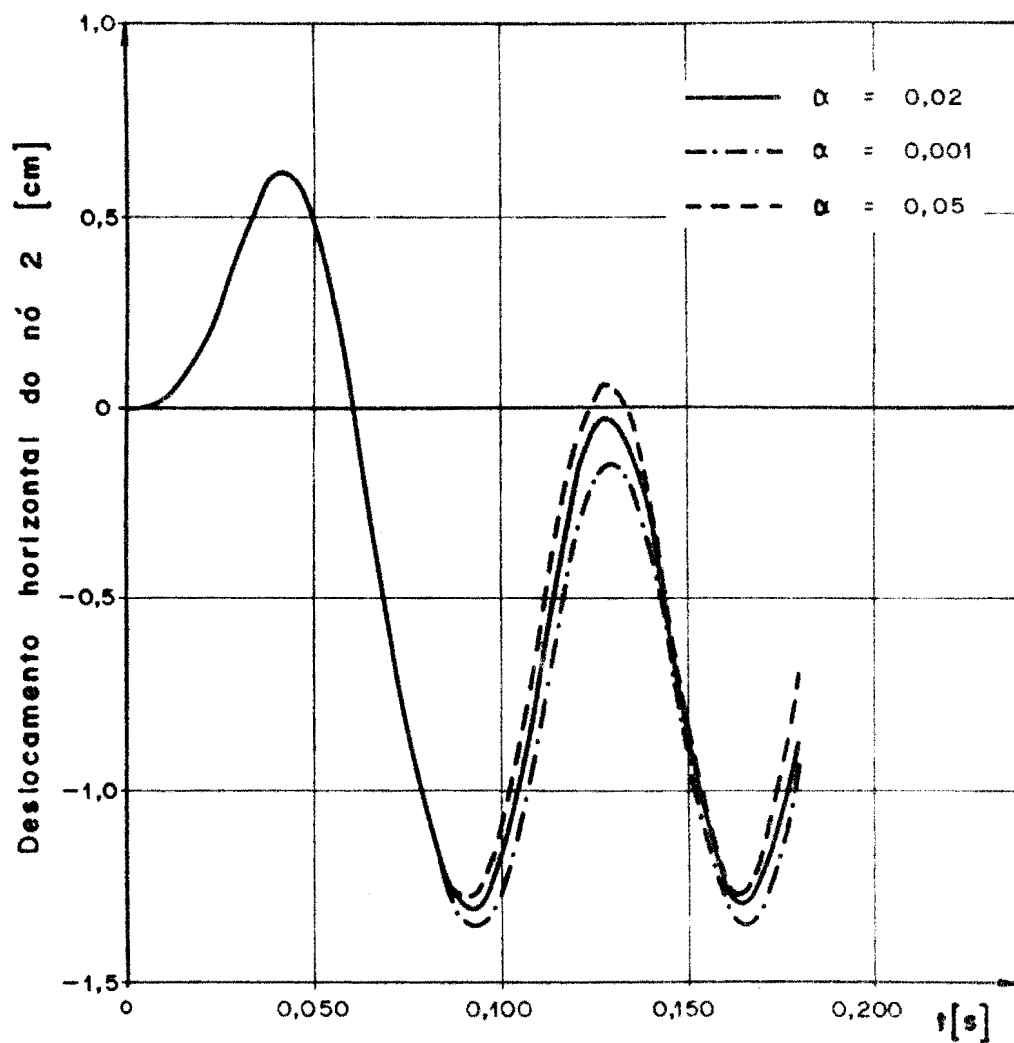


Fig. 6.14. Resposta do pórtico simples: influência da rigidez plástica.

6.5 - PÓRTICO DE SEIS ANDARES

Como uma aplicação do programa ANDEN ao estudo de um pórtico de concreto armado submetido a um movimento sísmico, foi analisado o pórtico de um vão e seis andares da figura 6.15. As características de rigidez e resistência dos elementos, bem como as massas concentradas em cada andar, estão dadas no quadro 6.2. Para fazer uma análise comparável à da referência 78, de onde este exemplo foi tomado, fizeram-se as seguintes considerações:

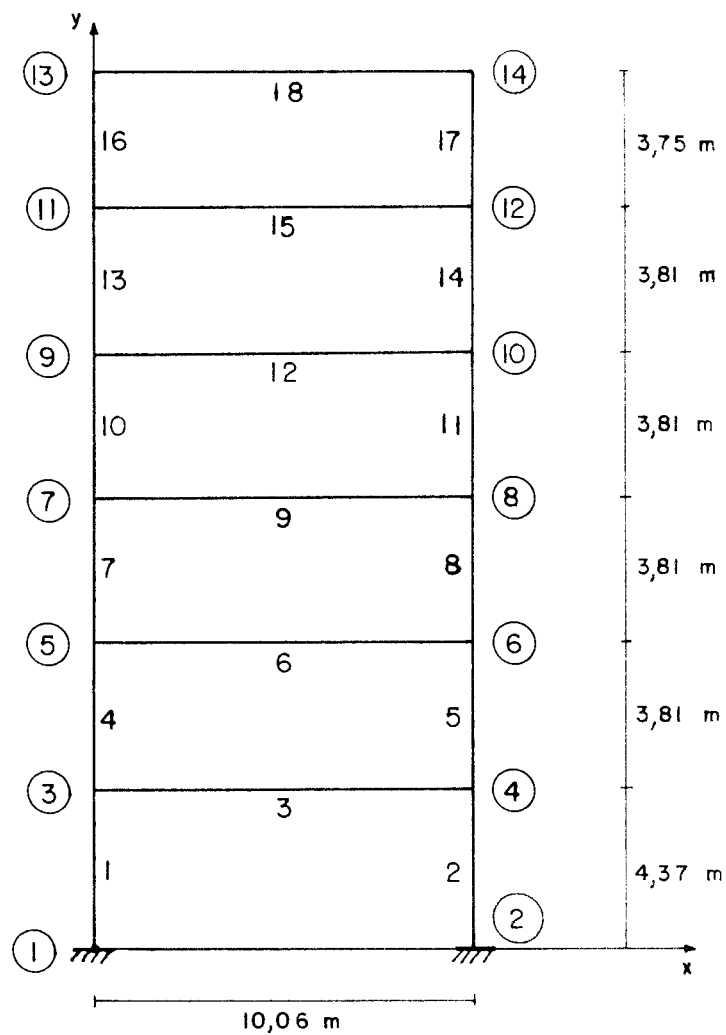
1º) As rigidezes iniciais das seções são calculadas no Estádio I. As vigas do 1º ao 5º andar têm seção T com uma espessura da laje de 12,7 cm.

2º) Não são levadas em conta, nem a deformação por cisalhamento, nem a dimensão finita dos nós.

3º) Sobre todas as vigas atuam cargas gravitacionais uniformemente distribuídas, com valor de 3,268 t/m.

4º) Os momentos de plastificação dos elementos são calculados para os esforços normais decorrentes do carregamento gravitacional. Os seus valores, dados no quadro 6.2, mantêm-se invariantes frente às forças normais. Posteriormente uma outra análise foi realizada permitindo-se a variação desses momentos.

A estrutura foi submetida ao sismo da figura 6.5. A integração efetuou-se, pelo método de Park, com um passo de 0,02 s, que equivale aproximadamente a 1/32 do período fundamental elástico. O erro no cálculo iterativo do vetor de incrementos não-lineares das forças internas foi inferior a 0,5% da sua norma. Um valor constante de 0,001 foi adotado para o parâmetro de endurecimento α e o comprimento das zonas plásticas fixou-se em 5% do comprimento do elemento.



Módulo elástico $E = 3,5 \times 10^6 \text{ t/m}^2$

Resistência do concreto $f'_c = 3000 \text{ t/m}^2$

Módulo elástico do aço $E_s = 21 \times 10^6 \text{ t/m}^2$

Tensão de escoamento do aço $f_y = 26000 \text{ t/m}^2$

Amortecimento $\xi = 10 \%$

Fig. 6.15. Dados do pórtico de seis andares.

Quadro 6.2 - Características dos elementos e massas concentradas em cada andar

ANDAR	momentos de inércia pilares [m ⁴]	momentos de plastificação pilares [tm]	momentos de inércia vigas [m ⁴]	momentos de plastificação vigas [tm]	massas concentradas por andar [t s ² / m]
6	0,007903	47,24	0,014791	43,21	4,4403
5	0,007903	54,15	0,041936	70,28	4,9953
4	0,012937	61,06	0,041936	89,87	4,9953
3	0,012937	74,89	0,041936	107,15	4,9953
2	0,019754	82,95	0,041936	118,09	4,9953
1	0,019754	88,71	0,041936	118,09	4,9953

A degradação da rigidez elástica não foi levada em consideração. O número de iterações, efetuadas nos passos em que se produziram deformações plásticas, oscilou entre 5 e 12. Na figura 6.16 está representada a história dos deslocamentos horizontais do nó 14. Esta resposta compara-se com a reportada por Walpole e Shepherd, para o sismo de El Centro (componente NS) [78]. Nessa referência foi utilizado um elemento que forma rótulas plásticas perfeitas, situadas nas suas extremidades. Na mesma figura está indicada, também, a resposta obtida, com o programa ANDEN, deixando-se variar tanto os momentos de plastificação com os esforços normais, quanto o comprimento das zonas plásticas. Observa-se que não se produzem mudanças significativas na resposta em deslocamentos. Já os momentos do nó 1, plotados na figura 6.17, para as duas análises, apresentam uma variação devida, especialmente, à dependência das forças normais que manifestam os valores de plastificação.

Na figura 6.18 indicam-se os deslocamentos horizontais de cada andar, no instante em que se produz o máximo para o 6º andar.

Uma outra análise foi feita considerando-se a diminuição da rigidez elástica, em função das deformações plásticas, segundo a fórmula 4.1.1 com um expoente $\gamma=0,6$. A resposta, em deslocamentos horizontais do nó 14, é mostrada na figura 6.19 junto com outro caso no qual essa degradação da rigidez não é levada em conta ($\gamma=0$). Tomaram-se os momentos e comprimentos de plastificação variáveis e os demais dados como indicados acima. Uma resposta elástica foi acrescentada à figura para comparação. A energia dissipada pelo ciclo histerético é menor quando existe degradação da rigidez e conseqüentemente aumentam os valores extremos da resposta. Mas um outro efeito de importância,

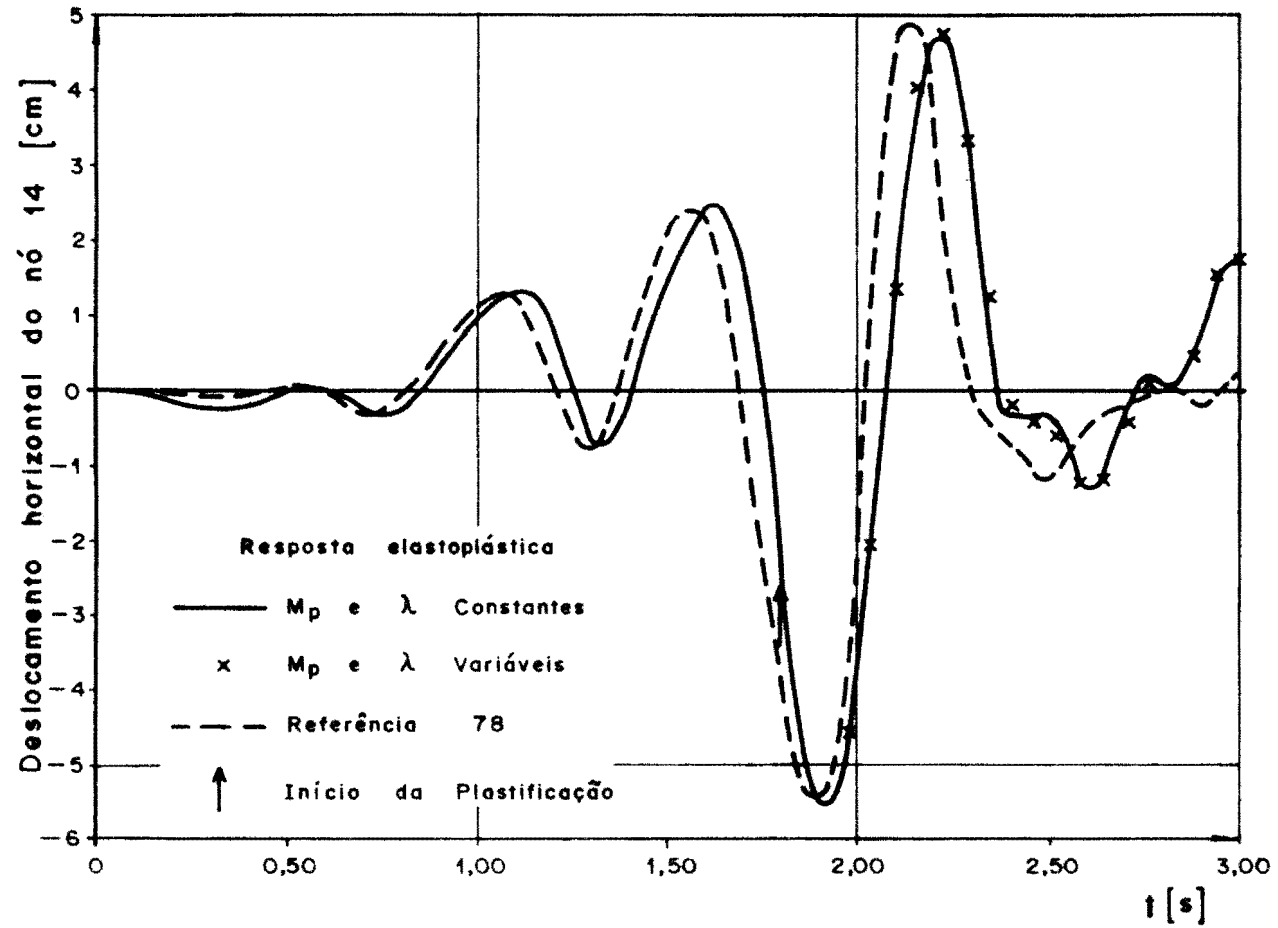


Fig. 6.16. Resposta do pórtico de seis andares ao sismo da fig.6.5: deslocamentos horizontais do sexto andar.

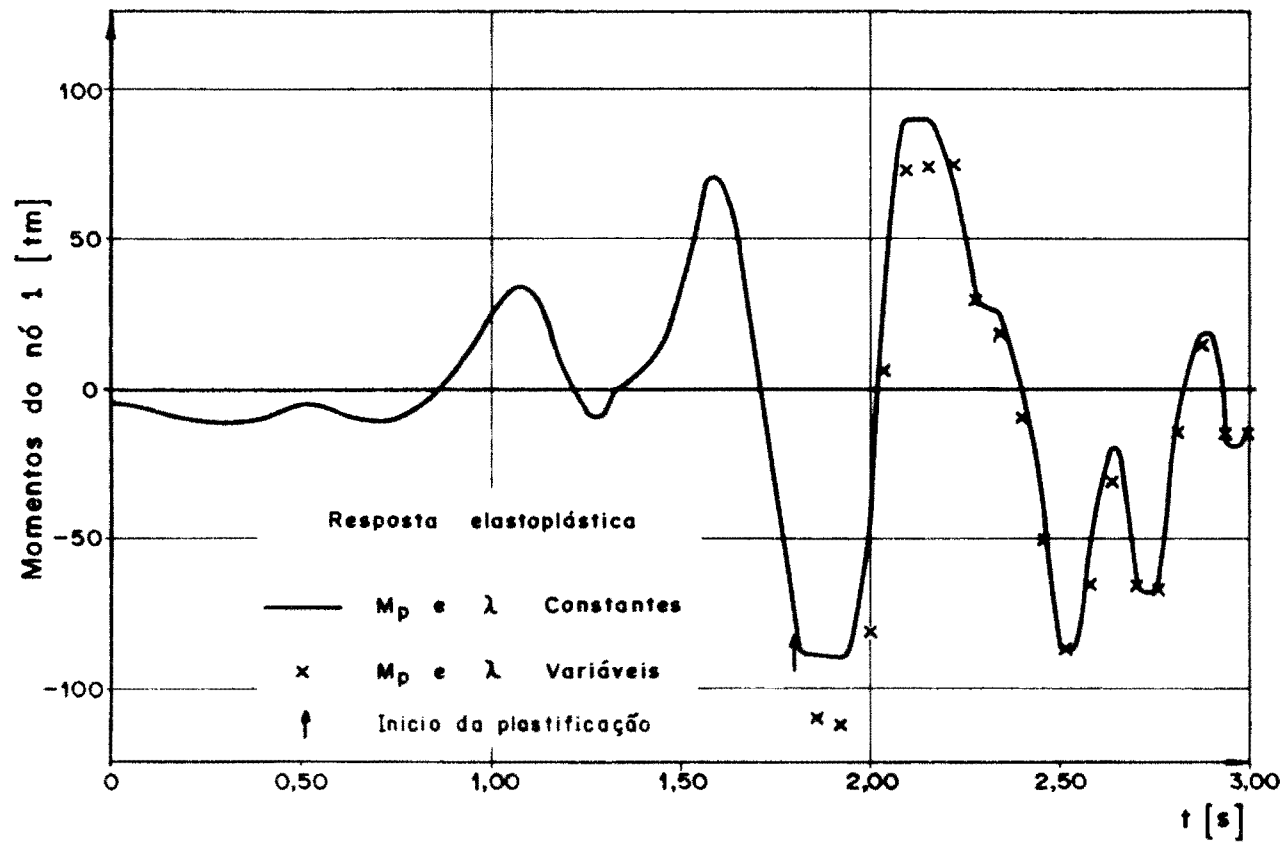


Fig. 6.17. Resposta do pórtico de seis andares ao sismo da fig. 6.5: momentos no nó 1.

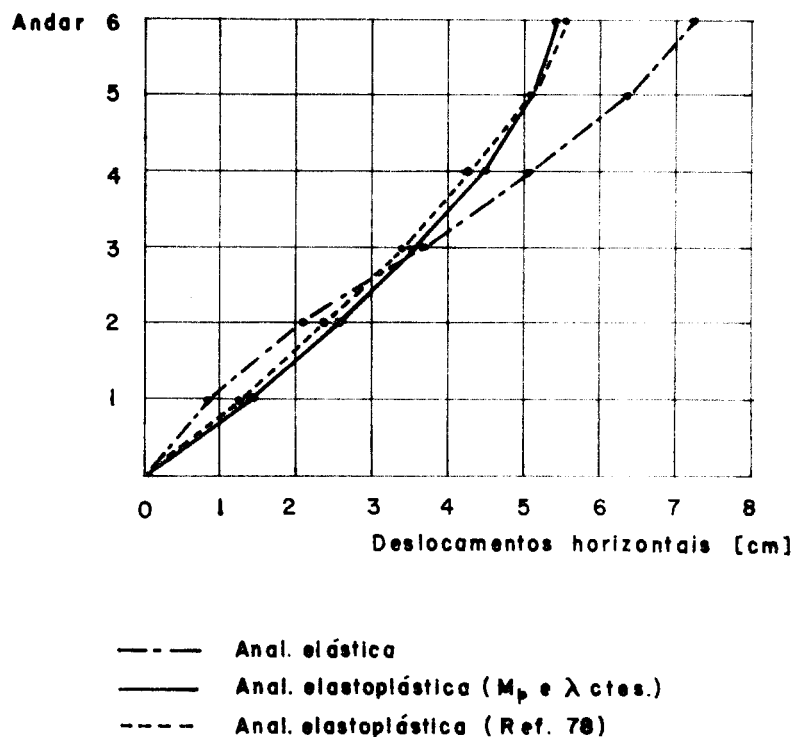


Fig. 6.18. Deslocamentos horizontais do pórtico de seis andares.

devido à mudança da rigidez elástica, que reflete-se no alongamento do período após o tempo $t=2,36$ s, é a modificação substancial da curva da resposta.

O tempo total de processamento do exemplo com momentos e comprimentos de plastificação variáveis, e rigidez elástica constante, foi de 117,15 s, sendo 112,25 s correspondentes à integração com 150 passos no tempo. Para o problema com degradação da rigidez, a integração necessitou 233,28 s de processamento para o mesmo número de passos, efetuando uma média de 7 iterações nos passos elásticos após a primeira plastificação.

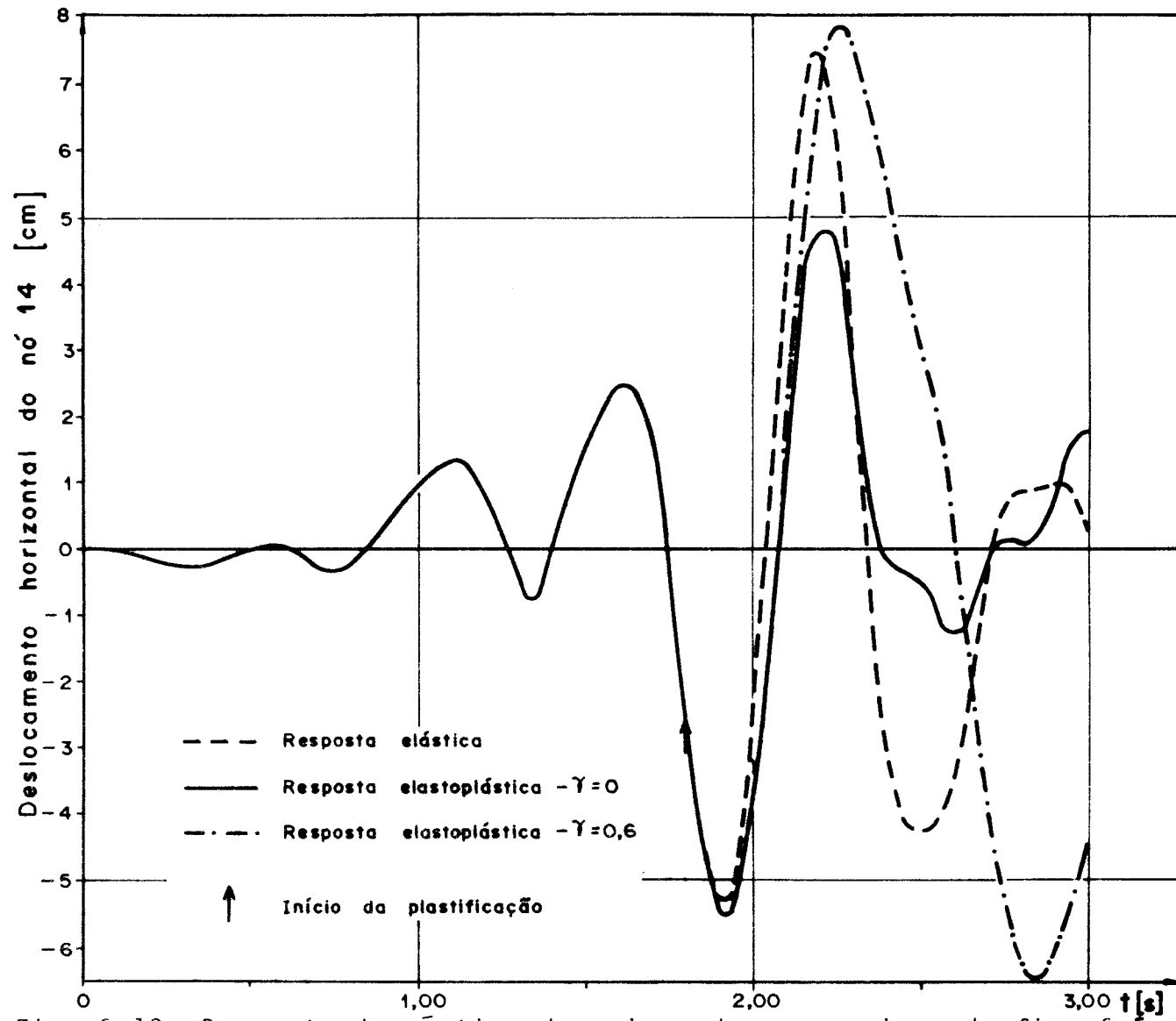


Fig. 6.19. Resposta do pórtico de seis andares ao sismo da fig. 6.5: influência da degradação da rigidez elástica.

6.6 - EDIFÍCIO DE DEZ ANDARES

Tendo por finalidade aplicar o programa à análise de estruturas do tamanho encontrado na prática, foi estudado um edifício de 10 andares com as características mostradas na figura 6.20. A planta tem dupla simetria e consta de 12 pilares, 17 vigas e 6 lajes. A resistência às ações laterais é atribuída a 4 pórticos na direção x e 3 pórticos na direção y.

A estrutura de concreto armado foi dimensionada com o programa PROADE [35] considerando-se os estados de carregamento descritos a seguir. As cargas permanentes sobre as lajes, de 10cm de espessura, são $0,3 \text{ t/m}^2$ para os 9 andares inferiores e $0,5 \text{ t/m}^2$ para o décimo andar. Sobre as vigas atuam, além do peso próprio, paredes de tijolo cerâmico de 10 cm de espessura. As sobrecargas consideradas sobre as lajes dos 9 andares inferiores são $0,2 \text{ t/m}^2$ e do décimo pavimento, $0,1 \text{ t/m}^2$. O efeito do vento é tomado em conta, segundo a Norma Brasileira NB-599, com uma velocidade básica de 45 m/s e um fator topográfico unitário, considerando-se que o prédio está no centro de uma zona urbana. Inclui-se a ação sísmica, segundo a Norma Chilena, para um terreno de fundação do tipo da areia densa ou de solos coesivos duros ($T_0=0,3$) [35].

Todos os pilares são de seção quadrada e, segundo suas dimensões, existem 2 tipos por andar: um correspondente aos 8 pilares dos pórticos 5 e 7, e outro aos 4 do pórtico 6. Todas as vigas de um andar têm as mesmas dimensões. As características dos elementos estruturais estão dadas no quadro 6.3.

Para estudar o comportamento do edifício frente a um sismo atuando na direção x, analisou-se a resposta do pórtico 2 com uma massa associada igual a 1/4 da massa

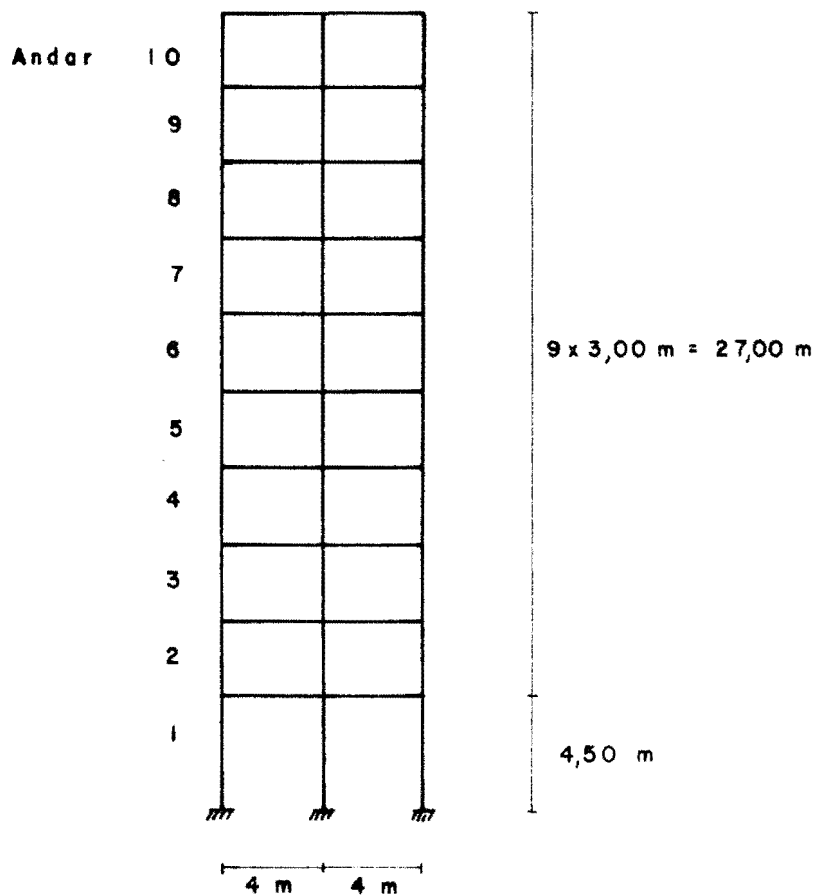
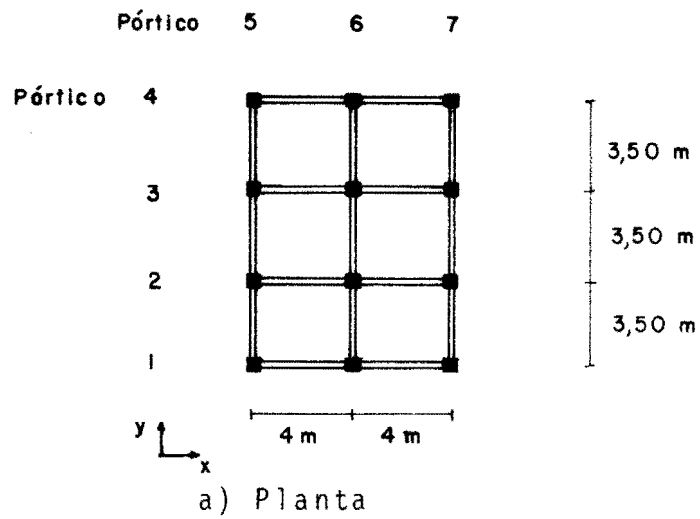


Fig. 6.20. Dimensões do edifício

Quadro 6.3 - Propriedades dos pilares e vigas do edifício

ANDAR	pilares exter. (pōrt. 5 e 7)			pilares interiores (pōrt. 6)			vigas (b = 0,20 m)			
	lado [m]	$\mu = \mu'$ [%]	$r=d'/h$	lado [m]	$\mu = \mu'$ [%]	$r=d'/h$	h [m]	$\mu = \mu'$ [%]		$r=d'/h$
								extrem. externa	extrem. interna	
10	0,20	0,965	0,150	0,25	0,714	0,120	0,40	0,921	0,845	0,10
9	0,20	1,355	0,150	0,25	1,200	0,120	0,40	0,805	0,659	0,10
8	0,25	0,973	0,120	0,30	0,764	0,129	0,40	0,908	1,008	0,10
7	0,25	1,184	0,120	0,30	1,049	0,129	0,40	0,968	1,044	0,10
6	0,30	0,722	0,129	0,35	0,700	0,114	0,40	0,991	1,050	0,10
5	0,30	0,849	0,129	0,35	0,851	0,114	0,50	0,631	0,663	0,08
4	0,30	1,051	0,129	0,35	1,051	0,114	0,50	0,656	0,706	0,08
3	0,35	0,699	0,114	0,40	0,650	0,100	0,50	0,753	0,753	0,08
2	0,35	0,830	0,114	0,40	0,789	0,100	0,50	0,836	0,836	0,08
1	0,40	0,736	0,100	0,45	0,825	0,089	0,50	0,914	0,919	0,08

total. A estrutura, esquematizada na figura 6.20.b, possui 33 nós, dos quais os 3 da base correspondem a apoios engastados, e 50 elementos.

Os módulos de elasticidade do concreto e do aço são, respectivamente, $E_c = 2,6 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ e $E_s = 21 \times 10^6 \text{ t/m}^2$. As resistências, para os dois materiais, são: $f_c = 1200 \text{ t/m}^2$ e $f_y = 50000 \text{ t/m}^2$. A massa específica do pórtico tomou-se igual a $0,24472 \text{ t s}^2/\text{m}^4$. A massa dos outros componentes do edifício, incluindo 25% da sobrecarga, foi agrupada nos graus de liberdade translacionais com valores de $0,33912 \text{ t s}^2/\text{m}$ em cada nó externo e $0,67825 \text{ t s}^2/\text{m}$, nos internos. No décimo andar estes valores foram $0,34414 \text{ t s}^2/\text{m}$ e $0,68828 \text{ t s}^2/\text{m}$, respectivamente.

As cargas gravitacionais uniformemente distribuídas sobre as vigas têm valores de $1,35 \text{ t/m}$ do 1º ao 5º andar, $1,302 \text{ t/m}$ para o 6º ao 9º andar e $1,646 \text{ t/m}$ para o décimo. Além destas, existem cargas gravitacionais concentradas, atuando verticalmente sobre os nós da estrutura, cujos valores estão dados no quadro 6.4.

Quadro 6.4 - Cargas gravitacionais sobre os nós do pórtico 2 do edifício

ANDAR	carga vertical concentrada nos nós [t]	
	nós externos	nós internos
10	3,884	5,572
9	3,454	4,659
8	3,589	4,824
7	3,589	4,824
6	3,754	5,019
5	3,922	5,187
4	3,922	5,187
3	4,117	5,412
2	4,117	5,412
1	4,342	5,667

PROJ. DE ENGENHARIA

O pórtico 2 foi submetido aos primeiros 5 segundos do movimento sísmico da figura 6.5. Foram realizadas duas análises: uma elástica e outra elastoplástica. A integração foi feita pelo método de Newmark com um passo $\Delta t=0,02$ s e uma tolerância, para o controle das iterações, de 1% da norma do vetor de incrementos não-lineares das forças internas. Levou-se em conta a rigidez das uniões das vigas e pilares, mas não as deformações por cisalhamento. Na análise elastoplástica o parâmetro de endurecimento foi dado pela figura 4.12, com $\alpha_T = 0,02$ e $\alpha_L = 0,20$. Não foi considerado o efeito da degradação da rigidez elástica. Em ambas as análises as rigidezes iniciais das seções calcularam-se no Estádio II (eq. 4.4.9).

A resposta não amortecida, expressa em deslocamentos horizontais do décimo andar, está dada na figura 6.21 para as duas análises. Observa-se que, tal como acontece em outros exemplos, no ciclo em que se produz a plastificação, a resposta elastoplástica atinge valores maiores que os da resposta elástica. Enquanto que nos ciclos seguintes os deslocamentos são inferiores aos do caso elástico. Isto é devido à dissipação da energia que tem lugar durante as deformações plásticas. Pode-se notar, também, um pequeno alongamento no período da resposta inelástica.

Na figura 6.22 mostram-se os deslocamentos horizontais de cada pavimento no instante em que é atingido o máximo para o último andar, nas duas análises, bem como as curvas envolventes dos deslocamentos. As seções que plastificam estão indicadas na figura 6.23 junto com a sequência de ocorrência.

A relação de momentos (RM), definida como o quociente entre o momento de maior valor absoluto obtido na análise elástica e o momento de plastificação, para ca

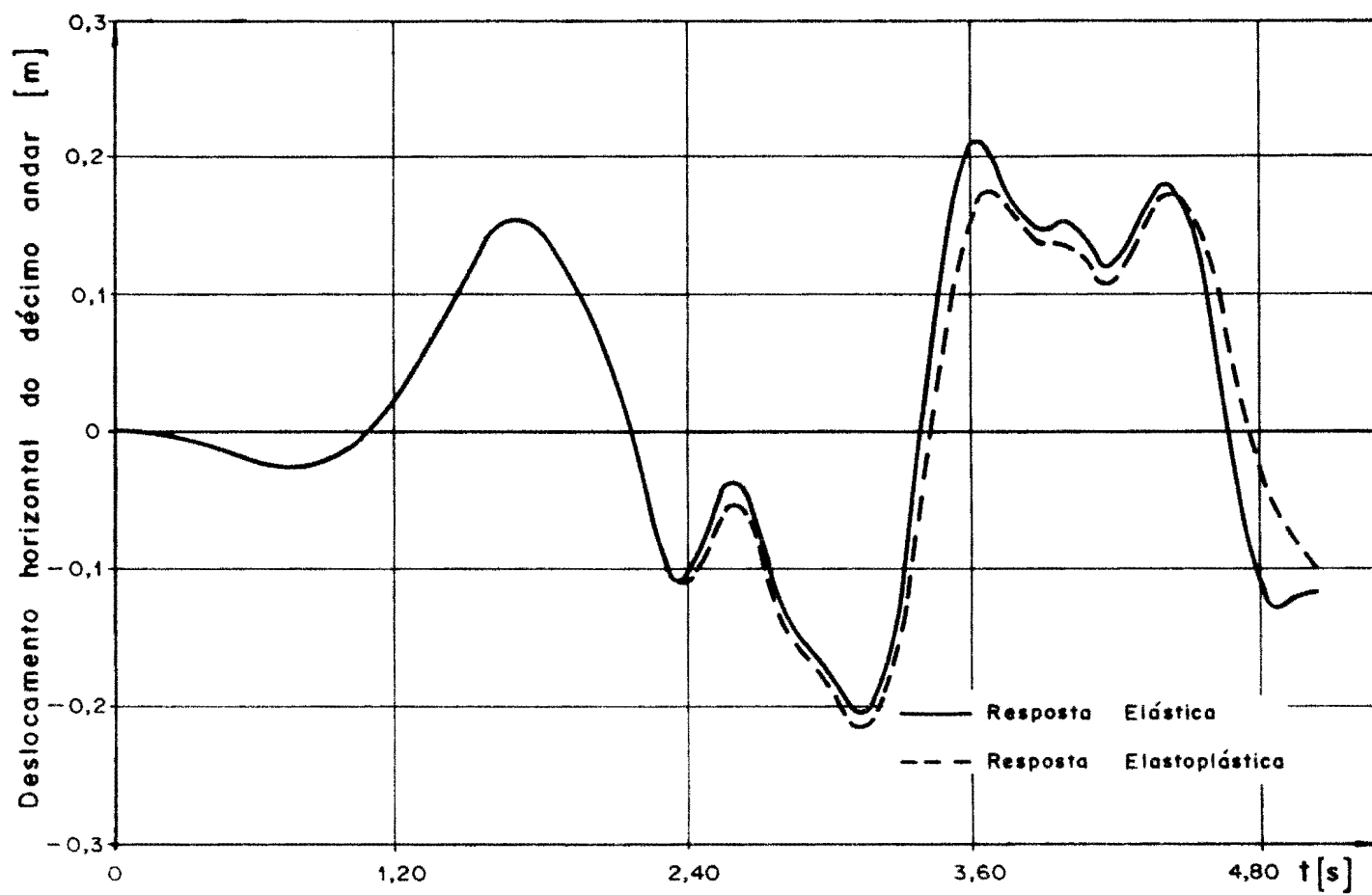


Fig. 6.21. Resposta do pórtico 2 do edifício ao sismo da fig. 6.5: deslocamentos horizontais do décimo andar.

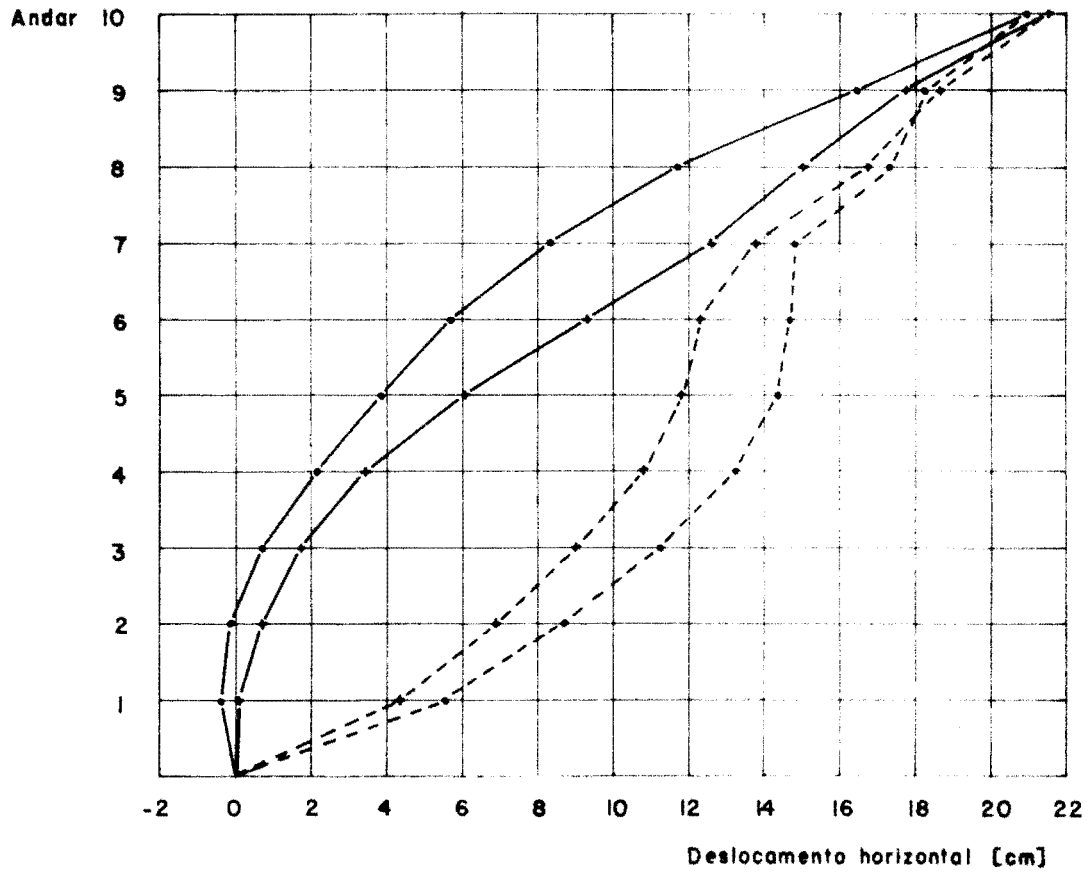


Fig. 6.22. Deslocamentos horizontais do pórtico 2 do edifício

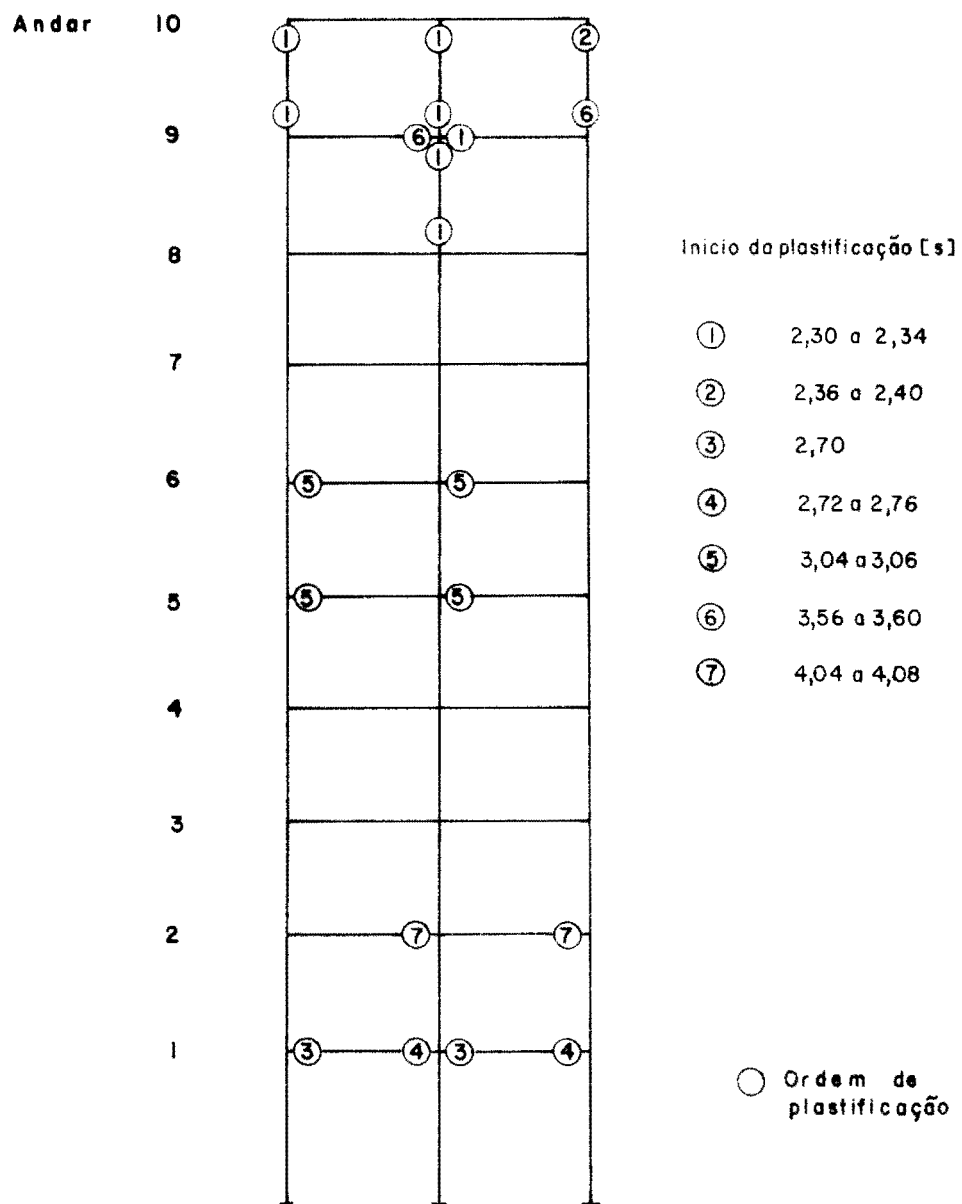


Fig. 6.23. Situação das zonas plastificadas e ordem de ocorrência.

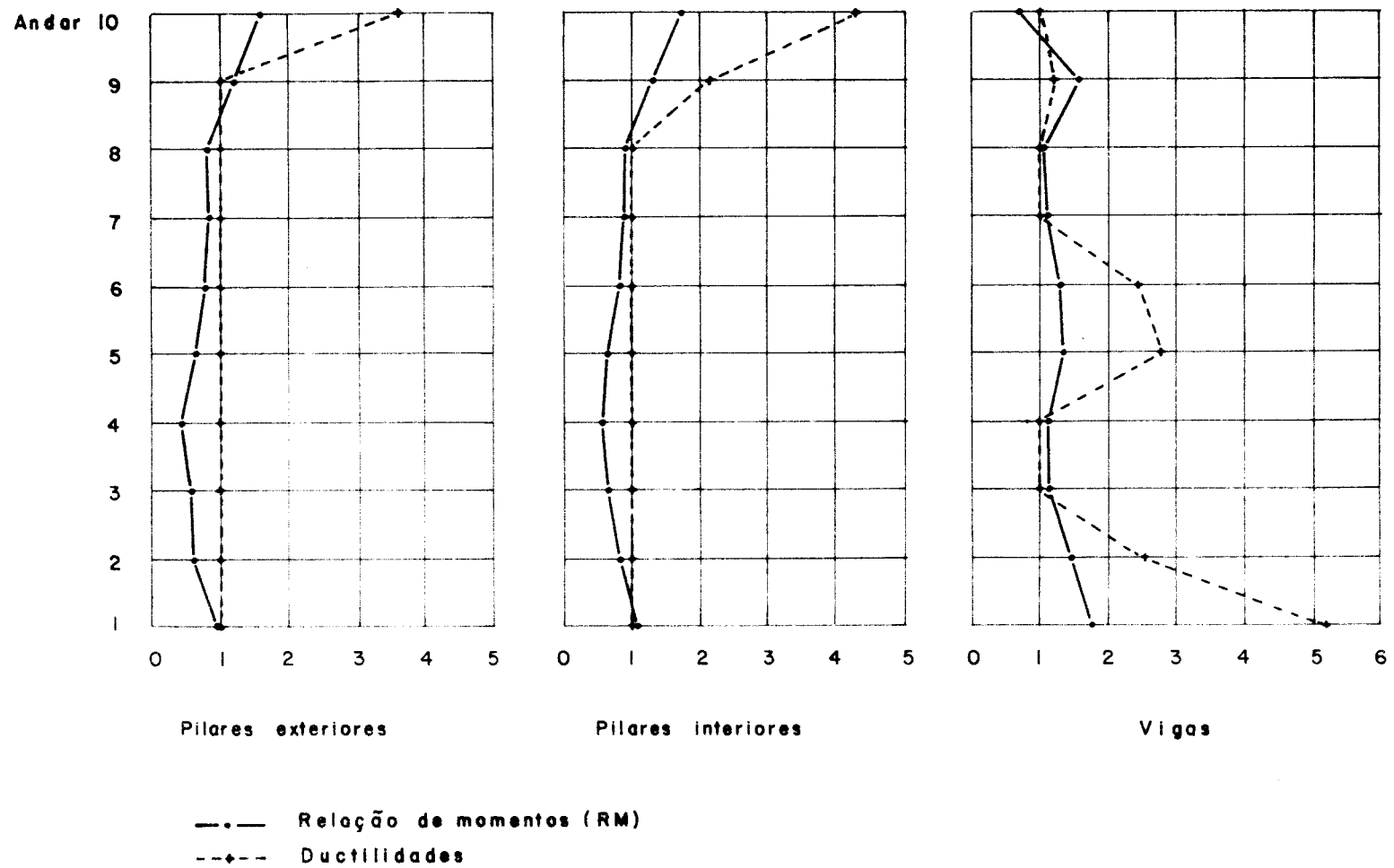


Fig. 6.24. Relação de momentos e ductilidades dos elementos do pórtico 2 do edifício.

da viga ou pilar, está representada na figura 6.24. O momento de plastificação desta definição é o correspondente aos esforços normais resultantes da aplicação das cargas gravitacionais exclusivamente. Na mesma figura mostram-se as máximas ductilidades de curvatura (eq. 5.2.2.1) obtidas, para cada elemento, na análise elastoplástica. Ductilidades unitárias indicam que o elemento permaneceu na fase elástica. A relação de momentos, que é obtida da análise elástica, pode dar uma idéia dos elementos com possibilidade de plastificar, mas não reflete os resultados da análise inelástica.

Pode ser observada uma tendência ao trabalho plástico das vigas, em vez dos pilares, em quase todo o pórtico. Isto é uma característica desejada, em projetos de edifícios para regiões sísmicas. No entanto, nos 2 pavimentos superiores os pilares desenvolveram ductilidades importantes.

A execução da análise elástica, com 252 passos de integração e impressão dos resultados em 71 desses passos, demandou um tempo de processamento total de 310,84 s, dos quais 3,02 s correspondem à leitura e impressão dos dados; 4,85 s, à montagem das matrizes globais e cálculos iniciais; e 302,23 s, à integração no tempo. A análise elastoplástica, para o mesmo número de passos e impressões e com um número de iterações que variam entre 4 e 12, precisou de 457,65 s para o processamento total, correspondendo à integração 447,18 s.

7. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo para pórticos planos de concreto armado, e foram elaborados dois programas computacionais para análise determinística da resposta dinâmica inelástica dessas estruturas.

As características do elemento, tais como momentos de plastificação e rigidezes plásticas variáveis com as cargas axiais, zonas extremas rígidas, comprimento variável de plastificação, degradação da rigidez elástica e inclusão das deformações de cisalhamento, permitem obter uma boa representação do comportamento mecânico de pórticos de concreto armado. Baseado nisto e na verificação de uma aceitável eficiência do algoritmo global, pode-se concluir que os programas implementados são adequados para o estudo da resposta dinâmica de estruturas apertadas de edifícios.

Mais especificamente, da utilização do elemento, podem ser tiradas algumas conclusões particulares, entre as quais citam-se as seguintes:

- É importante a inclusão da rigidez dos nós, isto é, a consideração da dimensão finita das uniões entre as vigas e os pilares. Isto contribui para a rigidez global do pórtico, influenciando a sua resposta.

- A degradação da rigidez elástica, com o progresso das deformações plásticas, teve muita importância, produzindo um aumento dos deslocamentos máximos do pórtico sob excitação sísmica e modificando o período da sua resposta. A consideração deste efeito, na análise, incrementa o tempo de processamento do programa computacional, elaborado sob um esquema de resolução a rigidez constante, devido a que os passos elásticos seguintes à primeira plastifi

cação devem ser tratados iterativamente.

- O comprimento das zonas que plastificam-se é variável no elemento e calcula-se com base na distribuição dos momentos fletores, mas, alternativamente, testaram-se diferentes valores fixos da ordem da altura da seção. Com parâmetros de endurecimento menores do que 0,02, verificou-se que as diferentes dimensões das regiões plastificadas produziram respostas, cujas diferenças, embora apreciáveis, não chegaram a ser muito grandes.

- A variação dos momentos de plastificação com os esforços normais afetou a resposta e, especialmente, a dos momentos fletores. Em relação a isto tem importância a consideração do carregamento estático ou gravitacional, já que fornece, para cada elemento, valores iniciais dos momentos fletores nas extremidades (principalmente nas vigas) e dos esforços normais (principalmente nos pilares).

As pesquisas futuras, no que se refere ao elemento, deveriam tratar de alguns dos aspectos relacionados a seguir:

- O cálculo da rigidez inicial do elemento, considerando-se a seção transversal fissurada, pode conduzir a um modelo flexível demais. Se bem que é certo que muitas seções estão fissuradas, outras trabalham ainda no Estádio I. Além disso, outros elementos contribuem para aumentar a rigidez do edifício. Entre eles, as lajes de concreto armado, que possibilitam o trabalho das vigas com seção T. O programa ANDEN admite, atualmente, o cálculo da rigidez para a estrutura completa, ou fissurada ou sem fissurar. Seria importante a modificação do elemento para que parte dele trabalhasse no Estádio I e parte no Estádio II.

- Deveriam ser incluídas rótulas nas extremidades do trecho deformável do elemento, para poder represen-

tar as rotações concentradas, devidas ao escorregamento da armadura de tração nas fissuras (vide seção 4.2.1).

- As características de rigidez do elemento levam em conta as deformações de cisalhamento. Assim, o modelo pode ser utilizado para representar cortinas, ou vigas nas quais os efeitos do cortante sejam importantes, trabalhando elásticamente como partes da estrutura principal do edifício. Já a plastificação das distorções, devidas ao cisalhamento, não é considerada no elemento, que admite plastificação apenas nas suas deformações de flexão. Deveriam realizar-se pesquisas orientadas ao desenvolvimento de um modelo que incluísse o trabalho inelástico das distorções.

- Teriam que ser introduzidas as modificações que permitissem o estudo de seções com armadura assimétrica.

- Outros tipos de modelos hysteréticos para as relações momento-curvatura, tais como os de Clough ou Take da (fig. 1.1), poderiam ser implementados.

Em relação aos métodos da análise, formas alternativas de resolução das equações não-lineares, baseadas em processos de rigidez variável, poderiam ser testadas, verificando se a redução do número de iterações compensa o tempo de processamento necessário para realizar as triangularizações da matriz do sistema. Também poderiam ser implementados algoritmos explícitos para realizar a integração numérica no tempo, comparando-se a sua eficiência com a dos métodos existentes no programa.

Pode ser mencionado, ademais, que seria interessante a inclusão, na análise, das não-linearidades de ordem geométrica, ampliando assim o campo de utilização dos programas.

Deve-se ressaltar a importância que teria a rea

lização de ensaios com carregamento reversível, estáticos ou dinâmicos, que permitissem uma conferência do modelo matemático desenvolvido.

Finalmente, em relação à parte computacional, algumas modificações poderiam ser introduzidas, com fins de otimização, nos programas elaborados, entre as quais podem citar-se as seguintes:

- No processo de integração poderiam ser estudados aceleradores para a convergência das iterações.

- Quando se realiza o teste da convergência do processo iterativo, se os vetores são menores que uma tolerância fixa, considera-se que o erro é nulo. Essa tolerância deveria ser estabelecida como uma percentagem dos vetores das forças do problema.

- Poderia ser incluído um esquema de passo variável para permitir a redução do passo, caso não fosse atingida a convergência requerida, ou o aumento do mesmo, quando os erros obtidos fossem muito pequenos.

- Também seria útil o armazenamento dos arranjos num tempo dado, para poder recomeçar uma outra análise a partir desse instante. Assim, poderia ser poupado muito tempo de processamento, evitando-se refazer, numa análise elastoplástica, alguns passos já realizados na análise elástica.

Algumas das alterações apontadas poderiam ser introduzidas facilmente nos programas existentes.

8 - ANEXOS

8.1 - RELAÇÃO ENTRE OS DIAGRAMAS P - δ E M - χ PARA UMA VIGA

Neste anexo apresentam-se as relações entre os parâmetros que definem os ciclos histeréticos P - δ e M - χ para uma viga em balanço. P e δ são, respectivamente, a carga e o deslocamento do extremo livre da viga e M e χ , o momento fletor e a curvatura, na seção do engaste (figura 8.1). Essas relações, para uma viga em balanço estão dadas no quadro 8.1.

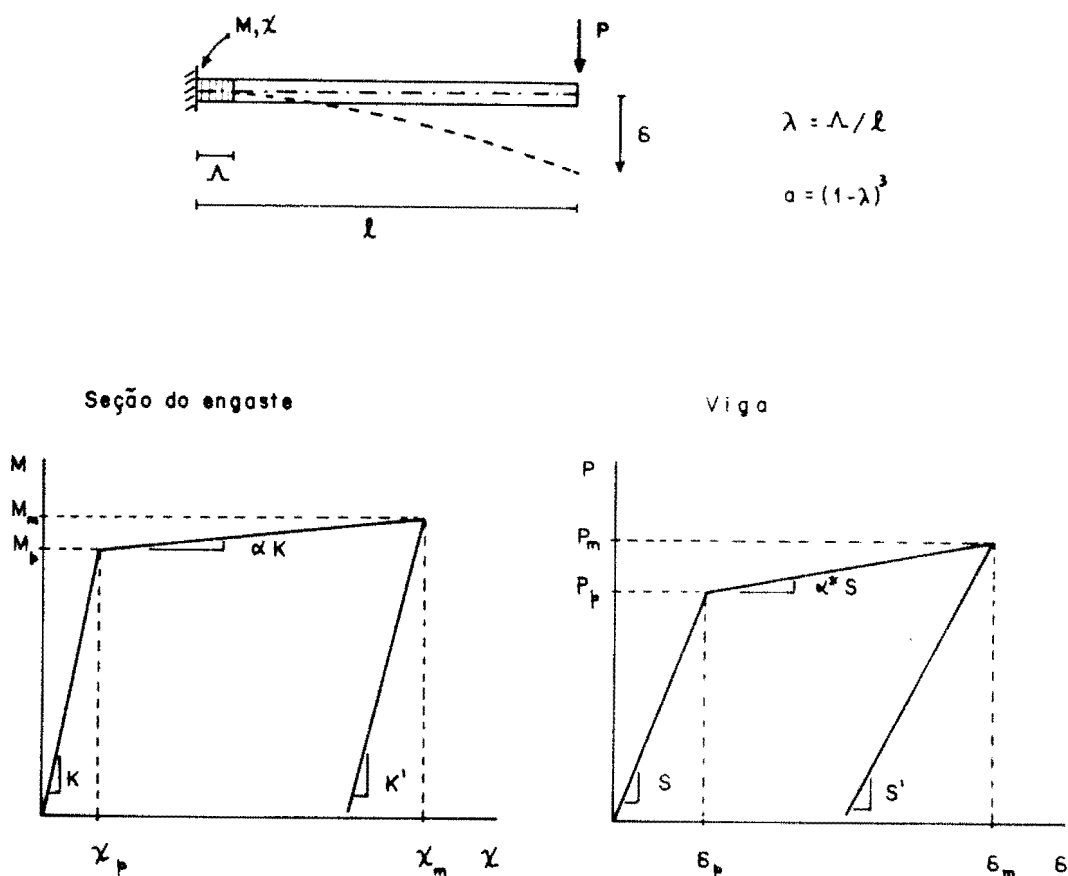


Figura 8.1 - Viga em balanço e diagramas M- χ e P- δ

Quadro 8.1 - Relação entre os diagramas $M - \chi$ e $P - \delta$ para uma viga em balanço

	característica	diagrama	
		$M - \chi$	$P - \delta$
1	rigidez inicial	$K = EI$	$S = 3 EI / \ell^3 = 3K / \ell^3$
2	rigidez plástica	αK	$\alpha^* S$
3	parâmetro de endurecimento	$\alpha = \frac{(1-a) \alpha^*}{1 - a \alpha^*}$	$\alpha^* = \frac{\alpha}{1 + a(\alpha-1)}$
4	carga de plastificação	$M_p = P_p \ell$	$P_p = M_p / \ell$
5	deformação de plastificação	$\chi_p = 3 \delta_p / \ell^2$	$\delta_p = \chi_p \ell^2 / 3$
6	deformação máxima	$\chi_m = \chi_p + (M_m - M_p) / \alpha K$	$\delta_m = \delta_p + (P_m - P_p) / \alpha^* S$
7		$\chi_m = \frac{3[\delta_m + a(\alpha-1)\delta_p]}{[1 + a(\alpha-1)] \ell^2}$	$\delta_m = \frac{\ell^2}{3} \{ [1 + a(\alpha-1)] \chi_m + a(\alpha-1) \chi_p \}$
8	ductilidade	$\mu_\chi = \chi_m / \chi_p $	$\mu_\delta = \delta_m / \delta_p $
9		$\mu_\chi = \frac{\mu_\delta + a(\alpha-1)}{1 + a(\alpha-1)}$	$\mu_\delta = [1 + a(\alpha-1)] \mu_\chi - a(\alpha-1)$
10	rigidez elástica degradada	$K' = K(1/\mu_\chi)^\gamma$	$S' = S(1/\mu_\delta)^\nu$

Os expoentes das fórmulas da rigidez elástica degradada (alínea 10 do quadro 8.1) estão relacionados pela expressão:

$$(\mu_\delta)^v = \left[\frac{\mu_\delta + a(\alpha - 1)}{1 + a(\alpha - 1)} \right]^\gamma (1 - a) + a \quad (8.1.1)$$

Para $\lambda = 0,20$ esta relação está representada na figura 8.2.

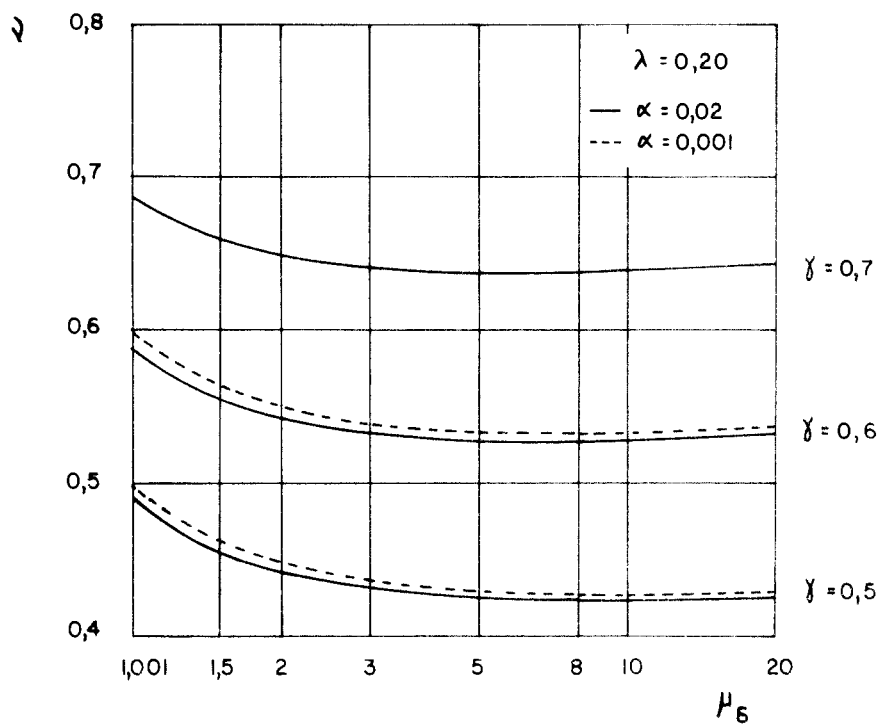


Figura 8.2 - Relação entre os expoentes v e γ dos coeficientes da degradação da rigidez elástica, para $\lambda = 0,20$

Para o caso de uma viga biengastada, na qual uma das suas extremidades tem liberdade para se deslocar perpendicularmente ao eixo da viga (figura 8.3), as fórmulas do quadro 8.1 aplicam-se fazendo as seguintes definições:

$$\ell = L / 2$$

$$\delta = v / 2 \quad (8.1.2)$$

$$\lambda = 2 \ell / L$$

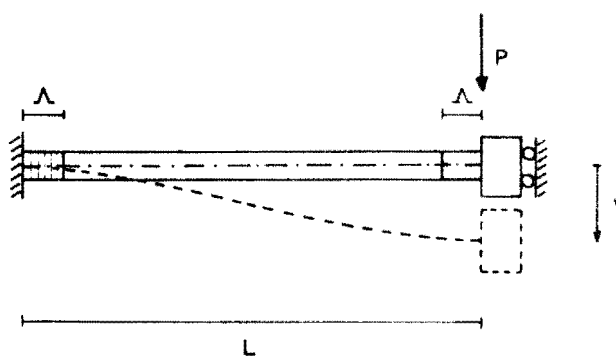


Figura 8.3 - Viga biengastada com deslocamento do apoio

8.2 - COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES 3.3.2.12

Os coeficientes b_{mn} ($m, n = 1, 2$) das equações 3.3.2.12, no caso geral, têm a forma:

$$b_{mm} = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)^2 (1 - \lambda_m)(1 + 12\Phi) + 6\psi(\lambda_1 + \lambda_2) + \\ + \frac{3\lambda_m^2 - \lambda_m^3 + (1+3\Phi)(2\lambda_m^3 - 6\lambda_m^2 + 4\lambda_m - 4\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_m^2\lambda_n)}{\eta_m} + \\ + \frac{(1 - 6\Phi)(\lambda_n^3 + \lambda_n^2\lambda_m - \lambda_n^2) - \lambda_n^3}{\eta_n}$$

$$b_{mn} = 6\psi(\lambda_1 + \lambda_2) - (1 - \lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_m (1 + 12\Phi) + \\ + \frac{2(1 + 3\Phi)(\lambda_m^3 + \lambda_m^2\lambda_n - \lambda_m^2) - \lambda_m^3}{\eta_m} + \\ + \frac{3\lambda_n^2 - \lambda_n^3 + (1-6\Phi)(\lambda_n^3 - 3\lambda_n^2 + 2\lambda_n - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_m\lambda_n^2)}{\eta_n}$$

$$b_{m0} = \frac{EI}{L_c} \{ [6\lambda_m + (4 + 12\Phi)(1 - \lambda_1 - \lambda_2)] \Delta\phi_m + \\ + [6\lambda_n + (2 - 12\Phi)(1 - \lambda_1 - \lambda_2)] \Delta\phi_n + \frac{6}{L_c} (\Delta v_1 - \Delta v_2) \}$$

onde $\Phi = \psi / (1 - \lambda_1 - \lambda_2)^2$

e $m = 1, 2$; $n = 3 - m$

LISTA DE SÍMBOLOS

A	área
\underline{A}	vetor de estado
\underline{B}	vetor de estado
\underline{C}	matriz de amortecimento
E	módulo de elasticidade longitudinal
F	força
G	módulo de elasticidade transversal
\underline{G}	matriz geométrica
I	momento de inércia
K	rigidez da seção transversal
\underline{K}	matriz de rigidez global
L	comprimento
\underline{L}	matriz topológica
M	momento
\underline{M}	matriz de massa global
N	força normal
P	carga
Q	força cortante
R	resultante das tensões no concreto
R_i	coeficiente do extremo i
S	rigidez estrutural
T	período natural elástico
U	deslocamento
\underline{U}	vetor dos deslocamentos global
V	volume
Z	distância de uma extremidade do elemento ao ponto de inflexão
a_i	coeficiente dos métodos numéricos de integração
b	largura da seção transversal
b_{ij}	coeficientes
c	comprimento de plastificação

c_f	coeficiente de forma de cisalhamento
d	altura útil da seção transversal
d_j	coeficiente de proporcionalidade da matriz de amortecimento
f	resistência
h	altura da seção transversal
k_x	coeficiente da profundidade da linha neutra
\tilde{k}	matriz de rigidez elementar
m	momento fletor adimensional
\tilde{m}	matriz de massa elementar
n	força normal adimensional; número do modo
r	relação do recobrimento
t	tempo
u	deslocamento
v	deslocamento
x	profundidade do eixo neutro; eixo das abcissas
y	braço de alavanca; eixo das ordenadas
α	parâmetro do endurecimento da seção transversal
α^*	parâmetro do endurecimento estrutural
$\bar{\alpha}_j$	coeficiente para a integração do diagrama de tensões no concreto
β	coeficiente do método de Newmark
γ	expoente da fórmula da degradação da rigidez para a seção; coeficiente do método de Newmark
δ	deslocamento da estrutura; massa específica
ϵ	erro; deformação específica
ζ	incremento relativo dos momentos nas extremidades
η	coeficiente de rigidez
θ	coeficiente do método Wilson- θ ; rotação
λ	comprimento de plastificação relativo
μ	taxa geométrica da armadura; coeficiente de ductilidade
ν	expoente da fórmula da degradação da rigidez estrutural
ξ	coordenada auxiliar; coeficiente de amortecimento

ρ	relação entre o momento de plastificação e o momento atual
σ	tensão
ϵ	deformação
τ	passo de integração do método Wilson- θ
ϕ	rotação; função de interpolação
χ	curvatura
ψ	parâmetro de cisalhamento
ω	freqüência; taxa mecânica da armadura
Λ	comprimento de plastificação

Índices inferiores:

c	concreto
p	plastificação
s	aço
t	instante de tempo
y	escoamento

Índices superiores:

e	parte elástica
p	parte plástica

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ADELI, H.; GERE, J.M.; WEAVER, W. Algorithms for nonlinear structural dynamics. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 104(2):263-80, Feb. 1978.
2. ANDERSON, J.C. & GURFINKEL, G. Seismic behaviour of framed tubes. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Sussex, 4(2):145-62, Oct./Dec. 1975.
3. ANDERSON, J.C. & TOWNSED, W.H. Models for RC frames with degrading stiffness. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 103(12):2361-76, Dec. 1977.
4. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de obras de concreto armado: NB-T. Rio de Janeiro, 1978.
5. BAKER, A.L.L. & AMARAKONE, A.M.N. Inelastic hyperstatic frame analysis. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FLEXURAL MECHANICS OF REINFORCED CONCRETE, Miami, Nov. 10-12, 1964. Proceedings. s.l.p., ASCE/ACI, 1965. p.85-142.
6. BARBOSA, H.J.C. & EBECKEN, N.F.F. Matriz de massa diagonal para elementos finitos de ordem superior. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 2, São Paulo, 5-7 dez. 1978. Anais. São Paulo, CESP, 1978.
7. BATHE, K-J. ADINA: a finite element program for automatic dynamic incremental nonlinear analysis. Cambridge, Mass., Acoustics and Vibration Laboratory of M.I.T., 1975. (Massachusetts Institute of Technology. Report 82448-1).
8. BATHE, K-J. & WILSON, E.L. Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1976.
9. BATHE, K-J.; WILSON, E.L.; PETERSON, F.E. SAP IV: a structural analysis program for static and dynamic response of linear systems. Berkeley, Calif., College of Engineering, 1974. (California University, Berkeley. EERC, 73-11).

10. BELYTSCHKO, T. & SCHOEBERLE, D.F. On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics. Journal of Applied Mechanics, New York, 42:865-9, Dec. 1975.
11. BERTERO, V.V. Seismic behaviour of structural concrete linear elements (beams, columns), and their connections. In: SYMPOSIUM ON STRUCTURAL CONCRETE UNDER SEISMIC ACTIONS, Rome, 1979. State of the art reports. Roma, AICAP-CEB, 1979. v.1, p.123-212.
12. _____. Strength and deformation capacities of buildings under extreme environments. In: SYMPOSIUM ON STRUCTURAL MECHANICS, Berkeley, Aug. 11-12 1977. A volume honoring Egor P. Popov. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1980. p.188-237.
13. BERTERO, V.V. & McCLURE, G. Behavior of reinforced concrete frames subjected to repeated reversible loads. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 61(10):1305-30, Oct. 1964.
14. BERTERO, V.V. & POPOV, E.P. Seismic behavior of ductile moment-resisting reinforced concrete frames. In: SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE STRUCTURES IN SEISMIC ZONES, San Francisco, Calif., 1974. Detroit, American Concrete Institute, 1977. p.247-91.
15. BERWANGER, C. Effect of axial load on the moment-curvature relationship of reinforced concrete members. In: SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE COLUMNS, Ottawa, Oct. 1973. Detroit, American Concrete Institute, 1975. p.263-88.
16. BIGGS, J.M. Introduction to structural dynamics. New York, McGraw-Hill, 1964.
17. BIGNON, P.G. Análise dinâmica para reatores nucleares submetidos a força de impacto. In: CONFERÊNCIA SOBRE ANÁLISE, PROJETO E CONSTRUÇÃO DE ESTRUTURAS DE CENTRAIS NUCLEARES, 1, Porto Alegre, abr. 1978. Anais. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1978. v.3, p.1125-40.
18. BIGNON, P.G. & RIERA, J.D. Verification of methods of analysis for soft missile impact problems. Nuclear Engineering and Design, Amsterdam, 60(3):311-26, Oct. 1980.

19. BLUME, J.A. Design of earthquake-resistant poured-in-place concrete structures. In: WIEGEL, R.L. Earthquake engineering. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1970. p.449-74.
20. BLUME, J.A.; NEWMARK, N.M.; CORNING, L.H. Design of multistory reinforced concrete buildings for earthquake motions. Skokie, Ill., Portland Cement Association, 1961.
21. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. The finite element technique, an introduction for engineers. Porto Alegre, UFRGS, 1975.
22. BURNS, N.H.; SIESS, C.P. Repeated and reversed loading in reinforced concrete. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 92(5):65-78, Oct. 1966.
23. CERVERA, H.A. & CREUS, G.J. Effect of variable loading on reinforced concrete beams. Budapest, 1974. 12p. Trabalho apresentado no 6th International Congress of Material Testing, Budapest, 1974.
24. CHEN, C.K.; CZARNECKI, R.M.; SCHOLL, R.E. Destructive vibration test of a 4-story concrete structure. In: DOUGLAS McHENRY INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON CONCRETE AND CONCRETE STRUCTURES, Mexico, Oct. 29, 1976. Detroit, American Concrete Institute, 1978. p.607-37.
25. CHOPRA, A.K. & KAN, C. Effects of stiffness degradation on ductility requirements for multistorey buildings. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Sussex, 2(1):35-45, July/Sep. 1973.
26. CLOUGH, R.W. Earthquake response of structures. In: WIEGEL, R.L. Earthquake engineering. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1970. p.307-34.
27. _____. Predicting the earthquake response of reinforced concrete structures. In: SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE STRUCTURES IN SEISMIC ZONES, San Francisco, Calif., 1974. Detroit, American Concrete Institute, 1977. p.59-79.
28. CLOUGH, R.W. & BENUSKA, K.L. Nonlinear earthquake behavior of tall buildings. Journal of the

Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 93(3):129-46, June 1967.

29. CLOUGH, R.W.; BENUSKA, K.L.; WILSON, E.L. Inelastic earthquake response of tall buildings. In: WORLD CONFERENCE ON EARTHQUAKE ENGINEERING, 3, Wellington, 1965. p.68-89.
30. CLOUGH, R.W. & PENZIEN, J. Dynamics of structures. New York, McGraw-Hill, 1975.
31. COHN, M.Z. Rotation compatibility in the limit design of reinforced concrete continuous beams. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FLEXURAL MECHANICS OF REINFORCED CONCRETE, Miami, Nov 10-12, 1964. Proceedings. s.l.p., ASCE/ACI, 1965. p.359-82.
32. CORLEY, W.G. Rotational capacity of reinforced concrete beams. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 92(5):121-46, Oct. 1966.
33. COUNCIL ON TALL BUILDINGS AND URBAN HABITAT. Structural design of tall concrete and masonry buildings. New York, ASCE, 1978.
34. DERECHO, A.T. et alii. Strength, stiffness, and ductility required in reinforced concrete structural walls for earthquake resistance. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 76(8):875-96, Aug. 1979.
35. ELLWANGER, R.J. Projeto automático de edifícios. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1979. 141p. Tese maestr. engenharia civil.
36. GHALI, A.; NEVILLE, A.M.; CHEUNG, Y.K. Structural analysis: a unified classical and matrix approach. 2.ed. London, Chapman and Hall, 1978.
37. GIBERSON, M.F. Two nonlinear beams with definitions of ductility. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 95(2):137-57, Feb. 1969.
38. HINTON, E.; ROCK, T.; ZIENKIEWICZ, O.C. A note on mass lumping & related processes in the F.E.M. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Sussex, 4(3): 245-9, Jan./Mar. 1976.

39. HISADA, T.; OHMORI, N.; BESSOH, S. Earthquake design considerations in reinforced concrete columns. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Sussex, 1(1):79-91, July/Sep. 1972.
40. HOFFMANN, J.R. Pilares esbeltos de concreto armado. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1979. 186p. Tese maestr. engenharia civil.
41. HUGHES, T.J.R. A note on the stability of Newmark's algorithm in nonlinear structural dynamics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 11(2):383-6, 1977.
42. IMBEAULT, F.A. & NIELSEN, N.N. Effect of degrading stiffness on the response of multistory frames subjected to earthquakes. Proceedings of the World Conference on Earthquake Engineering, 5, Rome, June 25-29, 1973. p.1756-65.
43. IWAN, W.D. Application of nonlinear analysis techniques. In: WINTER ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, New York, Nov. 17-21, 1974. Applied mechanics in earthquake engineering. New York, ASME, 1974. p.135-61.
44. KENT, D.C. & PARK, R. Flexural members with confined concrete. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 97(7):1969-90, July 1971.
45. LEONHARDT, F. & MÖNNIG, E. Construções de concreto. Rio de Janeiro, Interciência, 1977-79. v.1 e v.4.
46. LIVOLANT, M.; HOFFMANN, A.; GAUVAIN, J. Tests and calculations of reinforced concrete beams subject to dynamic reversed loads. In: CONFERÊNCIA SOBRE ANÁLISE, PROJETO E CONSTRUÇÃO DE ESTRUTURAS DE CENTRAIS NUCLEARES, Porto Alegre, 18-20 abr., 1978. Anais. Porto Alegre, CPGEC da UFRGS, 1978. v.2, p.741-60.
47. MAHIN, S.A. et alii. Response of the Olive View Hospital main building during the San Fernando earthquake. Berkeley, Earthquake Engineering Research Center of the University of California, 1976. 308p.
48. MAHIN, S.A. & BERTERO, V.V. Nonlinear seismic response evaluation - Charaima building. Journal

- of the Structural Division, New York, ASCE, 100(6):1225-42, June 1974.
49. _____. Prediction of nonlinear seismic building behavior. Journal of the Technical Councils of ASCE, New York, 104(1):21-37, Nov. 1978.
 50. MATTOCK, A.H. Rotational capacity of hinging regions in reinforced concrete beams. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FLEXURAL MECHANICS OF REINFORCED CONCRETE, Miami, Nov. 10-12, 1964. Proceedings. S.I.p., ASCE/ACI, 1965. p.143-81.
 51. MONDKAR, D.P. & POWELL, G.H. Towards optimal in-core equation solving. Computers & Structures, Oxford, 4(3):531-48, May 1974.
 52. NEWMARK, N.M. Current trends in the seismic analysis and design of high-rise structures. In: _____. Civil engineering classics: selected papers. New York, ASCE, 1976. p.787-808.
 53. _____. A method of computation for structural dynamics. In: _____. Civil engineering classics: selected papers. New York, ASCE, 1976. p.601-30.
 54. NEWMARK, N.M. & HALL, W.J. Dynamic behaviour of reinforced and prestressed concrete buildings under horizontal forces and the design of joints (Incl. wind, earthquake, blast effects). In: NEWMARK, N.M. Civil engineering classics: selected papers. New York, ASCE, 1976. p.673-701.
 55. OTANI, S. Inelastic analysis of R/C frame structures. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 100(7):1433-49, July 1974.
 56. OTANI, S. & SOZEN, M.A. Simulated earthquake tests of R/C frames. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 100(3):687-701, Mar. 1974.
 57. PARK, K.C. Evaluating time integration methods for nonlinear dynamics analysis. In: WINTER ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, Houston, Nov. 30- Dec. 5, 1975. Finite element analysis of transient nonlinear structural behavior. New York, ASME, 1975. p.35-58.
 58. _____. An improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamic

- equations. Journal of Applied Mechanics, New York, 42(2):464-70, June 1975.
59. _____ . Practical aspects of numerical time integration. Computers & Structures, Oxford, 7(3):343-53, June 1977.
60. PARK, R.; KENT, D.C.; SAMPSON, R.A. Reinforced concrete members with cyclic loading. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 98(7):1341-59, July 1972.
61. POPOV, E.P.; BERTERO, V.V.; MA, S.M. Model of cyclic inelastic flexural behavior of reinforced concrete members. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL MECHANICS IN REACTOR TECHNOLOGY, 4, San Francisco, Aug. 15-19, 1977. Transactions. Brussels, Commission of the European Communities, 1977. v.K(a):3/14, 12p.
62. PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, 1968.
63. REBORA, B. et alii. Computational experience with non-linear dynamic analysis of thin reinforced concrete structures with the initial-stress approach. Nuclear Engineering and Design, Amsterdam, 42:381-90, 1977.
64. REBORA, B.; ZIMMERMANN, Th.; WOLF, J.P. Dynamic rupture analysis of reinforced concrete shells. Nuclear Engineering and Design, Amsterdam, 37:269-97, 1976.
65. RIERA, J.D. & BIGNON, P.G. Determination of reaction-time curves for Phantom aircraft impinging with normal or oblique incidence against rigid or moving targets. Trabalho apresentado no 2º Congresso Latinoamericano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Curitiba, dez. 1980.
66. ROJAS MONTERO, L.F. Análisis sísmico de estructuras. Rio de Janeiro, Universidade Federal, COPPE, 1974. 288p. Tese dout. ciências.
67. ROY, H.E.H. & SOZEN, M.A. Ductility of concrete. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FLEXURAL MECHANICS OF REINFORCED CONCRETE, Miami, Nov. 10-12, 1964. Proceedings. S.l.p., ASCE/ACI, 1965. p.213-35.

68. SHANTARAM, D.; OWEN, D.R.J.; ZIENKIEWICZ, O.C. Dynamic transient behaviour of two- and three-dimensional structures including plasticity, large deformations effects and fluid interaction. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Sussex, 4(6):561-78, Oct./Dec. 1976.
69. SOLEIMANI, D.; POPOV, E.P.; BERTERO, V.V. Hysteretic behavior of reinforced concrete beam-column subassemblages. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 76(11):1179-95, Nov. 1979.
70. SOZEN, M.A. Hysteresis in structural elements. In: WINTER ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, New York, Nov. 17-21, 1974. Applied mechanics in earthquake engineering. New York, ASME, 1974. p.63-98.
71. SRINAVASA RAO, P.; KANNAN, P.R.; SUBRAHMANYAM, B.V. Influence of span length and application of load on the rotation capacity of plastic hinges. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 68(6):468-71, June 1971.
72. STANGENBERG, F. Dynamic problems in nuclear structural engineering design for extreme exterior and interior loads. Trabalho apresentado no CNEN Seminar, Rio de Janeiro, out. 1976. 41p.
73. STRICKLIN, J.A. & HAISLER, W.E. Formulations and solution procedures for nonlinear structural analysis. Computers & Structures, Oxford, 7(1):125-36, Feb. 1977.
74. TAKAYANAGI, T. & SCHNOBRICH, W.C. Non-linear analysis of coupled wall systems. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Sussex, 7(1):1-22, Jan./Feb. 1979.
75. TAKEDA, T.; SOZEN, M.A.; NIELSEN, N.N. Reinforced concrete response to simulated earthquake. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 96(12):2557-73, Dec. 1970.
76. TAMAGNA, A. Análise de placas elásticas sobre apoios discretos não lineares. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1980. Tese maestr. engenharia civil. Em andamento.

77. TILLERSON, J.R.; STRICKLIN, J.A.; HAISLER, W.E. Numerical methods for the solution of nonlinear problems in structural analysis. In: WINTER ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, Detroit, Nov. 11-15, 1973. Numerical solution of nonlinear structural problems. New York, ASME, 1973. p.67-101.
78. WALPOLE, W.R. & SHEPHERD, R. Elastoplastic seismic response of reinforced concrete frame. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 95(10): 2031-55, Oct. 1969.
79. WARBURTON, G.B. The influence of the finite element method on developments in structural dynamics. In: GLOWINSKI, R.; RODIN, E.Y.; ZIENKIEWICZ, O.C. Energy methods in finite element analysis. Chichester, John Wiley, 1979. p.59-80.
80. WILSON, E.L.; FARHOOMAND, I.; BATHE, K.J. Nonlinear dynamic analysis of complex structures. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Sussex, 1(3): 241-52, Jan./Mar. 1973.
81. ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. 3.ed. London, McGraw-Hill, 1977.