

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DO DESENVOLVIMENTO DOS PERFIS TÉRMICO
E HIDRODINÂMICO EM UM DUTO CIRCULAR
PELO MÉTODO ADI

por

Rejane De César Oliveski

Dissertação para obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Porto Alegre

1995

**ESTUDO DO DESENVOLVIMENTO DOS PERFIS TÉRMICO
E HIDRODINÂMICO EM DUTO CIRCULAR
PELO MÉTODO ADI**

por

Rejane De César Oliveski

Engenheira Mecânica

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Viçosa Möller

Aprovada por:

Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeysen

Prof. Dra. Ligia Damasceno Ferreira Marczak

Prof. Dr. Marco Túllio M. B. de Vilhena

Prof. Dr. Horácio Antonio Vielmo

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 08 de Novembro de 1995.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Sérgio V. Möller, pela colaboração, pelo estímulo e pelo espírito de solidariedade durante o desenvolvimento do presente trabalho.

Ao Professor Marco Túllio M. B. de Vilhena pelo profissionalismo e pelas valiosas sugestões que ajudaram a enriquecer este trabalho.

Ao Eng. José Luiz Salvadoretti pela generosidade e paciência com que colaborou na solução de problemas computacionais.

Ao secretário do PROMEC, Sr. Paulo Kutter pelo espírito de colaboração.

A todos aqueles que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

DEDICATÓRIA

A minha filha Débora Lana.

SUMÁRIO

RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
LISTA DE SÍMBOLOS	x
LISTA DE FIGURAS	xv
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	5
2.1 - Hipóteses Simplificativas	7
2.2 - Equações básicas	8
2.3 - Equações para o escoamento turbulento	11
2.4 - Modelo de turbulência.	13
2.5 - Condições de contorno	16
2.5.1 - Campo de velocidade.	16
2.5.2 - Campo de temperatura	17
2.6 - Condição inicial	18

3 - MÉTODO NUMÉRICO	19
3.1 - Descrição da malha	21
3.2 - Equações discretizadas	24
3.2.1 - Discretização da equação da quantidade de movimento	25
3.2.2 - Discretização da equação da energia	30
3.3 - Teste de convergência	34
3.4 - Roteiro de cálculo	35
3.4.1 - Parâmetros iniciais	38
3.4.2 - Cálculo da distribuição de velocidades	40
3.4.2.1 - Cálculo da componente u	41
3.4.2.1.1 - Balanço de massa	45
3.4.2.2 - Cálculo da componente v	46
3.4.3 - Termos não lineares	47
3.4.4 - Cálculo da distribuição de temperatura	47
4 - RESULTADOS	52
4.1 - Resultados obtidos em regime laminar	53
4.2 - Resultados obtidos em regime turbulento	58
4.3 - Análise dos resultados	69
5 - CONCLUSÕES	70

6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73
---	-----------

APÊNDICES

Apêndice A - Equações de balanço para o escoamento turbulento	77
Apêndice B - Modelo de turbulência	81
Apêndice C - Perda de carga	84
Apêndice D - Comprimento de entrada	85

RESUMO

Esta Dissertação apresenta um algoritmo para a determinação dos perfis de velocidade e temperatura na região de entrada de um duto circular pelo método ADI (Alternating-Direction Implicit). As equações de balanço são discretizadas utilizando-se diferenças centrais para as derivadas espaciais e diferenças para frente de primeira ordem para a derivada temporal. A solução da temperatura e velocidade são desacopladas. O programa é aplicável a escoamentos estacionários, bidimensionais e incompressíveis. O programa pode resolver escoamento laminar e turbulento, este último utilizando-se um modelo de turbulência. Utilizando-se distribuições uniformes de velocidade e temperatura como condição inicial para os cálculos, os resultados demonstram boa concordância com a literatura clássica.

ABSTRACT

This Dissertation presents an algorithm for the determination of temperature and velocity profiles in the entrance region of a circular duct by the ADI-Method. Discretization of the balance equations uses central differences for spacial derivatives and upwind first order differences for time derivatives. The solution of temperature and velocity are not coupled. The program is applied to permanent, two-dimensional, incompressible flows, with physical properties of the fluid taken as the mean temperature. The program can solve laminar and turbulent flows, the latter with aid of turbulence models. Taking as inicial condition an uniform velocity and temperature distribution, results show good agreement with the literature.

LISTA DE SÍMBOLOS

- A Representação de matriz
- A Coeficiente da matriz tridiagonal definido nas equações (3.40, 3.41, 3.49, 3.62, 3.63 e 3.71)
- A_e Área de escoamento [m²]
- a_0 Coeficiente definido nas equações (3.3, 3.4, 3.19 e 3.20)
- a_1 Coeficiente definido nas equações (3.3, 3.4, 3.19 e 3.20)
- B Coeficiente da matriz tridiagonal definido nas equações (3.40, 3.41, 3.49, 3.50, 3.62, 3.63, 3.71 e 3.72)
- C Coeficiente da matriz tridiagonal definido nas equações (3.40, 3.49, 3.50, 3.62, 3.71 e 3.72)
- C_p Calor específico a pressão constante [J/Kg°C]
- D Diâmetro do tubo [m]
- f Fator de atrito
- F_y Função de y^+

F_R	Função do número de Reynolds
F_P	Função do número de Prandtl
h	Ordem de grandeza dos incrementos das malhas espacial e temporal
i	Índice da linha da malha
j	Índice da coluna da malha
K	Condutividade térmica [W/m°C]
m	Vazão mássica do fluido na seção de escoamento [Kg/s]
n	Número de Nós da malha da direção axial
np	Número de Nós da malha da direção radial
p	Pressão [Pa]
Pr	Número de Prandtl
Pr_t	Número de Prandtl turbulento
r	Coordenada cilíndrica radial [m]
R_w	Raio do tubo [m]

Re	Número de Reynolds
t	Tempo [s]
T	Temperatura [°C]
T^*	Temperatura adimensional
T_a	Temperatura calculada em iteração anterior [°C]
T_c	Temperatura no centro do tubo [°C]
T_w	Temperatura da parede do tubo [°C]
u	Velocidade axial [m/s]
u_a	Velocidade axial calculada em iteração anterior [m/s]
u^*	Velocidade adimensional
u^*	Velocidade de fricção [m/s]
U	Velocidade média [m/s]
U_{\max}	Velocidade máxima [m/s]
v	Velocidade radial [m/s]

- V Vetor velocidade [m/s]
- y Distância à parede do tubo [m]
- y^+ Distância adimensional à parede do tubo
- y_t^+ Distância adimensional à parede do tubo
- z Distância local da entrada do tubo [m]
- Z Comprimento de entrada hidrodinâmico [m]
- Z_T Comprimento de entrada térmico [m]

Caracteres Gregos

- α Difusividade térmica [m²/s]
- δ Espessura da camada limite [m]
- Δr Incremento da coordenada radial [m]
- Δt Incremento de tempo [s]
- Δz Incremento da coordenada axial [m]

ϵ	Erro admitido
ϵ_H	Difusividade térmica turbulenta [m ² /s]
ϵ_M	Difusividade turbulenta [m ² /s]
μ	Viscosidade dinâmica [Kg/m s]
ν	Viscosidade cinemática [m ² /s]
π	Constante = 3,14159265...
ρ	Massa específica do fluido [Kg/m ³]
τ_l	Tensão de cisalhamento para o escoamento laminar [Pa]
τ_t	Tensão turbulenta [Pa]
τ_w	Tensão de cisalhamento na parede [Pa]

LISTA DE FIGURAS

Figura	Pg
2.1 Representação do desenvolvimento da camada limite térmica e hidrodinâmica na entrada de um duto	6
2.2 Gráficos de Pr_t segundo Sukauskas e Slanciauskas (1987)	15
3.1 Representação de um Nó da malha espacial, com evolução no tempo, e os Nós adjacentes	22
3.2 Malha utilizada para obtenção do perfil de velocidade e temperatura em regime laminar	23
3.3 Malha utilizada para obtenção do perfil de velocidade e temperatura em regime turbulento	23
3.4 Fluxograma de cálculo	36
3.5 Fluxograma de cálculo - Continuação	37
4.1 Comparação dos perfis de velocidade obtidos pela solução analítica de Hagen-Poiseuille e pelo método ADI no escoamento laminar	54

4.2	Representação adimensional dos perfis de velocidade ao longo do desenvolvimento no escoamento laminar.	55
4.3	Distribuição de velocidade para o escoamento laminar.	55
4.4	Distribuição de velocidade para o caso laminar	56
4.5	Coefficiente de atrito para o regime laminar	57
4.6	Desenvolvimento do perfil de temperatura para o regime laminar	58
4.7	Comparação do perfil de velocidade obtido pelo método ADI e a Lei da Parede para o número de Reynolds 10.000.	60
4.8	Comparação do perfil de velocidade obtido pelo método ADI e a Lei da Parede para o número de Reynolds 20.000.	60
4.9	Comparação do perfil de velocidade obtido pelo método ADI e a Lei da Parede para o número de Reynolds 35.000.	61
4.10	Comparação do perfil de velocidade obtido pelo método ADI e a Lei da Parede para o número de Reynolds 50.000.	61
4.11	Distribuição de velocidade na entrada do tubo circular para número de Reynolds 50.000	62
4.12	Resultados analíticos de Szablewski(1952) para o desenvolvimento do escoamento turbulento em duto circular	63

4.13	Comparação do perfil adimensional de temperatura para $Re=50.000$ e $Pr=0,71$ calculado pelo método ADI e os dados experimentais e teóricos de Kirillov e Levchencko (1989)	66
4.14	Comparação do perfil adimensional de temperatura para $Re=50.000$ e $Pr=3,51$ calculado pelo método ADI e os dados experimentais e teóricos de Kirillov e Levchencko (1989)	66
4.15	Comparação do perfil adimensional de temperatura para $Re=50.00$ e $Pr=4,30$ calculado pelo método ADI e os dados experimentais e teóricos de Kirillov e Levchencko (1989)	67
4.16	Comparação do perfil adimensional de temperatura para $Re=50.000$ e $Pr=5,70$ calculado pelo método ADI e os dados experimentais e teóricos de Kirillov e Levchencko (1989)	67
4.17	Comparação do perfil adimensional de temperatura para $Re=50.000$ e $Pr=6,45$ calculado pelo método ADI e os dados experimentais e teóricos de Kirillov e Levchencko (1989)	68

1 INTRODUÇÃO

A análise termo-hidráulica de equipamentos de transferência de calor, tais como trocadores de calor e reatores nucleares, é feita através da solução das equações de balanço de massa, de quantidade de movimento e de energia. Usualmente, porém, presume-se que o escoamento é plenamente desenvolvido, o que, via de regra, não é verdadeiro, pois os comprimentos necessários para o desenvolvimento do escoamento muitas vezes não são atingidos.

Em vista disso, é de considerável interesse a determinação detalhada do desenvolvimento térmico e hidrodinâmico na região de entrada, não havendo até os dias de hoje soluções exatas para o problema da velocidade e da temperatura na entrada de tubos. A dificuldade da análise deve-se principalmente aos termos de inércia, não lineares, que aparecem nas equações de transporte de energia e quantidade de movimento.

A queda de pressão na entrada do duto é outro problema adicional e talvez seja o ponto principal do estudo hidrodinâmico na região de entrada, sendo de importância relevante em problemas térmicos.

Alguns trabalhos foram desenvolvidos nas últimas décadas visando a análise do desenvolvimento dos perfis de velocidade e temperatura em dutos. Para o escoamento em regime laminar pode-se citar o trabalho de SPARROW e LIN (1964) que apresentam um método analítico para determinar o desenvolvimento de um escoamento laminar e a

correspondente queda de pressão na região de entrada em tubos e dutos.

Diferentemente do escoamento laminar, o escoamento turbulento apresenta dificuldades adicionais em sua solução, por ser influenciado pelas condições de entrada que alteram as características de formação da camada limite hidrodinâmica durante o desenvolvimento do perfil de velocidade ou, nos problemas práticos, pela redistribuição do escoamento causada por algum acessório.

Para o estudo da região de entrada em escoamento turbulento, pode-se citar os trabalhos de **HISHIDA (1967)** que desenvolveu uma equação para a temperatura adimensional (t^+), usando a Lei da Parede para obtenção da velocidade no problema de fechamento na solução da equação da energia na forma integral. Este autor comparou sua equação com os seus dados experimentais, utilizando ar como fluido de trabalho.

NAGANO (1988) comparou os dados experimentais obtidos por **HISHIDA (1967)** com os resultados da sua modelagem matemática a qual não faz uso do número de Prandtl turbulento e a difusividade turbulenta é expressa em termos da energia cinética, da difusividade turbulenta e da variança da temperatura.

SZABLEWSKI (1951) fez o estudo analítico do escoamento turbulento plenamente desenvolvido, utilizando o comprimento de mistura de Prandtl, e a partir deste estudo, em 1952, desenvolveu expressões analíticas para o desenvolvimento do escoamento turbulento em duto circular para a faixa de número de Reynolds de 100.000 a 1.000.000. Enquanto **NIKURADSE (1932)**, em seus clássicos resultados para o duto circular, encontra um comprimento de desenvolvimento que varia de 25 a 40 diâmetros,

SZABLEWSKI (1952) encontra, para a faixa de números de Reynolds estudada, valores de 17 a 25 diâmetros.

Em se tratando de desenvolvimento térmico e hidrodinâmico por simulação numérica, pode-se citar alguns trabalhos encontrados na literatura. **PRAKASH e YE-DI LIO (1985)**, aplicam o método de volumes finitos para simular o desenvolvimento térmico e hidrodinâmico em duto circular, aletado internamente, em regime laminar. **KARAM e MÖLLER (1991)** simulam o escoamento turbulento com transferência de calor em duto circular; mais recentemente, **KARAM (1992)** simulou o desenvolvimento do perfil de temperatura em um escoamento turbulento hidrodinâmico desenvolvido num banco de tubos. As duas últimas referências, acima citadas, utilizam o método de diferenças finitas com formulação explícita, sendo que a característica de instabilidade do método limitou a aplicação desses trabalhos a poucos problemas.

É desejável, assim, que o método numérico empregado possa descrever de maneira global o desenvolvimento tanto do perfil de velocidade como de temperatura, aliando esta característica à estabilidade. Introduzido por **PEACEMAN e RACHFORD (1955)**, o método **ADI (Alternating-Direction Implicit Method)** possui estas características, o que torna sua utilização atraente para solução de problemas bidimensionais.

PEACEMAN e RACHFORD (1955) aplicam o método ADI na solução da equação da condução do calor, bidimensional, em duto retangular. Exemplos deste problema também são encontrados em **CARNAHAN et al. (1969)** e **WELTY (1969)**.

LINDEMUTH e KILLEEN (1973) e **BRILEY e McDONALD (1977)**

apresentam métodos de linearização das equações de Navier-Stokes e utilizam o método ADI como esquema auxiliar para a solução do problema. **LINDEMUTH e KILLEEN (1973)** resolveram um problema bidimensional de magneto hidrodinâmica, pelo método ADI. Problemas hidrodinâmicos são apresentados por **REITMAN e WOLFSHTEIN (1980)** e por **YASHCHIN et al. (1982)**, onde o primeiro apresenta o perfil de velocidade em escoamento turbulento em um duto quadrado, e o segundo trabalha com escoamentos em regime laminar em duto circular. Ambos apresentam boa concordância com resultados experimentais.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um algoritmo computacional para estudar o desenvolvimento hidrodinâmico em escoamentos laminares e turbulentos em dutos circulares pelo método ADI, bem como analisar o desenvolvimento do perfil de temperatura em escoamentos plenamente desenvolvidos em duto circular através desse método.

2 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

O desenvolvimento do escoamento laminar na entrada de um duto circular, a partir de um perfil uniforme, é caracterizado pela formação da camada limite hidrodinâmica, região na qual os efeitos viscosos predominam em relação aos efeitos inerciais. Os efeitos viscosos iniciam na entrada do tubo, dando origem à formação da camada limite hidrodinâmica. O escoamento passa a ser plenamente desenvolvido quando a espessura da camada limite se iguala ao raio do tubo.

O desenvolvimento da camada limite térmica num fluido aquecido ou resfriado é qualitativamente semelhante ao da camada limite hidrodinâmica. Sendo a temperatura uniforme na entrada do tubo, quando o fluido escoar ao longo do duto, a camada aquecida ou resfriada aumenta de espessura até que o calor seja transmitido para o fluido no centro do tubo. Esse processo somente se encerra quando houver equilíbrio térmico entre o fluido e as paredes, restabelecendo o problema puramente hidrodinâmico.

Comprimento de entrada hidrodinâmico e comprimento de entrada térmico são, portanto, as distâncias necessárias para que ocorra o desenvolvimento hidrodinâmico e térmico, respectivamente.

O desenvolvimento do escoamento em regime turbulento difere do escoamento laminar. O início do desenvolvimento apresenta uma região totalmente laminar, passando posteriormente por uma zona de transição, entre laminar e turbulenta e, a uma certa

distância da entrada do tubo, começa o desenvolvimento da sub-camada laminar e acima desta o escoamento turbulento propriamente dito.

O princípio físico do desenvolvimento térmico em escoamento turbulento é similar ao desenvolvimento térmico em escoamento laminar.

A região de entrada térmica e hidrodinâmica para fluidos com número de Prandtl próximo a unidade e maiores do que este (casos mais comuns), tem sua representação simplificada conforme a figura abaixo.

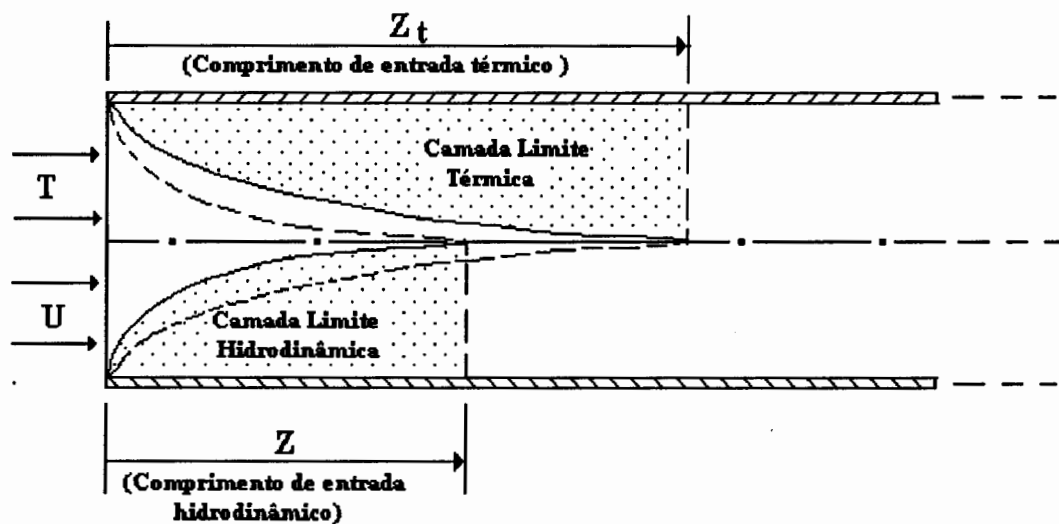


Figura 2.1 - Representação do desenvolvimento da camada limite térmica e hidrodinâmica na entrada de um tubo.

2.1 HIPÓTESES SIMPLIFICATIVAS

Visando a simplificação do problema, deve-se estabelecer algumas hipóteses iniciais, que para o problema hidrodinâmico são:

- problema bidimensional;
- escoamento incompressível;
- regime estacionário;
- fluido newtoniano;
- propriedades físicas constantes;
- ausência de forças de campo.

Para o problema térmico acrescenta-se as seguintes hipóteses:

- transferência de calor sem mudança de fase;
- troca térmica em regime de convecção forçada.

2.2 EQUAÇÕES BÁSICAS

O escoamento em dutos, sujeito às condições restritivas apresentadas na seção 2.1, é descrito pelo sistema de equações diferenciais formado pelas equações de balanço de massa (continuidade), quantidade de movimento e energia, apresentado abaixo.

CONTINUIDADE

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.1)$$

QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.2)$$

ENERGIA

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \right] = K \nabla^2 T \quad (2.3)$$

Nessas equações, \mathbf{V} é o vetor velocidade, ρ é a massa específica do fluido, μ é a viscosidade dinâmica, K é a condutividade térmica, C_p é o calor específico a pressão constante.

O método numérico utilizado na simulação do escoamento em um tubo é aplicado sobre as equações acima, utilizando-se um sistema de coordenadas cilíndricas e incluindo-

se um modelo de turbulência quando o regime for turbulento, para descrever as tensões de Reynolds que surgem nas equações.

Utilizando-se um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , com centro em $r=0$ e o eixo z na direção do escoamento principal, as equações (2.1), (2.2) e (2.3) ficam:

CONTINUIDADE

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

QUANTIDADE DE MOVIMENTO - Z

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (2.5)$$

ENERGIA

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (2.6)$$

Onde ν é a viscosidade cinemática do fluido e α a sua difusividade térmica.

Considerando a existência de simetria axial, e sendo a temperatura constante em todo o perímetro do tubo, não ocorre variação de u e T na direção angular. Sendo assim:

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.7)$$

Fazendo-se um balanço de pressões diferenciais no interior do tubo (ver apêndice

C) obtém-se:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2\mu}{R_w} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_p \quad (2.8)$$

- onde R_w é o raio do tubo, assim obtém-se as equações para o problema considerado.

CONTINUIDADE

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

QUANTIDADE DE MOVIMENTO - Z

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2\mu}{\rho R_w} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_p + v \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (2.10)$$

ENERGIA

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (2.11)$$

O campo de velocidade axial obtido deve satisfazer o balanço de massa no interior da região do escoamento. Para cada seção de área A considerada utiliza-se a equação da continuidade na forma integral:

$$m = \int_A \rho u \, dA \quad (2.12)$$

onde m é a vazão mássica do fluido na seção transversal do escoamento.

2.3 EQUAÇÕES PARA O ESCOAMENTO TURBULENTO

Para que as equações de balanço possam descrever o escoamento turbulento médio, usualmente reescreve-se as mesmas substituindo-se as velocidades, pressões e temperaturas instantâneas por suas parcelas médias e flutuantes seguindo-se a chamada hipótese de Reynolds, como descrito por SCHLICHTING (1979).

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ p &= \bar{p} + p' \\ T &= \bar{T} + T' \end{aligned} \quad (2.13)$$

As equações diferenciais resultantes, para o escoamento turbulento, possuem agora variáveis adicionais: u' , v' , T' e p' . Os termos das equações diferenciais do problema, após serem escritos em função das parcelas médias e flutuantes, são submetidos a um processo de avaliação de médias temporais, no qual os termos contendo as médias de flutuação são eliminados e os que contém as médias de produtos entre componentes flutuantes permanecem nas equações gerando um sistema com maior número de incógnitas do que equações. Os termos adicionais que surgem após esse processo são as tensões turbulentas ou tensões de Reynolds. Uma das maneiras de solucionar este problema é a utilização de modelos de turbulência, baseados na teoria do comprimento de mistura de Prandtl, e no

conceito de viscosidade aparente de Boussinesq (SCHLICHTING, 1979). Será apresentado nesta seção apenas a forma final das equações diferenciais do problema, todas as deduções são apresentadas nos apêndices A e B.

Pelo processo descrito acima obtém-se as seguintes equações:

CONTINUIDADE

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

QUANTIDADE DE MOVIMENTO - Z

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{2\mu}{\rho R_w} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right]_p + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left(\epsilon_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \quad (2.15)$$

ENERGIA

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left(\epsilon_H \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) \quad (2.16)$$

- na equação da quantidade de movimento-z (2.15) apresenta-se uma nova variável (ϵ_M) que corresponde à difusividade turbulenta. Na equação da energia a variável ϵ_H corresponde à difusividade térmica. O produto dessas variáveis pela derivada parcial da velocidade ou da temperatura em relação ao raio corresponde respectivamente a tensão de Reynolds e ao transporte turbulento de calor, originados do processo descrito acima.

2.4 MODELO DE TURBULÊNCIA

O escoamento turbulento é caracterizado por flutuações de velocidade, que dão origem a tensões adicionais denominadas tensões aparentes ou de Reynolds. Estas tensões podem ser descritas por meio do conceito de viscosidade aparente ou difusividade turbulenta (ϵ_M) (HINZE, 1975), definida para a direção radial como:

$$\epsilon_M = - \frac{\overline{u'v'}}{\frac{\partial \overline{u}}{\partial r}} \quad (2.17)$$

Uma expressão para a viscosidade de turbulência pode ser obtida diretamente da expressão de NIKURADSE (1932) para o perfil universal de velocidade do escoamento turbulento em tubos lisos (Lei da Parede), como mostrado no apêndice B, e é dada por

$$\epsilon_M = \frac{u^*}{2.5} \frac{r}{R_w} (R_w - r) \quad (2.18)$$

onde u^* é a velocidade de fricção, R_w é o raio do tubo e r é o raio local.

Considerando a existência de analogia entre a transferência de quantidade de movimento e a transferência de calor, emprega-se o conceito de difusividade térmica aparente (KNUDSEN, 1958), que descreve o transporte de calor adicional devido as flutuações de velocidade no escoamento turbulento.

Em coordenadas cilíndricas a difusividade térmica turbulenta é definida por

$$e_H = - \frac{\overline{v' T'}}{\frac{\partial \overline{T}}{\partial r}} \quad (2.19)$$

determinada a partir da analogia com a viscosidade aparente, através do número de Prandtl turbulento (ZUKAUSKAS e SLANCIAUSKAS, 1987), por

$$e_H = \frac{e_m}{Pr_t} \quad (2.20)$$

O número de Prandtl turbulento, conforme resultados experimentais de ZUKAUSKAS e SLANCIAUSKAS (1987) para o escoamento sobre uma placa plana, depende dos números de Reynolds e Prandtl do escoamento e da posição adimensional $Y^+ = (y u / \nu)$.

$$Pr_t = F_Y(y^+) F_R(Re) F_P(Pr) \quad (2.21)$$

Estes resultados, mostrados na Figura 2.2, foram ajustados pelo método dos mínimos quadrados por KARAM (1992), resultando as seguintes equações para os funcionais da equação (2.21):

$$\begin{aligned} & \text{Para } y^+ < 40 \\ & F_Y(y^+) = 0,592 + 7,532 \cdot 10^{-3} y^+ - 4,69 \cdot 10^{-5} y^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para $y^+ > 200$

$$F_Y(y^+) = 0,8 + 0,15 e^{-e^{(7,97 - 0,0241 y^+)}}$$
(2.24)

$$F_R(Re) = 0,96 + 0,2624 e^{(-0,00000232Re)}$$

$$F_p(Pr) = 1,1 - 0,116 e^{-0,0756 Pr}$$

Para $40 < y^+ < 200$

$$F_Y(y^+) = 0,8$$
(2.23)

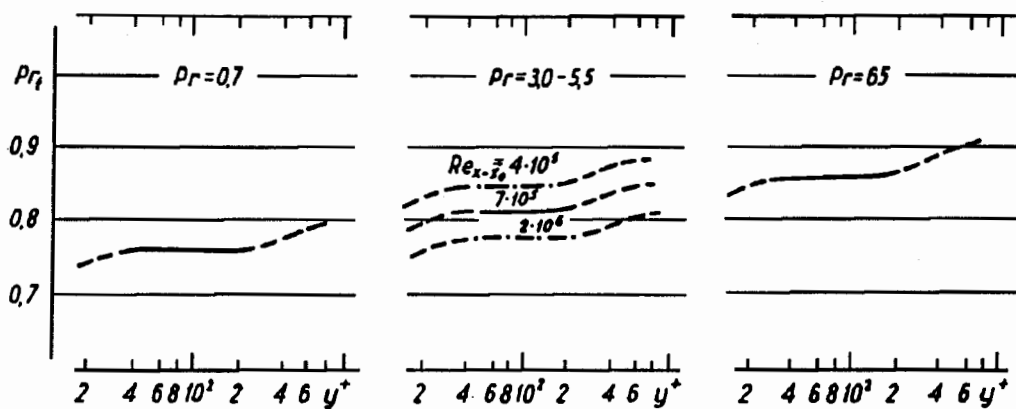
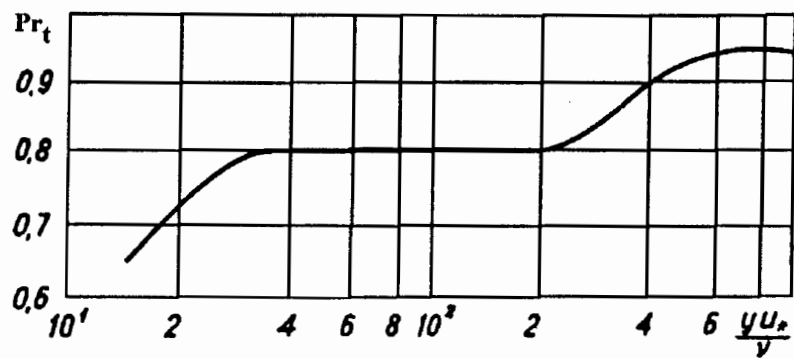


Figura 2.2 - Gráficos de Pr_t segundo Zukauskas e Slanciauskas (1987).

2.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

2.5.1 CAMPO DE VELOCIDADE

Para serem definidas as condições de contorno de velocidade, considera-se que o escoamento é uniforme na entrada do volume de controle (entrada do duto) e que se encontra plenamente desenvolvido na saída do mesmo. Além disso, deverá se ter a condição de não deslizamento na parede e velocidade máxima no centro do tubo. Assim, tem-se:

$$r = R_w \qquad u = 0 \qquad (2.25)$$

$$r = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \qquad (2.26)$$

$$z = 0 \qquad u = U \qquad (2.27)$$

$$z = Z \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (2.28)$$

A variável Z corresponde ao comprimento do volume de controle.

Adicionalmente, o valor da componente radial da velocidade, será zero na parede,

logo:

$$r = R_w \qquad v = 0 \qquad (2.29)$$

2.5.2 CAMPO DE TEMPERATURA

No problema térmico tem-se duas condições de contorno prescritas, uma na entrada do volume de controle e outra na parede do tubo. Para a saída do volume de controle e para o centro do duto considera-se a variação de temperatura igual a zero nas direções radial e axial, assim:

$$r = R_w \qquad T = T_w \qquad (2.30)$$

$$r = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad (2.31)$$

$$z = 0 \qquad T = T_i \qquad (2.32)$$

$$z = Z_T \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad (2.33)$$

Onde T_i corresponde à temperatura inicial do fluido, T_w à temperatura da parede do tubo e Z_T ao comprimento de entrada térmico.

2.6 CONDIÇÃO INICIAL

A condição inicial para solução do problema é de perfil uniforme em todo o domínio, tanto para a velocidade como para a temperatura. Esta condição é aplicada igualmente para escoamento laminar ou turbulento. Assim,

$$T = T_i \quad t = 0 \quad \forall r, \forall z \quad (2.34)$$

$$u = U \quad t = 0 \quad \forall r, \forall z \quad (2.35)$$

3 MÉTODO NUMÉRICO

Soluções numéricas das equações de Navier-Stokes podem ser obtidas através da discretização das equações diferenciais. A discretização pode ser feita por dois métodos: 1- explícito: possibilita a solução individual de cada equação, entretanto exige incrementos de tempo e espaço pequenos, devido a sua característica de instabilidade: 2 - implícito: não limita o intervalo de tempo, mas exige a solução de todo o sistema de equações algébricas simultaneamente. Para um problema bidimensional com os termos da equação discretizados por diferenças centrais e aplicados ao método implícito produz matrizes pentadiagonais, e a solução dessas matrizes pode ser prejudicada pelo seu algoritmo, pois nem sempre eles são eficientes.

No intuito de agregar a característica de simplicidade do método explícito com a estabilidade do método implícito, assegurando um erro de truncamento da ordem de h^2 , **PEACEMAN e RACHFORD (1955)** introduziram o método ADI(Alternating-Direction Implicit). Segundo seus idealizadores, o método ADI é aplicável para a solução iterativa de problemas bidimensionais. As derivadas espaciais são discretizadas por diferenças centrais com erro de truncamento da ordem de h^2 .

Em problemas estacionários a derivada temporal não tem significado físico, mas problemas deste tipo podem ser tratados como transientes, pois quando o tempo tende ao infinito a solução converge para a estacionária. A derivada temporal é discretizada por

diferenças para frente com erro de truncamento da ordem de h .

Para obtenção de erro de truncamento, da ordem de h^2 , da derivada temporal, utiliza-se o esquema de Crank-Nicholson que faz uso de um nó fictício entre um intervalo de tempo e outro. Sendo assim todas as derivadas ficam com erro de truncamento da ordem de $(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^2)$.

Será feita uma análise numérica da estabilidade do método para as condições físicas a serem estudadas. A análise da estabilidade por métodos analíticos não faz parte dos objetivos deste trabalho, mas detalhes deste tipo de análise podem ser encontrados em: **PEACEMAN e RACHFORD (1955)**, **CARNAHANM et al. (1969)**, **TRAPP e RAMSHAW (1976)**, **BONTOUX, FORESTIER e ROUX (1978)**, **BONTOUX, GILLY e ROUX (1980)**.

PEACEMAN e RACHFORD (1955) ao proporem o método ADI, apresentam o mesmo aplicado à solução da equação da condução do calor. Este tipo de problema também é abordado por **CARNAHAN et al. (1969)**. Em ambos os casos, a estabilidade do método é garantida de forma incondicional.

Análises mais detalhadas da estabilidade do método ADI para as equações de Navier-Stokes são apresentados por **TRAPP e RAMSHAW (1976)**, **BONTOUX et al. (1978)** e **BONTOUX et al. (1980)**. Este último afirma que quando o método ADI é usado para resolver as equações de Navier-Stokes em regime transiente ocorrem problemas na estabilidade.

Os trabalhos de TRAPP e RAMSHAW (1976) e BONTOUX et al. (1978) aplicam uma extensão heurística da análise de Fourier, como primeira aproximação, para determinar as condições de estabilidade na solução das equações de Navier-Stokes pelo método ADI.

3.1 DESCRIÇÃO DA MALHA

Para a solução do problema analisado é necessário discretizar a região de entrada do duto (domínio contínuo) com um conjunto ordenado de pontos, chamado de malha. O presente trabalho utiliza uma malha bidimensional, paralela ao escoamento, tendo como eixo horizontal a linha de centro do duto, e como eixo vertical o raio do duto.

Os termos que compõe as equações diferenciais discretizadas obedecem à seguinte notação:

$$\begin{aligned}u(z_i, r_j, t^l) &= u_{i,j}^l \\v(z_i, r_j, t^l) &= v_{i,j}^l \\T(z_i, r_j, t^l) &= T_{i,j}^l\end{aligned}$$

onde: $z_i = i \Delta z$ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$r_j = j \Delta r$ $j = 1, 2, 3, \dots, np$

$t^l = l \Delta t$ $l = 1, l+1/2, l+1, \dots$

A variável n corresponde ao número de Nós na direção de z e np é o número de Nós na direção do raio.

A representação de um Nó da malha espacial, com evolução no tempo, e os Nós adjacentes está apresentada na Figura 3.1 onde o termo F desta Figura pode representar o valor da velocidade axial (u), velocidade radial (v) ou a temperatura (T).

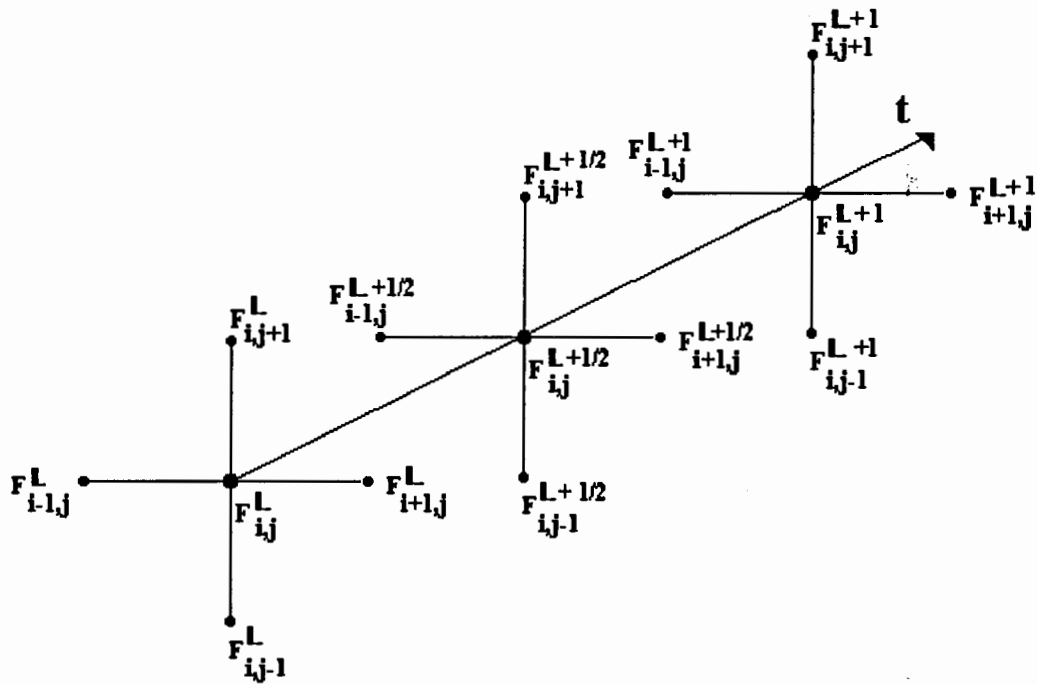


Figura 3.1 - Representação de um Nó da malha espacial, com evolução no tempo, e os Nós adjacentes.

A malha empregada para a determinação do campo de velocidade e temperatura em regime laminar tem espaçamento uniforme em ambas as direções, axial e radial.

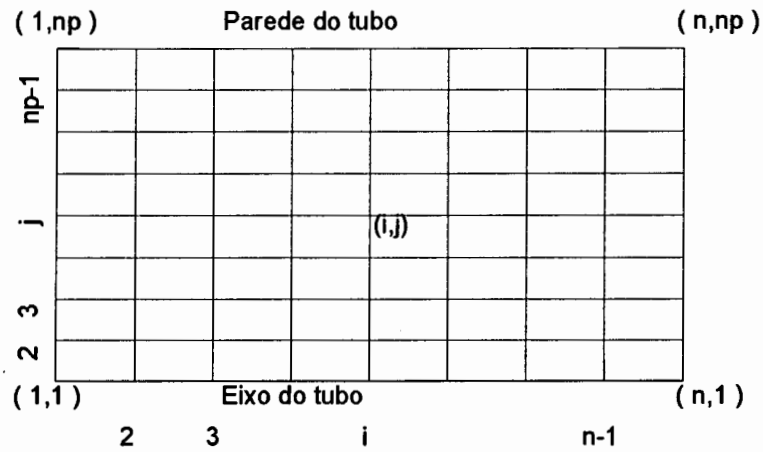


Figura 3.2 - Malha utilizada para obtenção do perfil de velocidade e temperatura em regime laminar.

Para a análise do escoamento em regime turbulento é necessária uma densidade maior de pontos na região próxima a parede do tubo, onde as variações físicas são maiores. Neste caso, utiliza-se uma malha com espaçamento logarítmico na direção radial e espaçamento uniforme na direção axial.

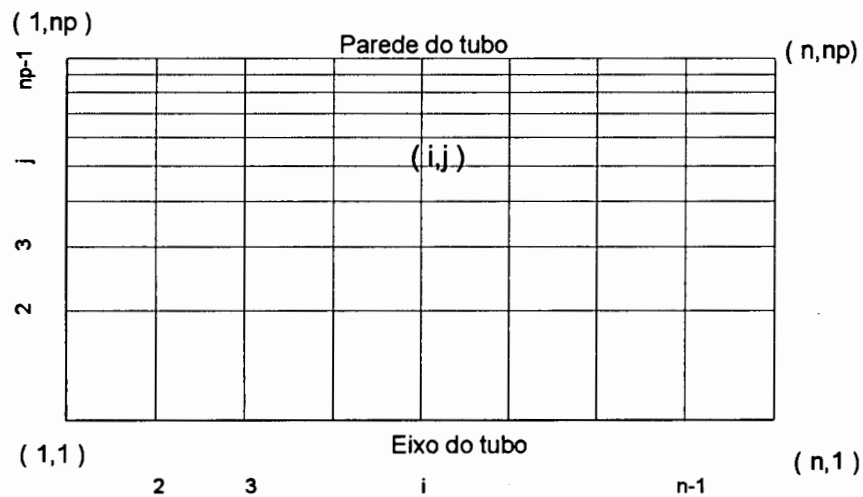


Figura 3.3 - Malha utilizada para obtenção do campo de velocidade e temperatura em regime turbulento.

3.2 EQUAÇÕES DISCRETIZADAS

Para resolver o problema térmico ou hidrodinâmico, necessita-se discretizar as equações da quantidade de movimento e energia em toda região a ser estudada. Para o problema estudado tem-se cinco condições para as quais as equações devem ser discretizadas:

- interior do domínio: Nós (i, j)

$$i = 2, 3, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad j = 2, 3, \dots, np-1$$

- início do desenvolvimento da temperatura ou velocidade: Nós (1, j)

$$j = 2, 3, \dots, np-1$$

- final do desenvolvimento da temperatura ou velocidade: Nós (n, j)

$$j = 2, 3, \dots, np-1$$

- condição de simetria no centro do tubo: nós(i, 1)

$$i = 2, 3, \dots, n-1$$

- início e fim do desenvolvimento da temperatura ou velocidade no eixo do duto circular: Nós (1,1) e (n,1), respectivamente. Apresenta-se nas seções 3.2.1 e 3.2.2 as equações discretizadas da quantidade de movimento e da energia, respectivamente.

O esquema do método ADI faz duas iterações para completar um intervalo de

Para o regime laminar os coeficientes das equações de balanço são:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 & a_1 &= 2\nu & r &= 0 \\
 a_0 &= \frac{\nu}{r_j} - v_{i,j} & a_1 &= \nu & r &> 0 \\
 \Delta P &= \frac{2\mu}{R_w} \frac{u_{i,np-1}}{(r_{np-1} - R_w)} & & & \forall r &
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

No regime turbulento acrescenta-se a difusividade turbulenta no termo a_1 e sua derivada ao termo a_0 .

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 & a_1 &= 2\nu + e_M & r &= 0 \\
 a_0 &= \frac{\nu}{r_j} - v_{i,j} + \frac{\partial e_M}{\partial r_j} & a_1 &= \nu + e_M & r &> 0 \\
 \Delta P &= \frac{2\mu}{R_w} \frac{u_{i,np-1}}{(r_{np-1} - R_w)} & & & \forall r &
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

- Nós (1,j): $i = 1$ $j = 2, 3, \dots, np-1$

Como já foi dito anteriormente, a condição inicial para o desenvolvimento do campo de velocidade é de perfil uniforme; portanto, para os Nós (1,j) o termo correspondente aos Nós (i-1,j) na discretização centralizada das equações da quantidade de movimento, permanece constante durante todo o processo de cálculo.

$$\begin{aligned} \frac{u_{1,j}^{i+\frac{1}{2}} - u_{1,j}^i}{\Delta t / 2} = & -u_{1,j} \left(\frac{u_{2,j}^{i+\frac{1}{2}} - U}{2\Delta z} \right) + v \left(\frac{u_{2,j}^{i+\frac{1}{2}} - 2u_{1,j}^{i+\frac{1}{2}} + U}{\Delta z^2} \right) \\ & + a_0 \left(\frac{u_{1,j+1}^i - u_{1,j-1}^i}{2\Delta r_j} \right) + a_1 \left(\frac{u_{1,j+1}^i - 2u_{1,j}^i + u_{1,j-1}^i}{\Delta r_j^2} \right) + \Delta P \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{1,j}^{i+1} - u_{1,j}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} = & -u_{1,j} \left(\frac{u_{2,j}^{i+\frac{1}{2}} - U}{2\Delta z} \right) + v \left(\frac{u_{2,j}^{i+\frac{1}{2}} - 2u_{1,j}^{i+\frac{1}{2}} + U}{\Delta z^2} \right) \\ & + a_0 \left(\frac{u_{1,j+1}^{i+1} - u_{1,j-1}^{i+1}}{2\Delta r_j} \right) + a_1 \left(\frac{u_{1,j+1}^{i+1} - 2u_{1,j}^{i+1} + u_{1,j-1}^{i+1}}{\Delta r_j^2} \right) + \Delta P \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde U é a velocidade média.

● Nós (n,j) : $i = n$ $j = 2, 3, \dots, np-1$

Estes Nós correspondem ao término do desenvolvimento do perfil de velocidade; portanto, a velocidade dos Nós $(n+1,j)$ é igual a velocidade dos Nós (n,j) , sendo assim, a derivada parcial de segunda ordem, para os Nós (n,j) , fica discretizada na forma:

$$\frac{u_{n+1,j}^i - 2u_{n,j}^i + u_{n-1,j}^i}{\Delta z^2} = \frac{u_{n-1,j}^i - u_{n,j}^i}{\Delta z^2} \quad (3.7)$$

resultando na seguinte discretização da equação da quantidade de movimento

$$\frac{u_{n,j}^{i+\frac{1}{2}} - u_{n,j}^i}{\Delta t / 2} = v \left(\frac{u_{n-1,j}^{i+\frac{1}{2}} - u_{n,j}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a0 \left(\frac{u_{n,j+1}^i - u_{n,j-1}^i}{2\Delta r_j} \right) + a1 \left(\frac{u_{n,j+1}^i - 2u_{n,j}^i + u_{n,j-1}^i}{\Delta r_j^2} \right) + \Delta P \quad (3.8)$$

$$\frac{u_{n,j}^{i+1} - u_{n,j}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} = v \left(\frac{u_{n-1,j}^{i+\frac{1}{2}} - u_{n,j}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a0 \left(\frac{u_{n,j+1}^{i+1} - u_{n,j-1}^{i+1}}{2\Delta r_j} \right) + a1 \left(\frac{u_{n,j+1}^{i+1} - 2u_{n,j}^{i+1} + u_{n,j-1}^{i+1}}{\Delta r_j^2} \right) + \Delta P \quad (3.9)$$

• Nós (i,1): $i = 2, 3, \dots, n-1$ $j = 1$

Estes Nós correspondem ao eixo do tubo o qual conduz a uma singularidade, que é evitada pela regra de L'Hospital através da seguinte substituição:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

Além disso, considera-se a simetria do perfil de velocidade em relação ao eixo do duto; assim pode-se dizer que, para $r=0$, o valor da velocidade dos Nós (i,j+1) é igual ao valor da velocidade dos Nós (i,j-1), logo, a derivada parcial de segunda ordem fica assim discretizada:

$$\frac{u_{i,j+1}^i - 2u_{i,j}^i + u_{i,j-1}^i}{\Delta r^2} = \frac{2u_{i,j+1}^i - 2u_{i,j}^i}{\Delta r^2} \quad (3.10)$$

resultando a equação da quantidade de movimento discretizada na forma:

$$\frac{u_{i,1}^{i+\frac{1}{2}} - u_{i,1}^i}{\Delta t / 2} = -u_{i,1} \left(\frac{u_{i+1,1}^{i+\frac{1}{2}} - u_{i-1,1}^{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right) + v \left(\frac{u_{i+1,1}^{i+\frac{1}{2}} - 2u_{i,1}^{i+\frac{1}{2}} + u_{i-1,1}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a1 \left(\frac{2u_{i,2}^i - 2u_{i,1}^i}{\Delta r_j^2} \right) + \Delta P \quad (3.11)$$

$$\frac{u_{i,1}^{i+1} - u_{i,1}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} = -u_{i,1} \left(\frac{u_{i+1,1}^{i+\frac{1}{2}} - u_{i-1,1}^{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right) + v \left(\frac{u_{i+1,1}^{i+\frac{1}{2}} - 2u_{i,1}^{i+\frac{1}{2}} + u_{i-1,1}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a1 \left(\frac{2u_{i,2}^{i+1} - 2u_{i,1}^{i+1}}{\Delta r_j^2} \right) + \Delta P \quad (3.12)$$

● Nó (1,1): $i = 1$ $j = 1$

Neste Nó leva-se simultaneamente em consideração as mesmas suposições feitas para os Nós (1,j) e (i,1).

$$\frac{u_{1,1}^{i+\frac{1}{2}} - u_{1,1}^i}{\Delta t / 2} = -u_{1,1} \left(\frac{u_{2,1}^{i+\frac{1}{2}} - U}{2\Delta z} \right) + v \left(\frac{u_{2,1}^{i+\frac{1}{2}} - 2u_{1,1}^{i+\frac{1}{2}} + U}{\Delta z^2} \right) + a1 \left(\frac{2u_{1,2}^i - 2u_{1,1}^i}{\Delta r_j^2} \right) + \Delta P \quad (3.13)$$

$$\frac{u_{1,1}^{i+1} - u_{1,1}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} = -u_{1,1} \left(\frac{u_{2,1}^{i+\frac{1}{2}} - U}{2\Delta z} \right) + v \left(\frac{u_{2,1}^{i+\frac{1}{2}} - 2u_{1,1}^{i+\frac{1}{2}} + U}{\Delta z^2} \right) + a1 \left(\frac{2u_{1,2}^{i+1} - 2u_{1,1}^{i+1}}{\Delta r_j^2} \right) + \Delta P \quad (3.14)$$

- Nó (n,1): $i = n$ $j = 1$

O Nó (n,1) reúne as condições dos Nós (n,j) e (i,1)

$$\frac{u_{n,1}^{i+\frac{1}{2}} - u_{n,1}^i}{\Delta t / 2} = v \left(\frac{u_{n+1,1}^{i+\frac{1}{2}} - 2u_{n,1}^{i+\frac{1}{2}} + u_{n-1,1}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a1 \left(\frac{2u_{n,2}^i - 2u_{n,1}^i}{\Delta r_j^2} \right) + \Delta P \quad (3.15)$$

$$\frac{u_{n,1}^{i+1} - u_{n,1}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} = v \left(\frac{u_{n+1,1}^{i+\frac{1}{2}} - 2u_{n,1}^{i+\frac{1}{2}} + u_{n-1,1}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a1 \left(\frac{2u_{n,2}^{i+1} - 2u_{n,1}^{i+1}}{\Delta r_j^2} \right) + \Delta P \quad (3.16)$$

3.2.2 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA

O mesmo procedimento utilizado na discretização da equação da quantidade de movimento é usado para discretizar a equação da energia; desta forma não serão repetidos os comentários apresentados na seção anterior.

- Nós (i,j): $i = 2,3, \dots, n-1$ $j = 2,3, \dots, np-2$

$$\frac{T_{i,j}^{i+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^i}{\Delta t / 2} = -u_{i,j} \left(\frac{T_{i+1,j}^{i+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right) + \alpha \left(\frac{T_{i+1,j}^{i+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{i+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a0 \left(\frac{T_{i,j+1}^i - T_{i,j-1}^i}{2\Delta r_j} \right) + a1 \left(\frac{T_{i,j+1}^i - 2T_{i,j}^i + T_{i,j-1}^i}{\Delta r_j^2} \right) \quad (3.17)$$

$$\frac{T_{i,j}^{l+1} - T_{i,j}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} = -u_{i,j} \left(\frac{T_{i+1,j}^{l+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{l+\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right) + \alpha \left(\frac{T_{i+1,j}^{l+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{l+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) \\ + a_0 \left(\frac{T_{i,j+1}^{l+1} - T_{i,j-1}^{l+1}}{2\Delta r_j} \right) + a_1 \left(\frac{T_{i,j+1}^{l+1} - 2T_{i,j}^{l+1} + T_{i,j-1}^{l+1}}{\Delta r_j^2} \right) \quad (3.18)$$

O balanço de energia para o escoamento laminar utilizará os seguintes valores para os coeficientes **a0** e **a1**:

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 2\alpha \quad r=0 \\ a_0 = \frac{\alpha}{r_j} - v_{i,j} \quad a_1 = \alpha \quad r>0 \quad (3.19)$$

Para a equação da energia em regime turbulento, acrescenta-se a difusividade térmica ao termo **a1** e sua derivada no termo **a0**.

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 2\alpha + e_H \quad r=0 \\ a_0 = \frac{\alpha}{r_j} - v_{i,j} + \frac{\partial e_H}{\partial r_j} \quad a_1 = \alpha + e_H \quad r>0 \quad (3.20)$$

● Nós (1,j): $i = 1$ $j = 2, 3, \dots, np-1$

$$\frac{T_{1,j}^{l+\frac{1}{2}} - T_{1,j}^l}{\Delta t / 2} = -u_{1,j} \left(\frac{T_{2,j}^{l+\frac{1}{2}} - T_i^l}{2\Delta z} \right) + \alpha \left(\frac{T_{2,j}^{l+\frac{1}{2}} - 2T_{1,j}^{l+\frac{1}{2}} + T_i^l}{\Delta z^2} \right) \\ + a_0 \left(\frac{T_{1,j+1}^l - T_{1,j-1}^l}{2\Delta r_j} \right) + a_1 \left(\frac{T_{1,j+1}^l - 2T_{1,j}^l + T_{1,j-1}^l}{\Delta r_j^2} \right) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{1,j}^{l+1} - T_{1,j}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} &= -u_{1,j} \left(\frac{T_{2,j}^{l+\frac{1}{2}} - T_{1,j}^l}{2\Delta z} \right) + \alpha \left(\frac{T_{2,j}^{l+\frac{1}{2}} - 2T_{1,j}^{l+\frac{1}{2}} + T_{1,j}^l}{\Delta z^2} \right) \\ &+ a0 \left(\frac{T_{1,j+1}^{l+1} - T_{1,j-1}^{l+1}}{2\Delta r_j} \right) + a1 \left(\frac{T_{1,j+1}^{l+1} - 2T_{1,j}^{l+1} + T_{1,j-1}^{l+1}}{\Delta r_j^2} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

• Nós (n,j): $i = n$ $j = 2, 3, \dots, np-1$

$$\begin{aligned} \frac{T_{n,j}^{l+\frac{1}{2}} - T_{n,j}^l}{\Delta t / 2} &= \alpha \left(\frac{T_{n-1,j}^{l+\frac{1}{2}} - T_{n,j}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a0 \left(\frac{T_{n,j+1}^l - T_{n,j-1}^l}{2\Delta r_j} \right) \\ &a1 \left(\frac{T_{n,j+1}^l - 2T_{n,j}^l + T_{n,j-1}^l}{\Delta r_j^2} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{n,j}^{l+1} - T_{n,j}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} &= \alpha \left(\frac{T_{n-1,j}^{l+\frac{1}{2}} - T_{n,j}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a0 \left(\frac{T_{n,j+1}^{l+1} - T_{n,j-1}^{l+1}}{2\Delta r_j} \right) \\ &a1 \left(\frac{T_{n,j+1}^{l+1} - 2T_{n,j}^{l+1} + T_{n,j-1}^{l+1}}{\Delta r_j^2} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

• Nós (i,1): $i = 2, 3, \dots, n-1$ $j = 1$

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,1}^{l+\frac{1}{2}} - T_{i,1}^l}{\Delta t / 2} &= -u_{i,j} \left(\frac{T_{i+1,1}^{l+\frac{1}{2}} - T_{i-1,1}^{l+\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right) + \alpha \left(\frac{T_{i+1,1}^{l+\frac{1}{2}} - 2T_{i,1}^{l+\frac{1}{2}} + T_{i-1,1}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) \\ &a1 \left(\frac{2T_{i,2}^l - 2T_{i,1}^l}{\Delta r_j^2} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\frac{T_{i,1}^{l+1} - T_{i,1}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} = -u_{i,1} \left(\frac{T_{i+1,1}^{l+\frac{1}{2}} - T_{i-1,1}^{l+\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right) + \alpha \left(\frac{T_{i+1,1}^{l+\frac{1}{2}} - 2T_{i,1}^{l+\frac{1}{2}} + T_{i-1,1}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a1 \left(\frac{2T_{i,2}^{l+1} - 2T_{i,1}^{l+1}}{\Delta r_j^2} \right) \quad (3.26)$$

• Nó (1,1): $i = 1$ $j = 1$

$$\frac{T_{1,1}^{l+\frac{1}{2}} - T_{1,1}^l}{\Delta t / 2} = -u_{1,1} \left(\frac{T_{2,1}^{l+\frac{1}{2}} - T_{1,1}^l}{2\Delta z} \right) + \alpha \left(\frac{T_{2,1}^{l+\frac{1}{2}} - 2T_{1,1}^{l+\frac{1}{2}} + T_{1,1}^l}{\Delta z^2} \right) + a1 \left(\frac{2T_{1,2}^l - 2T_{1,1}^l}{\Delta r_j^2} \right) \quad (3.27)$$

$$\frac{T_{1,1}^{l+1} - T_{1,1}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} = -u_{1,1} \left(\frac{T_{2,1}^{l+\frac{1}{2}} - T_{1,1}^l}{2\Delta z} \right) + \alpha \left(\frac{T_{2,1}^{l+\frac{1}{2}} - 2T_{1,1}^{l+\frac{1}{2}} + T_{1,1}^l}{\Delta z^2} \right) + a1 \left(\frac{2T_{1,2}^{l+1} - 2T_{1,1}^{l+1}}{\Delta r_j^2} \right) \quad (3.28)$$

• Nó (n,1): $i = n$ $j = 1$

$$\frac{T_{n,1}^{l+\frac{1}{2}} - T_{n,1}^l}{\Delta t / 2} = \alpha \left(\frac{T_{n-1,1}^{l+\frac{1}{2}} - T_{n,1}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a1 \left(\frac{2T_{n,2}^l - 2T_{n,1}^l}{\Delta r_j^2} \right) \quad (3.29)$$

$$\frac{T_{n,1}^{l+1} - T_{n,1}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} = \alpha \left(\frac{T_{n-1,1}^{l+\frac{1}{2}} - T_{n,1}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right) + a_1 \left(\frac{2T_{n,2}^{l+1} - 2T_{n,1}^{l+1}}{\Delta r_j^2} \right) \quad (3.30)$$

3.3 TESTE DE CONVERGÊNCIA

Para verificar se o perfil de velocidade ou temperatura atingiu o regime permanente, procede-se da seguinte maneira:

- após cada iteração, ou seja, depois de cada segunda metade do intervalo de tempo, percorre-se todo o domínio e, em cada Nó, calcula-se a diferença entre a iteração atual e a anterior. O máximo valor encontrado deve ser menor do que o erro admissível.

$$\text{Max} |u_{i,j}^l - u_{i,j}^{l+1}| < \varepsilon \quad , \quad \text{Max} |T_{i,j}^l - T_{i,j}^{l+1}| < \varepsilon \quad (3.31)$$

Onde $u_{i,j}$ e $T_{i,j}$ são os valores da velocidade e temperatura na iteração anterior, respectivamente. O presente trabalho considera que o perfil de velocidade convergiu quando o erro for menor que 10^{-4} e aceita-se a convergência do perfil de temperatura quando o erro for menor que 10^{-2} .

3.4 ROTEIRO DE CÁLCULO

Considera-se as propriedades físicas do fluido constantes e que a troca térmica se processa apenas por convecção forçada, logo, pode-se determinar a distribuição de velocidade independentemente da distribuição de temperatura. Para isto, considera-se que a distribuição de velocidades do escoamento principal não é afetada pelas forças de empuxo devido à diferença de temperatura entre o fluido e a parede do tubo. Em termos da descrição analítica do problema, isto significa que o fator responsável pela força de empuxo nas equações de quantidade de movimento é desprezado. Assim, apenas os termos viscosos das equações de quantidade de movimento poderiam ser afetados por mudanças na distribuição de temperatura, uma vez que contêm a viscosidade cinemática. Entretanto, uma vez que as propriedades do fluido são consideradas constantes, e calculadas na temperatura média entre a parede do tubo e a temperatura inicial do fluido, a viscosidade cinemática não sofre correções em função das mudanças ocorridas na distribuição de temperaturas. Por essa razão, o problema é resolvido em duas etapas: na primeira são determinados os valores de u e v , fazendo uso das equações da quantidade de movimento e da continuidade, e na segunda são utilizados valores prescritos de velocidade para obter o campo de temperatura através da equação da energia. O fluxograma a seguir descreve o esquema numérico.

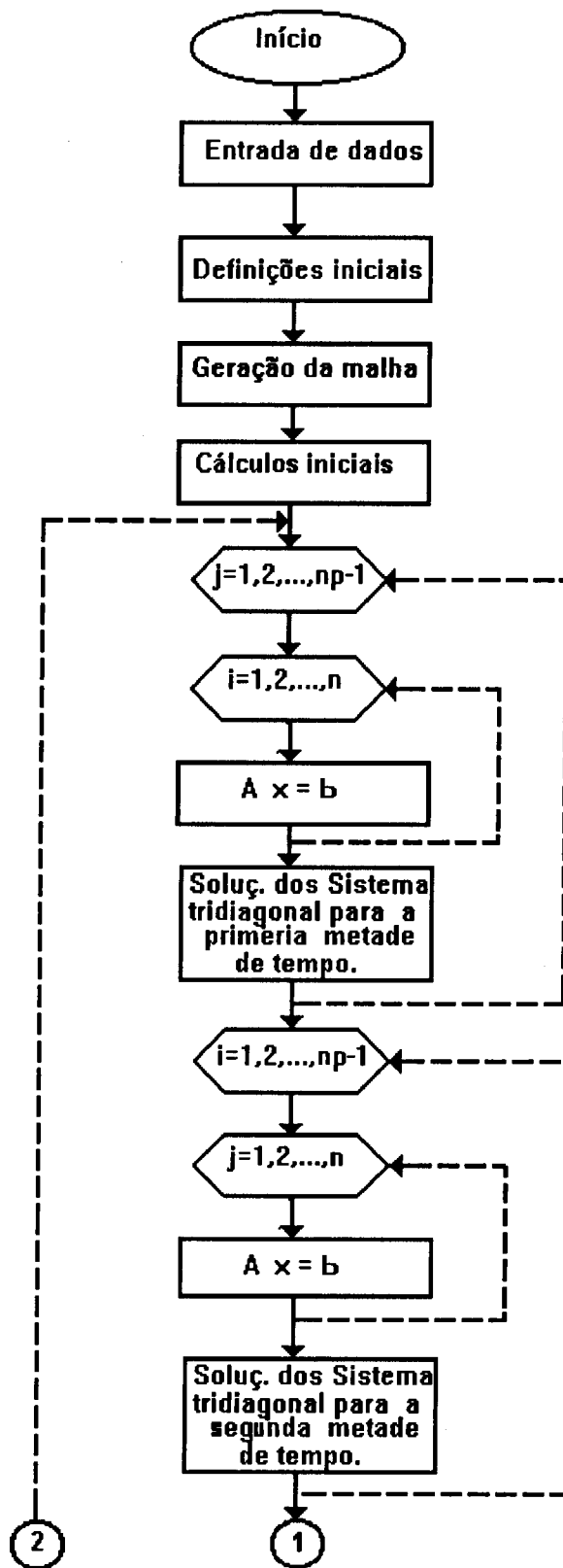


Fig. 3.4 - Fluxograma de cálculo.

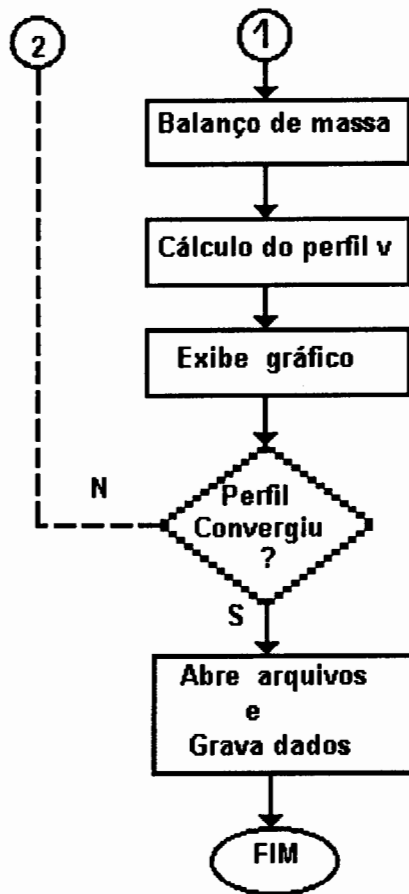


Fig. 3.5 Fluxograma de cálculo. Continuação.

3.4.1 PARÂMETROS INICIAIS

Para iniciar a aplicação do método numérico, necessita-se realizar alguns cálculos preliminares a fim de estabelecer valores iniciais para algumas variáveis. Estes cálculos não serão mais repetidos no decorrer da execução do programa, destinando-se apenas à determinação de condições iniciais para a solução numérica. Estas variáveis são calculadas a partir dos dados de entrada via teclado, os quais são:

- raio do tubo;
- tipo de fluido: água ou ar
- temperatura inicial do fluido;
- temperatura da parede do duto circular;
- número de Reynolds;
- número de Nós para a direção radial;
- número de Nós para a direção axial;

Tanto para o escoamento em regime laminar, bem como para o regime turbulento a seqüência dos cálculos iniciais é a seguinte:

- determinação da temperatura média

$$T_m = \frac{(T_i + T_w)}{2} \quad (3.32)$$

- determinação das propriedades físicas, em função da temperatura média, via polinômios.

- velocidade média

$$U = \frac{Re \nu}{D} \quad (3.33)$$

- vazão mássica

$$m = U \rho A \quad (3.34)$$

Para obtenção do campo de velocidade e temperatura em regime turbulento utiliza-se um modelo de turbulência, mas este só é utilizado acima da subcamada laminar. Na subcamada laminar utiliza-se as equações de quantidade de movimento e energia sem os termos relativos às tensões de Reynolds.

A subcamada laminar vai da parede do tubo até uma distância equivalente a posição adimensional $Y^+ = 5$. Sendo assim é necessário saber sua localização física, obtida a partir de cálculos adicionais para o escoamento em regime turbulento. A posição adimensional Y^+ é dada por:

$$Y^+ = \frac{y u^*}{\nu} \quad (3.35)$$

Onde $Y = R_w - r$ e u^* é a velocidade de fricção.

Para determinação de u^* , calcula-se inicialmente o fator de atrito, utilizando a equação (3.36) obtida por MAUBACH (1970), calculada por iteração linear considerando como limite uma variação máxima de 0,001%.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0351 \log(Re\sqrt{f}) - 0,989 \quad (3.36)$$

A seguir calcula-se a tensão inicial de cisalhamento na parede, dada por:

$$\tau_w = f \rho \frac{U^2}{8} \quad (3.37)$$

obtendo-se a velocidade de fricção

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.38)$$

3.4.2 CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES

Esta etapa compreende a solução da equação da conservação da quantidade de movimento e da continuidade acopladas. Inicialmente calcula-se o valor da componente axial da velocidade (u) através das equações de balanço de quantidade de movimento na forma diferencial mostradas no item 3.2.1 e de massa na forma integral, equação (2.12). Após determina-se o valor da componente radial da velocidade (v) pela equação da continuidade na forma diferencial, equação (2.9).

$$A(n) = -v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \quad ; \quad B(n) = 2 + v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \quad (3.41)$$

Para a solução da equação da quantidade de movimento, para a primeira metade do intervalo de tempo, o termo independente "b" varia conforme as equações (3.42)-(3.47), listadas a seguir.

● Para $j = 1$

$$b(1) = -aU + 2 \left(1 - aI \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) u_{1,1}^1 + 2aI \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} u_{1,2}^1 + \Delta P \quad (3.42)$$

$$b(i) = 2 \left(1 - aI \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) u_{i,1}^1 + 2aI \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} u_{i,2}^1 + \Delta P \quad (3.43)$$

$$b(n) = 2 \left(1 - aI \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) u_{n,1}^1 + 2aI \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} u_{n,2}^1 + \Delta P \quad (3.44)$$

● Para $j > 1$

$$b(1) = -aU + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{aI}{\Delta r_j} - \frac{a0}{2} \right) u_{1,j-1}^1 + 2 \left(1 - aI \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) u_{1,j}^1 + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a0}{2} + \frac{aI}{\Delta r_j} \right) u_{1,j+1}^1 + \Delta P \quad (3.45)$$

$$b(i) = \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a1}{\Delta r_j} - \frac{a0}{2} \right) u_{i,j-1}^1 + 2 \left(1 - a1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) u_{i,j}^1 + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a0}{2} + \frac{a1}{\Delta r_j} \right) u_{i,j+1}^1 + \Delta P \quad (3.46)$$

$$b(n) = \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a1}{\Delta r_j} - \frac{a0}{2} \right) u_{n,j-1}^1 + 2 \left(1 - a1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) u_{n,j}^1 + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a0}{2} + \frac{a1}{\Delta r_j} \right) u_{n,j+1}^1 + \Delta P \quad (3.47)$$

As equações (3.2), (3.6), (3.9), (3.12), (3.14) e (3.16) formam o sistema de equações para a solução do problema hidrodinâmico na segunda metade do intervalo de tempo, o qual é apresentado abaixo.

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 \\ A_2 & b_2 & C_2 \\ & & A_i & B_i & C_i \\ & & & & A_{np-2} & B_{np-2} & C_{np-2} \\ & & & & & A_{np-1} & B_{np-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ u_{i,j} \\ u_{i,np-2} \\ u_{i,np-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_i \\ b_{np-2} \\ b_{np-1} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

onde:

$$A(j) = \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a0}{2} - \frac{a1}{\Delta r_j} \right) ; B(j) = 2 \left(1 + a1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) ; C(j) = -\frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a0}{2} + \frac{a1}{\Delta r_j} \right) \quad (3.49)$$

$$B(1) = 2 \left(1 + a1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) ; C(1) = -a1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \quad (3.50)$$

Para a segunda metade do intervalo o termo, o termo independente varia conforme as equações (3.51) - (3.56).

• Para $i=1$:

$$b(1) = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{ua_{1,j}}{2} + \frac{v}{\Delta z} \right) U + 2 \left(1 - v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) u_{1,1}^{i+1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{v}{\Delta z} - \frac{ua_{1,j}}{2} \right) u_{2,1}^{i+1/2} + \Delta P \quad (3.51)$$

$$b(j) = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{ua_{1,j}}{2} + \frac{v}{\Delta z} \right) U + 2 \left(1 - v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) u_{1,j}^{i+1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{v}{\Delta z} - \frac{ua_{1,j}}{2} \right) u_{2,j}^{i+1/2} + \Delta P \quad (3.52)$$

• Para $1 < i < n$

$$b(1) = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{ua_{1,j}}{2} + \frac{v}{\Delta z} \right) u_{i-1,1}^{i+1/2} + 2 \left(1 - v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) u_{i,1}^{i+1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{v}{\Delta z} - \frac{ua_{1,j}}{2} \right) u_{i+1,1}^{i+1/2} + \Delta P \quad (3.53)$$

$$b(j) = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{ua_{1,j}}{2} + \frac{v}{\Delta z} \right) u_{i-1,j}^{i+1/2} + 2 \left(1 - v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) u_{i,j}^{i+1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{v}{\Delta z} - \frac{ua_{1,j}}{2} \right) u_{i+1,j}^{i+1/2} + \Delta P \quad (3.54)$$

• Para $i=n$

$$b(1) = 2v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} u_{n-1,1}^{i+1/2} + 2 \left(1 - v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) u_{n,1}^{i+1/2} + \Delta P \quad (3.55)$$

$$b(j) = 2v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} u_{n-1,j}^{i+1/2} + 2 \left(1 - v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) u_{n,j}^{i+1/2} + \Delta P \quad (3.56)$$

O sistema de equações é resolvido pelo método de eliminação de Gauss apresentado por CARNAHAN (1969).

3.4.2.2 BALANÇO DE MASSA

O balanço de massa é aplicado de duas maneiras, na forma integral equação (2.12) e na forma diferencial equação (2.9). O perfil de velocidades obtido por meio da solução da equação de conservação da quantidade de movimento deve satisfazer a equação de conservação de massa macroscópica que é o balanço de massa na forma integral.

Inicialmente calcula-se a vazão mássica utilizando-se a equação (2.12) por uma integração numérica pelo método dos trapézios. Posteriormente normaliza-se o perfil de velocidades axial, considerando-se que a vazão mássica deve permanecer constante ao longo do escoamento; este processo iterativo é repetido até que a variação no cálculo da vazão mássica seja menor que 10^{-3} .

Observando-se a convergência no cálculo da velocidade axial, emprega-se a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas (2.9), para calcular o campo de velocidades radiais.

3.4.3 TERMOS NÃO LINEARES

BONTOUX et al. (1978) afirmam que os termos não lineares, u e v , devem ser tratados como a média aritmética entre a iteração atual e a iteração anterior. Posteriormente, **BONTOUX et al. (1980)** afirmam que estes termos devem ser tratados como a média entre os 4 pontos vizinhos mais o ponto em questão. Este programa computacional foi testado pelas duas propostas acima, não sendo verificada nenhuma diferença de resultados. Por esse motivo optou-se por adotar a média entre a iteração atual e a iteração anterior, para obter os termos não lineares, visando reduzir o tempo computacional.

$$u_{i,j}^{i+1} = \frac{1}{2}(u_{1,j}^{i+1} + u_{i,j}^{i+1}) \quad (3.59)$$

$$v_{i,j}^{i+1} = \frac{1}{2}(v_{1,j}^{i+1} + v_{i,j}^{i+1}) \quad (3.60)$$

3.4.4 CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA

O problema térmico é resolvido de forma desacoplada com o problema hidrodinâmico nos dois regimes de escoamento considerados, laminar e turbulento.

Para resolver o problema térmico supõe-se que o campo de velocidade já esteja desenvolvido. Os valores da componente axial de velocidade, presentes na equação da

● Para $j=1$

$$b(1) = -A_1 T_1 + 2 \left(1 - a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) T_{1,1}^1 + 2 a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} T_{1,2}^1 \quad (3.64)$$

$$b(i) = 2 \left(1 - a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) T_{i,1}^1 + 2 a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} T_{i,2}^1 \quad (3.65)$$

$$b(n) = 2 \left(1 - a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) T_{n,1}^1 + 2 a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} T_{n,2}^1 \quad (3.66)$$

● Para $j = 2, 3, \dots, np-1$

$$b(1) = -A_1 T_1 + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a_1}{\Delta r_j} - \frac{a_0}{2} \right) T_{1,j-1}^1 + 2 \left(1 - a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) T_{1,j}^1 + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{\Delta r_j} \right) T_{1,j+1}^1 \quad (3.67)$$

$$b(i) = \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a_1}{\Delta r_j} - \frac{a_0}{2} \right) T_{i,j-1}^1 + 2 \left(1 - a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) T_{i,j}^1 + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{\Delta r_j} \right) T_{i,j+1}^1 \quad (3.68)$$

$$b(n) = \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a_1}{\Delta r_j} - \frac{a_0}{2} \right) T_{n,j-1}^1 + 2 \left(1 - a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) T_{n,j}^1 + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{\Delta r_j} \right) T_{n,j+1}^1 \quad (3.69)$$

As equações (3.18), (3.22), (3.24), (3.26), (3.28) e (3.30) formam o sistema de equações para a solução do problema térmico na segunda metade do intervalo de tempo o qual é apresentado a seguir.

$$\begin{bmatrix}
B_1 & C_1 \\
A_2 & b_2 & C_2 \\
& A_i & B_i & C_i \\
& & & A_{np-2} & B_{np-2} & C_{np-2} \\
& & & & A_{np-1} & B_{np-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
T_{i,1} \\
T_{i,2} \\
T_{i,j} \\
T_{i,np-2} \\
T_{i,np-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\
b_2 \\
b_i \\
b_{np-2} \\
b_{np-1}
\end{bmatrix}
\quad (3.70)$$

onde:

$$A(j) = \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a_0}{2} - \frac{a_1}{\Delta r_j} \right) ; B(j) = 2 \left(1 + a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) ; C(j) = -\frac{\Delta t}{\Delta r_j} \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{\Delta r_j} \right) \quad (3.71)$$

$$B(1) = 2 \left(1 + a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \right) ; C(1) = -a_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j^2} \quad (3.72)$$

O termo independente para a segunda metade do intervalo de tempo varia conforme as equações (3.73)-(3.79).

● Para $i=1$

$$b(1) = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{u_{1,j}}{2} + \frac{\alpha}{\Delta z} \right) T_{i,1} + 2 \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) T_{1,1}^{i+1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{\alpha}{\Delta z} - \frac{u_{1,j}}{2} \right) T_{2,1}^{i+1/2} \quad (3.73)$$

$$b(j) = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{u_{1,j}}{2} + \frac{\alpha}{\Delta z} \right) T_{i,j} + 2 \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) T_{1,j}^{i+1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{\alpha}{\Delta z} - \frac{u_{1,j}}{2} \right) T_{2,j}^{i+1/2} \quad (3.74)$$

● Para $i=2,3,\dots,n-1$

$$b(1) = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{\alpha}{\Delta z} \right) T_{i-1,1}^{i+1/2} + 2 \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) T_{i,1}^{i+1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{\alpha}{\Delta z} - \frac{u_{i,j}}{2} \right) T_{i+1,1}^{i+1/2} \quad (3.75)$$

$$b(j) = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{\alpha}{\Delta z} \right) T_{i-1,j}^{i+1/2} + 2 \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) T_{i,j}^{i+1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\frac{\alpha}{\Delta z} - \frac{u_{i,j}}{2} \right) T_{i+1,j}^{i+1/2} \quad (3.76)$$

● Para $i=n$

$$b(1) = 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{n-1,1}^{i+1/2} + 2 \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) T_{n,1}^{i+1/2} \quad (3.77)$$

$$b(j) = 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{n-1,j}^{i+1/2} + 2 \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) T_{n,j}^{i+1/2} \quad (3.78)$$

● Para $j=np-1$

$$b(np-1) = b(np-2) - C_{np-1} T_w \quad (3.79)$$

4 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos na simulação de escoamentos na região de entrada de duto circular em regime laminar e em regime turbulento, bem como a da transferência de calor nos dois regimes de escoamentos estudados.

Para cada caso estudado variou-se sistematicamente a malha espacial e temporal visando determinar as condições de estabilidade do método numérico para a solução do problema. Com este propósito, adotou-se o seguinte procedimento:

- 1 - a partir de uma determinada malha espacial e um determinado valor de intervalo de tempo (Δt) passou-se a:
 - 1.a - aumentar os valores do intervalo de tempo até observar-se a divergência dos resultados;
 - 1.b - diminuir os valores do intervalo de tempo até observar-se que para valores menores de Δt os perfis de velocidade ou temperatura não desenvolviam tanto quanto para valores maiores.
- 2 - aumentar e diminuir a malha espacial no sentido radial e axial e, para cada nova malha repetir os passos 1.a e 1.b

Os resultados deste procedimento estão representados neste capítulo, juntamente

com os resultados das simulações, em forma de tabelas onde são mostrados o número de Nós na direção axial representada pela variável n , o número de Nós na direção radial representado por n_p , a faixa de Δt para a qual a solução do problema é a mesma em todas as malhas e o número de iterações médio (n_i).

4.1 RESULTADOS OBTIDOS EM REGIME LAMINAR

Os resultados apresentados para o regime laminar são válidos nas condições apresentadas na tabela 4.1, onde se observa o aumento do número de iterações e estreitamento da faixa do intervalo de tempo, decorrentes da alteração da malha.

n X np	Quantidade de movimento		Energia	
	Δt	n_i	Δt	n_i
40 X 100	0,2 - 0,6	452	1 - 2,5	199
80 X 100	0,2 - 0,5	480	1 - 1,5	408
40 X 150	0,2 - 0,4	545	1 - 1,5	457

Tab. 4.1 - Faixa de estabilidade do método ADI para escoamento e regime laminar.

Na Figura 4.1 está mostrada a representação do perfil desenvolvido pela solução integral de Hagen-Poiseuille e a solução obtida neste trabalho pelo método ADI. Nesta Figura pode-se observar, no centro do tubo, uma leve divergência entre as duas soluções. Pela solução analítica de Hagen-Poiseuille a velocidade no centro do tubo é $2U$. A

solução pelo método ADI, não chega atingir este valor. A máxima diferença entre as duas soluções, ao longo do raio, está no centro do tubo.

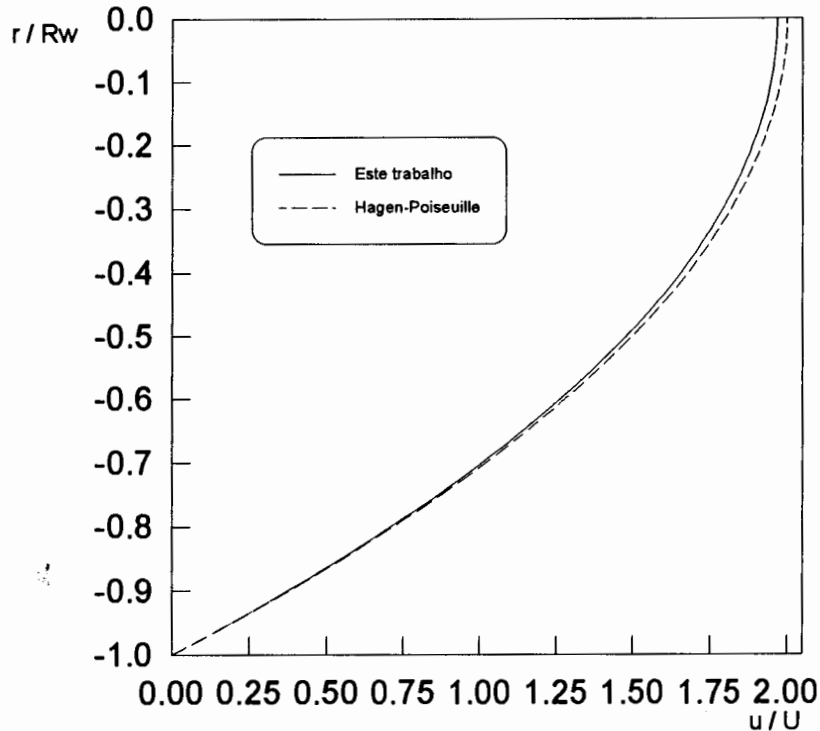


Fig. 4.1 - Comparação dos perfis de velocidade obtidos pela solução analítica de Hagen-Poiseuille e pelo método ADI no escoamento laminar.

A Figura 4.2 mostra o desenvolvimento do escoamento a partir de uma distribuição uniforme de velocidade até o escoamento plenamente desenvolvido ser atingido. Nesta Figura nota-se a desaceleração do fluido junto à parede do tubo e o efeito inverso no centro.

Estes resultados estão mostrados novamente na Figura 4.3, onde tem-se a representação total do tubo e a distribuição de velocidade ao longo do mesmo, estando de acordo com os resultados para duas placas planas paralelas apresentados por SCHLICHTING (1979).

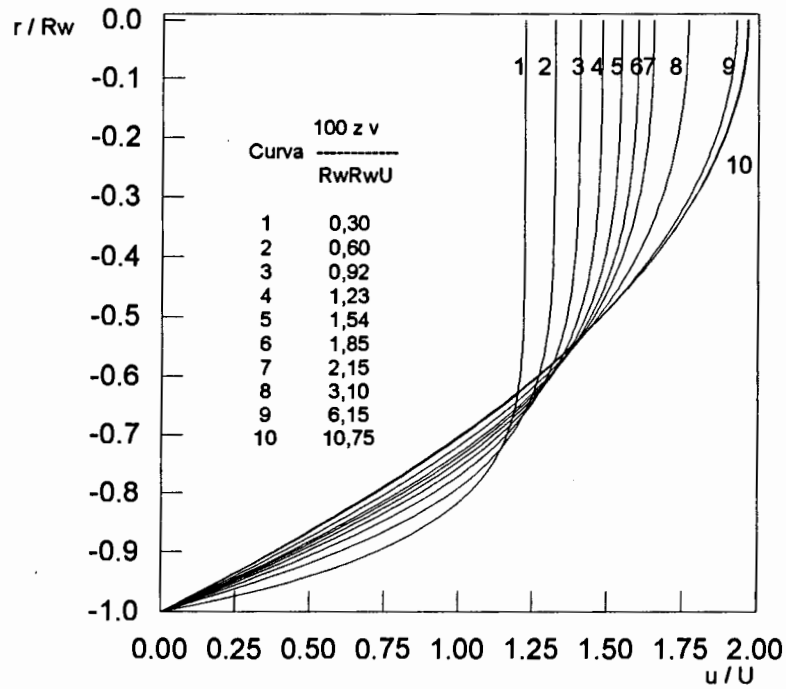


Fig. 4.2 - Representação adimensional dos perfis de velocidade ao longo do desenvolvimento no escoamento laminar.

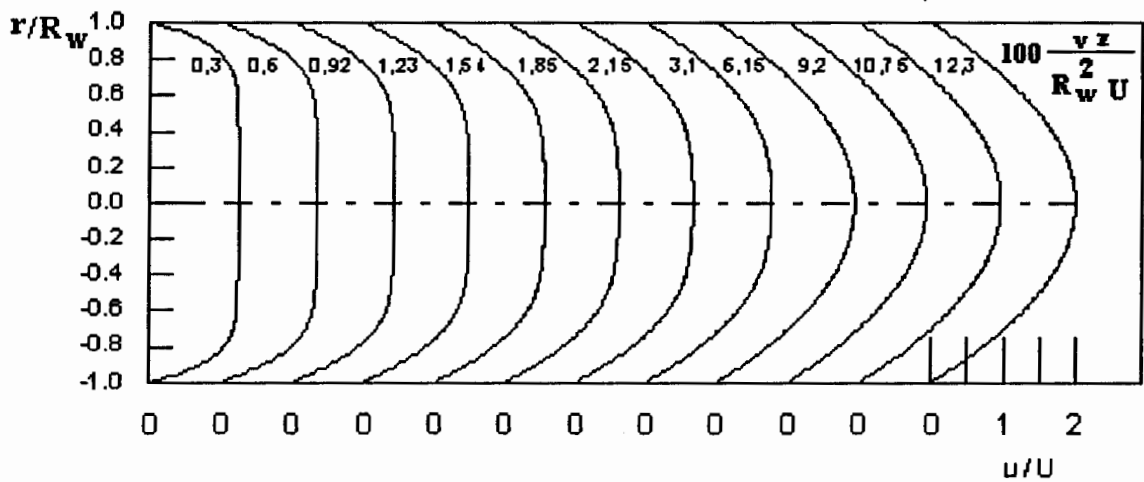


Fig. 4.3 - Distribuição de velocidade para o escoamento laminar.

A Figura 4.4 mostra a distribuição de velocidade ao longo do tubo para diversos raios. Os dados obtidos pelo método ADI são comparados aos dados experimentais obtidos por Nikuradse e apresentados por SCHLICHTING (1979). Pode-se ver a boa concordância dos resultados próximo à parede do tubo e uma ligeira divergência no centro. Observa-se também, que as maiores diferenças estão logo na entrada do tubo. Estes valores adimensionais de velocidade, junto ao centro do tubo para um mesmo raio obtidos por Nikuradse são mais elevados que os valores obtidos pelo presente trabalho.

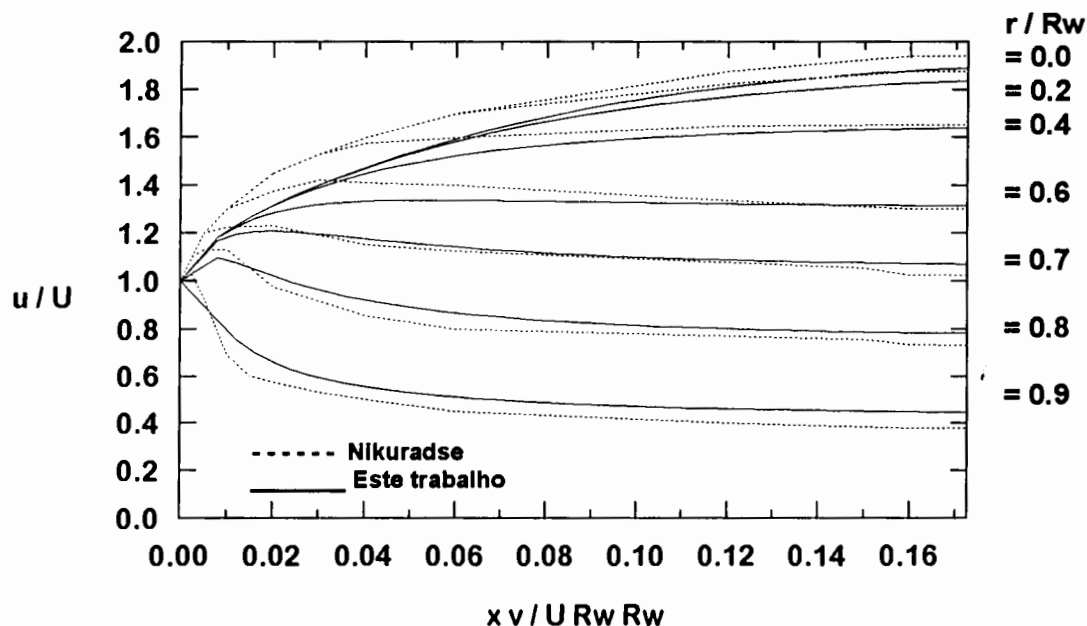


Fig. 4.4 Distribuição de velocidade para o caso laminar.

O coeficiente de atrito na entrada do tubo para o caso laminar está representado na Figura 4.5. Os dados obtidos pelo presente trabalho são comparados com os dados de Langhaar, citado por BEJAN (1984). Pode-se verificar que as maiores discrepâncias aparecem exatamente na região de entrada, devido aos elevados gradientes de velocidade nesta região que não podem ser descritos pela malha adotada.

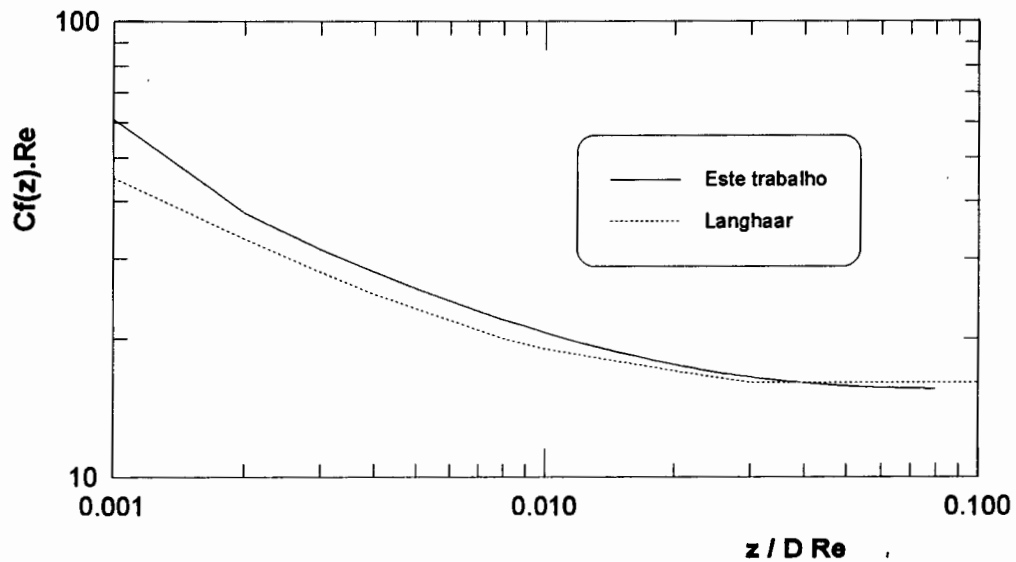


Fig. 4.5 - Coeficiente de atrito para o regime laminar.

A Figura 4.6 mostra o desenvolvimento da distribuição de temperatura adimensional onde se pode observar o desenvolvimento da camada limite térmica.

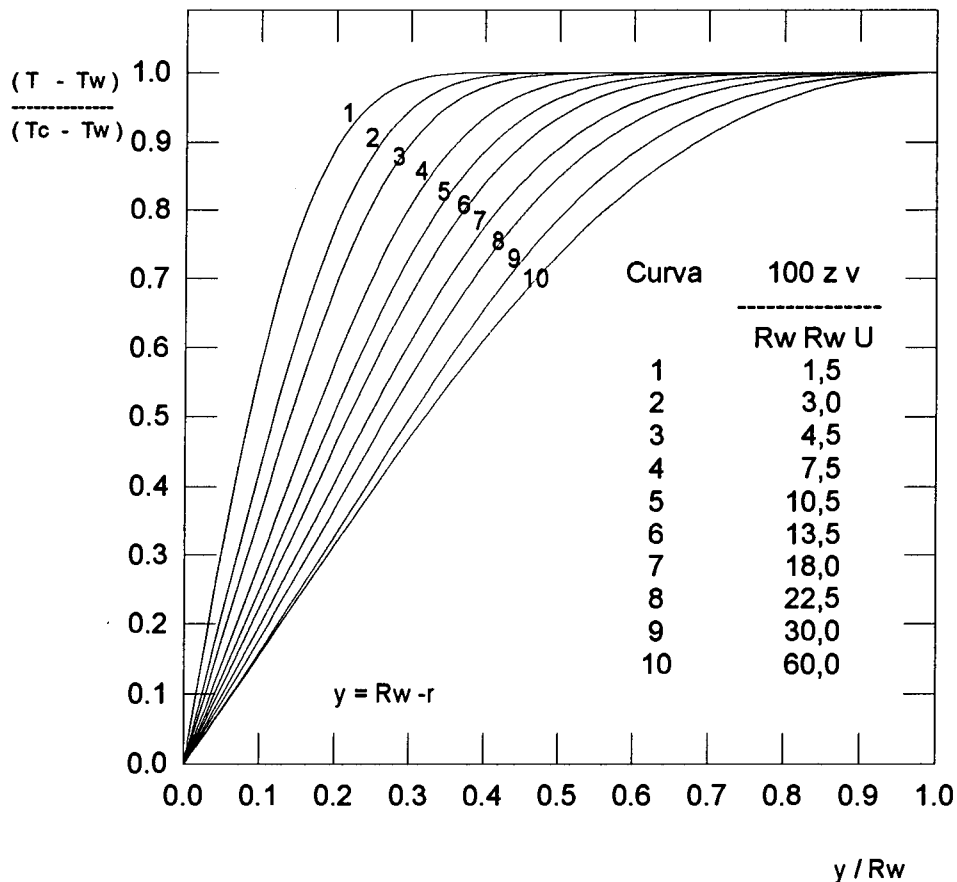


Fig. 4.6 - Desenvolvimento do perfil de temperatura para o regime laminar.

4.2 RESULTADOS OBTIDOS EM REGIME TURBULENTO

Na análise do escoamento em regime turbulento foram adotados 4 valores para o número de Reynolds: 10.000, 20.000, 35.000 e 50.000 sendo que para cada um deles o número de Prandtl foi fixado com os seguintes valores: 0,71, 3,53, 4,13, 5,7 e 6,45.

O número de Prandtl 0,71 corresponde às propriedades físicas do ar e os quatro restantes às propriedades físicas da água a várias temperaturas, conforme tabela 4.2. Este trabalho utilizou as propriedades físicas do fluido à temperatura média entre a temperatura do tubo e a temperatura inicial do fluido. A temperatura inicial do fluido foi mantida

constante para todos os casos testados e variou-se a temperatura da parede do tubo, e com isso o número de Prandtl. Para fins de comparação, procurou-se resolver o problema para valores do número de Prandtl iguais aos apresentados por **KIRILLOV e LEVCHENKO (1989)** em seus resultados.

Temp. Inicial	Temp. Parede	Temp. Média	NºdePrandtl
20	27	23,5	6,45
20	36	28,0	5,70
20	66	44,0	4,13
20	83	51,5	3,53

Tab. 4.2 - Números de Prandtl utilizados em função da temperatura média.

Os resultados do perfil de velocidades estão apresentados pelos números de Reynolds juntamente com a Lei da Parede de Nikuradse, e as curvas para a subcamada laminar ($u^+ = Y^+$) e para a camada de amortecimento. Por simplicidade estão descritas nas Figuras como "Lei da Parede" apenas. Os resultados para números de Reynolds 10.000, 20.000, 35.000 e 50.000 estão nas Figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10, respectivamente, apresentando, em geral, boa concordância com a Lei da Parede. Na extremidade da curva (centro do tubo) descreve de forma coerente o desvio da Lei da Parede.

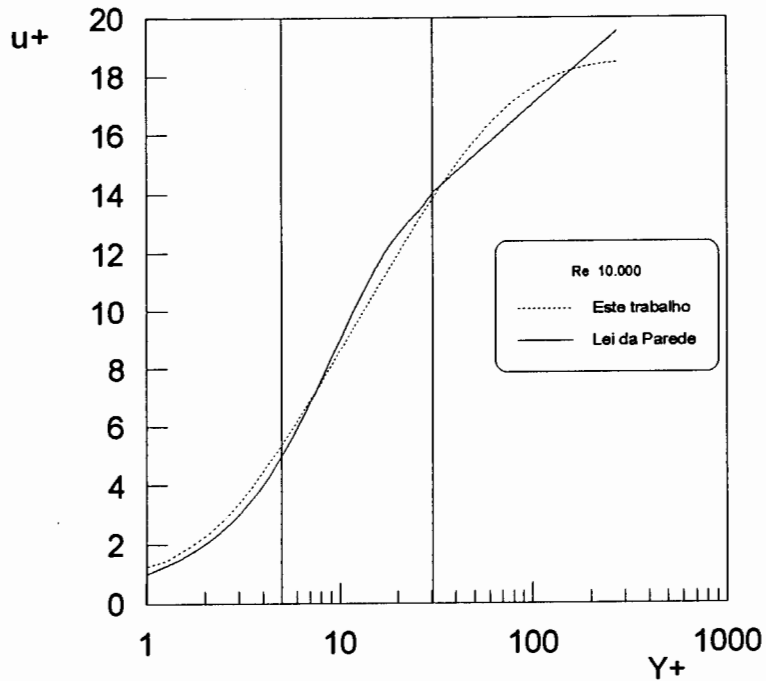


Fig. 4.7 - Comparação do perfil de velocidade obtido pelo método ADI e a Lei da Parede para o número de Reynolds 10.000.

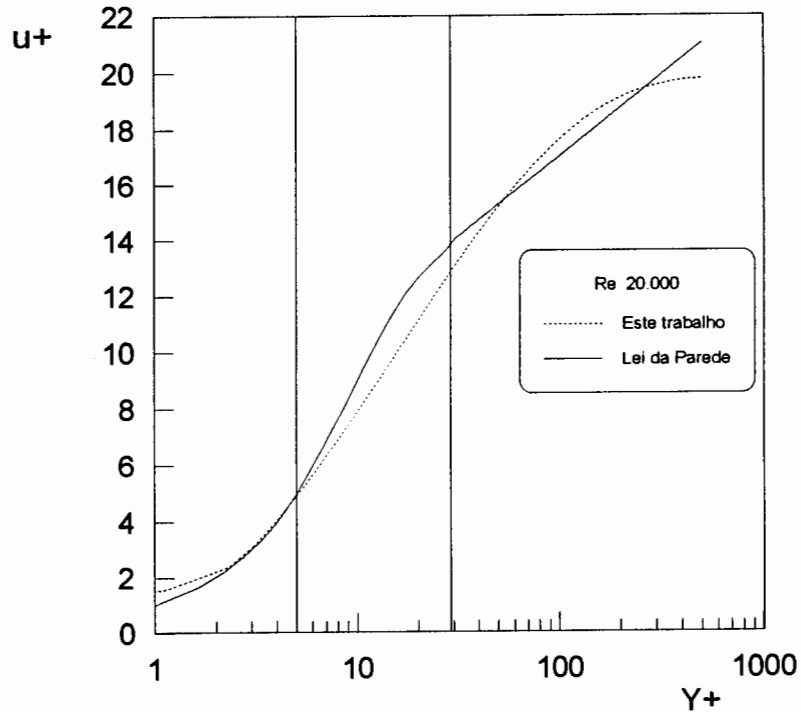


Fig. 4.8 - Comparação do perfil de velocidade obtido pelo método ADI e a Lei da Parede para o número de Reynolds 20.000.

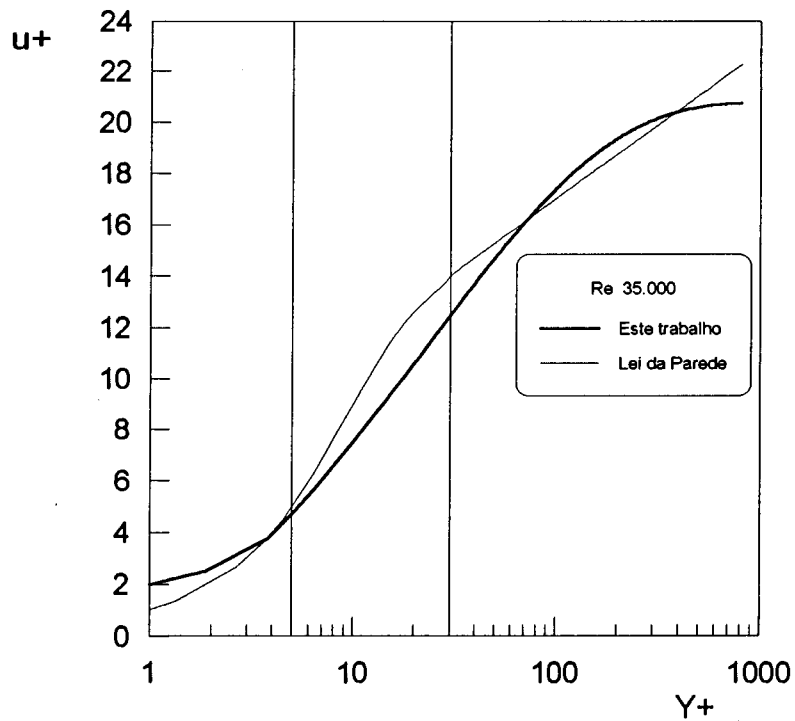


Fig. 4.9 - Comparação do perfil de velocidade obtido pelo método ADI e a Lei da Parede para o número de Reynolds 35.000.

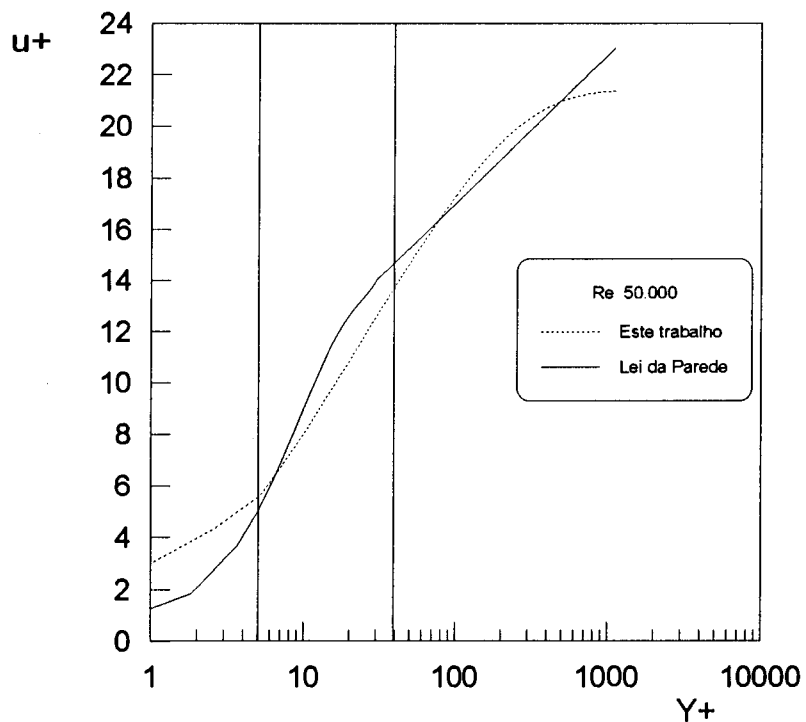


Fig. 4.10 - Comparação do perfil de velocidade obtido pelo método ADI e a Lei da Parede para o número de Reynolds 50.000.

O desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica em regime turbulento, obtido pelo presente trabalho, para o número de Reynolds 50.000, está representado na Figura 4.11. A comparação qualitativa pode ser feita com os resultados analíticos de SZABLEWSKI (1952) apresentados na Figura 4.12. Apesar de não ter os mesmos valores do número de Reynolds, pode-se verificar que a evolução dos valores de velocidade do presente trabalho está de acordo com o resultados de SZABLEWSKI (1952).

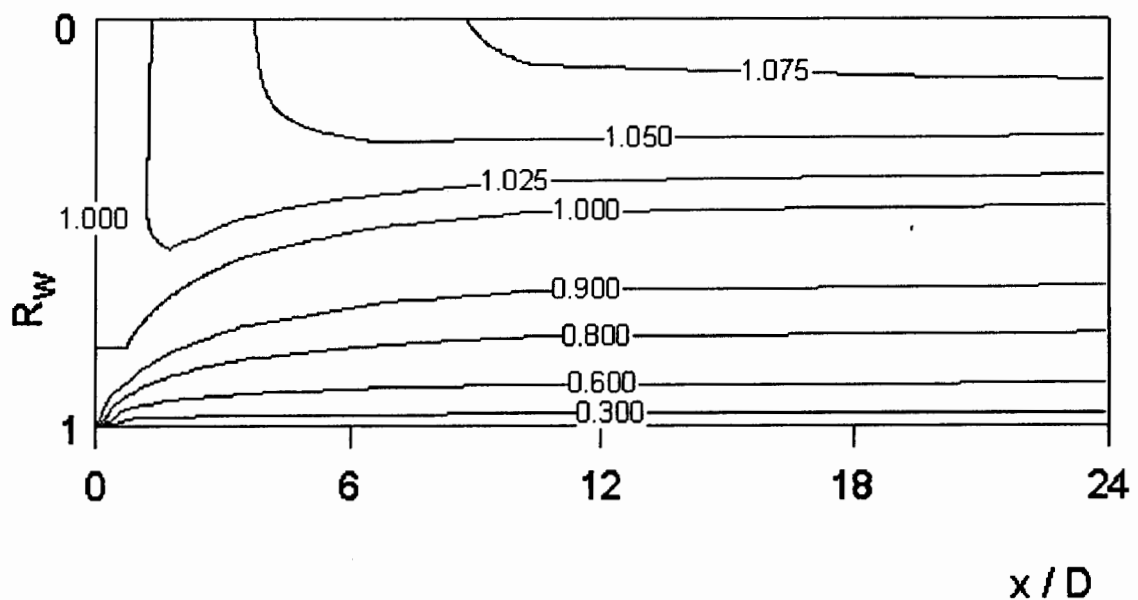


Fig. 4.11 - Distribuição de velocidade na entrada do tubo circular para número de Reynolds 50.000.

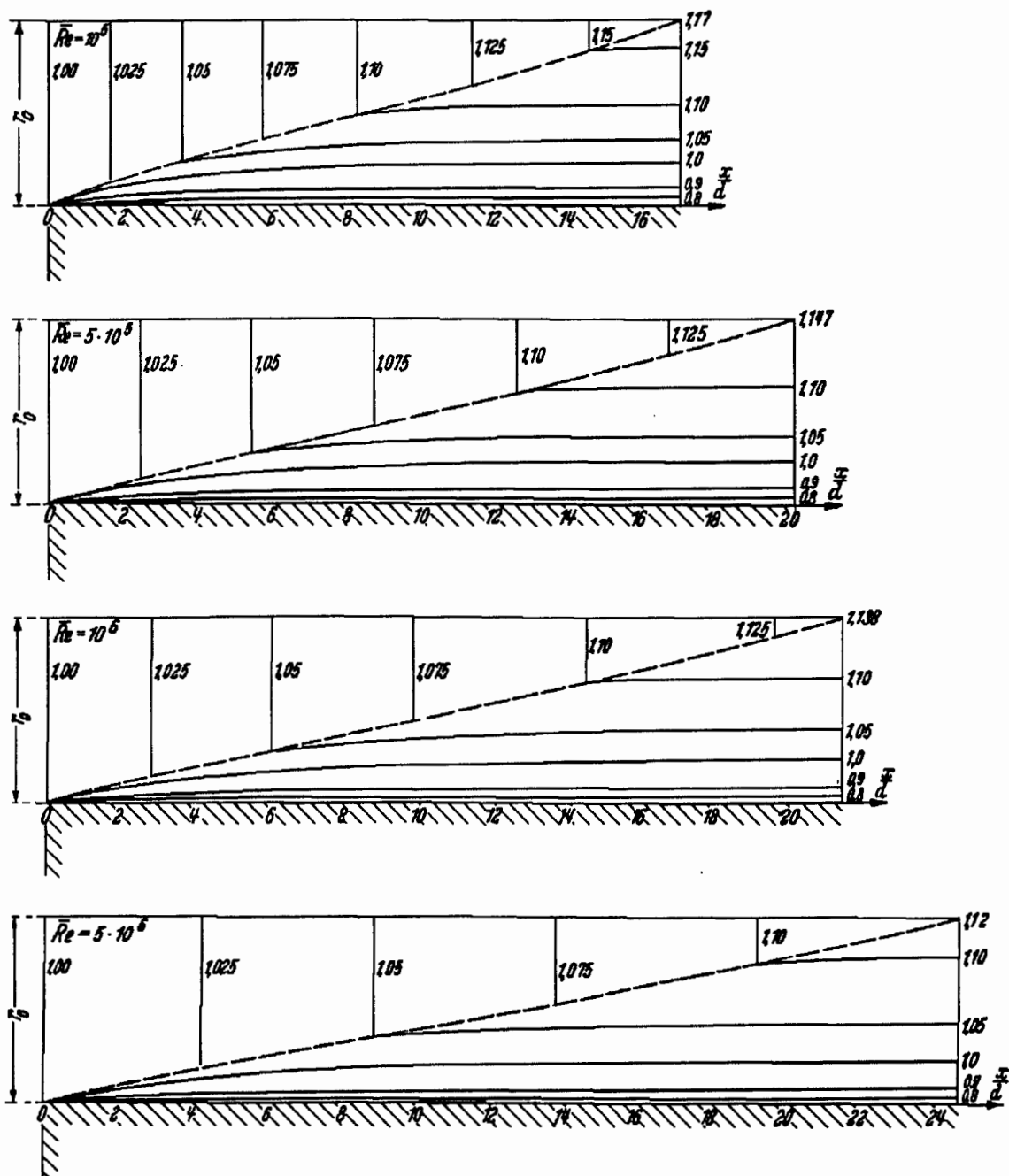


Fig. 4.12 - Resultados analíticos de Szablewski (1952) para o desenvolvimento do escoamento turbulento em duto circular.

A tabela 4.3 mostra as condições de estabilidade da equação da quantidade de movimento em regime turbulento.

Número de Reynolds								
		10.000		20.000		35.000		50.000
n X np	Δt	ni	Δt	ni	Δt	ni	Δt	ni
130x100	,020-,05	94	*	*	*	*	*	*
70x150	,015-,03	131	,020-,030	163	,010-,015	101	*	*
100x150	,020-,04	159	,015-,040	176	,010-,015	123	*	*
70x200	,010-,02	163	,015-,025	184	,005-,013	145	,007-,013	175

Tab. 4.3 - Faixa de estabilidade do método ADI para escoamento em regime turbulento.

* condições nas quais não ocorre convergência.

Esta tabela indica que, à medida que aumenta o número de Reynolds, faz-se necessário refinar a malha na direção radial, principalmente próximo à parede, pois com o aumento do número de Reynolds a espessura da subcamada laminar diminui. Este efeito é observado nos resultados mostrados nas Figuras 4.7 - 4.10: com o aumento do número de Reynolds acentua-se o desvio da solução numérica em relação a subcamada laminar. Uma malha pouco refinada próximo à parede, além de ter poucos nós para representar as variações físicas na subcamada laminar, onde o escoamento é essencialmente laminar, aumenta a diferença entre y^+ (físico) e $y^+(j)$ (discreto). Nestas condições, ao utilizar $y^+(j)$ acima de y^+ , aumenta-se numericamente a espessura da

subcamada laminar. Os resultados assim obtidos melhoram próximo a parede, mas por influência da conservação da massa ocorre um aumento de velocidade na região central do tubo.

Outro fator que interfere nos resultados à medida em que aumenta o número de Reynolds, é o aumento da influência da não linearidade dos termos convectivos.

O campo de temperatura, obtido a partir da solução da equação da energia está mostrado para um número de Reynolds (50.000) para 5 valores do número de Prandtl, os resultados estão representados nas Figuras 4.13 - 4.17 juntamente com os valores experimentais e teóricos obtidos por **KIRILLOV e LEVCHENKO (1989)**, para o campo de temperatura de um duto circular. Esse valor do número de Reynolds foi escolhido por ser o mesmo valor adotado nos resultados da referência acima citada.

Em geral pode-se notar a boa concordância dos resultados para as regiões próximas à parede. Isso acontece também para os próprios resultados de **KIRILLOV e LEVCHENKO (1989)**. A medida em que número de Prandtl cresce, diminui a concordância nas regiões centrais do tubo. Deve-se observar que a malha não descreve corretamente a região próxima à parede (baixos valores de y^+) o que pode influenciar os resultados.

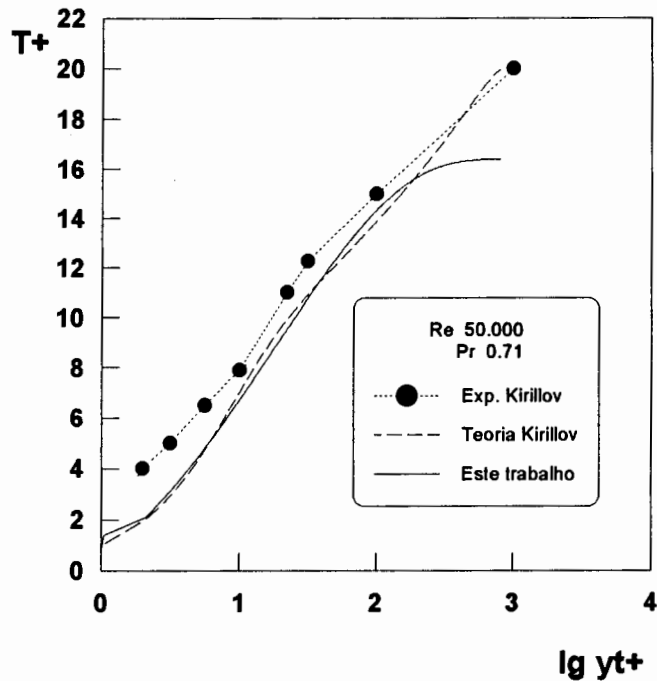


Fig. 4.13 - Comparação do perfil adimensional de temperatura para $Re=50.000$ e $Pr=0,71$ calculado pelo método ADI e os dados experimentais e teóricos de Kirillov e Kevchencko (1989).

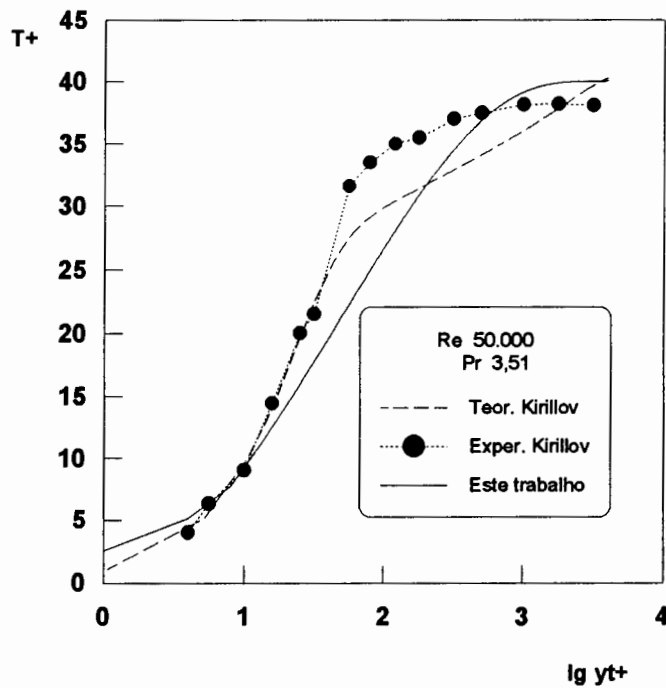


Fig. 4.14 Comparação do perfil adimensional de temperatura para $Re=50.000$ e $Pr=3,51$ calculado pelo método ADI e os dados experimentais e teóricos de Kirillov e Levchencko (1989).

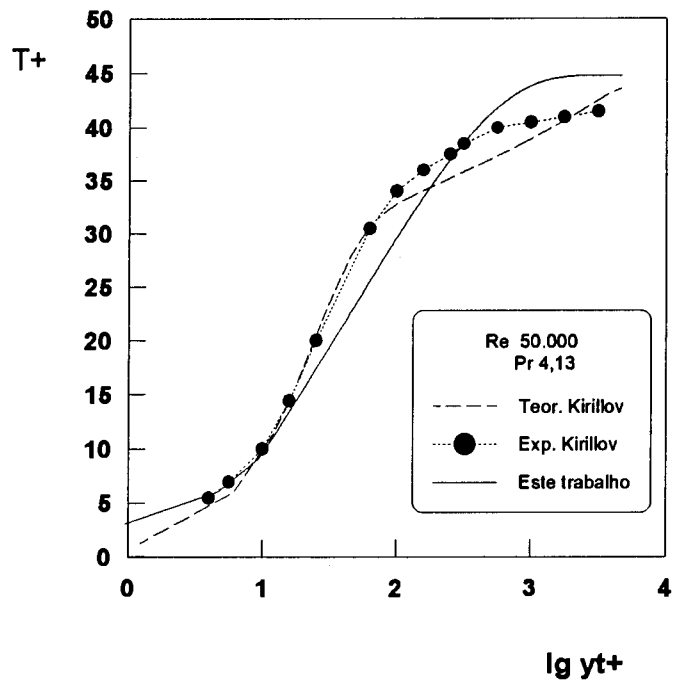


Fig. 4.15 - Comparação do perfil adimensional de temperatura para $Re=50.000$ e $Pr=4,13$ calculado pelo método ADI e os dados experimentais e teóricos de Kirillov e Levchencko (1989).

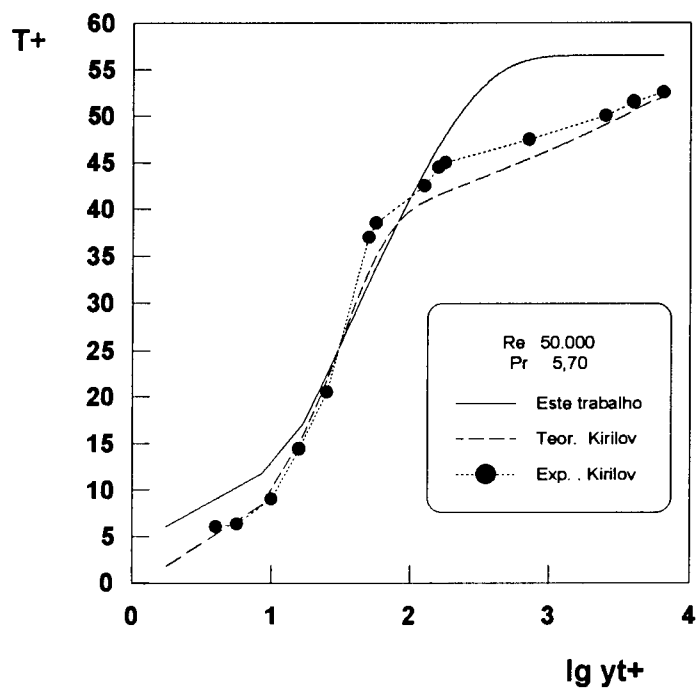


Fig. 4.16 - Comparação do perfil adimensional de temperatura para $Re=50.000$ e $Pr=5,70$ calculado pelo método ADI e os dados experimentais e teóricos de Kirillov e Levchencko (1989).

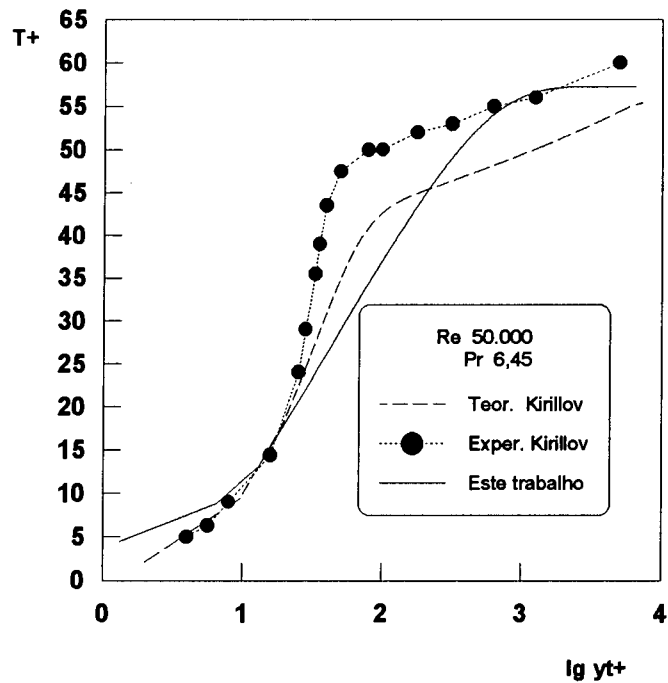


Fig. 4.17 - Comparação do perfil adimensional de temperatura para $Re=50.000$ e $Pr=6,45$ calculado pelo método ADI e os dados experimentais e teóricos de Kirillov e Levchencko (1989).

A tabela 4.4 apresenta as malhas espacial e temporal em que os resultados de temperatura em regime turbulento foram obtidos.

Reynolds 50.000 e $n \times np = 50 \times 300$					
	Pr 6,45	Pr 5,70	Pr 4,13	Pr 3,53	Pr 0,71
Δt	,002-,003	,0035-,004	,002-,0025	,002-,003	,0001-,0003
n_i	112	85	110	89	93

Tab. 4.4 - Faixa de estabilidade, da solução da equação da energia, pelo método ADI para o número de Reynolds 50.000.

4.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados para escoamentos em regime laminar apresentam ótima concordância com a literatura clássica. A análise via regressão linear entre o perfil desenvolvido de velocidade, obtido pelo presente trabalho e a solução de Hagen-Poiseuille, mostrados na Figura 4.1, indica um coeficiente de regressão de 0,9999. O resultado para a perda de carga na Figura 4.5, apresentou um coeficiente de regressão de 0.9893 comparado com os resultados experimentais de Langhaar. Já os resultados obtidos para o desenvolvimento da velocidade ao longo do tubo (Figura. 4.4) apresentam um coeficiente de regressão médio de .09076 quando comparados aos dados experimentais de Nikuradse.

No caso de escoamentos em regime turbulento o coeficiente de regressão linear obtido na comparação da Lei da Parede com os resultados do presente trabalho são o seguintes: 0,9849, 0,9784, 0,9676 e 0,9570 para números de Reynolds 10.000, 20.000, 35.000 e 50.000, respectivamente, demonstrando a diminuição da concordância desses resultados com o aumento do número de Reynolds verificada visualmente nas Figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10. Os coeficientes de regressão linear para os resultados da temperatura, em regime turbulento, comparados com os resultados experimentais de Kirillov e Levchenko (1989) para um número de Reynolds 50.000 são inferiores aos obtidos na transferência de quantidade de movimento, mas, mesmo assim, são considerados bons, e para números de Prandtl 0,71, 3,51, 4,30, 5,70 e 6,45 são : 0,9103, 0,9217, 0,9042, 0,9562 e 0,9060, respectivamente.

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho foi realizado com o objetivo de elaborar um programa computacional para resolver o problema do desenvolvimento térmico e hidrodinâmico em um duto circular pelo método ADI, resolvendo as equações da quantidade de movimento e conservação da massa de forma acoplada, e as equações da quantidade de movimento e energia de forma desacoplada. O desenvolvimento dos perfis de velocidade e de temperatura são obtidos a partir de perfis uniformes de velocidade e temperatura respectivamente, tanto em regime laminar como em regime turbulento.

O programa computacional foi desenvolvido para resolver escoamentos de ar ou água, mas pode ser utilizado para resolver problemas com outros tipos de fluidos newtonianos, pela inclusão de subrotinas contendo suas propriedades físicas, descritas por meio de equações dependentes da temperatura.

Futuros trabalhos poderão aprimorar o programa desenvolvido. Para tanto, deve-se considerar as limitações no programa elaborado:

- Neste trabalho os problemas térmico e hidrodinâmico são resolvidos de forma desacoplada e os valores das propriedades físicas são tomadas a partir da temperatura média entre a parede do tubo e a temperatura inicial do fluido. Para se obter resultados mais precisos, deve-se trabalhar com as equações da quantidade de movimento e energia acopladas, e as propriedades físicas devem variar com a temperatura ponto a ponto. Para isso há duas maneiras de encaminhar o problema: a primeira, é corrigir as propriedades

físicas em função da mudança de temperatura após cada iteração; a segunda opção é utilizar, nas equações de balanço, a forma original dos termos difusivos, ou seja, a viscosidade dinâmica na equação da quantidade de movimento e a condutividade térmica na equação da energia devem ser derivadas juntamente com a velocidade e temperatura.

- Para obter o termo de pressão na equação da quantidade de movimento foi utilizado o conceito da tensão de cisalhamento na parede e este termo permanece constante em todo o raio, o que é particularmente significativo para o escoamento turbulento, onde a pressão varia com o raio. A sugestão para este caso é fazer uso de uma equação que possa descrever a variação de pressão tanto na direção axial como na direção radial. A equação de estado é um caminho que pode ser seguido para evitar esta simplificação.

- A componente de velocidade radial, neste trabalho, é obtida através da equação da conservação da massa após ter-se calculado o campo de velocidade axial. No escoamento laminar a componente transversal da velocidade tem, comparativamente com a velocidade principal, maior magnitude que no escoamento turbulento. No entanto, como no escoamento turbulento os gradientes de velocidade são mais elevados, a combinação desses dois termos torna-se mais importante neste último caso, por isso, é interessante discretizar a equação de Navier-Stokes também na direção radial e trabalhar de forma acoplada com a equação para a direção axial na obtenção do campo de velocidades, principalmente em regime turbulento.

- Este modelo foi desenvolvido para tubo com temperatura constante na parede. Para estender o uso do modelo a escoamentos com fluxo de calor constante na parede do tubo,

deve-se alterar a condição de contorno na parede do tubo, de primeira ordem para uma condição de contorno de segunda ordem.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEJAN, A.- **Convection Heat Transfer.** New York, Wiley, 1984.

BONTOUX, P., FORESTIER, B. et ROUX, B.- Analyse et Optimisation d'une Méthode de Haute Précision Pour la Résolution des Equations de Navier-Stokes Instationnaires. **Journal de Mécanique Appliquée, Vol.2:N° 3,p.291-316, 1978.**

BONTOUX, P. ,GILLY, B. et ROUX, B. - Analysis of the Effect of Boundary Conditions on Numerical Stability of Solutions of Navier-Stokes Equations. **Journal of Computational Physics, Vol. 36: p.417-427,1980.**

BRILEY, W. R. and McDONALD, H. - Solution of the Three-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations by an Implicit Technique. **Journal of Computational Physics, Vol.24: p. 105-110, 1977.**

CARNAHAN, B., LUTHER, H. A. and WILKES, J. O. - **Applied Numerical Methods.** New York, Wiley, 1969.

HINZE, J. O. - **Turbulence.** New York, McGraw-Hill, 1975

HISHIDA, M. - Turbulent Heat Transfer and Temperature Distribution in the Thermal Entrance Region of a Circular Pipe, **Bulletin of JSME, Vol. 10, n° 37, p.113-123, 1967.**

- KARAM, J. E. C. & MÖLLER, S. V.- Simulação do Escoamento com Transferência de Calor em Tubo Circular. In: SILVA, A.T. E MOREIRA, J.M.L., ed. - **VIII Encontro Nacional De Física de Reatores e Termo-hidráulica**. ATIBAIA, 1991, p. 341- 345.
- KARAM, J. E. C. - Simulação Numérica do Escoamento Axial com Transferência de Calor em Banco de Tubos. **Dissertação de Mestrado**, PROMEC - UFRGS, 1992
- KIRILLOV, P. L. and LEVCHENCKO, Ju. D. - Turbulent Temperature Profiles and Heat Exchange Law of Single-phase Flow in Pipes. In:U. Müller, K. Rehme and K Rust, ed. - **4 th Meeting on Nuclear Thermal Hydraulics, Vol.2** pp.728-733, Karlsruhe, 1989.
- KNUDSEN, J. G. and KATZ, D. L. - **Fluid Dynamics and Heat Transfer**. New York, McGraw-Hill, 1958 .
- LAUNDER, B .E. and SPALDING, D. B. - **Mathematical Models of Turbulence**. London, Academic Press, 1972.
- LINDEMUTH, I. and KILLEEN, J. - Alternating Direction Implicit Techniques for Two-Dimensional Magnetohydrodynamic Calculations. **Journal of Computational Physics, Vol.13**: p.181-208, 1973.
- MAUBACH, K. - Reibungsgesetze Turbulenter Strömungen. **Chemie - Ing. Tech. Vol. 42**: p.995-1004, 1970.

- NAGANO, Y. and KIM, C. - A two-Equation Model for Heat Transport in Wall Turbulent Shear Flows. **Journal of Heat Transfer** Vol. 110: p.583-589, 1988.
- NIKURADSE, J. - Gesetzmässigkeit der Turbulenten Strömung in Glatten Rohren. **VDI - Forschungsheft** 356, 1932.
- PRAKASH, C. and YE-DI LIU - Analysis of Laminar Flow and Heat Transfer in the Entrance Region of an Internally Finned Circular Duct. **Journal of Heat Transfer**, Vol.107: pg. 84-91, 1985.
- PEACEMAN, D. W. and RACHFORD JR., H. H. - The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations. **J. Soc. Ind. Appl. Math**, Vol.3, n°1, p. 28-41, 1955
- REITMAN, V. and VOLFSHTEIN, M. - Numerical Calculation of a Parabolized Turbulent Flow in the Rectangular Duct. **TAE Report no.424, Dept. of Aeronautical Engineering**, Israel, Haifa, 1980.
- SISSON, L. E. and PITTS, D. R. - **Fenômenos de Transporte**. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1972.
- SCHLICHTING, H. - **Boundary- Layer Theory**. 7th ed. New York, McGraw-Hill,, 1979.
- SHAMES, I. H. - **Mecânica dos Fluidos**. Vol. 2, São Paulo, Edgard Blücher, 1973.

- SPARROW, E. M. and LIN, S. H. - Flow Development in the Hydrodynamic Entrance Region of Tubes and Ducts. **The Physics of Fluids, Vol. 7, n° 3: p.338-347, 1964.**
- SZABLEWSKI, W. - Berechnung der Turbulente Strömung im Rohr auf der Grundlage der Mischungsweghypothese. **Z.angew. Math. Mech., Bd.31, pp.131-142,1951.**
- SZABLEWSKI, W. - Der Einlauf Einer Turbulenten Rohrströmung, **Ing. Archiv, Vol. 21, p.323-330, 1952.**
- TENNEKES, H. and LURLEY, J. - **A first Course in Turbulence.** Cambridge, The Mit Press, 1972.
- TRAPP, J. A. and RAMSHAW, J. D. - A Simple Heuristic Method for Analyzing the Effect of Boundary Conditions on Numerical Stability. **Journal of Computational Physics, Vol. 20, p 238-242, 1976.**
- WELTY, J. R. - **Engineering Heat Transfer.** New York, Wiley, 1969.
- YASHCHIN, D., ISRAELI, M. and WOLFSHTEIN, M. - Numerical Solution of Parabolized, Three-Dimensional Steady Flow in Axisymmetric Pipes. **TAE Report no.491, Dept. of Aeronautical Engineering, Israel, Haifa, 1982.**
- ZUKAUSKAS, A. and SLANCIAUSKAS, A. - **Heat Transfer in Turbulent Fluid Flows.** New York, Hemisphere, 1987.

APÊNDICE A

EQUAÇÕES DE BALANÇO PARA O ESCOAMENTO TURBULENTO

Para que possam ser considerados os efeitos da turbulência no modelo matemático, é preciso que este descreva o escoamento turbulento médio, sem levar em consideração as flutuações instantâneas de velocidade e temperatura ocorridas no escoamento turbulento. Para tanto, se faz necessário decompor as variáveis u , v e T em componentes médias e flutuantes, a fim de reavaliar os termos das equações diferenciais que compõe o modelo. Uma vez que a equação da continuidade não é afetada por este tratamento, devem ser reformuladas as equações de quantidade de movimento e da energia.

A.1 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.1})$$

Os termos u , v e p são decompostos em suas parcelas médias e flutuantes (hipóteses de Reynolds), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

substituindo-se as expressões de u, v e p na equação (A.1), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + u') + (\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u} + u') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u} + u') = \\ -\rho \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + p') + \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\bar{u} + u') + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u} + u') + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\bar{u} + u') \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Aplicando-se a média em toda a equação (A.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial u}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial u'}}{\partial t} + \overline{\frac{-\partial u}{v}} + \overline{\frac{-\partial u'}{v'}} + \overline{\frac{\partial u}{v'}} + \overline{\frac{\partial u'}{v'}} + \overline{\frac{-\partial u}{u}} + \overline{\frac{-\partial u'}{u'}} + \overline{\frac{\partial u}{u'}} + \overline{\frac{\partial u'}{u'}} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial u}}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial p'}}{\partial z} + \nu \left[\frac{\overline{\partial^2 u}}{\partial r^2} + \frac{\overline{\partial^2 u'}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial u'}}{\partial r} + \frac{\overline{\partial^2 u}}{\partial z^2} + \frac{\overline{\partial^2 u'}}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O valor médio das flutuações é zero, e os termos abaixo são eliminados

$$\frac{\overline{\partial u'}}{\partial t} = \overline{\frac{-\partial u'}{v}} = \overline{\frac{\partial u}{v'}} = \overline{\frac{-\partial u'}{u}} = \overline{\frac{\partial u}{u'}} = \frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial p'}}{\partial z} = \frac{\overline{\partial^2 u'}}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial u'}}{\partial r} = \frac{\overline{\partial^2 u'}}{\partial z^2} \quad (\text{A.5})$$

Os termos de flutuação que restaram na equação do movimento são apenas os referentes as tensões de Reynolds e correspondem aos dois últimos termos à direita na equação (A.6).

$$\frac{\overline{\partial u}}{\partial t} + \overline{\frac{-\partial u}{v}} + \overline{\frac{-\partial u}{u}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial p'}}{\partial z} + \nu \left[\frac{\overline{\partial^2 u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial u}}{\partial r} + \frac{\overline{\partial^2 u}}{\partial z^2} \right] - \frac{\overline{\partial v' u'}}{\partial r} - \frac{\overline{\partial u' u'}}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

Fazendo-se uma análise de escala, e supondo que $v' \propto u'$, e que $z \gg r$,

$$\frac{\overline{\partial v' u'}}{\partial r} \gg \frac{\overline{\partial u' u'}}{\partial z} \quad (\text{A.7})$$

pode-se desprezar o termo

$$\frac{\overline{\partial u' u'}}{\partial z} \quad (\text{A.8})$$

Assim a equação do movimento em regime turbulento fica:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] - \frac{\overline{\partial v' u'}}{\partial r} \quad (\text{A.9})$$

A.2 EQUAÇÃO DA ENERGIA

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.10})$$

aplicando a hipótese de Reynolds a equação da energia fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{T} + T') + (\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial r} (\bar{T} + T') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial z} (\bar{T} + T') = \\ \alpha \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\bar{T} + T') + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{T} + T') + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\bar{T} + T') \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Aplicando-se a média sobre toda a equação (A.11), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial T}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial T'}}{\partial t} + \frac{\overline{-\partial T}}{\partial r} + \frac{\overline{-\partial T'}}{\partial r} + \frac{\overline{v' \partial T}}{\partial r} + \frac{\overline{v' \partial T'}}{\partial r} + \frac{\overline{-\partial T}}{\partial z} + \frac{\overline{-\partial T'}}{\partial z} + \frac{\overline{u' \partial T}}{\partial z} + \frac{\overline{u' \partial T'}}{\partial z} = \\ \alpha \left[\frac{\overline{\partial^2 T}}{\partial r^2} + \frac{\overline{\partial^2 T'}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial T}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial T'}}{\partial r} + \frac{\overline{\partial^2 T}}{\partial r^2} + \frac{\overline{\partial^2 T'}}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e os seguintes termos são eliminados:

$$\frac{\overline{\partial T'}}{\partial t} = \frac{\overline{-\partial T'}}{\partial r} = \frac{\overline{v' \partial T}}{\partial r} = \frac{\overline{-\partial T'}}{\partial z} = \frac{\overline{u' \partial T}}{\partial z} = \frac{\overline{\partial^2 T'}}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial T'}}{\partial r} = \frac{\overline{\partial^2 T'}}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.13})$$

ficando assim a equação da energia em regime turbulento:

$$\frac{\overline{\partial T}}{\partial t} + \frac{\overline{-\partial T}}{\partial r} + \frac{\overline{-\partial T}}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\overline{\partial^2 T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial T}}{\partial r} + \frac{\overline{\partial^2 T}}{\partial z^2} \right] - \frac{\overline{\partial v' T'}}{\partial r} - \frac{\overline{\partial u' T'}}{\partial z} \quad (\text{A.14})$$

fazendo a mesma análise de escala do item A.1 pode-se eliminar o último termo da equação acima, obtendo-se a equação da energia para o escoamento turbulento.

$$\frac{\overline{\partial T}}{\partial t} + \frac{\overline{-\partial T}}{\partial r} + \frac{\overline{-\partial T}}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\overline{\partial^2 T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial T}}{\partial r} + \frac{\overline{\partial^2 T}}{\partial z^2} \right] - \frac{\overline{\partial v' T'}}{\partial r} \quad (\text{A.15})$$

APÊNDICE B

MODELO DE TURBULÊNCIA

"Para descrever as tensões de Reynolds na equação do movimento em regime turbulento, Boussinesq utilizou a tensão de cisalhamento no escoamento laminar" (LAUNDER e SPALDING, 1972), que é dada pela Lei da Viscosidade de Newton

$$\tau_l = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{B.1})$$

substituiu a viscosidade dinâmica pelo coeficiente ϵ , que é chamado de viscosidade aparente, virtual ou turbulenta (SCHILICHTING, 1979), e a derivada da velocidade pela derivada da velocidade média, obtendo a relação para a tensão turbulenta.

$$\tau_t = \rho \epsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{B.2})$$

"Ao contrário da viscosidade dinâmica, a difusividade turbulenta (ϵ), não é uma propriedade do fluido. Seu valor varia, ponto a ponto no escoamento. A introdução da difusividade turbulenta fornece uma ferramenta para a construção de um modelo de turbulência, mas ele por si só não constitui um modelo, por esse motivo deve-se expressar a viscosidade turbulenta em termos conhecidos ou em quantidades calculadas" (LAUNDER e SPALDING, 1972).

Neste texto os Autores descrevem a necessidade de se obter relações matemáticas

para a viscosidade aparente ϵ .

Tomando-se as variáveis adimensionais u^+ e y^+

$$y^+ = \frac{y u^*}{\nu} \quad (\text{B.3})$$

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \quad (\text{B.4})$$

E aplicando-as na expressão da Lei de Newton da viscosidade, isto é, na tensão de cisalhamento para o escoamento laminar, obtém-se:

$$\tau_x = \mu \frac{\partial u^+ u^* u^*}{\partial \nu y^+} \quad (\text{B.5})$$

Considerando-se que na subcamada laminar $u^+ = y^+$, simplifica-se a equação acima e obtém-se o tensão de cisalhamento na parede (τ_w).

$$\tau_w = \rho u^{*2} \quad (\text{B.6})$$

Considerando-se, ainda, que próximo a parede $\tau_x = \tau_w$, e que no centro do duto

$\tau_x = 0$, obtém-se a seguinte expressão para a tensão de cisalhamento adimensional:

$$\frac{\tau_t}{\tau_w} = \frac{\rho \epsilon_m (\overline{\partial u / \partial y})}{\rho u^{*2}} = \frac{r}{R_w} \quad (\text{B.7})$$

Tomando-se os dois últimos termos da equação dupla acima, e isolando o produto da difusividade turbulenta pelas derivadas, têm-se:

$$\epsilon_m \frac{\overline{\partial u}}{\partial y} = \frac{r}{R_w} u^{*2} \quad (\text{B.8})$$

Tomando-se a Lei da Parede (SCHLICHTING, 1969) de Nikuradse:

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5 \quad (\text{B.9})$$

e substituindo-se Y^+ e u^* , equações (B.3) e (B.4), respectivamente, obtém-se:

$$\frac{\overline{u}}{u^*} = 2,5 \ln \left(\frac{y u^*}{\nu} \right) + 5,5 \quad (\text{B.10})$$

E isolando-se a velocidade média da expressão acima, e derivando a equação resultante em relação a y chega-se a seguinte equação:

$$\frac{\overline{\partial u}}{\partial y} = 2,5 \frac{u^*}{y} \quad (\text{B.11})$$

Que substituída na equação (B.8) fornece o modelo de turbulência devido a Nikuradse.

$$\epsilon_m = 0,4 \frac{r}{R_w} u^* y \quad (\text{B.12})$$

onde $y = R_w - r$

APÊNDICE C

PERDA DE CARGA

Para caracterizar a variação de pressão do fluido ao longo do tubo, faz-se um balanço de forças dentro da seção do escoamento, obtendo-se:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{P_m \tau_w}{A} \quad (\text{C.1})$$

onde P_m é o perímetro molhado e A é a área transversal da seção considerada e τ_w é a tensão de cisalhamento na parede.

Para um fluido newtoniano, pode-se considerar a seguinte expressão para descrever a tensão de cisalhamento média na parede do tubo

$$\tau_w = \mu_p \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_p \quad (\text{C.2})$$

Substituindo-se a equação (C.2) na equação (C.1) obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2\mu_p}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_p \quad (\text{C.3})$$

"No caso do escoamento laminar a pressão é constante ao longo do raio, se forças de campo não forem importantes. Para o escoamento turbulento a pressão pode ser tomada por seu valor na parede, mesmo para o centro do tubo" (TENNEKES e LUMLEY, 1972).

APÊNDICE D

COMPRIMENTO DE ENTRADA

No escoamento de um fluido, em tubos ou dutos a distribuição de velocidade passará de um perfil inicial na entrada do tubo/duto a um perfil plenamente desenvolvido a uma certa distância da entrada. O comprimento do duto no qual o desenvolvimento da velocidade ocorre é chamado de comprimento de entrada hidrodinâmico ou região de entrada.

Alguns autores divergem no que diz respeito a distância do comprimento de entrada hidrodinâmico, mas são unânimes em afirmar que o comprimento de entrada térmico, tanto em regime laminar como em regime turbulento é dado por:

$$Z_T = Z Pr \quad (D.1)$$

Onde Z_T é o comprimento de entrada térmico e Z é o comprimento de entrada hidrodinâmico.

SHAMES (1973), apresenta a seguinte equação para o comprimento de entrada hidrodinâmico:

$$Z = 0,03 Re D \quad (D.2)$$

A equação teórica para o comprimento de entrada calculada por L.Shiller e os

resultados experimentais de J. Nikuradse e apresentadas por SCHLICHTING (1979)

são, respectivamente:

$$z = 0,115 \frac{R^2 U}{\nu} \quad (\text{D.3})$$

$$z = 0,04 \frac{R^2 U}{\nu} \quad (\text{D.4})$$

As equações (D.2), (D.3) e (D.4) são aplicadas ao escoamentos laminar. Tomando-se a expressão para a espessura da camada limite turbulenta, dada por:

$$\frac{\delta}{z} = 0,37 Re^{-1/5} \quad (\text{D.5})$$

onde δ é a espessura da camada limite e "z"

é a distância da entrada., e considerando que em um duto circular a espessura máxima da camada-limite é igual ao raio do tubo, pode-se utilizar a expressão acima para determinar o comprimento de entrada hidrodinâmico em regime turbulento num duto circular, substituindo δ por R_w , assim e a equação (D.5) fica:

$$X = \frac{R_w}{0,37} Re^{1/5} \quad (\text{D.6})$$