Luan Bottin De Toni

Carregamento Elétrico de Grãos de Poeira Contidos no Plasma Interplanetário

Porto Alegre 28 de novembro de 2018 Luan Bottin De Toni

Carregamento Elétrico de Grãos de Poeira Contidos no Plasma Interplanetário

Tabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul a fim de preencher os requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física com ênfase em Astrofísica.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS Instituto de Física

Orientador: Prof. Dr. Rudi Gaelzer

Porto Alegre 28 de novembro de 2018

Resumo

Neste trabalho fez-se uso de métodos numéricos a fim de analisar modelos matemáticos que descrevem os principais processos de carregamento elétrico de grãos de poeira esféricos isolados no plasma interplanetário. Considera-se o carregamento por absorção de partículas, fotoionização e emissão secundária de elétrons para grãos de diferentes tamanhos e materiais interagindo com o vento solar, com o plasma nas proximidades de Encélado, e com o plasma na magnetosfera de Júpiter. Em geral, observa-se uma relação do tempo de carregamento do grão de poeira com seu tamanho, sendo que grãos menores atingem um potencial estacionário mais rapidamente. Este potencial de equilíbrio depende dos parâmetros do grão e do plasma em questão, podendo ser positivo, como no caso do vento solar, ou negativo, no caso de Encélado e da lua Io de Júpiter. Ainda pode-se observar que para o vento solar o processo de carregamento por fotoionização é dominante, enquanto em sistemas mais densos e menos expostos ao fluxo de radiação ultravioleta, como Encélado e a magnetosfera de Júpiter, as correntes de absorção e emissão secundária de elétrons se mostram mais importantes.

Abstract

Numerical methods have been used to investigate the mathematical models that describe the main electrical charging processes of an isolated dust grain in an interplanetary plasma. We took into account charging by absorption of plasma particles, photoionization and secondary electron emission for different materials and sizes of grains interacting with the solar wind, plasma in the vicinity of Enceladus, and in Jupiter's magnetosphere. In general, one observes a relation between the grain's charging time and its size, where smaller grains reach a stationary potential more quickly. This equilibrium potential is related to the grain's parameters as well as the plasma's, and may be positive, as in the solar wind, or negative, wich is the case of Enceladus and Jupiter's moon Io. One can observe that in the case of the solar wind the photoionization process is dominant, whereas in denser systems, such as Enceladus and Jupiter's magnetosphere, the absorption of particles and secondary emission are more important.

Lista de ilustrações

Figura 1 -	- Exemplos de meios contaminados por poeira	9
Figura 2 -	- Ilustração dos diferentes processos de carregamento de um grão de po- eira em um plasma de elétrons e prótons	13
Figura 3 -	- Trajetória de colisão da partícula do plasma tangenciando um grão de poeira quando $Z_j \phi < 0.$	14
Figura 4 - Figura 5 -	 Interação do vento solar com o meio interestelar. Evolução radial dos parâmetros físicos do vento solar de acordo com a 	21
	modelagem de Köhnlein (1996)	22
Figura 6 -	- Evolução temporal do potencial de graos de silicato e carbono a uma distância 1 UA do Sol.	23
Figura 7 -	- Evolução temporal das principais correntes de carregamento para um grão de silicato no vento solar a uma distância de 1 UA do Sol	24
Figura 8	 Potencial de equilíbrio de grãos de silicato e carbono como função da 	
Figura 9 -	distância heliocêntrica	24
	tencial de equilíbrio de grãos de poeira de carbono e silicato como função da distância ao Sol	25
Figura 10	-Sistema de anéis de Saturno. Listras na superfície da lua Encélado por onde partículas de gelo são ejetadas. Gêiseres ricos em água ejetados pelas listras da superfície de Encélado	26
Figura 11	-Gráfico de Farrell et al. (2009) mostrando a densidade eletrônica me-	20
Figura 12	-Evolução temporal do potencial elétrico de um grão de gelo nas proxi-	21
Figura 13	-Potencial de equilíbrio de um grão de gelo em função da fração e tem-	29
Figura 14	peratura de elétrons quentes em Encélado	30
Figura 15	emissão de S ⁺	31
D : 10	de Júpiter	33
rıgura 16	- Potencial de equilibrio para graos de NaCi de diferentes tamanhos como função da distância de Júpiter	34
Figura 17	-Gráfico de Horányi (1996) para o potencial de equilíbrio para grãos de 1μ m como função da distância de Júpiter	35

Lista de tabelas

Tabela 1 –	Parâmetros físicos de alguns materiais	18
Tabela 2 –	Coeficientes de ajuste para os parâmetros físicos do vento solar	21
Tabela 3 –	Parâmetros do plasma nas proximidades de Encélado	28
Tabela 4 –	Parâmetros para as espécies do plasma frio de Júpiter	32
Tabela 5 –	Valores dos coeficientes g_k para as espécies do plasma frio em Júpiter $% f_k$.	32

Lista de símbolos

e	Carga elementar
k_B	Constante de Boltzmann
n_j	Densidade da espécie j do plasma
Z_j	Número de carga da espécie j do plasma
m_j	Massa da espécie j do plasma
T_j	Temperatura da espécie j do plasma
v_{Tj}	Velocidade térmica da espécie j do plasma
f(v)	Função distribuição de velocidades
σ	Seção de choque de colisão
λ_D	Comprimento de Debye
a	Raio do grão de poeira
r_d	Distância média entre os grãos de poeira
Q	Carga elétrica
ϕ	Potencial elétrico
I_k	Corrente do k-ésimo processo de carregamento
w	Velocidade do grão de poeria relativa ao plasma
d	Distância ao Sol
κ	Fator de eficiência da emissão fotoelétrica
δ_m	Produção máxima de elétrons secundários
E_m	Energia na qual a produção de elétrons secundários é máxima

Sumário

1	Intro	odução	8
	1.1	Plasmas com poeira	9
2	Pro	cessos de Carregamento	12
	2.1	Absorção de partículas	14
	2.2	Emissão fotoelétrica	16
	2.3	Emissão secundária de elétrons	17
3	Apli	cação e Resultados	20
	3.1	Vento Solar	20
	3.2	Encélado	26
	3.3	Magnetosfera de Júpiter	31
4	Con	clusões	36
Re	ferêr	ncias	37
A	pênc	lices	40
AF	PÊNE	DICE A Solução da Integral da Corrente de Absorção	41

1 Introdução

O plasma é um estado da matéria composto por uma coleção de íons, elétrons e partículas neutras. Ele compõem praticamente toda matéria bariônica no Universo. Em sua forma mais simples o plasma é composto por íons uma vez ionizados e elétrons sendo que, no estado de equilíbrio, cada uma dessas componentes tem aproximadamente o mesmo número de partículas. De uma forma mais geral, define-se a condição de *quase neutralidade* onde a densidade das cargas negativas é aproximadamente igual a das cargas positivas para grandes volumes, ou seja,

$$n_i Z_i e - n_e e = 0 av{1.1}$$

onde n_i e n_e são as densidades não perturbadas dos íons e elétrons, respectivamente, $Z_i e$ é a carga dos íons ($Z_i = 1$ para íons uma vez ionizados) e e é a carga elementar.

Além da quase neutralidade, o plasma deve exibir *comportamento coletivo*, ou seja, a dinâmica de cada partícula é determinada pelos campos elétricos e magnéticos produzidos por todas as outras partículas carregadas. Deste modo, pode-se definir um plasma, segundo Chen (2015), como um gás quase neutro de partículas carregadas e neutras que exibem comportamento coletivo.

A dinâmica que qualifica o comportamento coletivo é afetada por uma característica fundamental do plasma: sua habilidade de blindar potenciais elétricos aplicados nele. Suponha um campo elétrico aplicado em um ponto de um plasma constituído por íons e elétrons. Neste ponto haverá atração de partículas de carga oposta, ou seja, se o potencial aplicado é positivo (negativo), uma nuvem de elétrons (íons) irá se formar em sua volta. Se o plasma for frio (no sentido de que as partículas não apresentam agitação térmica) a nuvem formada irá blindar perfeitamente o potencial de modo que não haverá campo elétrico no plasma fora da blindagem. Porém, para uma temperatura finita, a borda da nuvem terá partículas com energia térmica suficiente para escapar. A borda da nuvem ocorre, então, a uma distância onde a energia potencial das partículas é aproximadamente igual à energia térmica. Essa distância é chamada de *comprimento de Debye*, dada por

$$\lambda_{Dj} = \left(\frac{k_B T_j}{4\pi n_j e^2}\right)^{1/2} , \qquad (1.2)$$

onde j é a espécie (j = e para elétrons, j = i para íons), k_B é a constante de Boltzmann e T_j é a temperatura da espécie. Vale ressaltar que a equação 1.2 está expressa em termos do sistema CGS de unidades, usado ao longo deste trabalho.

Desta forma, um gás ionizado se comportará como plasma se a distância média das partículas for muito menor que o comprimento de Debye. Normalmente esta condição é satisfeita em todos os sistemas astrofísicos.

1.1 Plasmas com poeira

O meio interplanetário é constituído de plasma e grãos de poeira, partículas de material sólido, dielétrico ou condutor, com massa bilhões de vezes maior que a massa do próton e tamanho variando de nanometros a milímetros com formas variadas. Esses grãos de poeira possuem carga elétrica variável devido a suas interações com o plasma que os cerca e com agentes externos, como radiação solar, afetando as propriedades eletromagnéticas e a dinâmica do plasma. Alguns exemplos marcantes da interação dos grãos de





Figura 1 – Exemplos de meios contaminados por poeira. (a) Luz zodiacal: luz refletida pela poeira interplanetária, pode ser responsável por cerca de 60% da luz em uma noite sem lua.¹ (b) Coma do cometa Hale-Bopp ramificada em uma cauda de poeira (branca) e outra de íons (azul).² (c) Parte do anel E de Saturno composto por gelo e vapor de água, alimentado por sua lua Encélado.³ (d) Poeira interestelar na Via Láctea.⁴.

¹Fonte: <https://apod.nasa.gov/apod/ap070925.html>. Acessado em 10 de outubro de 2018.

²Fonte: <https://apod.nasa.gov/apod/ap970416.html>. Acessado em 10 de outubro de 2018.

³Fonte: <https://apod.nasa.gov/apod/ap070327.html>. Acessado em 10 de outubro de 2018.

⁴Fonte: <https://apod.nasa.gov/apod/ap051004.html>. Acessado em 10 de outubro de 2018.

poeira com seu ambiente são:

- Luz zodiacal (figura 1a). Causada pelo espalhamento da luz solar por partículas de poeira localizadas no meio interplanetário do Sistema Solar, compostas principalmente de silicato e carbono. Essa poeira é provavelmente originada em colisões de corpos celestes, como os asteróides, ou ainda em detritos de cometas (figura 1b), conhecidos por liberar entre 250 kg/s (no caso de cometas de curto período) e 20.000 kg/s (no caso de cometas de longo período) de gás empoeirado no Sistema Solar (de Angelis, 1992);
- Anéis planetários. Sabe-se que grande parte dos anéis dos gigantes gasosos é composto por partículas de poeira micrométricas ou menores de variados materiais. Geralmente estas partículas têm sua origem nas luas dos planetas, sendo liberadas em colisões ou por meio de outros mecanismos, como os vulcões da lua Io em Júpiter ou os gêiseres da lua Encélado que alimenta grande parte do anel E de Saturno com partículas de gelo (figura 1c);
- Poeira Interestelar (figura 1d). Constituídos essencialmente de grafite, silicato e compostos metálicos, os grãos de poeira interestelares têm tamanhos de aproxima-damente 0, 2 μm (de Juli et al., 2005) e são conhecidos há um longo tempo pelos astrônomos por extinguir a luz visível de objetos astrofísicos de interesse em algumas regiões.

Esses sistemas empoeirados podem ser classificados de acordo com o grau de contaminação. Seja *a* o raio dos grãos de poeira, r_d a distância média dos grãos e λ_D o comprimento de Debye para um plasma contaminado definido por (Shukla; Mamun, 2002),

$$\lambda_D = \frac{\lambda_{De} \lambda_{Di}}{\sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2}} , \qquad (1.3)$$

têm-se as seguintes classificações quanto ao grau de contaminação:

- Poeira no plasma (a ≪ λ_D < r_d): ocorre quando as partículas de poeira podem ser consideradas como uma coleção de grãos isolados, blindados pelas partículas do plasma;
- Plasma empoeirado ($a \ll r_d < \lambda_D$): quando a poeira participa no comportamento coletivo do plasma e pode modificar significamente a física do sistema.

A condição de quase neutralidade (equação 1.1) deve ser modificada a fim de incluir a densidade de grãos de poeira (n_d) de modo que

$$n_i Z_i e - n_e e + n_d Z_d e = 0 , (1.4)$$

onde $Z_d e$ é a carga do grão de poeira que pode ser positiva ou negativa.

Determinar a carga de equilíbrio do grão de poeira pode ser uma tarefa muito complexa devido aos inúmeros mecanismos de carregamento existentes. Em plasmas espaciais, os principais são carregamento por fotoionização, captura por colisão inelástica e emissão secundária de elétrons. Como mencionado, o fato de que os grãos de poeira adquirem uma carga não nula implica na modificação do comportamento do plasma. No-tavelmente, sua dinâmica é afetada (Kimura; Mann, 1998) e surgem novos modos de ondas de instabilidade (D'Angelo, 1980).

O objetivo deste trabalho é estudar os principais processos de carregamento de um grão de poeira isolado no plasma interplanetário. No capítulo 2 serão apresentados os mecanismos responsáveis pela variação de carga elétrica em um grão de poeira isolado. O capítulo 3 discute alguns resultados numéricos obtidos ao aplicar os modelos matemáticos de carregamento elétrico a regiões de interesse no Sistema Solar. Finalmente, as conclusões são apresentadas no capítulo 4.

2 Processos de Carregamento

Uma das características em que um plasma com poeira difere de um plasma convencional de elétrons e íons é na variação da carga elétrica das partículas de poeira. Os processos de carregamento são representados por correntes elétricas incidentes no grão. Por exemplo, o processo no qual elétrons do plasma são absorvidos pelo grão através de colisão inelástica é representado pela corrente $I_{abs,e}$, tal corrente é *negativa* pois tende a carregar o grão negativamente. No caso em que íons são absorvidos pelo grão têm-se a corrente *positiva* $I_{abs,i}$ que carrega positivamente a partícula de poeira. A figura 2a ilustra um grão de poeira inicialmente neutro imerso em um plasma de elétrons e prótons, tais partículas colidem com o grão e são absorvidas carregando a poeira negativamente (elétrons) ou positivamente (prótons). Se, por exemplo, o grão é carregado negativamente (figura 2b) haverá interação de seu potencial elétrico ϕ com as partículas do plasma, repelindo alguns dos elétrons.

Além das correntes de absorção das espécies do plasma, ainda temos a possibilidade de o grão emitir um fotoelétron quando atingido por radiação, essa corrente I_{ν} tende a deixar o grão positivo e, portanto, é maior que zero. A figura 2c ilustra um grão descarregado atingido por radiação e liberando fotoelétrons. Quando o grão está carregado positivamente, alguns desses fotoelétrons não têm energia suficiente para vencer a atração eletrostática do grão de poeira, retornando à sua superfície (figura 2d).

Quando partículas suficiente energéticas colidem com o grão, elas podem ser desviadas, refletidas ou atravessam a partícula de poeria, transferindo sua energia para o grão. Parte dessa energia pode ser usada para excitar elétrons da poeira, se a energia transferida for suficiente, elétrons podem escapar do material produzindo uma corrente $I_{sec,j}$ de elétrons secundários, onde j representa a espécie com a qual o grão colidiu e transferiu energia. Como no caso da corrente fotoelétrica, se o grão de poeira possuir um potencial positivo, alguns dos elétrons secundários de baixa energia podem voltar à superfície do grão por atração eletrostática (figura 2f).

Outros processos de carregamento se mostram presentes em plasmas empoeirados, como a emissão termiônica, emissão de campo, radioatividade (Shukla; Mamun, 2002), transmissão de partículas (Kimura; Mann, 1998), entre outros.

Assim sendo, considere I_k a corrente do k-ésimo processo de carregamento, temos que a carga Q do grão de poeira varia com o tempo t de modo que

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{k} I_k \ . \tag{2.1}$$

A condição dQ/dt = 0 determina a carga de equilíbrio do grão. Cada uma dessas correntes



Figura 2 – (a) e (b): Ilustração do carregamento de um grão de poeira por absorção de partículas de um plasma de elétrons e prótons. (c) e (d): Carregamento do grão por fotoionização. (e) e (f): Carregamento por emissão secundária de elétrons.

é uma função das propriedades do plasma (densidade, temperatura, espécies presentes) e das partículas de poeira (tamanho, material, velocidade relativa).

Os processos considerados neste trabalho são a absorção de partículas do plasma, fotoionização e emissão secundária, classificados como os mais importantes para plasmas espaciais (Horányi, 1996). As seções subsequentes têm como objetivo apresentar os modelos matemáticos encontrados na literatura para cada um desses mecanismos de carregamento.

2.1 Absorção de partículas

A fim de calcular a corrente $I_{abs,j}$ correspondente à absorção de uma partícula da espécie j (elétrons, prótons, íons, etc) do plasma, as colisões são abordadas utilizando a teoria do orbital limitado (OLM) (Vladimirov et al., 2005) tendo como principais hipóteses:

- O grão de poeria está isolado ($a \ll \lambda_D < r_d$), ou seja, outros grãos não afetam a trajetória das partículas do plasma;
- As partículas do plasma são absorvidas se suas trajetórias não colisionais atingem a superfície do grão;
- Independentemente da estrutura do potencial eletrostático próximo ao grão de poeira, qualquer partícula do plasma pode atingir a superfície do grão se permitido pelas leis de conservação e, se ocorrer a colisão, se unirá ao grão de poeira;
- Para um grão esférico de poeira, o parâmentro de impacto limite de uma partícula do plasma absorvida corresponde a uma trajetória tangencial à superfície do grão de poeira.

Assim sendo, considere um grão esférico de raio a e carga Q. Quando uma partícula do plasma de carga $q_j = Z_j e$ e massa m_j se aproxima da partícula de poeira, sua trajetória será desviada devido à força eletrostática provocada pelo potencial ϕ da poeira. Sejam b_j o parâmetro de impacto (figura 3), v_j e v_{jg} as velocidades antes e depois da interação, a seção de choque da colisão é dada por $\sigma_j = \pi b_j^2$. As leis de conservação de momento angular e energia para uma trajetória tangenciando o grão de poeira nos dizem que

$$m_j v_j b_j = m_j v_{jg} a , \qquad (2.2)$$

$$\frac{1}{2}m_j v_j^2 = \frac{1}{2}m_j v_{jg}^2 + \frac{Z_j eQ}{a} .$$
(2.3)



Figura 3 – Trajetória de colisão da partícula do plasma tangenciando um grão de poeira quando $Z_j \phi < 0$. Imagem adaptada de Shukla e Mamun (2002).

A carga do grão de poeira Q está relacionada com seu potencial ϕ através da capacitância $C = Q/\phi$ para o caso de um capacitor esférico com parede externa no infinito. A capacitância para um grão esférico no plasma é dada por $C = a \exp(-a/\lambda_D)$, mas como estamos considerando um grão isolado, $a \ll \lambda_D$ e, portanto, $C \simeq a$. Logo, usando a relação $C = a = Q/\phi$ e as equações (2.2) e (2.3) podemos expressar b_j em termos de ϕ e obter para a seção de choque de colisão

$$\sigma_j = \pi a^2 \left(1 - \frac{2Z_j e\phi}{m_j v_j^2} \right) . \tag{2.4}$$

Uma dada espécie j do plasma, de densidade n_j e temperatura T_j , possui uma distribuição Maxwelliana de velocidades a uma distância infinita do grão, isto é,

$$f_j(v,\theta) = n_j \left(\frac{m_j}{2\pi k_B T_j}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m_j}{2k_B T_j}(v^2 + w^2 - 2vw\cos\theta)\right] , \qquad (2.5)$$

onde w é a velocidade do grão de poeira em relação ao plasma e θ é o ângulo entre v e w. Com isso, a corrente de absorção de partículas j no grão de poeira é, segundo Shukla e Mamun (2002),

$$I_{abs,j} = q_j \int v \sigma_j(v) f_j(v,\theta) d\vec{v} ,$$

expressando em coordenadas esféricas no espaço $\vec{v} (v,\theta,\varphi)$, a velocidade diferencial $d\vec{v}$ pode ser expressa como $d\vec{v} = v^2 dv \sin \theta d\theta d\varphi$, resultando em

$$I_{abs,j} = 2\pi Z_j e \int_0^\pi d\theta \int_{v_{0j}}^\infty dv \sigma_j(v) f_j(v,\theta) v^3 \sin\theta .$$
(2.6)

A velocidade mínima v_{0j} necessária para a partícula da espécie j atingir a poeira irá depender da interação eletrostática. No caso em que $Z_j \phi < 0$, a partícula do plasma será atraída pelo grão de poeira e a integração na equação (2.6) deverá ser feita sob todo domínio da velocidade v. Por outro lado, se $Z_j \phi > 0$, haverá repulsão entre as partículas de modo que a energia cinética da partícula do plasma deve ser maior que a energia potencial de repulsão, no caso limite temos

$$\frac{1}{2}m_j v_{0j}^2 = Z_j e\phi$$

e, portanto,

$$v_{0j} = \begin{cases} 0 & , Z_j \phi \le 0 \\ (2Z_j e \phi/m_j)^{1/2} & , Z_j \phi > 0 \end{cases}$$
(2.7)

É possível resolver analiticamente a equação (2.6), sendo que os detalhes de sua solução são apresentadas no apêndice A e tem como resultado final

$$I_{abs,j} = \sqrt{8\pi}a^2 n_j Z_j ev_{Tj} H(\chi_j) , \qquad (2.8)$$

com

$$H(\chi_j) = \begin{cases} F_1(\chi_j) - Z_j \psi_j F_2(\chi_j) &, Z_j \psi_j \le 0\\ G_1(\chi_j) - \sqrt{Z_j \psi_j} \tilde{G}_2(\chi_j) &, Z_j \psi_j > 0 \end{cases},$$
(2.9)

onde $v_{Tj} = \sqrt{k_B T_j / m_j}$ é a velocidade térmica da partícula j, e as variáveis adimensionais

$$\chi_j = \frac{w}{\sqrt{2}v_{Tj}} \quad , \quad \psi_j = \frac{e\phi}{k_B T_j}$$

foram convenientemente definidas. As funções F_1 , F_2 , $G_1 \in \tilde{G}_2$ estão definidas no apêndice A (equação A.10).

2.2 Emissão fotoelétrica

Quando a superfície da poeira é atingida por radiação com energia $h\nu$ (onde h é a constante de Planck e ν é a frequência do fóton) maior que a função trabalho do material, ela pode emitir elétrons por efeito fotoelétrico. Este processo tende a carregar positivamente o grão e é representado, portanto, por uma corrente positiva I_{ν} .

Sendo assim, a magnitude da corrente de emissão fotoelétrica depende da taxa de elétrons emitidos pelo grão por efeito fotoelétrico. Essa taxa, por sua vez, depende dos seguintes fatores:

- Comprimento de onda dos fótons incidentes. Geralmente apenas fótons com energia da ordem ou maior que os da banda ultravioleta (UV) serão capazes de extrair elétrons do material;
- Fluxo dos fótons UV incidentes na superfície. Este fator depende principalmente da distância do grão à fonte de radiação;
- A área da superfície exposta à radiação ou, considerando um grão esférico, o raio *a* do grão de poeira;
- Função trabalho do material que compõe a superfície do grão;
- Potencial do grão de poeira uma vez que, se positivo, pode atrair de volta elétrons emitidos de baixa energia.

O espectro de fotoelétrons emitidos é geralmente assumido como uma distribuição Maxwelliana com temperatura T_{ν} . A energia média dos fotoelétrons apresenta valores na faixa de $k_B T_{\nu} \simeq 1$ eV (Goertz, 1989).

A expressão adotada aqui para a corrente fotoelétrica causada pela radiação solar tem a forma (Horányi, 1996)

$$I_{\nu} = \pi a^2 e f g_{\nu}(\phi) , \qquad (2.10)$$

onde $f \simeq 2,5 \times 10^{10} \kappa/d^2$ cm⁻² s⁻¹ é o fluxo médio de fótons UV solares, sendo d a distância do grão ao Sol em unidades astronômicas, κ é o fator de eficiência no processo de emissão e tem valores: $\kappa \simeq 1,0$ para materiais condutores; $\kappa \simeq 0,1$ para materiais dielétricos. A função $g_{\nu}(\phi)$ é retirada de Brito e Gaelzer (2013) que, por sua vez, baseou-se no formalismo de Draine e Salpeter (1979),

$$g_{\nu}(\phi) = \begin{cases} 1 & , \phi \leq 0 \\ \left(1 - \frac{e\phi}{2k_{B}T_{\nu}}\right) \exp(-e\phi/k_{B}T_{\nu}) & , 0 \leq \phi \leq \frac{2k_{B}T_{\nu}}{e} \\ 0 & , \phi > \frac{2k_{B}T_{\nu}}{e} \end{cases}$$
(2.11)

ela restringe a emissão de fotoelétrons que não possuem energia cinética suficiente para escapar do grão quando este possui potencial $\phi > 0$ e, ainda, coloca um limite superior no potencial elétrico que pode ser atingido na superfície do grão através de fotoemissão. O limite superior do potencial se deve ao fato de que o grão não dispõe de infinitos elétrons para serem extraídos e, além disso, os fótons UV solares não teriam energia suficiente para retirar os elétrons mais energéticos do grão.

2.3 Emissão secundária de elétrons

Quando partículas energéticas do plasma colidem com o grão de poeira elas podem causar a emissão de um elétron secundário. Esse processo pode ocorrer na colisão do grão com os eletróns e com os íons do plasma e representa uma corrente positiva $I_{sec,j}$, sendo ja espécie do plasma, tal qual tende a deixar o potencial do grão de poeira positivo. Essa corrente depende da função $\delta_j(E_0)$ que quantifica a produção de elétrons secundários induzidos por colisão com partículas do plasma com energia E_0 , sendo

$$E_0 = \frac{1}{2}m_j v^2 + Z_j e\phi . (2.12)$$

Encontra-se na literatura muitos trabalhos (Horányi 1996; Meyer-Vernet 1982; Goertz 1989; Graps et al. 2008) que utilizam uma expressão para a produção de elétrons secundários (δ_j) baseados na abordagem de Sternglass (1957), tal modelo assume o grão de poeira na forma de uma placa semi infinita onde elétrons secundários são emitidos em apenas uma superfície (a mesma em que ocorreu a colisão com as partículas primárias). Tal aproximação pode ser razoável para partículas com raio $a > 1 \,\mu$ m mas não é apropriado para grãos esféricos com tamanho comparável à profundidade de penetração das partículas primárias (Chow et al., 1993). Nesse caso, os elétrons emitidos não estão limitados à localização onde ocorreu a colisão com a partícula primária e podem deixar o grão em qualquer ponto de sua superfície. Este efeito tende a aumentar a produção de elétrons secundários e é referido como o *efeito da partícula pequena* (small particle effect).

Como o raio de um grão de poeira no meio interplanetário é normalmente menor que $10 \,\mu\text{m}$ deve-se considerar aqui o efeito da partícula pequena. Porém, o formalismo de

Material	$ ho~({ m g~cm^{-3}})$	δ_m	$E_m({ m eV})$
Silicato	3, 22	2,40	400
Carbono	1,95	1,43	400
Gelo	1,00	2,35	340
NaCl	2,2	6	600
Poeira Lunar	3,2	1, 5	500

Tabela 1 – Parâmetros físicos de alguns materiais. Tabela adaptada com dados de Kimura e Mann (1998), Draine e Salpeter (1979) e Dzhanoev et al. (2016).

Chow et al. (1993) considera que as partículas primárias incidem perpendicularmente à superfície do grão, mas para grãos em um plasma espacial a incidência isotrópica de partículas é mais realista. Sendo assim, utiliza-se neste trabalho a fórmula empírica derivada por Draine e Salpeter (1979) e apresentada por Kimura e Mann (1998) para a produção de elétrons secundários devido ao impacto com elétrons do plasma:

$$\delta_e(E_0) = \delta_m \frac{8(E_0/E_m)}{(1+E_0/E_m)^2} \left[1 - \exp\left(\frac{-4a}{3\lambda}\right)\right] f_1\left(\frac{4a}{3R}\right) f_2\left(\frac{a}{\lambda}\right) , \qquad (2.13)$$

 com

$$f_1(x) = \frac{1, 6+1, 4x^2+0, 54x^4}{1+0, 54x^4}, \qquad (2.14)$$

$$f_2(x) = \frac{1+2x^2+x^4}{1+x^4} , \qquad (2.15)$$

onde E_m é a energia na qual a produção de elétrons secundários atinge seu valor máximo δ_m . Valores experimentais de E_m e δ_m para alguns materiais são apresentadas na tabela 1 enquanto valores para outros materiais podem ser encontrados em Hachenberg e Brauer (1959). A profundidade de escape (λ) do elétron secundário é calculado a partir de (Draine; Salpeter, 1979)

$$\lambda = 300 \text{\AA} \left(\frac{\rho}{\text{g cm}^{-3}}\right)^{-0.85} \left(\frac{E_m}{1.5 \text{ keV}}\right)^{1.5} , \qquad (2.16)$$

sendo ρ a densidade de massa do material. Enquanto o alcanceRdo elétron incidente é calculado pela expressão

$$R(E_0) = 300 \text{\AA} \left(\frac{\rho}{\text{g cm}^{-3}}\right)^{-0.85} \left(\frac{E_0}{\text{keV}}\right)^{1.5} .$$
 (2.17)

No caso da produção de elétrons secundários causada pela colisão com os íons do plasma (carga $Z_j e$, massa m_j), adota-se a fórmula empírica

$$\delta_{ion}(E_0) = 0, 1Z_j^2 \frac{1 + (m_p/m_j)/(E_0/500\text{eV})}{[1 + (m_p/m_j)(E_0/35\text{keV})]^2} , \qquad (2.18)$$

onde m_p é massa do próton.

Com isso, a corrente de elétrons secundários do grão de poeira é dada por (Kimura; Mann, 1998)

$$I_{sec,j} = 2\pi e \int_0^\pi d\theta \int_{v_{0j}}^\infty dv \ \delta_j(E_0(v))\sigma_j(v)f_j(v,\theta)v^3\sin\theta \int_{\epsilon_{min}}^\infty d\epsilon\rho_j(\epsilon) \ . \tag{2.19}$$

com $\epsilon_{min} = \max(0, e\phi)$, σ_j e f_j dadas pelas equações (2.4) e (2.5), respectivamente, enquanto as distribuições de energias dos elétrons secundários emitidos pelos impactos com elétrons (ρ_e) e íons (ρ_{ion}) do plasma são dadas por

$$\rho_e(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2\varphi_e^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\varphi_e} \right)^2 \right]^{-3/2} , \qquad (2.20)$$

$$\rho_{ion}(\epsilon) = \frac{1}{\varphi_{ion}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\varphi_{ion}} \right)^2 \right]^{-2} , \qquad (2.21)$$

onde a energia mais provável do elétron secundário nesses casos assume os valores $\varphi_e = 2 \text{eV}$ e $\varphi_{ion} = 1 \text{eV}$.

Nesse caso não é possível resolver analiticamente a integral da velocidade em (2.19), diferentemente do caso da corrente de absorção de partículas (equação 2.6). Sendo assim, é necessário a aplicação de um método numérico para resolução de integrais impróprias a fim de calcular a corrente de elétrons secundários. A "GNU Scientific Library" (GSL) (Gough, 2009) possui uma rotina específica para esse tipo de integral e é utilizada neste trabalho.

3 Aplicação e Resultados

Com o conhecimento dos modelos matemáticos que descrevem os principais processos de carregamento elétrico de um grão de poeira isolado em um plasma espacial, podemos agora analisar como ocorre o carregamento quando todos processos ocorrem simultaneamente. A evolução temporal do potencial ϕ do grão de poeria é descrita pela equação (2.1), lembrando que $Q = a\phi$ para um grão de poeira esférico.

O potencial do grão atinge um valor estacionário (de equilíbrio) ϕ_{eq} após um tempo suficientemente grande, ou seja, as correntes positivas se igualam em magnitude às negativas; podemos calcular esse valor ϕ_{eq} resolvendo a equação

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{k} I_k = 0 \;. \tag{3.1}$$

Com isso, sabendo os parâmetros do plasma em uma certa região do espaço, aspectos importantes do grão de poeira podem ser determinados, como seu potencial de equilíbrio e tempo necessário para atingí-lo, processo de carregamento dominante para o sistema estudado, influência do tipo de material e tamanho do grão de poeira, entre outros. Veremos agora alguns exemplos de aplicações no Sistema Solar.

3.1 Vento Solar

O vento solar é um fluxo de partículas carregadas lançada da atmosfera solar. Esse plasma é geralmente composto por prótons ($Z_p = 1$), elétrons ($Z_e = -1$) e partículas alfa ($Z_{\alpha} = 2$). Sua grande energia cinética (0, 5-10 keV) permite que as partículas escapem da atmosfera solar a uma velocidade supersônica se estendendo até o meio interestelar. Sua velocidade, assim como densidade e temperatura, variam ao longo da distância na heliosfera sofrendo uma mudança abrupta ao atingir a área denominada choque de terminação (termination shock), entre 75-90 UA, onde começa a interação com o meio interestelar que possui menor velocidade; a velocidade do vento solar nessa região passa a ser subsônica, causando compressão, aquecimento e mudança no campo magnético do plasma (Chandler, 2007; Garner, 2016).

A figura 4 é uma ilustração da interação do vento solar com o meio interestelar. A região além do choque de terminação é denominada bainha heliosférica (heliosheath) localizada entre 80-100 UA e se estendendo até a heliopausa (heliopause), onde o vento solar não tem mais força suficiente para empurrar o meio interestelar e é parado por ele. A estreita camada onde ocorre a transição abrupta entre a heliosfera e o meio interestelar forma uma frente de choque (bow shock). A figura também mostra como a interação com



Figura 4 - (A) Representação artística da interação do vento solar com o meio interestelar. (B) Foto de experimento físico que ilustra regiões hidrodinâmicas de choque similares as da heliosfera. Fonte: Izzo de Oliveira et al. (2014)

o meio interestelar altera a forma da heliosfera constituindo um sistema magnetohidrodinâmico (MHD) e criando uma espécie de cauda na heliosfera, similar a um sistema físico hidrodinâmico (Izzo de Oliveira et al., 2014). Em setembro de 2013, a NASA anunciou que a sonda Voyager 1 haveria passado a heliopausa em 25 de agosto de 2012 a uma distância de 121 UA do Sol (Greicius, 2013).

Köhnlein (1996) desenvolveu um modelo que descreve a dependência radial de quatro parâmetros físicos do vento solar (densidade de prótons n_p , campo magnético B, velocidade v e temperatura T_p) ao longo da eclíptica entre 1, 1 R_o e 61 UA. Segundo este modelo, tais parâmetros podem ser ajustados por

$$Y = a_1 + a_2 X + a_3 e^{a_4 X} , (3.2)$$

sendo $Y = \log_{10} y$ e $X = \log_{10} d$, com d expresso em UA (0,0051172 $\leq d < 61$), enquanto y representa n_p , B, v ou T_p dependendo dos coeficientes a_j escolhidos na tabela 2. Por exemplo, na órbita da Terra (d = 1 UA) temos os valores: $n_p = 6,23$ cm⁻³; B = 6,0 nT; v = 424 km/s e $T_p = 7,21 \times 10^4$ K. A variação desses parâmetros ao longo da eclíptica é ilustrada na figura 5.

Quanto aos parâmetros das outras partículas do vento solar (elétrons e partículas alfa) são feitas as mesmas suposições de Kimura e Mann (1998), a velocidade e tempera-

Coeficiente	$n_0~({ m cm^{-3}})$	B (nT)	$v({ m km/s})$	$T(\mathrm{K})$
a_1	0,7766	0,5	2,651	4,858
a_2	-1,934	-1, 1	0, 0	-0,668
a_3	0,01823	0,2815	-0,0239	$-4,690 \times 10^{-42}$
a_4	-2,245	0,875	-1,836	-40,910

Tabela 2 – Coeficientes de ajuste para os parâmetros físicos do vento solar. Fonte: Köhnlein (1996).



Figura 5 – Evolução radial dos parâmetros físicos do vento solar de acordo com a modelagem de Köhnlein (1996).

tura destas partículas são iguais a dos prótons enquanto a densidade de partículas alfa é considerada como sendo 5% da densidade de prótons do vento solar, ou seja, $n_{\alpha} = 0,05 n_p$. A condição de quase neutralidade (equação 1.1) estabelece a densidade de elétrons como $n_e = n_p + 2 n_{\alpha}$.

Além do plasma ejetado pelo Sol, grãos de poeira também fazem parte do meio interplanetário. A poeira que popula o Sistema Solar é responsável pela luz zodiacal (figura 1a). Acredita-se que grande parte da poeira interplanetária é produzida pela erosão e colisão de asteróides e por cometas que liberam gás e poeira quando viajam perto do Sol. Suas composições e tamanhos são bastante variados, tais propriedades têm papéis importantes no carregamento elétrico e, consequentemente, na dinâmica desses grãos. Segundo Krivov et al. (1998) os materiais dos grãos que chegam mais próximos do Sol são, em sua maioria, silicatos (dielétricos com menor absorção de luz) e carbono (grande absorção de luz). Os parâmetros desses materiais são mostrados na tabela 1 e o fator κ que entra na expressão (2.10) para a corrente fotoelétrica é considerado 0, 1 para o silicato e 1,0 para o carbono.

Para um grão de poeira imerso no vento solar, a variação de seu potencial elétrico ao longo do tempo será, de acordo com (2.1),

$$a\frac{d\phi}{dt} = I_{abs,e} + I_{abs,p} + I_{abs,\alpha} + I_{\nu} + I_{sec,e} + I_{sec,p} + I_{sec,\alpha} .$$
(3.3)

A figura 6 mostra a solução numérica da equação (3.3) utilizando o método de Runge Kutta de quarta ordem (Press et al., 1992) para grãos de silicato (linha sólida) e carbono



Figura 6 – Evolução temporal do potencial de grãos de silicato (linha sólida) e carbono (tracejada) com raios de 1 μ m e 0, 1 μ m a uma distância d = 1 UA.

(tracejada) inicialmente descarregados na órbita da Terra em dois casos: grãos com raio $a = 1 \,\mu\text{m}$ e $a = 0, 1 \,\mu\text{m}$.

Observa-se que ambos materiais atingem um valor de equilíbrio para o potencial, sendo que o grão de carbono o faz em menos tempo que o de silicato. Além disso, o material da poeira também afeta no valor final do potencial, sendo maior para o grão de carbono (cerca de 1, 14 V) do que para o de silicato (aproximadamente 0, 79 V). Nesse ambiente, o raio do grão não alterou significativamente o potencial de equilíbrio, porém, as partículas de menor raio aumentaram em aproximadamente dez vezes o tempo de carregamento mostrando que grãos maiores alcançam seu potencial de equilíbrio mais rapidamente.

Também é válido analisar os valores das correntes de carregamento separadamente a fim de ter uma noção de qual dos processo é dominante nessa região. A figura 7 apresenta a evolução das principais correntes para um grão de silicato com raio $a = 1 \,\mu\text{m}$ a uma distância d = 1 UA. Nesse ambiente, o processo de fotoionização domina de modo que a soma de todas correntes ΣI_k segue a mesma forma da curva da corrente I_{ν} . Conforme o grão se carrega positivamente, a corrente fotoelétrica diminui pois, ao ficar mais positivo, menos elétrons conseguem escapar do grão devido à atração eletrostática. As correntes finalmente ficam constantes no ponto em que o potencial atinge seu equilíbrio e, portanto, $\Sigma I_k = 0$.

Enquanto o gráfico 6 falha em mostrar uma relação perceptível entre o raio a da poeira e seu potencial de equilíbrio, casos em que o grão se encontra mais próximo do Sol revelam que o raio é capaz de alterar significativamente o potencial final da partícula.



Figura 7 – Evolução temporal das principais correntes de carregamento para um grão de silicato $(a = 1 \,\mu\text{m})$ a uma distância d = 1 UA.



Figura 8 – Potencial de equilíbrio de grãos de silicato (linha sólida) e carbono (tracejada) com raios de $1 \,\mu m$ (azul), 10 nm (preto) e 5 nm (vermelho) como função da distância heliocêntrica.

A figura 8 mostra as raízes da equação (3.3) quando $d\phi/dt = 0$, ou seja, o potencial no qual as correntes se igualam em magnitude e atinge um valor de equilíbrio. As raízes são calculadas pelo método da bissecção (Press et al., 1992) para grãos de silicato (linha sólida) e carbono (tracejada) com raios de 1 μ m, 10 nm e 5 nm. Nessa região se observa uma dependência maior do potencial final com o tamanho do grão de poeira, onde partículas

menores atingem um maior potencial de equilíbrio podendo chegar a aproximadamente 20 V para um grão de silicato de 5 nm a 1,1 R_{\odot} de distância do Sol.

A dependência do valor final do potencial com a distância ao Sol é uma consequência direta das variações dos parâmetros do plasma (figura 5). Apesar da grande variação para órbitas menores que a da Terra, a figura 8 mostra que os potenciais dos grãos se mantém praticamente constantes para grandes distâncias do Sol. Os resultados também mostram que os grãos de poeira imersos no vento solar, ou seja, no meio interplanetário, resultam sempre positivamente carregados.

A fim de comparação, Krivov et al. (1998) calculou o potencial de equilíbrio para grãos de silicato e carbono na região 2 R_o $\leq d \leq 10$ R_o encontrando valores entre 11,5 V e 6,5 V para grãos esféricos micrométricos, como mostra a figura 9 (linhas nominadas "compact"), concordando de forma satisfatória com os resultados para grãos de 1 μ m calculados na figura 8. Ainda, Kimura e Mann (1998) obtiveram um potencial constante para d > 1 UA de aproximadamente 3 V para ambos materiais; os valores obtidos aqui não coincidem exatamente com esse trabalho, pois nele é utilizado um modelo de corrente de emissão fotoelétrica mais sofisticado do que a expressão (2.10). Porém, o potencial de equilíbrio se mostrou praticamente constante para distâncias além da órbita terrestre, concordando com o trabalho citado.



Figura 9 – Gráfico adaptado de Krivov et al. (1998) mostrando a variação no potencial de equilíbrio de grãos de poeira de carbono e silicato como função da distância ao Sol. Grãos BPCA (ballistic particle-cluster aggregate) são agregados de poeira com formas complexas enquanto os grãos "compact" são grãos esféricos (como os utilizados neste trabalho) de tamanho micrométrico.

3.2 Encélado

A lua geologicamente ativa Encélado orbitando Saturno ($d \simeq 9.5$ UA) a uma distância de aproximadamente 4 R_S (R_S $\simeq 60269$ km) alimenta o anel E de Saturno, o maior em extensão (figura 10a), com pequenas partículas de poeira, principalmente cristais de gelo, e cria um ambiente multiespécie de plasma. Durante sua passagem perto da lua em 2005, a sonda Cassini revelou que Encélado esconde um grande oceano de água líquida salgada sob sua superfície e observou jatos, contendo especialmente partículas de gelo, sendo ejetados ao longo de listras em seu polo sul (figuras 10b e 10c).





Figura 10 - (a) Imagem artística do sistema de anéis de Saturno.¹ (b) Foto da lua Encélado mostrando listras em sua superfície por onde partículas de gelo são ejetadas perto da região de seu polo sul.² (c) Gêiseres ricos em água ejetados pelas listras da superfície de Encélado.³

¹Fonte: <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA03550>. Acessado em 27 de outubro de 2018.

²Fonte: <https://apod.nasa.gov/apod/ap180701.html>. Acessado em 27 de outubro de 2018.

³Fonte: <https://apod.nasa.gov/apod/ap170416.html>. Acessado em 27 de outubro de 2018.

O anel E consiste de partículas de gelo com tamanho submicrométrico, em sua maioria. O anel é mais brilhante na órbita de Encélado (figura 1c), o qual é a principal fonte das partículas de gelo, tornando interessante o estudo dos grãos de poeira em sua vizinhança. Shafiq et al. (2011) mostra, a partir de dados coletados pela Cassini, que a densidade total dos grãos de gelo de tamanho $a > 0, 03 \,\mu$ m na vizinhança de Encélado é da ordem de 10^2 cm^{-3} , caindo para $6, 3 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-3}$ quando considerado $a > 1 \,\mu$ m.

Farrell et al. (2009) mostraram que um grande declínio na densidade eletrônica, observado pela Cassini em 2008 nas proximidades de Encélado, é provavelmente explicado pela captura de elétrons por grãos de gelo. A figura 11, retirada da referência citada, mostra claramente um declínio durante o percurso da sonda, tal qual ocorre em sua passagem mais próxima (52 km acima da superfície da lua). Ou seja, a alta densidade de partículas de gelo é capaz de alterar significativamente a densidade do plasma, sugerindo que uma abordagem para plasma empoeirado ($a << r_d$) talvez fosse mais fiel ao ambiente em questão. Porém, continuaremos a usar aqui a suposição de grão isolado o qual nos fornece uma boa estimativa da interação do grão de gelo com o plasma, especialmente se considerado na periferia da nuvem de paritículas que envolve Encélado, onde a densidade de poeira é menor.

Yaroshenko et al. (2014) também fez uso dos dados da Cassini para avaliar os parâmetros do plasma nas proximidades de Encélado. Notavelmente, verificou-se que além dos elétrons de baixa temperatura (1 - 2 eV), denominados agora *elétrons frios*, também



Figura 11 – Gráfico de Farrell et al. (2009) mostrando a densidade eletrônica (em cm⁻³ e m⁻³) medida pela sonda Cassini durante sua trajetória por Encélado. O declínio observado corresponde a sua passagem mais próxima da lua (52 km de sua superfície).

existe uma pequena fração de *elétrons quentes* com temperatura podendo chegar a 10^3 eV ($\simeq 1, 2 \times 10^8$ K). Ainda, constatou-se outra espécie de íons presente denominada grupo da água (O⁺, OH⁺, H₂O⁺, H₃O⁺) ou "íons pesados" devido a sua grande massa ($m_w \simeq 18$ u) comparado com a outra espécie de íons existente, os prótons. Em termos de densidade, grande maioria do plasma é composto por partículas (ou moléculas) neutras de massa semelhante ao grupo da água (O, OH, H₂O, H₃O) mas cerca de 100 vezes mais frios, sua densidade fica entre $10^3 - 10^8$ cm⁻³. A partir da ionização dessas moléculas neutras surgem os chamados "íons recém nascidos" que mais tarde acabam por fazer parte do grupo da água, entretanto, deve-se considerar tais íons recém formados como uma espécie distinta pois eles não entram em equilíbrio térmico com o grupo da água na escala de tempo de carregamento do grão, possuindo temperatura próxima ao gás neutro do qual se formaram (0,02 eV) ao invés da temperatura do grupo da água (30 eV) enquanto o grão se carrega.

A tabela 3 mostra os dados observados pela Cassini para o plasma juntamente com os valores base assumidos nos cálculos. A equação 1.1 de quase neutralidade, juntamente com os valores base da tabela, nos fornece a densidade de íons do grupo da água como sendo

$$n_{ef} + n_{eh} = n_{w} + n_{p} + n_{b}$$

$$(1+0,005)n_{ef} = (1+0,1+0,08)n_{w}$$

$$n_{w} = \frac{1,005}{1.18}n_{ef}.$$

Com esses valores, juntamente com a medida da velocidade relativa do plasma $(w \simeq 25 \text{ km/s})$, podemos estudar o carregamento dos grãos de gelo encontrados nas proximidades de Encélado. Sendo que, nesse caso, teremos na equação (2.1) uma corrente de absorção e emissão secundária para cada uma das espécies desse plasma, além da

Parâmetro	Observações	Valor Base
Densidade de elétrons frios n_{ef} (cm ⁻³)	$40 \le n_{ef} \le 70$	60
Temperatura elétrons frios $T_{ef}(eV)$	$1 \le T_{ef} \le 2$	1
Fração de elétrons quentes $f_{eh} = n_{eh}/n_{ec}$	$0,01\% \le f_{eh} \le 1\%$	0,5%
Temperatura elétrons quentes $T_{eh}(eV)$	$50 \le T_{eh} \le 10^3$	100
Temperatura grupo da água $T_{\rm w}({\rm eV})$	$23 \le T_{\rm w} \le 35$	30
Fração de prótons $f_p = n_p/n_w$	$8\% \le f_p \le 10\%$	10%
Temperatura prótons $T_p(eV)$	$2 \le T_p \le 4$	3
Fração íons recém formados $f_b = n_b/n_w$	pprox 8%	8%
Temperatura íons recém formados $T_b(eV)$	$T_b \ge 0,02$	0,02

Tabela 3 – Parâmetros do plasma nas proximidades de Encélado. Fonte: Yaroshenko et al. (2014).

corrente da fotoionização, ou seja,

$$a\frac{d\phi}{dt} = I_{abs,ef} + I_{abs,eh} + I_{abs,w} + I_{abs,p} + I_{abs,b} + I_{\nu} + I_{sec,ef} + I_{sec,eh} + I_{sec,w} + I_{sec,p} + I_{sec,b} \ .$$

A figura 12 mostra a solução numérica da equação acima para um grão de gelo com raios 1 μ m, 0, 1 μ m e 0, 03 μ m. Como no caso do vento solar, o tamanho do grão de poeira altera significativamente o tempo de carregamento enquanto seu potencial de equilíbrio apresenta pequenas variações. O potencial nesse caso é sempre negativo ao contrário do que sugere a figura 8 que mostra um potencial positivo ao longo de todo o Sistema Solar até 61 UA. Ou seja, os parâmetros do plasma nas proximidades de Encélado têm papel importante ao remover a dominância da corrente fotoelétrica mudando drasticamente a dinâmica do processo de carregamento.

Olhando para a equação de carregamento, nota-se apenas dois processos capazes de carregar negativamente o grão de poeira, absorção de elétrons frios $(I_{abs,ef})$ e absorção de elétrons quentes $(I_{abs,eh})$, dominando sobre todos os outros processos. De fato, analisando os resultados numéricos descobre-se que $I_{abs,ef}$ é a corrente (negativa) de maior magnitude no potencial de equilíbrio, seguida de $I_{sec,eh}$ (positiva) e $I_{abs,eh}$ (negativa). Este resultado está de acordo com a explicação de Farrell et al. (2009) para o declínio da densidade eletrônica no gráfico 11, onde é argumentado que tal variação se deve ao fato de os elétrons do plasma serem capturados pelas partículas de gelo, o que as deixaria negativamente carregadas.

Como as populações de elétrons têm grande relevância no carregamento elétrico é interessante estudar a dependência do potencial de equilíbrio do grão de gelo com os



Figura 12 – Evolução temporal do potencial elétrico de um grão de gelo com raios $1 \,\mu\text{m}$, $0, 1 \,\mu\text{m}$ e $0, 03 \,\mu\text{m}$ nas proximidades de Encélado.



Figura 13 – Potencial de equilíbrio de um grão de gelo com tamanhos $0, 1 \,\mu\text{m} = 0, 03 \,\mu\text{m}$ em função da fração (esquerda) e da temperatura (direita) de elétrons quentes no plasma. Os pontos nos gráficos indicam o resultado quando utilizado os valores base da tabela 3.

parâmetros (densidade e temperatura) dessas espécies, especialmente a de elétrons quentes, pois se trata da população mais energética do plasma e possui um grande intervalo nos parâmetros observados pela Cassini. A figura 13 mostra o potencial de equilíbrio para dois tamanhos de grãos de gelo, $0, 1 \,\mu\text{m} = 0, 03 \,\mu\text{m}$, em função da densidade e temperatura dos elétrons quentes. Em ambos os casos o acréscimo nessas quantidades promove um aumento no potencial final do grão pois a corrente de emissão secundária $I_{sec,eh}$ cresce em magnitude já que essa espécie do plasma é bastante energética e capaz de arrancar elétrons secundários dos grãos, sendo mais intensa para grãos menores. A variação dos parâmetros das outras espécies do plasma também acarreta em uma mudança no potencial final, porém, nenhum dos casos é tão acentuado como o dos elétrons quentes.

Misra et al. (2012) divulgaram observações do potencial dos grãos de gelo nas proximidades de Encélado, com valores entre -2 V e -1 V. Sendo assim, os resultados obtidos neste trabalho para a lua de Saturno concordam de forma satisfatória com as observações e também com os cálculos semelhantes feitos nas referências mencionadas ao longo desta seção, diferenciando um pouco nos valores finais para o potencial de equilíbrio por utilizarem modelos matemáticos diferentes para as correntes de carregamento.

3.3 Magnetosfera de Júpiter

Júpiter possui a maior e mais forte magnetosfera do Sistema Solar com valores típicos de campo magnético cerca de uma ordem de grandeza maior que o campo magnético terrestre, estendendo-se por sete milhões de quilômetros em direção ao Sol e quase até a órbita de Saturno na direção oposta. Apesar da existência desse campo intenso, Chang e Spariosu (1993) mostraram que o carregamento de um grão de poeira não é significativamente influenciado pela presença de um campo magnético externo. Porém, ele é capaz de alterar a dinâmica de um grão carregado, sendo responsável por ejetar correntes de partícula de poeira para o meio interplanetário (Horanyi et al., 1993). Embora em geral o formato da magnetosfera de Júpiter seja parecido com o da Terra, delineado pelo vento solar, nas proximidades do planeta sua estrutura é bastante diferente da terrestre em parte por causa da presença do satélite vulcanicamente ativo Io. Orbitando a uma distância de aproximadamente 5,9 R_J ($R_J = 71492 \text{ km}$), estima-se que a lua possua cerca de 400 vulcões, muitos deles ativos, alimentando o plasma na magnetosfera jupteriana com dióxido de enxofre (SO_2) , mais tarde dissociando-se em íons O^+ , O^{++} , S^+ , S^{++} , S^{+++} , além de partículas de NaCl. Como resultado, forma-se um toroide na órbita de Io composto por um plasma relativamente frio com íons de oxigênio, enxofre e sódio (figura 14).



Figura 14 – Imagem de telescópio terrestre do toroide de plasma de Io, mostrando emissão de S⁺. Fonte: <https://science.nasa.gov/science-news/science-at-nasa/1999/ast16sep99_1>. Acessado em 02 de novembro de 2018.

Para estudar o carregamento de grãos de poeira nesse ambiente, utiliza-se o modelo DG83 de Divine e Garrett (1983) para o plasma na magnetosfera de Júpiter na região 4 < $R_J < 8$. Nele considera-se uma população de elétrons e prótons quentes com densidades $n_{eh} = n_{ph} \simeq 2,63 \text{ cm}^{-3}$ e temperaturas $k_B T_{eh} = 1$ keV e $k_B T_{ph} = 30$ keV, junto com um plasma frio composto por elétrons (n_{ef}) e os íons O⁺, O⁺⁺, S⁺, S⁺⁺⁺, S⁺⁺⁺ e Na⁺. A temperatura dos íons frios é a mesma para os elétrons frios e depende da distância r do

$r(\mathrm{R_J})$	$\log N~({ m cm^{-3}})$	$\log k_B T_{ef}~(\mathrm{eV})$
3,8	1,55	1,67
4,9	2,75	-0,31
5, 1	2,91	-0, 18
5,3	3,27	0,37
5, 5	2,88	0,92
5,65	3,57	1, 15
5, 8	3, 31	1,33
5,9	3,35	1,54
6, 4	3, 18	1,63
7, 4	2,78	1,67
7,9	2,25	1,75
10,0	1,48	2,00

Tabela 4 – Parâmetros para as espécies do plasma frio de Júpiter. Interpolação linear entre os valores de linhas adjacentes é recomendado. Fonte: Divine e Garrett (1983).

planeta (tabela 4) enquanto suas densidades são definidas por

$$n_k = g_k N \exp\left[-\left(\frac{r\lambda - z_0}{H}\right)^2\right] , \qquad (3.4)$$

com

$$\begin{split} H &= 0, 2 \mathrm{R}_{\mathrm{J}} \left(\frac{k_B T_{ef}}{1 \ \mathrm{eV}} \right) \ , \\ z_0 &= 0, 123 \ r \cos(l-21^\circ) \ , \end{split}$$

sendo N e $k_B T_{ef}$ obtidos na tabela 4, r é a distância, λ a latitude e l a longitude no sistema de coordenadas de Júpiter, enquanto as constantes g_k variam de acordo com a espécie em questão e a região em estudo, como mostra a tabela 5. A figura 15 ilustra como esses parâmetros variam de acordo com a distância de Júpiter para uma latitude $\lambda = 0^\circ$ e longitude $l = 110^\circ$ onde a distribuição do plasma é aproximadamente simétrica (Divine; Garrett, 1983).

	$3, 8 < r < 5, 5(R_J)$	$5, 5 < r < 7, 9(R_J)$
$g_0 ({\rm e}^-)$	1,00	1,00
$g_1 (p^+)$	0,00	0,00
$g_2 ({\rm O}^+)$	0, 20	0,06
$g_3 (O^{++})$	0,02	0,08
$g_4 ({\rm S}^+)$	0,70	0, 24
$g_5 ({\rm S}^{++})$	0,03	0, 25
$g_6 (\mathrm{S}^{+++})$	0,00	0,01
$g_7 (\mathrm{Na^+})$	0,00	0,01

Tabela 5 – Valores dos coeficientes g_k para as espécies do plasma frio em Júpiter. Fonte: Divine e Garrett (1983).



Figura 15 – (a) Temperaturas (linhas tracejadas) e densidades (linhas sólidas) das populações de elétrons e prótons na magnetosfera de Júpiter ($\lambda = 0^{\circ}$, $l = 110^{\circ}$). (b) Densidades das populações de íons frios. Suas temperaturas são as mesmas para os elétrons frios $(k_B T_{ef})$.

Deste modo, pode-se avaliar o potencial elétrico de equilíbrio para as partículas de NaCl ($\delta_m = 6, E_m = 600 \text{ eV}, \kappa = 1$) originadas dos vulcões de Io. A figura 16 mostra os potenciais calculados para grãos de diferentes tamanhos. Há uma clara dependência do sinal do potencial de equilíbrio com os parâmetros do plasma, podendo chegar a $\phi_{eq} \simeq$ -12 V para partículas micrométricas na região próxima à órbita de Io e $\phi_{eq} \simeq 8 \text{ V}$ em regiões mais afastadas onde a temperatura dos elétrons frios atinge seu valor máximo. As maiores correntes, em magnitude, nesse caso são as de absorção (corrente negativa) e emissão secundária (positiva) de elétrons frios, respectivamente. Sendo assim, a variação do potencial nessa região está vinculada principalmente à temperatura e densidade dos elétrons frios. Como no caso de Encélado, e contrário ao caso do vento solar, aqui a corrente de fotoionização não é de grande importância e o potencial do grão de poeira não deve mudar significativamente caso se encontre na sombra de Júpiter, por exemplo.



Figura 16 – Potencial de equilíbrio para grãos de NaCl de diferentes tamanhos como função da distância de Júpiter.

O resultado obtido concorda de forma satisfatória com o cálculo feito por Dzhanoev et al. (2016), o qual utiliza um modelo mais sofisticado para a corrente de emissão secundária, com resultados mais ajustados a experimentos. Por outro lado, ao comparar os resultados obtidos aqui com o cálculo de Horányi (1996) (que faz uso da expressão derivada por Sternglass (1957) para a produção de elétrons secundários, abordagem que assume o grão de poeira na forma de uma placa semi infinita onde elétrons secundários são emitidos no mesmo ponto da superfície do grão onde ocorreu a colisão com a partícula primária, conforme discutido na seção 2.3) nota-se uma diferença considerável no potencial de equilíbrio próximo a Io, chegando a aproximadamente -35 V para um grão de 1 μ m (figura 17) enquanto aqui o potencial mínimo é em torno de -12V. Essa discrepância pode ser uma reflexão do modelo da corrente de emissão secundária utilizado; neste trabalho, assim como no de Dzhanoev et al. (2016), considera-se o *efeito da partícula pequena* (elétrons secundários podem deixar o grão em qualquer ponto de sua superfície) o qual tende a aumentar a produção de elétrons secundários resultando em um potencial final maior.



Figura 17 – Gráfico de Horányi (1996) para o potencial de equilíbrio para grãos de 1 μ m como função da distância de Júpiter. A linha sólida indica o cálculo feito para produção máxima de elétrons secundários $\delta_m = 1$ enquanto a tracejada para $\delta_m = 2$ em seu formalismo ($E_m = 500 \text{ eV}$).

4 Conclusões

Um modelo numérico foi usado para analisar o carregamento de um grão de poeira esférico isolado em diferentes regiões do Sistema Solar sujeito à absorção de partículas do plasma, emissão fotoelétrica e emissão secundária de elétrons. Em geral, foi observado que o carregamento do grão está fortemente relacionado aos parâmetros do plasma em questão, assim como as propriedades da partícula de poeira.

Para o modelo do vento solar de Köhnlein (1996), foi mostrado que o tempo necessário para a poeira atingir um potencial estacionário é de alguns minutos para grãos micrométricos, aumentando em dez vezes o tempo de carregamento para um grão dez vezes menor. O tamanho também teve influência no valor final para o potencial de equilíbrio quando o grão se encontra próximo ao Sol, porém, para órbitas além de 1 UA o potencial final não varia significativamente para diferentes tamanhos. O processo de carregamento por fotoionização é dominante para este modelo do vento solar, resultando em um potencial positivo para o grão de poeira independente do tamanho e distância ao Sol.

Utilizando observações da sonda Cassini, vimos que nas proximidades de Encélado as correntes de absorção de elétrons e emissão secundária são dominantes, resultando em um potencial negativo para um grão de gelo. Este valor para o potencial estacionário mostrou-se sensível ao tamanho do grão e aos parâmetros da população de elétrons quentes, como densidade e temperatura, sendo que esta última pode variar de 50 a 10³ eV.

No modelo de Divine e Garrett (1983) para os parâmetros do plasma da magnetosfera de Júpiter há uma grande variadade de espécies de íons originadas da ionização do dióxido de enxofre expelido pela lua Io. A solução numérica mostrou que o potencial dos grãos de NaCl muda de sinal ao longo da distância na magnetosfera, sendo negativo para regiões próximas à órbita de Io e positivo em outras regiões. Essa mudança no potencial de equilíbrio se deve especialmente à variação dos parâmetros dos elétrons frios e, consequentemente, das correntes de absorção e emissão secundária dessas espécies.

No geral, os resultados obtidos neste trabalho concordam de forma satisfatória com cálculos e dados observacionais encontrados na literatura. Porém, modelos mais sofisticados como o de Kimura e Mann (1998) para a corrente fotoelétrica e o de Dzhanoev et al. (2016) para a emissão secundária de elétrons podem ser implementados visto a importância desses processos de carregamento nos sistemas estudados. Além disso, casos como o da lua Encélado (com alta densidade de grãos de poeira) podem exigir uma abordagem para plasma empoeirado (Shukla; Mamun, 2002), apesar de o cálculo feito para grãos isolados ter se mostrado satisfatório.

Referências

Brito, G. C.; Gaelzer, R. *Processos de Carregamento Elétrico dos Grãos de Poeira Contidos no Plasma do Meio Interplanetário*. Ufpel: [s.n.], 2013. (Anais do 22° Congresso de Iniciação Científica). Citado na página 17.

Chandler, D. *MIT instrument finds surprises at solar system's edge*. 2007. http://news.mit.edu/2007/voyager-1210. [Acessado em 24-Outubro-2018]. Citado na página 20.

Chang, J.-S.; Spariosu, K. Dust particle charging characteristics under a collisionless magneto-plasma. *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 62, n. 1, p. 97–104, 1993. doi:10.1143/JPSJ.62.97. Citado na página 31.

Chen, F. F. Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. 3^a ed. ed. New York: Springer International Publishing, 2015. Citado na página 8.

Chow, V. W.; Mendis, D. A.; Rosenberg, M. Role of grain size and particle velocity distribution in secondary electron emission in space plasmas. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 98, n. A11, p. 19065–19076, 1993. doi:10.1029/93JA02014. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

D'Angelo, N. Low-frequency electrostatic waves in dusty plasmas. *Planetary and Space Science*, v. 38, p. 1143 – 1146, 1980. doi:10.1016/0032-0633(90)90022-I. Citado na página 11.

de Angelis, U. The physics of dusty plasmas. *Physica Scripta*, v. 45, n. 5, p. 465, 1992. doi:10.1088/0031-8949/45/5/010. Citado na página 10.

de Juli, M.; Falceta-Gonçalves, D.; Jatenco-Pereira, V. Alfvén waves propagation in homogeneous and dusty astrophysical plasmas. *Advances in Space Research*, v. 35, n. 5, p. 925 – 935, 2005. doi:10.1016/j.asr.2005.03.143. Citado na página 10.

Divine, N.; Garrett, H. B. Charged particle distributions in Jupiter's magnetosphere. *Journal of Geophysical Research*, v. 88, p. 6889–6903, 1983. doi:10.1029/JA088iA09p06889. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 36.

Draine, B. T.; Salpeter, E. E. On the physics of dust grains in hot gas. *The Astrophysical Journal*, v. 231, p. 77–94, 1979. doi:10.1086/157165. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

Dzhanoev, A. R. et al. Charging of small grains in a space plasma: Application to Jovian stream particles. *Astronomy and Astrophysics*, v. 591, p. A147, 2016. doi:10.1051/0004-6361/201527891. Citado 3 vezes nas páginas 18, 34 e 36.

Farrell, W. M. et al. Electron density dropout near enceladus in the context of water-vapor and water-ice. *Geophysical Research Letters*, v. 36, n. 10, 2009. doi:10.1029/2008GL037108. Citado 3 vezes nas páginas 4, 27 e 29.

Garner, R. NASA's IBEX*Observations* Pin Down Interstellar Maq-2016. https://www.nasa.gov/feature/goddard/2016/ netic Field. nasa-s-ibex-observations-pin-down-interstellar-magnetic-field. Acessado em 24-Outubro-2018]. Citado na página 20.

Goertz, C. K. Dusty plasmas in the solar system. *Reviews of Geophysics*, v. 27, n. 2, p. 271–292, 1989. doi:10.1029/RG027i002p00271. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

Gough, B. *GNU Scientific Library Reference Manual.* 3^a ed. ed. [S.l.]: Network Theory Ltd., 2009. Citado na página 19.

Graps, A. L. et al. The Charging of Planetary Rings. *Space Science Reviews*, v. 137, p. 435–453, 2008. doi:10.1007/s11214-008-9406-4. Citado na página 17.

Greicius, T. NASA Spacecraft Embarks on Historic Journey Into Interstellar Space. 2013. https://www.nasa.gov/mission_pages/voyager/voyager20130912. html. [Acessado em 24-Outubro-2018]. Citado na página 21.

Hachenberg, O.; Brauer, W. Secondary electron emission from solids. *Advances in Electronics and Electron Physics*, Academic Press, v. 11, p. 413 – 499, 1959. doi:10.1016/S0065-2539(08)60999-3. Citado na página 18.

Horányi, M. Charged dust dynamics in the solar system. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, v. 34, p. 383 – 418, 1996. doi:10.1146/annurev.astro.34.1.383. Citado 6 vezes nas páginas 4, 13, 16, 17, 34 e 35.

Horanyi, M.; Morfill, G.; Gruen, E. The dusty ballerina skirt of Jupiter. *Journal of Geophysical Research*, v. 98, p. 21, 1993. doi:10.1029/93JA02588. Citado na página 31.

Izzo de Oliveira, A.; Rockenbach, M.; Pacini, A. Raios cósmicos e a heliosfera. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 36, p. 2316, 2014. doi:10.1590/S1806-11172014000200016. Citado na página 21.

Kimura, H.; Mann, I. The electric charging of interstellar dust in the solar system and consequences for its dynamics. *The Astrophysical Journal*, v. 499, p. 454 – 462, 1998. doi:10.1086/305613. Citado 7 vezes nas páginas 11, 12, 18, 19, 21, 25 e 36.

Krivov, A.; Kimura, H.; Mann, I. Dynamics of dust near the sun. *Icarus*, v. 134, n. 2, p. 311 - 327, 1998. doi:10.1006/icar.1998.5949. Citado 3 vezes nas páginas 4, 22 e 25.

Köhnlein, W. Radial dependence of solar wind parameters in the ecliptic $(1.1R\odot - 61AU)$. Solar Physics, v. 169, n. 1, p. 209 – 213, 1996. doi:10.1007/BF00153841. Citado 4 vezes nas páginas 4, 21, 22 e 36.

Meyer-Vernet, N. Flip-flop of electric potential of dust grains in space. Astronomy and Astrophysics, v. 105, p. 98–106, 1982. Citado na página 17.

Misra, S.; Mishra, S. K.; Sodha, M. S. Charging of ice grains in saturn's e ring: theory and observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 423, n. 1, p. 176–184, 2012. doi:10.1111/j.1365-2966.2012.20774.x. Citado na página 30.

Press, W. H. et al. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing.* 2°. ed. New York: Cambridge University Press, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.

Shafiq, M. et al. Characteristics of the dust-plasma interaction near Enceladus South Pole. *Planetary and Space Science*, v. 59, p. 17–25, 2011. doi:10.1016/j.pss.2010.10.006. Citado na página 27.

39

Shukla, P. K.; Mamun, A. A. Introduction to dusty plasma physics. London: Institute of Physics Publishing, 2002. (Series in plasma physics). Citado 5 vezes nas páginas 10, 12, 14, 15 e 36.

Sternglass, E. J. Theory of Secondary Electron Emission by High-Speed Ions. Physical Review, v. 108, p. 1–12, 1957. doi:10.1103/PhysRev.108.1. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 34.

Vladimirov, S. V.; Ostrikov, K.; Samarian, A. A. Physics and Applications of Complex Plasmas. London: Imperial College Press, 2005. Citado na página 14.

Yaroshenko, V. V.; Lühr, H.; Miloch, W. J. Dust charging in the enceladus torus. Journal of Geophysical Research: Space Physics, v. 119, n. 1, p. 221-236, 2014. doi:10.1002/2013JA019213. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

Apêndices

APÊNDICE A – Solução da Integral da Corrente de Absorção

A velocidade mínima para uma partícula da espécie j atingir o grão de poeira é

$$v_{0j} = \begin{cases} 0 & , Z_j \phi \le 0 \\ v_{Cj} & , Z_j \phi > 0 \end{cases} , \quad v_{Cj}^2 = \frac{2Z_j e\phi}{m_j} = 2Z_j \psi_j v_{Tj}^2$$

onde

$$v_{Tj}^2 = \frac{k_B T_j}{m_j}$$
 , $\psi_j = \frac{e\phi}{k_B T_j}$.

Deste modo, com as definições acima e substituindo as equações (2.4) e (2.5) na corrente de absorção (equação 2.6) temos

$$\begin{split} I_{abs,j} &= \frac{2\pi Z_j e n_j \pi a^2}{(2\pi)^{3/2} v_{Tj}^3} \int_{v_{0j}}^{\infty} dv \int_0^{\pi} d\theta \left(1 - \frac{v_{Cj}^2}{v^2}\right) \exp\left[-\frac{1}{2v_{Tj}^2} (v^2 + w^2 - 2vw\cos\theta)\right] v^3 \sin\theta \\ &= \frac{2\pi Z_j e n_j \pi a^2}{(2\pi)^{3/2} v_{Tj}^3} e^{-w^2/2v_{Tj}^2} \int_{v_{0j}}^{\infty} dv v^3 \left(1 - \frac{v_{Cj}^2}{v^2}\right) e^{-v^2/2v_{Tj}^2} \left(\int_0^{\pi} d\theta e^{vw\cos\theta/v_{Tj}^2} \sin\theta\right) \\ &= \frac{2\pi Z_j e n_j \pi a^2}{(2\pi)^{3/2} v_{Tj}^3} e^{-w^2/2v_{Tj}^2} \int_{v_{0j}}^{\infty} dv v^3 \left(1 - \frac{v_{Cj}^2}{v^2}\right) e^{-v^2/2v_{Tj}^2} \left(\frac{2v_{Tj}^2}{vw}\sinh\frac{vw}{v_{Tj}^2}\right) \\ &= \frac{(2\pi)^{1/2} Z_j e n_j a^2}{v_{Tj} w} e^{-w^2/2v_{Tj}^2} \int_{v_{0j}}^{\infty} dv (v^2 - v_{Cj}^2) e^{-v^2/2v_{Tj}^2} \sinh\frac{vw}{v_{Tj}^2} \,. \end{split}$$

Definindo as variáveis adimensionais

$$\chi_j = \frac{w}{\sqrt{2}v_{Tj}} , \ u = \frac{v}{\sqrt{2}v_{Tj}} , \ u_{0j} = \frac{v_{0j}}{\sqrt{2}v_{Tj}} , \ u_{Cj}^2 = \frac{v_{Cj}^2}{2v_{Tj}^2} = Z_j \psi_j ,$$

a expressão da corrente fica

$$I_{abs,j} = 2(2\pi)^{1/2} a^2 Z_j e n_j v_{Tj} \frac{e^{-\chi_j^2}}{\chi_j} \int_{u_{0j}}^{\infty} du (u^2 - u_{Cj}^2) e^{-u^2} \sinh 2u\chi_j , \qquad (A.1)$$

$$u_{0j} = \begin{cases} 0 & , Z_j \psi_j \le 0 \\ u_{Cj} = \sqrt{Z_j \psi_j} & , Z_j \psi_j > 0 \end{cases}.$$

Primeiramente buscaremos a resolução da integral indefinida

$$\mathcal{I} = \int du (u^2 - u_{Cj}^2) e^{-u^2} \sinh 2\chi_j u , \qquad (A.2)$$

expandindo o seno hiperbólico em exponenciais podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{2} \int du (u^2 - u_{Cj}^2) e^{-u^2} (e^{2\chi_j u} - e^{-2\chi_j u}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\int du (u^2 - u_{Cj}^2) e^{-u^2 + 2\chi_j u} - \int du (u^2 - u_{Cj}^2) e^{-u^2 - 2\chi_j u} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{K}_+ - \mathcal{K}_-) , \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{K}_{\pm} = \int du u^2 e^{-u^2 \pm 2\chi_j u} - u_{Cj}^2 \int du e^{-u^2 \pm 2\chi_j u} .$$
 (A.3)

As integrais em (A.3) podem ser encontradas em tabelas ou, ainda, resolvidas em websites como o Wolfram|Alpha¹, elas têm como resultado

$$\int du u^2 e^{-u^2 \pm 2\chi_j u} = \mp \frac{\sqrt{\pi}}{4} (2\chi_j^2 + 1) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j \mp u) \mp \frac{1}{2} e^{-u^2 \pm 2\chi_j u} (\chi_j \pm u) + C$$
$$\int du e^{-u^2 \pm 2\chi_j u} = \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j \mp u) + C ,$$

onde C é uma constante definida pelas condições iniciais e $\operatorname{erf}(x)$ é a função erro definida como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt .$$

Agora basta aplicar os limites na integral (A.2) e, consequentemente, em (A.3) utilizando os resultados obtidos para substituir na equação da corrente (A.1). No caso em que $Z_j \psi_j \leq 0$ temos que $u_{0j} = 0$ e, portanto,

$$\int_0^\infty du (u^2 - u_{Cj}^2) e^{-u^2} \sinh 2\chi_j u = \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + \sqrt{\pi} (1 + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2) e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2] e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2] e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2] e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + 2\chi_j^2 - 2u_{Cj}^2] e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}(\chi_j)] + \frac{1}{4} [2\chi_j + 2\chi_j^2] e^{\chi_j^2} \operatorname{erf}$$

substituindo em (A.1) e lembrando que $u_{Cj}^2 = Z_j \psi_j$, a corrente de absorção fica, nesse caso,

$$I_{abs,j} = \sqrt{8\pi} a^2 n_j Z_j e v_{Tj} [F_1(\chi_j) - Z_j \psi_j F_2(\chi_j)] \quad , p/ \quad Z_j \psi_j \le 0 \; , \tag{A.4}$$

 com

$$F_{1}(\chi) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}(1+2\chi^{2})\frac{\operatorname{erf}(\chi)}{\chi} + \frac{1}{2}e^{-\chi^{2}} ,$$

$$F_{2}(\chi) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\operatorname{erf}(\chi)}{\chi} .$$
(A.5)

Da mesma forma para o caso em que $Z_j\psi_j > 0$, agora com o limite inferior $u_{0j} = u_{Cj} = \sqrt{Z_j\psi_j}$, obtem-se para a corrente de absorção, com um pouco mais de trabalho,

$$I_{abs,j} = \sqrt{8\pi} a^2 n_j Z_j e v_{Tj} [G_1(\chi_j) - Z_j \psi_j G_2(\chi_j)] \quad , p/ \quad Z_j \psi_j > 0 \; , \tag{A.6}$$

¹https://www.wolframalpha.com/

sendo

$$G_{1}(\chi) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (1 + 2\chi^{2}) \frac{\operatorname{erf}(u_{Cj} + \chi) + \operatorname{erf}(\chi - u_{Cj})}{2\chi} + \frac{1}{4} \left\{ e^{-(\chi - u_{Cj})^{2}} + e^{-(\chi + u_{Cj})^{2}} \right\} ,$$

$$G_{2}(\chi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\operatorname{erf}(u_{Cj} + \chi) + \operatorname{erf}(\chi - u_{Cj})}{2\chi} - \frac{1}{2} \frac{e^{-(\chi - u_{Cj})^{2}} - e^{-(\chi + u_{Cj})^{2}}}{2\chi u_{Cj}} .$$
(A.7)

As funções $F \in G$ são problemáticas quando $\chi_j \approx 0$, ou seja, quando a velocidade grão de poeira relativa ao plasma (w) for aproximadamente nula. Sendo assim, faz-se uso da série de Taylor de $\operatorname{erf}(x)$,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \chi^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\pi} \left(\chi - \frac{\chi^3}{3} + \frac{\chi^5}{10} + \dots \right) \;,$$

deste modo, a função $F_2(\chi)$, por exemplo, pode ser escrita da forma equivalente

$$F_2(\chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \chi^{2n}}{n!(2n+1)} = \left(1 - \frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi^4}{10} + \dots\right) \ .$$

Como a função $G_2(\chi)$ sofre com problemas de singularidade também para o caso de $u_{Cj} = \sqrt{Z_j \psi_j} \approx 0$, ou seja, quando o potencial é aproximadamente nulo, é conveniente expressá-la na forma

$$Z_j \psi_j G_2(\chi_j) = \sqrt{Z_j \psi_j} \tilde{G}_2(\chi_j) ,$$

sendo

$$\tilde{G}_2(\chi_j) = \sqrt{Z_j \psi_j} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\operatorname{erf}(\chi_j + u_{Cj}) + \operatorname{erf}(\chi_j - u_{Cj})}{2\chi_j} - \frac{1}{2} \frac{e^{-(\chi_j - u_{Cj})^2} - e^{-(\chi_j + u_{Cj})^2}}{2\chi_j}$$

Agora, para maior conveniencia, define-se as funções auxiliares

$$g(x,y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{2x} [\operatorname{erf}(x+y) + \operatorname{erf}(x-y)] = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}(y)}{(2n+1)!} x^{2n} , \qquad (A.8)$$

$$h(x,y) = \frac{e^{-(x-y)^2} - e^{-(x+y)^2}}{2x} = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}(y)}{(2n+1)!} x^{2n} , \qquad (A.9)$$

onde os $H_n(y)$ são os polinômios de Hermite.

Assim, podemos expressar as funções F e G para o caso em que χ é muito pequeno:

$$F_{1}(\chi) = \frac{1}{2}(1+2\chi^{2})g(\chi,0) + \frac{1}{2}e^{-\chi^{2}},$$

$$F_{2}(\chi) = g(\chi,0),$$

$$G_{1}(\chi) = \frac{1}{2}(1+2\chi^{2})g(\chi,u_{Cj}) + \frac{1}{4}\left[e^{-(\chi-u_{Cj})^{2}} + e^{-(\chi+u_{Cj})^{2}}\right],$$

$$\tilde{G}_{2}(\chi) = u_{Cj} g(\chi,u_{Cj}) - \frac{1}{2}h(\chi,u_{Cj}).$$
(A.10)

A corrente de absorção fica então

$$I_{abs,j} = \sqrt{8\pi}a^2 n_j Z_j e v_{Tj} H(\chi_j) , \qquad (A.11)$$

 com

$$H(\chi_j) = \begin{cases} F_1(\chi_j) - Z_j \psi_j F_2(\chi_j) &, Z_j \psi_j \le 0\\ G_1(\chi_j) - \sqrt{Z_j \psi_j} \tilde{G}_2(\chi_j) &, Z_j \psi_j > 0 \end{cases}$$
(A.12)