

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

# **Integrabilidade em Modelos de Tunelamento Quântico**

Daniel Schneider Grün

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para a  
obtenção do grau de Bacharel em Física

Orientadora: Prof. Dra. Angela Foerster

Coorientador: Prof. Dr. Leandro Hayato Ymai

Porto Alegre - RS

Novembro de 2018

# Agradecimentos

Primeiramente, devo agradecer aos meus pais, Egídio e Joana, e aos meus irmãos, Thalita e Felipe. Sem vocês, nada disso seria possível. Vocês são exemplos pra mim e eu me sinto honrado de ter vocês em minha vida. Agradeço também à Vitória, minha namorada: tua dedicação, tua sensibilidade e teu desejo por um mundo melhor me inspiram a cada dia.

Agradeço ao meu professor de Física do colégio, Prof. Fuchs, por toda a curiosidade despertada em mim acerca desse fascínio que é a Física. Teu empenho em ensinar às pessoas as maravilhas dessa ciência é contagiante e espero, um dia, dominá-la tanto quanto tu.

À minha orientadora, Angela, e a todos os que compõem o seu grupo de Física Matemática, minha mais profunda gratidão e admiração. Vocês foram muito acolhedores e pacientes comigo durante esse trajeto inicial, e eu sou muito grato por isso.

Agradeço também aos meus colegas e amigos pelas discussões, fossem elas de cunho científico ou teológico. A forma saudável de discussão é certamente um dos únicos caminhos possíveis para o desenvolvimento intelectual das pessoas.

Por fim, Àquele que É: meu agradecimento pela existência, em detrimento da inexistência.

# Resumo

Apresentamos uma família de modelos quânticos integráveis que descrevem o tunelamento de bósons em diferentes condensados de Bose-Einstein (ou “poços”). Essa família é descrita por um hamiltoniano geral, cuja formulação matemática permite encontrar seus autovalores e autoestados de energia por meio de uma extensão do Método do Espalhamento Quântico Inverso. Com esse método estendido, também é possível obter todas as cargas conservadas dos sistemas, cuja interpretação física ainda não é totalmente conhecida para todos os modelos da família em questão. Em particular focamos em dois modelos de quatro poços, resolvendo os modelos, comparando as energias obtidas através da diagonalização exata do hamiltoniano e do ansatz algébrico e, finalmente, obtendo e interpretando fisicamente suas cargas conservadas.

# Abstract

We present a family of integrable quantum models which describe the tunneling of bosons in different Bose-Einstein Condensates (or “wells”). This family is described by a hamiltonian, whose mathematical formulation allows us to find the eigenvalues and eigenstates through an extension of the Quantum Inverse Scattering Method. With this extended method, it is also possible to get all the conserved charges of the systems, whose physical interpretation is not completely known yet for all the models of the family. In particular we focus on two four wells models, solving them, comparing the energies obtained through the exact diagonalization of the hamiltonian and the algebraic ansatz and, finally, obtaining and giving a physical interpretation of their conserved charges.

*“(...) et ex Patre natum ante omnia sæcula.”*

Symbolum Nicænum

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Modelos integráveis de Tunelamento Quântico</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Integrabilidade</b>	<b>14</b>
3.1	Revisão de Integrabilidade Clássica . . . . .	14
3.2	Integrabilidade Quântica . . . . .	16
3.3	Método do Espalhamento Quântico Inverso (Estendido) . . . . .	19
3.4	Método Algébrico do Ansatz de Bethe . . . . .	20
3.5	Cargas Conservadas . . . . .	24
3.6	Modelo de Três Poços . . . . .	25
3.6.1	Solução exata . . . . .	25
3.6.2	Comparativo entre MEQI e Diagonalização Exata . . . . .	26
3.6.3	Carga Conservada . . . . .	27
3.7	Modelo de quatro poços fechado . . . . .	28
3.7.1	Solução exata . . . . .	28
3.7.2	Comparativo entre MEQI e Diagonalização Exata . . . . .	29
3.7.3	Cargas conservadas . . . . .	30
3.8	Modelo de Quatro Poços Aberto . . . . .	32
3.8.1	Solução exata . . . . .	32
3.8.2	Comparativo entre MEQI e Diagonalização Exata . . . . .	33
3.8.3	Cargas Conservadas . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Interpretação Física das Cargas Conservadas</b>	<b>36</b>
4.1	Análise Semiclássica do Hamiltoniano . . . . .	36
4.2	Hamiltoniano Efetivo e Dinâmica das Cargas Conservadas . . . . .	38
4.2.1	3 Poços ( $n = 2, m = 1$ ) . . . . .	39
4.2.2	4 Poços ( $n = 2, m = 2$ ) . . . . .	42
4.2.3	4 Poços ( $n = 3, m = 1$ ) . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Integrabilidade Clássica: Pares de Lax e Matrizes R, de Monodromia e de Transferência</b>	<b>51</b>

---

<b>B Método Algébrico do Ansatz de Bethe</b>	<b>54</b>
B.1 Equação de Yang-Baxter e Regras de Comutação . . . . .	54
B.2 Os Autovalores da Matriz de Transferência . . . . .	56
<b>C Representação Matricial do Hamiltoniano</b>	<b>58</b>

# Capítulo 1

## Introdução

*Se a meta principal de um capitão fosse preservar seu barco,  
ele o conservaria no porto para sempre.*

– São Tomás de Aquino

Os modelos integráveis fazem parte de uma categoria muito especial de modelos físicos. Tendo surgido com Newton, com sua formulação da Mecânica Clássica, era do interesse dos cientistas encontrar soluções exatas para as equações de movimento de sistemas não-triviais da mecânica newtoniana. Um desses sistemas, cujas equações de movimento foram resolvidas pelo próprio Newton, é o Problema de Kepler de Dois Corpos. Posteriormente, após a generalização da Mecânica Clássica por Lagrange e Hamilton, o conceito de integrabilidade clássica foi aprimorado por Liouville, cuja descrição analítica da Mecânica deu-se através de formulações em termos do Espaço de Fases dos sistemas; com isso, os sistemas que faziam parte dessa categoria “especial” podiam ser resolvidos pelo método de quadraturas. Além disso, em conjunto com Arnold [1], Liouville [2] estabeleceu um paralelo entre a física e a geometria simplética, ramo que anteriormente era explorado exclusivamente pelos matemáticos, fazendo com que a sua formulação explorasse ainda em mais detalhes as estruturas matemáticas presentes nos modelos físicos.

Embora não haja um consenso (no sentido axiomático) acerca da integrabilidade em sistemas quânticos, seu estudo remonta ao artigo [3] de E. Schrödinger acerca de “sua” Mecânica Ondulatória. Nesse trabalho, o autor constrói as expressões que regem esses sistemas (Equação de Schrödinger) e deduz [4] os níveis de energia para o átomo de Hidrogênio não-relativístico, em concordância com o que fora obtido por Bohr anos antes.

Entretanto, são raros os casos em que esses sistemas têm tratamento exato viável, principalmente se forem compostos de várias partículas. Entre esses sistemas encontra-se o Modelo de Heisenberg, que descreve um sistema não-trivial de spins interagentes na presença de um campo magnético. Esse é um modelo muito importante no magnetismo, por estudar as interações magnéticas em sólidos, sendo também muito útil no estudo de transições de fase e criticalidade. Esse foi um dos primeiros modelos quânticos a ser resolvido exatamente por H. Bethe [5], sendo que, a partir desse trabalho, o conceito de *Ansatz de Bethe* passou a ser amplamente difundido e utilizado em casos em que se pretende obter os autovalores e autovetores de energia de um hamiltoniano integrável.

A partir do trabalho de Bethe, vários outros pesquisadores passaram a utilizar o chamado *Ansatz de Bethe* como forma de resolver sistemas cujo hamiltoniano é exatamente solúvel. Inspirados por Bethe, cientistas como McGuire[6], Lieb[7], Yang[8] e Baxter foram os responsáveis pela difusão do campo de estudos de modelos exatamente solúveis, cuja abrangência é notada até hoje em áreas como mecânica estatística[9], teoria de campos[10], física da matéria condensada[11], física nuclear[12], física atômica e molecular[13], entre outras. Neste trabalho, exploraremos a integrabilidade de sistemas compostos por átomos ultrafrios em Condensação de Bose-Einstein.

Os Condensados de Bose-Einstein, propostos por S. N. Bose[14] e A. Einstein[15], só foram experimentalmente confirmados setenta anos após sua proposição teórica [16], por Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle e Carl E. Wieman. Um dos principais motivos para tamanha “demora” seria de cunho tecnológico: conforme previsto por Bose e Einstein, a condensação dos bósons em um estado fundamental “comum” deveria ocorrer a uma temperatura crítica baixíssima, da ordem de nK. Portanto, foi necessário o desenvolvimento de um complexo sistema de resfriamento a laser para que fosse possível trabalhar com átomos a temperaturas tão baixas (170 nK para o rubídio [17]).

Desde a sua realização experimental, o estudo dos CBE's se intensificou muito e inúmeros novos experimentos foram realizados. Entre eles, podemos citar o grupo do Prof. Oberthaler [18], que descreve os fenômenos de auto-aprisionamento e tunelamento entre dois CBE's. Isso é bem descrito qualitativamente pelo Modelo de Bose-Hubbard de dois sítios. Uma característica importante desse modelo é que ele é integrável e pode-se obter as energias e os autoestados do sistema através do Método do Espalhamento Quântico Inverso (MEQI) [19], associando comportamentos anômalos na distribuição de soluções das Equações [de restrição] do Ansatz de Bethe com as Transições de Fase Quânticas [20].

Os modelos de Bose-Hubbard de mais poços, porém, não são integráveis, de forma que, para estudar o tunelamento de bósons entre CBE's, foi proposto [21, 22] um novo modelo de três poços que fosse integrável. No entanto, ao tentar aplicar o MEQI para um modelo integrável de três poços, apenas as energias correspondentes a um subespaço de Hilbert do sistema são obtidas, de forma que é necessária a extensão do MEQI para a obtenção de todas as energias. Com a extensão, surge “automaticamente” uma quantidade que comuta com o hamiltoniano e com o operador número total de bósons. Tal quantidade era necessária do ponto de vista da integrabilidade de Liouville, já que o sistema possui três graus de liberdade (e é contemplado, assim, com três quantidades que comutam entre si, incluindo o hamiltoniano); a essa quantidade dá-se o nome de “Carga Conservada”. O mesmo ocorre considerando-se um sistema de quatro poços interagentes em forma de anel [23], no qual a extensão do MEQI faz surgir duas cargas conservadas, devido aos quatro graus de liberdade. Todos esses sistemas são originados de uma família comum [24], que contém um hamiltoniano integrável geral que descreve todos os casos particulares até então citados. Apesar dessa família de modelos integráveis, bem como suas quantidades conservadas, terem sido construídas, a interpretação física dessas é conhecida apenas para os modelos de dois e três poços. Assim, o objetivo principal deste trabalho é fornecer uma interpretação física para as cargas conservadas dos sistemas de quatro poços: tanto em forma de anel, quanto em disposição angular.

Esse trabalho está dividido da seguinte maneira: o segundo capítulo inicia com uma apresentação do modelo de Bose-Hubbard de dois poços, sem, no entanto, aprofundar-se em detalhes. Logo após, é mostrada a

família de modelos, explicando o significado dos termos e sua separação em duas classes. O terceiro capítulo introduz o conceito de integrabilidade, discutindo brevemente o que foi feito por Liouville e Arnold em matéria de Integrabilidade Clássica, partindo logo para a definição das realizações algébricas que serão utilizadas para o tratamento quântico dos sistemas integráveis em estudo. Por fim, o quarto e último capítulo tratará da interpretação física das cargas conservadas dos sistemas apresentados no capítulo anterior, utilizando-se de ferramentas como Teoria de Perturbação e Análise Semiclássica, entre outras.

Essa interpretação para os casos de quatro poços (tanto em disposição de anel quanto aberta) constitui um resultado original e a principal contribuição do autor para esse trabalho.

## Capítulo 2

# Modelos integráveis de Tunelamento Quântico

*Seja menos curioso sobre as pessoas e mais curioso sobre as ideias.*

– Marie Curie

Desde a realização experimental de tunelamento de bósons entre dois condensados [18], várias propostas de modelos foram sendo feitas de forma a descrever o regime. Uma delas é o modelo de Bose-Hubbard de dois sítios que, em sua “versão” integrável, é descrito pelo hamiltoniano:

$$H = U(N_1 - N_2)^2 + \mu(N_1 - N_2) + J_{12}(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger).$$

Acima,  $N_i$  é o operador *número de bósons no poço  $i$* ,  $i = 1, 2$ ,  $a_i, a_i^\dagger$ , são, respectivamente, os operadores *aniquilação* e *criação de bósons no  $i$ -ésimo poço*,  $U$  é o termo de interação entre bósons de um mesmo poço e de poços vizinhos,  $\mu$  é o potencial químico e  $J_{12}$  é a energia de tunelamento (relacionada, por exemplo, com a distância entre os poços). Dessa forma, além de descrever qualitativamente os efeitos observados experimentalmente, o modelo também possui solução exata, dada pelo MEQI, sendo possível associar fenômenos físicos com as soluções das equações de restrição que surgem naturalmente do método [25].

Com o intuito de explorar novas possibilidades advindas desses sistemas, foi proposto um modelo integrável de três poços. Pela primeira vez, o MEQI, por si só, não fornecia todas as energias do sistema, de forma que foi necessária a extensão do método - Método do Espalhamento Quântico Inverso (MEQIE) -, feita com o auxílio de um operador novo. Com isso, não apenas todas as energias puderam ser encontradas algebricamente, como também foi possível obter explicitamente o operador da carga conservada ( $Q$ ) do sistema. Além disso, foi mostrado [21] que esse modelo, em determinados regimes, pode ser aplicado para descrever fenômenos tipo “switch on e switch off”, que ocorrem em dispositivos ultrafrios, demonstrando mais uma vez a sua relevância.

Embora o método “usual” tenha sido estendido, a forma de se calcular as quantidades é semelhante nos dois sistemas acima. De fato, isso ocorre porque ambos os sistemas fazem parte de uma família de modelos de CBE’s conectados via tunelamento [24]. Com essa família, pode-se construir e trabalhar com redes de poços

cada vez maiores, cujas aplicações ainda não foram muito exploradas.

A família de modelos é descrita pelo hamiltoniano geral de  $n + m$  poços [24]:

$$\begin{aligned} H_{n,m} &= U(N_A - N_B)^2 + \mu(N_A - N_B) + J(A^\dagger B + AB^\dagger) \\ &= U(N_A - N_B)^2 + \mu(N_A - N_B) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J_{i,j} (a_i b_j^\dagger + a_i^\dagger b_j), \end{aligned} \quad (2.0.1)$$

onde  $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ ,  $B = \sum_{j=1}^m \beta_j b_j$ , com  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ , e  $N_A$  e  $N_B$  correspondem, respectivamente, à soma dos operadores “número de bósons” nas classes “A” e “B”; respectivamente,

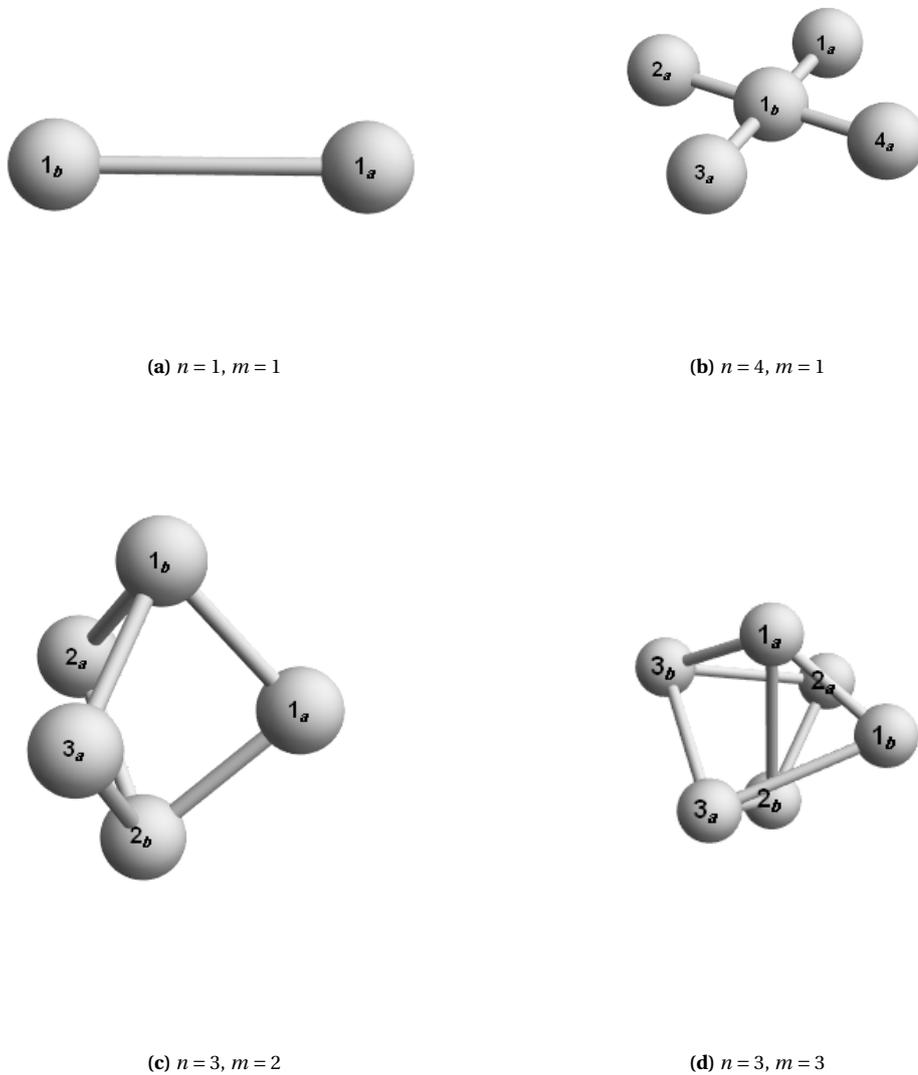
$$N_A = \sum_{i=1}^n N_{a,i}, \quad N_B = \sum_{j=1}^m N_{b,j}, \quad (2.0.2)$$

com  $N_{a,i} = a_i^\dagger a_i$  e  $N_{b,j} = b_j^\dagger b_j$ . Na equação (2.0.1),  $U$  representa o termo de interação entre os bósons,  $\mu$  é o potencial químico e  $J_{ij} = J \alpha_i \beta_j$  diz respeito à amplitude de tunelamento entre os  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo poços. Além disso, por construção e para assegurar a integrabilidade dos modelos,  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  devem satisfazer as condições:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \sum_{j=1}^m \beta_j^2 = 1. \quad (2.0.3)$$

Cada escolha de  $\{n, m\}$  dá origem a um sistema diferente, com diferentes aplicações físicas. Conforme dito anteriormente, o sistema gerado mediante a escolha  $n = 2$ ,  $m = 1$  tem como uma de suas aplicações a construção de um dispositivo do tipo transistor ultrafrio. Espera-se que os modelos obtidos com  $n = 2$ ,  $m = 2$  e  $n = 3$ ,  $m = 1$  ofereçam aplicações físicas muito relevantes no contexto de dispositivos atomotrônicos, como, por exemplo, interferômetros [26]. Esse assunto ainda está em aberto, e constitui um tópico de pesquisa muito interessante e promissor.

A figura (2.1) ilustra vários sistemas obtidos através de escolhas específicas de  $n, m$ .



**Figura 2.1:** Ilustração de diferentes sistemas pertencentes à família de modelos integráveis.

Nessas representações esquemáticas, as esferas representam os poços (CBE's), enquanto que as ligações indicam o tunelamento entre eles. A partir dessa família de hamiltonianos, encontraremos as soluções exatas (através do Método Algébrico do Ansatz de Bethe) dos autovalores de energia para o sistema geral. Depois disso, faremos a comparação das energias obtidas via Ansatz de Bethe Algébrico e diagonalização para três casos específicos:

1.  $n = 2, m = 1$ : três poços colineares;
2.  $n = 2, m = 2$ : quatro poços dispostos em anel;
3.  $n = 3, m = 1$ : quatro poços “aberto”.

Finalmente, apresentamos as cargas conservadas para cada um deles, discutidas em detalhes no Capítulo 4.

## Capítulo 3

# Integrabilidade

### 3.1 REVISÃO DE INTEGRABILIDADE CLÁSSICA

*But the physicist, being asked, “Why is the Universe built to follow certain physical laws, and not others?” , may well reply: “God knows”.*

Charles Misner

A definição de integrabilidade clássica remonta ao século XIX, quando teve suas bases bem estabelecidas. De acordo com elas, um sistema mecânico é dito integrável se existe a possibilidade de resolução explícita de suas equações de movimento. Em 1837 e 1840, respectivamente, Poisson e Liouville demonstraram que se um sistema hamiltoniano com dois graus de liberdade contém duas constantes de movimento independentes em involução, então suas equações de movimento podem ser resolvidas por quadraturas.

Assim, de acordo com o *Teorema de Liouville*, dizemos que um sistema hamiltoniano é *integrável* se existem  $n$  constantes de movimento independentes  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  em involução, isto é:

- $\{F_i, H\} = \{F_i, F_j\} = 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  ;
- Os vetores  $\nabla F_i$  são linearmente independentes em cada ponto do espaço de fase.

Acima,  $\{\}$  representam os Parênteses de Poisson. Esse teorema foi, posteriormente, aprimorado para contemplar as relações entre as descrições dos sistemas clássicos com a geometria simplética, originando o *Teorema de Liouville-Arnold* [27].

**Teorema de Liouville-Arnold.** *Seja  $H$  um hamiltoniano integrável com  $n$  graus de liberdade. Então:*

- (a) *Pode-se escrever o hamiltoniano do sistema em termos de variáveis canônicas  $\{\phi_1, \dots, \phi_n, J_1, \dots, J_n\}$ , para as quais a resolução das equações de movimento resulta em:*

$$J_k = \text{constante}, \quad \phi_k(t) = \phi_k(0) + \omega_k t \quad , \quad k = 1, \dots, n,$$

*de forma que cada  $\omega_k = \partial H / \partial J_k$  é constante.*

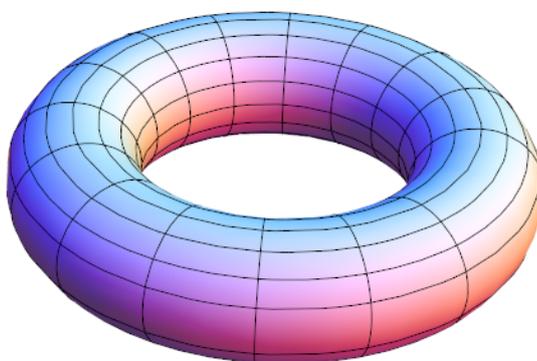
(b) As equações de evolução de  $p(t)$  e  $q(t)$  - Equações de Hamilton - podem ser resolvidas por quadraturas.

(c) Se o conjunto de hipersuperfícies de nível das constantes de movimento em involução  $F_k$ , definido por:

$$\mathcal{M}_C = \{(q, p) \mid F_k(q, p) = C_k, k = 1, \dots, n\},$$

é fechado, limitado e conexo, as variáveis  $(J, \phi)$  podem ser escolhidas como variáveis de ação-ângulo e o movimento é multiperíodico com frequências  $\omega_k = \partial H / \partial J_k$ .

A figura (3.1) ilustra um conjunto de superfícies  $\mathcal{M}_C$  contidas em  $\mathbb{T}^2$ .



**Figura 3.1:** Toro de Liouville para um sistema cujas hipersuperfícies formadas pelas variáveis do espaço de fase estão contidas em  $\mathbb{T}^2$

Além disso, os sistemas integráveis clássicos permitem recuperar as equações de Hamilton a partir de estruturas denominadas *Pares de Lax*, sendo que, com eles, a obtenção de uma família de quantidades conservadas é quase imediata. Em teorias de campo clássicas, outras três quantidades fazem-se necessárias para que se respeite os princípios matemáticos regentes: as matrizes de monodromia, de transferência e a matriz R. Essas quantidades serão muito úteis nas definições - e aplicações - da integrabilidade em sistemas quânticos (mais detalhes podem ser conferidos no apêndice A). Entretanto, como será possível perceber, é muito difícil de se estabelecer uma analogia direta entre essas estruturas nos níveis clássico e quântico, devido à diferença fundamental em sua formulação [28].

## 3.2 INTEGRABILIDADE QUÂNTICA

As definições de integrabilidade realizadas no âmbito de Mecânica Analítica foram completamente estabelecidas em teoremas matemáticos e bases axiomáticas, visto que a formulação dos espaços de fases é completamente determinista em termos de posição e momentum, fazendo com que a evolução do sistema no tempo seja um problema meramente de cálculo. Isso, no entanto, não é verdade para a Mecânica Quântica, já que a formulação matemática dos sistemas dá-se no Espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , cujas “entidades” fundamentais são os vetores de estado *kets*. Por isso, várias propostas de integrabilidade quântica foram feitas, sendo que, neste trabalho, adotaremos aquela que mais parece condizer (mas não equivaler) à definição clássica. Essa abordagem também é a mais indicada para o estudo dos modelos em questão, que envolvem um número finito de modos (ou graus de liberdade).

Com o objetivo de provar a integrabilidade dos modelos e encontrar seus espectros, iremos utilizar uma técnica chamada de “Método do Espalhamento Quântico Inverso”, desenvolvido por L. Faddeev e a escola russa [29]. Basicamente, neste método temos três componentes básicos: a matriz  $R$ , a matriz de monodromia  $T(u)$  e a matriz de transferência  $\tau(u)$ . No que segue, aplicaremos esse método e generalizações para os modelos de tunelamento em poços múltiplos.

Começamos, portanto, definindo uma matriz  $R$  com invariância  $SU(2)$ :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} b(u) = \frac{u}{u+\eta} \\ c(u) = \frac{\eta}{u+\eta} \end{matrix} \quad (3.2.1)$$

onde  $b: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\eta \in \mathbb{C}$ . A matriz- $R$  deve satisfazer a Equação de Yang-Baxter:

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u)R_{12}(u-v). \quad (3.2.2)$$

A equação (3.2.2) atua sobre o produto direto dos espaços  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ , onde  $R_{ij}$  significa a matriz- $R$  agindo diretamente sobre os  $i$ -ésimos e  $j$ -ésimos espaços e como identidade no espaço restante. Assim, podemos reescrever (3.2.2) como:

$$R_{\alpha'\beta'}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(u-v)R_{\alpha\gamma}^{\alpha'\hat{\gamma}}(u)R_{\beta\gamma}^{\beta'\hat{\gamma}'}(v) = R_{\beta'\gamma'}^{\hat{\beta}\hat{\gamma}}(v)R_{\alpha'\gamma}^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}'}(u)R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(u-v). \quad (3.2.3)$$

Devemos, agora, escolher adequadamente os operadores de Lax -  $L^A(u), L^B(u)$  -, necessários aos métodos de integrabilidade quântica. Uma das realizações para  $L^A(u)$  e  $L^B(u)$  se dá em termos dos operadores bosônicos  $a, a^\dagger$  e  $b, b^\dagger$ , satisfazendo a Álgebra de Heisenberg:

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= [b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}, \\ [a_i, a_j] &= [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = [b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Esta é apenas uma das várias realizações possíveis, na qual os operadores de Lax são dados por:

$$L^A(u) = \begin{pmatrix} u + \eta N_A & A \\ A^\dagger & \eta^{-1} \end{pmatrix} \quad L^B(u) = \begin{pmatrix} u + \eta N_B & B \\ B^\dagger & \eta^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

onde foram definidas as quantidades:

$$\begin{aligned} N_A &= \sum_{i=1}^{n_A} a_i^\dagger a_i, & A &= \sum_{i=1}^{n_A} \alpha_i a_i, \\ N_B &= \sum_{i=1}^{n_B} b_i^\dagger b_i, & B &= \sum_{i=1}^{n_B} \beta_i b_i. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Aqui já fica evidente que a escolha para a realização da álgebra se dá de forma a considerar um sistema composto de duas classes distintas A e B. Por exemplo, seja um estado  $|\chi\rangle$  dado por:

$$\begin{aligned} |\chi\rangle &= |\mathcal{N}_{a,1}, \dots, \mathcal{N}_{a,i}, \dots, \mathcal{N}_{a,n_a}, \mathcal{N}_{b,1}, \dots, \mathcal{N}_{b,i}, \dots, \mathcal{N}_{b,n_b}\rangle \\ &= |\mathcal{N}_{a,1}, \dots, \mathcal{N}_{a,i}, \dots, \mathcal{N}_{a,n_a}\rangle \otimes |\mathcal{N}_{b,1}, \dots, \mathcal{N}_{b,i}, \dots, \mathcal{N}_{b,n_b}\rangle \\ &= |\chi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

A atuação dos operadores bosônicos  $a_i, a_i^\dagger, b_i, b_i^\dagger$  sobre  $|\chi\rangle$  será dada por:

$$\begin{aligned} a_i |\chi\rangle &= \sqrt{\mathcal{N}_{a,i}} |\mathcal{N}_{a,1}, \dots, \mathcal{N}_{a,i} - 1, \dots, \mathcal{N}_{a,n_a}\rangle \otimes |\chi_B\rangle, \\ a_i^\dagger |\chi\rangle &= \sqrt{\mathcal{N}_{a,i} + 1} |\mathcal{N}_{a,1}, \dots, \mathcal{N}_{a,i} + 1, \dots, \mathcal{N}_{a,n_a}\rangle \otimes |\chi_B\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} b_i |\chi\rangle &= \sqrt{\mathcal{N}_{b,i}} |\chi_A\rangle \otimes |\mathcal{N}_{b,1}, \dots, \mathcal{N}_{b,i} - 1, \dots, \mathcal{N}_{b,n_b}\rangle, \\ b_i^\dagger |\chi\rangle &= \sqrt{\mathcal{N}_{b,i} + 1} |\chi_A\rangle \otimes |\mathcal{N}_{b,1}, \dots, \mathcal{N}_{b,i} + 1, \dots, \mathcal{N}_{b,n_b}\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Com isso, fica evidente que os operadores “restritos” à classe A não atuam sobre o subespaço da classe B, e vice-versa.

A próxima quantidade necessária para o método que se pretende aplicar é a construção da matriz de monodromia  $T(u)$ . Para assegurar a integrabilidade, ela deve ser escolhida de forma a obedecer à Equação de Yang-Baxter:

$$R_{12}(u-v) T_1(u) T_2(v) = T_2(v) T_1(u) R_{12}(u-v). \quad (3.2.10)$$

Partindo da realização adotada para os operadores de Lax em termos dos operadores bosônicos, construímos a matriz de monodromia como a multiplicação dos operadores  $L^A$  e  $L^B$ , generalizando o parâmetro espectral:

$$T(u) = L^A(u+\omega) L^B(u-\omega) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (3.2.11)$$

Utilizando a matriz de monodromia (3.2.10) e realizando as operações explicitamente em (3.2.11), obtemos as seguintes relações entre os operadores  $A(u)$ ,  $B(u)$ ,  $C(u)$  e  $D(u)$  (mais informações podem ser conferidas no apêndice B.1):

$$\begin{aligned}
 [A(u), A(v)] &= [B(u), B(v)] = [C(u), C(v)] = [D(u), D(v)] = 0, \\
 A(u)C(v) &= \frac{u-v+\eta}{u-v}C(v)A(u) - \frac{\eta}{u-v}C(u)A(v), \\
 D(v)C(u) &= \frac{\eta}{u-v}C(v)D(u) - \frac{u-v+\eta}{u-v}C(u)D(v).
 \end{aligned}
 \tag{3.2.12}$$

Por fim, a matriz de transferência  $\tau(u)$  é definida como:

$$\tau(u) = \text{tr } T(u) = A(u) + D(u).
 \tag{3.2.13}$$

Pode-se mostrar, usando a equação de Yang-Baxter para a matriz  $R$  (3.2.2) e para a matriz de monodromia  $T(u)$  (3.2.10), que a matriz de transferência comuta para diferentes parâmetros; isso é:

$$[\tau(u), \tau(v)] = 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{C}.
 \tag{3.2.14}$$

A equação (3.2.14) permite dizer que a matriz de transferência é integrável. Nas próximas seções, mostraremos que o hamiltoniano geral (2.0.1) pode ser obtido a partir da matriz de transferência. Além disso, mostraremos como diagonalizar (encontrar os autovalores e autoestados) exatamente os modelos por diferentes métodos.

### 3.3 MÉTODO DO ESPALHAMENTO QUÂNTICO INVERSO (ESTENDIDO)

De forma a aplicar corretamente o Método do Espalhamento Quântico Inverso Estendido (MEQIE), tendo optado pela realização dos operadores de Lax dada por (3.2.5), devemos escolher pseudovácuos adequados para os sistemas em questão. Para o Método do Espalhamento Quântico Inverso “tradicional”, a escolha dos pseudovácuos consiste na utilização do próprio vácuo do espaço de Fock:  $|0, \dots, 0\rangle$ . No entanto, ao fazer isso para os sistemas a serem estudados neste trabalho, não são obtidas todas as quantidades conservadas e todas as energias dos sistemas. Por isso, deve-se fazer uma extensão do método, modificando os pseudovácuos de forma a se obter todas as quantidades conservadas e todas as energias dos sistemas [21][24].

Os “novos” pseudovácuos a serem utilizados podem ser obtidos através de um conjunto de vetores unitários e ortogonais entre si. Consideramos os vetores  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu_j$  e  $\nu_j$  dados por:

$$\begin{aligned}\alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \\ \beta &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \\ \mu_j &= (\mu_{j,1}, \mu_{j,2}, \dots, \mu_{j,n}), \\ \nu_j &= (\nu_{j,1}, \nu_{j,2}, \dots, \nu_{j,m}).\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Os vetores da equação (3.3.1) satisfazem as relações:

$$\begin{aligned}\langle \mu_j, \mu_k \rangle &= \delta_{jk}, & \langle \mu_j, \alpha \rangle &= 0, & j, k &= 1, 2, \dots, n-1, \\ \langle \nu_j, \nu_k \rangle &= \delta_{jk}, & \langle \nu_j, \beta \rangle &= 0, & j, k &= 1, 2, \dots, m-1.\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

Acima, a notação  $\langle \rangle$  denota o produto interno entre vetores. Pode-se notar que as componentes dos vetores  $\alpha$  e  $\beta$  são as próprias quantidades, presentes no hamiltoniano, que compõem as amplitudes de tunelamento. Com isso, podemos definir os operadores  $\Gamma_j$  e  $\bar{\Gamma}_j$  que serão utilizados na construção dos pseudovácuos adequados:

$$\Gamma_i = \langle \mu_i, a \rangle, \quad \bar{\Gamma}_j = \langle \nu_j, b \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n_A - 1, \quad j = 1, 2, \dots, n_B - 1,\tag{3.3.3}$$

sendo  $a$  e  $b$  vetores cujas componentes são os próprios operadores bosônicos; explicitamente:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m).\tag{3.3.4}$$

Além da álgebra bosônica, os operadores  $\Gamma_j$  e  $\bar{\Gamma}_j$  também satisfazem as relações de comutação:

$$\begin{aligned}[\Gamma_j^\dagger, \bar{\Gamma}_j^\dagger] &= 0; & [\Gamma_j^\dagger, A] &= [\Gamma_j^\dagger, A^\dagger] = 0; & [\bar{\Gamma}_j^\dagger, B] &= [\bar{\Gamma}_j^\dagger, B^\dagger] = 0; \\ [\bar{\Gamma}_j, C(u)] &= \eta \bar{\Gamma}_j A^\dagger; & [\Gamma_j, C(u)] &= 0; & [\Gamma_j, C(u)^\dagger] &= 0; \\ [\bar{\Gamma}_j, C(u)^\dagger] &= \eta A \bar{\Gamma}_j; & [N_A, (\Gamma_j^\dagger)^k] &= k(\Gamma_j^\dagger)^k; & [N_B, (\bar{\Gamma}_j^\dagger)^k] &= k(\bar{\Gamma}_j^\dagger)^k.\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

Para que o Método Algébrico do Ansatz de Bethe funcione corretamente, devemos considerar pseudovácuos  $|\phi\rangle$  adequados, tais que:

$$\begin{aligned}
 A(u) |\phi\rangle &= a(u) |\phi\rangle, \\
 B(u) |\phi\rangle &= 0, \\
 C(u) |\phi\rangle &\neq 0, \\
 D(u) |\phi\rangle &= d(u) |\phi\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

em que  $A(u)$ ,  $B(u)$ ,  $C(u)$  e  $D(u)$  são as componentes da matriz de monodromia  $T(u)$  (3.2.10), dadas explicitamente por:

$$\begin{aligned}
 A(u) &= (u + \omega + \eta N_A)(u - \omega + \eta N_B) + AB^\dagger \\
 B(u) &= (u + \omega + \eta N_A)B + \eta^{-1}A \\
 C(u) &= (u - \omega + \eta N_B)A^\dagger + \eta^{-1}B^\dagger \\
 D(u) &= A^\dagger B + \eta^{-2}
 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

De forma a satisfazer as equações em (3.3.6), consideramos o pseudovácuo:

$$|\phi_{\{l,k\}}\rangle = \prod_{i=1}^{n-1} (\Gamma_i^\dagger)^{l_i} \prod_{j=1}^{m-1} (\bar{\Gamma}_j^\dagger)^{k_j} |0\rangle. \tag{3.3.8}$$

Definimos, acima,  $\{l, k\} = \{l_1, \dots, l_{n-1}, k_1, \dots, k_{m-1}\}$ . Atuando os operadores  $A(u)$ ,  $B(u)$ ,  $C(u)$  e  $D(u)$  sobre o pseudovácuo  $|\phi_{\{l,k\}}\rangle$ , conforme a equação (3.3.6), temos:

$$\begin{aligned}
 A(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle &= a(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle, \\
 B(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle &= 0, \\
 C(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle &\neq 0, \\
 D(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle &= d(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

onde os autovalores  $a(u)$  e  $d(u)$  são dados explicitamente por:

$$a(u) = \left( u + \omega + \eta \sum_{i=1}^{n-1} l_i \right) \left( u - \omega + \eta \sum_{j=1}^{m-1} k_j \right) \quad \text{e} \quad d(u) = \eta^{-2}. \tag{3.3.10}$$

Com os pseudovácuos (3.3.8), as relações de comutação entre as componentes de  $T(u)$  (3.2.12) e a matriz de transferência (3.2.13) explicitamente definidos, podemos seguir com o método e, finalmente, encontrar as energias e as quantidades conservadas dos sistemas descritos com a realização algébrica escolhida para os operadores de Lax.

### 3.4 MÉTODO ALGÉBRICO DO ANSATZ DE BETHE

Queremos resolver o problema de autovalores da matriz de transferência, isto é,  $\tau(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle = \lambda_{\{l,k\}}(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle$ . Para isso, vamos iniciar o chamado Método Algébrico do Ansatz de Bethe. Começamos construindo o estado de

Bethe  $|\psi_{\{l,k\}}\rangle$ :

$$|\psi_{\{l,k\}}\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-r} C(v_i) |\phi_{\{l,k\}}\rangle, & r < N; \\ |\phi_{\{l,k\}}\rangle, & r = N \end{cases}, \quad (3.4.1)$$

onde define-se  $r = \sum_{i=1}^{n-1} l_i + \sum_{j=1}^{m-1} k_j$ .

Se um modelo for integrável, então o hamiltoniano que descreve este modelo deverá poder ser escrito todo em termos da matriz de transferência  $\tau(u)$ . Com isso, podemos afirmar que, se um estado é autoestado da matriz de transferência  $\tau(u)$ , ele também será autoestado do hamiltoniano. Como  $\tau(u) = A(u) + D(u)$  temos, para o caso  $r < N$ :

$$\begin{aligned} A(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle &= a(u) \prod_{i=1}^{N-r} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i) |\phi_{\{l,k\}}\rangle - \sum_{i=1}^{N-r} \frac{\eta}{u - v_i} a(v_i) \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j} C(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle, \\ D(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle &= d(u) \prod_{i=1}^{N-r} \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} C(v_i) |\phi_{\{l,k\}}\rangle + \sum_{i=1}^{N-r} \frac{\eta}{u - v_i} d(v_i) \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j} C(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

em que foram utilizadas as relações de comutação (3.2.12). Portanto (conferir apêndice B.2 para mais detalhes):

$$\begin{aligned} \tau(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle &= A(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle + D(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle \\ &= \lambda_{\{l,k\}}(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{N-r} \frac{\eta}{u - v_i} \left( a(v_i) \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j} - d(v_i) \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j} \right)}_{\text{Termos indesejados} \rightarrow 0} C(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

onde  $\lambda_{\{l,k\}}(u)$  é o autovalor de  $\tau(u)$ , associado a  $|\psi_{\{l,k\}}\rangle$ :

$$\lambda_{\{l,k\}}(u) = \left( u + \omega + \eta \sum_{p=1}^{n-1} l_p \right) \left( u - \omega + \eta \sum_{p=1}^{m-1} k_p \right) \prod_{j=1}^{N-r} \frac{u - v_j + \eta}{u - v_j} + \eta^{-2} \prod_{j=1}^{N-r} \frac{u - v_j - \eta}{u - v_j}, \quad r < N. \quad (3.4.4)$$

Além disso, com a imposição de que  $|\psi_{\{l,k\}}\rangle$  seja um autoestado de  $\tau(u)$  (e, no caso de um sistema integrável, também o seja do hamiltoniano), fazemos com que os termos “extras” (indesejados) sejam nulos; ou seja:

$$\sum_{i=1}^{N-r} \frac{\eta}{u - v_i} \left( a(v_i) \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j} - d(v_i) \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j} \right) = 0. \quad (3.4.5)$$

A equação (3.4.5) deve ser válida para todo  $i$ . Portanto, temos que:

$$\frac{a(v_i)}{d(v_i)} = \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}, \quad (3.4.6)$$

o que, incluindo explicitamente as expressões para  $a(u)$  e  $d(u)$ , resulta nas seguintes equações de restrição:

$$\eta^2 \left( v_i + \omega + \eta \sum_{p=1}^{n-1} l_p \right) \left( v_i - \omega + \eta \sum_{p=1}^{m-1} k_p \right) = \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}. \quad (3.4.7)$$

As equações contidas em (3.4.7) são chamadas Equações do Ansatz de Bethe (EAB). Cada conjunto  $\{v_1, \dots, v_{N-r}\}$  solução das EAB dá origem a um autovalor de  $\tau(u)$ .

Para o caso  $r = N$ , temos que  $|\psi_{\{l,k\}}\rangle = |\phi_{\{l,k\}}\rangle$ . Ou seja, o estado de Bethe já é um autoestado de  $\tau(u)$ , com autovalor dado (A.2.3) por:

$$\lambda_{\{l,k\}}(u) = \left( u + \omega + \eta \sum_{p=1}^{n-1} l_p \right) \left( u - \omega + \eta \sum_{p=1}^{m-1} k_p \right) + \eta^{-2}, \quad r = N. \quad (3.4.8)$$

As expressões (3.4.4) e (3.4.8) para os autovalores  $\lambda_{\{l,k\}}(u)$  de  $\tau(u)$  serão de muitíssima utilidade agora. Conforme dito anteriormente, em sistemas integráveis - como, por exemplo, os sistemas estudados neste trabalho -, é possível escrever o hamiltoniano em termos da matriz de transferência  $\tau(u)$ ; isso significa que todo estado que é autoestado de  $\tau(u)$  também o será, simultaneamente, do hamiltoniano. Em outras palavras, mostraremos explicitamente que é possível obter uma expressão completa e, o que é tão importante quanto, correta para os autovalores de energia desses sistemas.

Partindo da expressão da matriz de transferência (3.3.11), fazemos uma expansão em série de Taylor da matriz em função do parâmetro espectral  $u$ :

$$\tau(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2. \quad (3.4.9)$$

As constantes  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$  são tais que:

$$\begin{aligned} c_0 &= \tau(0) = \eta^2 N_A N_B + \eta \omega (N_A - N_B) + \eta^{-2} - \omega^2 + A^\dagger B + AB^\dagger, \\ c_1 &= \left. \frac{d\tau(u)}{du} \right|_{u=0} = \eta (N_A + N_B), \\ c_2 &= \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\tau(u)}{du^2} \right|_{u=0} = 1. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Na expressão de  $c_0$ , somando e subtraindo  $\eta^2 \frac{N^2}{4}$ :

$$c_0 = \underbrace{-\frac{\eta^2}{4} (N_A^2 + 2N_A N_B + N_B^2 - 4N_A N_B) - \eta \omega (N_A N_B) + A^\dagger B + AB^\dagger}_{H'} + \left( \eta^{-2} - \omega^2 + \eta^2 \frac{N^2}{4} \right). \quad (3.4.11)$$

A expressão de  $H'$  se assemelha muito com o hamiltoniano (2.0.1) dividido pelo termo  $J$ . De fato, as duas expressões se tornam iguais se a seguinte identificação é feita:

$$-\frac{\eta^2 J}{4} \leftrightarrow U, \quad -\eta \omega J \leftrightarrow \mu. \quad (3.4.12)$$

Portanto, podemos reescrever a matriz de transferência como:

$$\tau(u) = \frac{H_{n,m}}{J} + \left( \eta^2 \frac{N^2}{4} + \eta^{-2} - \omega^2 \right) + 2\eta N u + u^2, \quad (3.4.13)$$

o que, isolando para  $H_{n,m}$ , resulta em:

$$H_{n,m} = J \left( \tau(u) - 2\eta Nu - u^2 - \eta^2 \frac{N^2}{4} - \eta^{-2} + \omega^2 \right). \quad (3.4.14)$$

Agora, podemos usar como ansatz o estado de Bethe  $|\psi_{\{l,k\}}\rangle$ , de forma que a Equação de Schrödinger Independente do Tempo se resume ao problema de autovalores:

$$H_{n,m} |\psi_{\{l,k\}}\rangle = E_{\{l,k\}} |\psi_{\{l,k\}}\rangle. \quad (3.4.15)$$

Mas:

$$\begin{aligned} H_{n,m} |\psi_{\{l,k\}}\rangle &= J \left( \tau(u) - 2\eta Nu - u^2 - \eta^2 \frac{N^2}{4} - \eta^{-2} + \omega^2 \right) |\psi_{\{l,k\}}\rangle \\ &= J \left( \lambda_{\{l,k\}}(u) - 2\eta Nu - u^2 - \eta^2 \frac{N^2}{4} - \eta^{-2} + \omega^2 \right) |\psi_{\{l,k\}}\rangle. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Portanto, temos que:

$$E_{\{l,k\}} = J \left( \lambda_{\{l,k\}}(u) - 2\eta Nu - u^2 - \eta^2 \frac{N^2}{4} - \eta^{-2} + \omega^2 \right). \quad (3.4.17)$$

É importante ressaltar que, para o caso  $r = N$ , as energias do sistema são dadas por:

$$E_{\{l,k\}} = U \left( \sum_{i=1}^{n-1} l_i - \sum_{i=1}^{m-1} k_i \right)^2 + \mu \left( \sum_{i=1}^{n-1} l_i - \sum_{i=1}^{m-1} k_i \right). \quad (3.4.18)$$

Ou seja, não há influência do parâmetro de tunelamento sobre as energias de (3.4.18).

Um fato curioso acerca da expressão (3.4.17) é que as energias, na verdade, não dependem do parâmetro espectral  $u$ , que pode ser escolhido arbitrariamente.

### 3.5 CARGAS CONSERVADAS

De acordo com o Teorema de Liouville, um sistema clássico integrável de  $n + m$  graus de liberdade contém  $n + m$  constantes de movimento independentes em involução. O análogo quântico a esse teorema seria supor que um sistema integrável (e aqui deve-se adotar uma definição de integrabilidade quântica) de  $n + m$  graus de liberdade contém  $n + m$  quantidades conservadas independentes (isto é, que comutam entre si) e constantes no tempo (isto é, que comutam com o hamiltoniano). A definição adotada de integrabilidade foi a que pressupõe, ao sistema integrável, a possibilidade de descrevê-lo por completo através da formulação dos Pares de Lax (e das matrizes que deles seguem).

Na seção 3.4 foi demonstrado que o hamiltoniano original é recuperado da matriz de transferência se as identificações (3.4.12) forem feitas. Portanto, o sistema é integrável para a definição adotada e, para fins de autoconsistência, deve haver um total de  $n + m$  quantidades conservadas.

Considerando as seguintes suposições:

- (a) O número de bósons total  $N$  no sistema é conservado;
- (b) A energia total - “implicitamente contida” no hamiltoniano  $H_{n,m}$  - é conservada;

Ainda restam  $n + m - 2$  quantidades conservadas. A essas quantidades damos o nome de “cargas conservadas”, cujas expressões são dadas por:

$$\begin{aligned} Q_i &= \Gamma_i^\dagger \Gamma_i, & i &= 1, \dots, n_A - 1, \\ \bar{Q}_j &= \bar{\Gamma}_j^\dagger \bar{\Gamma}_j, & j &= 1, \dots, n_B - 1. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Utilizando as definições em (2.3.3), pode-se mostrar que  $[Q_i, Q_j] = [Q_i, H] = [Q_i, N] = [Q_j, H] = [Q_j, N] = [H, N] = 0$ , resultando que as quantidades conservadas nos sistemas são independentes entre si e conservadas no tempo. Além disso, tais quantidades são geradoras de transformações unitárias  $U_k$  que conservam o hamiltoniano  $H$ :

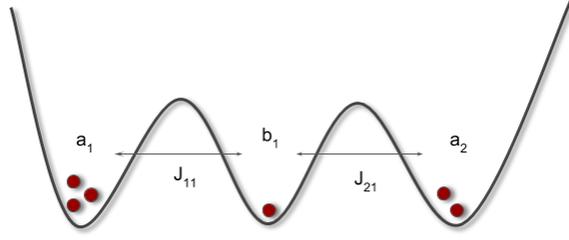
$$U_k = e^{isQ_k}, s \in \mathbb{R},$$

de forma que:

$$UHU^\dagger = e^{isQ_k} H e^{-isQ_k} = H + [isQ_k, H] + \frac{1}{2!} [isQ_k, [isQ_k, H]] + \dots = H.$$

No entanto, a expressão (3.5.1) ainda é um pouco vaga, já que os próprios operadores  $\Gamma_i, \bar{\Gamma}_j$  são definidos em termos de produtos escalares de vetores que, por hora, devem “apenas” satisfazer certas regras de ortogonalidade. Com o objetivo de compreender melhor o que está ocorrendo fisicamente, vamos considerar alguns casos simples, como os modelos de 3 e 4 poços. Em particular, para esses sistemas, encontraremos expressões explícitas para as cargas conservadas em termos dos operadores bosônicos.

### 3.6 MODELO DE TRÊS POÇOS



**Figura 3.2:** Sistema de 2+1 poços

Escolhendo  $n = 2$  e  $m = 1$  do hamiltoniano geral (2.0.1), temos o hamiltoniano para o modelo de 3 poços:

$$H_{2,1} = U(N_{a,1} - N_{b,1} + N_{a,2})^2 + \mu(N_{a,1} - N_{b,1} + N_{a,2}) + J\beta_1(\alpha_1[a_1^\dagger b_1 + a_1 b_1^\dagger] + \alpha_2[a_2^\dagger b_1 + a_2 b_1^\dagger]). \quad (3.6.1)$$

Partindo deste hamiltoniano, vamos encontrar as soluções de energia através do Método do Algébrico do Ansatz de Bethe e compará-las com as energias obtidas via diagonalização exata para poucas partículas.

#### 3.6.1 Solução exata

Usando como pseudovácuo  $|\phi_{l_1}\rangle$ :

$$|\phi_{l_1}\rangle = (\Gamma_1^\dagger)^{l_1} |0, 0, 0\rangle, \quad (3.6.2)$$

o Estado de Bethe  $|\psi_{l_1}\rangle$  será tal que:

$$|\psi_{l_1}\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-l_1} C(v_i) |\phi_{l_1}\rangle, & l_1 < N \\ |\phi_N\rangle, & l_1 = N. \end{cases} \quad (3.6.3)$$

Impondo que  $|\psi_{l_1}\rangle$  seja um autoestado da matriz de transferência  $\tau(u)$  - e, assim, do hamiltoniano (3.6.1) -, obtemos a seguinte EAB:

$$\eta^2(v_i + \omega + \eta l_1)(v_i - \omega) = \prod_{j \neq i}^{N-l_1} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}. \quad (3.6.4)$$

Para um dado  $l_1$ , cada conjunto solução  $\{v_1, v_2, \dots, v_{N-l_1}\}$  das EAB (3.6.4) resulta em um valor de energia (onde não são consideradas as soluções espúrias, como quando  $v_i = v_j$  [30]):

$$E = J \left( \lambda_{l_1}(u) + \omega^2 - u^2 - \eta^{-2} - u\eta N - \frac{\eta^2 N^2}{4} \right), \quad (3.6.5)$$

onde  $\lambda_{l_1}(u)$  é o autovalor de  $\tau(u)$ , associado a  $|\psi_{l_1}\rangle$ , dado por:

$$\lambda_{l_1}(u) = (u + \omega + \eta l_1)(u - \omega) \prod_{j=1}^{N-l_1} \frac{u - v_j + \eta}{u - v_j} + \eta^{-2} \prod_{j=1}^{N-l_1} \frac{u - v_j - \eta}{u - v_j}. \quad (3.6.6)$$

### 3.6.2 Comparativo entre MEQI e Diagonalização Exata

Supondo:  $U = 0.5$ ,  $J = 1$ ,  $N = 2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$ ,  $\beta_1 = 1$  e  $\omega = \mu = u = 0$ , temos que o autovalor  $\lambda_{l_1}(u)$  será:

$$\lambda_{l_1} = \eta^{-2} \prod_{j=1}^{2-l_1} \frac{v_j + \eta}{v_j} \quad (3.6.7)$$

De forma que as energias do sistema são:

$$E = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 5 - \prod_{j=1}^{2-l_1} \frac{v_j + \sqrt{2}i}{v_j} \right), & l_1 < 2 \\ 2, & l_1 = 2 \end{cases} \quad (3.6.8)$$

A representação matricial (detalhes da representação podem ser obtidos no apêndice C) do hamiltoniano (3.6.1) nos estados  $|\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}\rangle$  será:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.6.9)$$

Realizando a diagonalização de (3.6.9), calculando os conjuntos solução das EAB e inserindo-os na equação (3.6.8), temos o seguinte comparativo:

$l_1$	Soluções das EAB	Energias ( <i>Ansatz</i> )	Energias (diagonalização)
0	$v_1 = 0.293i, v_2 = -1.707i$	$E_1 = 2$	$E_1 = 2$
0	$v_1 = -0.556 + 0.437i, v_2 = -(v_1)^*$	$E_2 = -1.2361$	$E_2 = -1.23$
0	$v_1 = -0.245i, v_2 = -2.044i$	$E_3 = 3.236$	$E_3 = 3.236$
1	$v_1 = 0.293i$	$E_4 = -0.414214$	$E_4 = -0.414215$
1	$v_1 = -1.707i$	$E_5 = 2.41421$	$E_5 = 2.4142$
2		$E_6 = 2$	$E_6 = 2$

**Tabela 3.1:** Soluções e energias para o sistema de 3 poços, com  $N = 2$

### 3.6.3 Carga Conservada

Como vimos anteriormente, o *Método do Espalhamento Quântico Inverso (MEQI)* não é, por si só, suficiente para encontrar todas as quantidades conservadas de sistemas com mais do que dois poços em interação. Dessa forma, fez-se necessária a extensão do método através do operador  $\Gamma_1$ .

Conforme a equação (3.3.3),  $\Gamma_1 = \langle \mu_1, a \rangle$ , onde  $\mu_1$  é um vetor unitário, que obedece  $\langle \mu_1, \alpha \rangle = 0$ , e  $a = (a_1, a_2)$  é o vetor cujas componentes são dadas pelos operadores bosônicos. Assim, devemos encontrar um vetor  $\mu_1$  que seja ortogonal a  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ . O vetor mais simples possível é, imediatamente, dado por:

$$\mu_1 = (-\alpha_2, \alpha_1) \quad (3.6.10)$$

De forma que:

$$\Gamma_1 = \langle \mu_1, a \rangle = (-\alpha_2, \alpha_1) \cdot (a_1, a_2) = \alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1 \quad (3.6.11)$$

Assim, a carga conservada  $Q_1^{(2+1)}$  assume a expressão explícita:

$$Q_1^{(2+1)} = \Gamma_1^\dagger \Gamma_1 = \alpha_2^2 N_1 + \alpha_1^2 N_2 - \alpha_1 \alpha_2 (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) \quad (3.6.12)$$

Com isso, temos os três operadores hermitianos  $\{H, N, Q_1^{(2+1)}\}$  que comutam entre si, de forma que todo autoestado de energia  $|\phi_{l_1}\rangle$  também será autoestado de  $N$  e  $Q_1^{(2+1)}$ . Além disso, é perceptível que a transformação:  $H \rightarrow H + Q_1^{(2+1)} + N$  mantém o hamiltoniano integrável, já que as três quantidades  $H$ ,  $Q_1^{(2+1)}$  e  $N$  continuam comutando. Isso torna possível, por exemplo, a construção de um modelo de três poços dispostos em anel que seja integrável (o que não será tratado aqui).

No entanto, embora a carga  $Q_1^{(2+1)}$  tenha uma estrutura matemática muito simples, sua interpretação física é não-trivial, sendo abordada com especificidade no Capítulo 4.

### 3.7 MODELO DE QUATRO POÇOS FECHADO

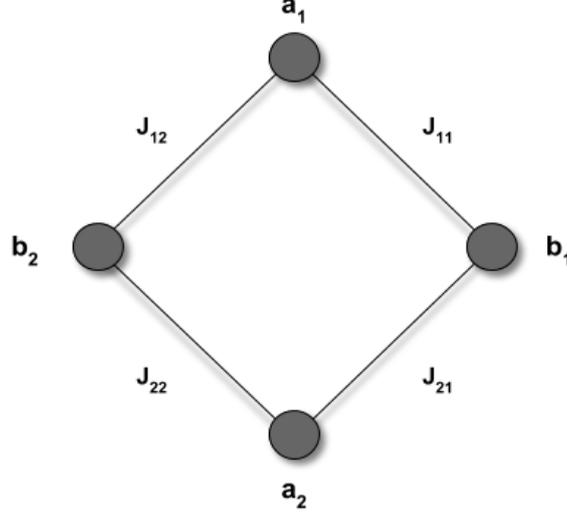


Figura 3.3: Sistema de 2+2 poços

Com  $n = m = 2$ , o hamiltoniano geral (2.0.1) assume a forma:

$$\begin{aligned}
 H_{2,2} = & (N_{a,1} + N_{a,2} - N_{b,1} - N_{b,2})^2 + \mu(N_{a,1} + N_{a,2} - N_{b,1} - N_{b,2}) \\
 & + J_{11}(a_1^\dagger b_1 + a_1 b_1^\dagger) + J_{21}(b_1^\dagger a_2 + b_1 a_2^\dagger) + J_{22}(a_2^\dagger b_2 + a_2 b_2^\dagger) + J_{12}(b_2^\dagger a_1 + b_2 a_1^\dagger)
 \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

A partir da expressão acima, faremos o comparativo das energias obtidas via diagonalização exata e Método Algébrico do Ansatz de Bethe, de forma semelhante com o que foi feito para o sistema de 2 + 1 poços.

#### 3.7.1 Solução exata

Usando como pseudovácuo  $|\phi_{l,k}\rangle$ :

$$|\phi_{l_1,k_1}\rangle = (\Gamma_1^\dagger)^{l_1} (\bar{\Gamma}_1^\dagger)^{k_1} |0,0,0,0\rangle \tag{3.7.2}$$

O Estado de Bethe  $|\psi_{l,k}\rangle$  será:

$$|\psi_{l_1,k_1}\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-l_1-k_1} C(v_i) |\phi_{l_1,k_1}\rangle, & l_1 + k_1 < N; \\ |\phi_{l_1,k_1}\rangle, & l_1 + k_1 = N \end{cases} \tag{3.7.3}$$

Impondo que  $|\psi_{l_1,k_1}\rangle$  seja um autoestado da matriz de transferência  $\tau(u)$ , obtemos:

$$\eta^2 (v_i + \omega + \eta l_1)(v_i - \omega + \eta k_1) = \prod_{j \neq i}^{N-l_1-k_1} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta} \tag{3.7.4}$$

Semelhantermente ao caso 2 + 1, descartando as soluções espúrias, para uma dada escolha de  $l_1, k_1$ , cada conjunto solução  $\{v_1, \dots, v_{N-l_1-k_1}\}$  das EAB (3.7.4) resulta em um valor de energia:

$$E = J \left( \lambda_{l_1, k_1}(u) + \omega^2 - u^2 - \eta^{-2} - u\eta N - \frac{\eta^2 N^2}{4} \right) \quad (3.7.5)$$

Onde  $\lambda_{l_1, k_1}(u)$  é o autovalor de  $\tau(u)$ , associado a  $|\psi_{l_1, k_1}\rangle$ , dado por:

$$\lambda_{l_1, k_1}(u) = (u + \omega + \eta l_1)(u - \omega + \eta k_1) \prod_{j=1}^{N-l_1-k_1} \frac{u - v_j + \eta}{u - v_j} + \eta^{-2} \prod_{j=1}^{N-l_1-k_1} \frac{u - v_j - \eta}{u - v_j} \quad (3.7.6)$$

### 3.7.2 Comparativo entre MEQI e Diagonalização Exata

Supondo  $N = 2$ ,  $U = 0.5$ ,  $J = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1/\sqrt{2}$  e  $\mu = u = \omega = 0$ , temos que  $\lambda_{l_1, k_1}(u)$  será:

$$\lambda_{l_1, k_1}(u) = \eta^{-2} \prod_{j=1}^{2-l_1-k_1} \frac{v_j + \eta}{v_j} + \eta^2 (l_1 k_1) \prod_{j=1}^{2-l_1-k_1} \frac{v_j - \eta}{v_j} \quad (3.7.7)$$

De forma que as energias do sistema são:

$$E = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 5 - \prod_{j=1}^{2-l_1-k_1} \frac{v_j + \sqrt{2}i}{v_j} \right), & l_1 + k_1 < 2 \\ \frac{1}{2} (l_1 - k_1)^2, & l_1 + k_1 = 2 \end{cases} \quad (3.7.8)$$

A representação matricial do hamiltoniano (3.7.1) nos estados  $|\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2}\rangle$  será:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.7.9)$$

Realizando a diagonalização de (3.7.9), calculando os conjuntos solução das EAB e inserindo-os na equação (3.7.8), podemos comparar as energias obtidas via diagonalização exata e via Ansatz de Bethe Algébrico:

$l_1$ & $k_1$	Soluções das EAB	Energias ( <i>Ansatz</i> )	Energias (diagonalização)
$k_1 = 0, l_1 = 0$	$v_1 = 0.293i, v_2 = -1.707i$	$E_1 = 2$	$E_1 = 2$
$k_1 = 0, l_1 = 0$	$v_1 = -2.044i, v_2 = -0.245i$	$E_2 = 3.23607$	$E_2 = 3.23607$
$k_1 = 0, l_1 = 0$	$v_1 = -0.556 + 0.437i, v_2 = -v_1^*$	$E_3 = -1.23607$	$E_3 = -1.23607$
$k_1 = 1, l_1 = 0$	$v_1 = -1.70711i$	$E_4 = 2.41421$	$E_4 = 2.41421$
$k_1 = 1, l_1 = 0$	$v_1 = 0.292893i$	$E_5 = -0.414215$	$E_5 = -0.414214$
$k_1 = 0, l_1 = 1$	$v_1 = -1.70711i$	$E_6 = 2.41421$	$E_6 = 2.41421$
$k_1 = 0, l_1 = 1$	$v_1 = 0.292893i$	$E_7 = -0.414215$	$E_7 = -0.414214$
$k_1 = 2, l_1 = 0$		$E_8 = 2$	$E_8 = 2$
$k_1 = 0, l_1 = 2$		$E_9 = 2$	$E_9 = 2$
$k_1 = 1, l_1 = 1$		$E_{10} = 0$	$E_{10} = 0$

**Tabela 3.2:** Soluções e energias para o sistema de 4 poços, com  $N = 2$ 

### 3.7.3 Cargas conservadas

Semelhantemente ao que ocorre com o sistema de 3 poços, o MEQI também não é capaz de, por si só, encontrar todas as energias do sistema (bem como as 2 cargas conservadas “extras”). Para tanto, introduzimos dois operadores -  $\Gamma_1, \bar{\Gamma}_1$  - diferentes, atuando sobre os subespaços de cada classe. Dessa forma, construímos os operadores associados às cargas conservadas de forma equivalente à que foi feita para o caso de  $2 + 1$  poços; aqui, devemos considerar um vetor unitário  $v_1$  que satisfaça a condição  $\langle v_1, \beta \rangle = 0$ , de forma que  $\bar{\Gamma}_1^{(2+2)} = \langle v_1, b \rangle$ , onde  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  é o vetor cujas componentes são dadas pelos operadores bosônicos correspondentes à classe “B”. O vetor  $v_1$  mais simples possível, que satisfaça a condição de ortogonalidade, é dado por:

$$v_1 = (-\beta_2, \beta_1) \quad (3.7.10)$$

E, portanto, os operadores  $\Gamma$  necessários para a resolução do problema serão:

$$\Gamma_1 = \alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1 \quad \bar{\Gamma}_1 = \beta_1 b_2 - \beta_2 b_1 \quad (3.7.11)$$

Dessa forma, as cargas conservadas  $Q_1^{(2+2)}$  e  $\bar{Q}_1^{(2+2)}$  adquirem a forma explícita:

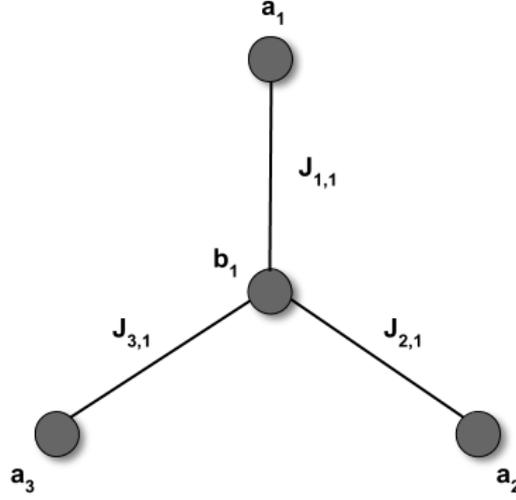
$$\begin{aligned} Q_1^{(2+2)} &= \Gamma_1^\dagger \Gamma_1 = \alpha_2^2 N_{a,1} + \alpha_1^2 N_{a,2} - \alpha_1 \alpha_2 (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) \\ \bar{Q}_1^{(2+2)} &= \bar{\Gamma}_1^\dagger \bar{\Gamma}_1 = \beta_2^2 N_{b,1} + \beta_1^2 N_{b,2} - \beta_1 \beta_2 (b_1^\dagger b_2 + b_1 b_2^\dagger) \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Com isso, obtemos quatro operadores  $\{N, H, Q_1^{(2+2)}, \bar{Q}_1^{(2+2)}\}$  que comutam entre si, de forma que todo autoestado de energia também será autoestado de  $N, Q_1^{(2+2)}$  e  $\bar{Q}_1^{(2+2)}$ . Além disso, fica evidente que a transformação  $H \rightarrow H + N + Q_1^{(2+2)} + \bar{Q}_1^{(2+2)}$  não quebra a integrabilidade do sistema. Assim, pode-se construir um modelo integrável em que há tunelamento entre os poços  $a_1 \leftrightarrow a_2$  e  $b_1 \leftrightarrow b_2$ , o qual não será tratado neste trabalho.

É notável que as cargas  $Q_1^{(2+2)}$  e  $\bar{Q}_1^{(2+2)}$  para o sistema de  $2 + 2$  poços têm estrutura tão semelhante (sendo a carga  $Q_1^{(2+2)}$  exatamente a mesma) à carga do sistema de  $2 + 1$  poços. Isso parece demonstrar, mais uma vez, a independência entre os subespaços correspondentes às classes “A” e “B”, já que a única diferença entre os

sistemas de  $2 + 1$  e  $2 + 2$  poços é o poço adicional na classe “B”. De fato, essa semelhança vai além do escopo matemático e é mantida (e comprovada) também na interpretação física das cargas, o que será feito de forma explícita no Capítulo 4.

### 3.8 MODELO DE QUATRO POÇOS ABERTO



**Figura 3.4:** Sistema de 3+1 poços

Com  $n = 3$ ,  $m = 1$ , o hamiltoniano original (2.0.1) é reescrito como:

$$H_{3,1} = U(N_{a,1} + N_{a,2} + N_{a,3} - N_{b,1})^2 + \mu(N_{a,1} + N_{a,2} + N_{a,3} - N_{b,1}) + J_{11}(a_1^\dagger b_1 + a_1 b_1^\dagger) + J_{21}(a_2^\dagger b_1 + a_2 b_1^\dagger) + J_{31}(a_3^\dagger b_1 + a_3 b_1^\dagger) \quad (3.8.1)$$

Utilizando o hamiltoniano  $H_{3,1}$ , faremos a comparação entre as energias obtidas via diagonalização exata e MEQI, assim como foi feito para os sistemas de 2 + 1 e 2 + 2 poços.

#### 3.8.1 Solução exata

Usando como pseudovácuo  $|\phi_{l_1, l_2}\rangle$ :

$$|\phi_{l_1, l_2}\rangle = (\Gamma_1^\dagger)^{l_1} (\Gamma_2^\dagger)^{l_2} |0, 0, 0, 0\rangle \quad (3.8.2)$$

O estado de Bethe  $|\psi_{l_1, l_2}\rangle$  é dado por:

$$|\psi_{l_1, l_2}\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-l_1-l_2} C(v_i) |\phi_{l_1, l_2}\rangle, & l_1 + l_2 < N; \\ |\phi_{l_1, l_2}\rangle, & l_1 + l_2 = N \end{cases} \quad (3.8.3)$$

Impondo que  $|\psi_{l_1, l_2}\rangle$  seja um autoestado da matriz de transferência  $\tau(u)$ , obtemos:

$$\eta^2(v_i + \omega + \eta[l_1 + l_2])(v_i - \omega) = \prod_{j \neq i}^{N-l_1-l_2} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta} \quad (3.8.4)$$

Descartando as soluções espúrias, cada escolha  $l_1, l_2$  resulta em um conjunto solução  $\{v_1, \dots, v_{N-l_1-l_2}\}$  das EAB (0), com o correspondente valor de energia:

$$E = J \left( \lambda_{l_1, l_2}(u) + \omega^2 - u^2 - \eta^{-2} - u\eta N - \frac{\eta^2 N^2}{4} \right) \quad (3.8.5)$$

Onde  $\lambda_{l_1, l_2}(u)$  é o autovalor de  $\tau(u)$ , associado a  $|\psi_{l_1, l_2}\rangle$ , cuja expressão é:

$$\lambda_{l_1, l_2}(u) = (u + \omega + \eta[l_1 + l_2])(u - \omega) \prod_{j=1}^{N-l_1-l_2} \frac{u - v_j + \eta}{u - v_j} + \eta^{-2} \prod_{j=1}^{N-l_1-l_2} \frac{u - v_j - \eta}{u - v_j} \quad (3.8.6)$$

### 3.8.2 Comparativo entre MEQI e Diagonalização Exata

Supondo  $N = 2$ ,  $U = 0.5$ ,  $J = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/\sqrt{3}$  e  $\mu = u = \omega = 0$ , temos que  $\lambda_{l_1, l_2}(u)$  será:

$$\lambda_{l_1, l_2}(u) = -\frac{1}{2} \prod_{j=1}^{2-l_1-l_2} \frac{v_j + \sqrt{2}i}{v_j} \quad (3.8.7)$$

Portanto, as energias do sistema são:

$$E = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 5 - \prod_{j=1}^{2-l_1-l_2} \frac{v_j + \sqrt{2}i}{v_j} \right), & l_1 + l_2 < 2 \\ 2, & l_1 + l_2 = 2 \end{cases} \quad (3.8.8)$$

A representação do hamiltoniano (3.8.1) nos estados  $|\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{a,3}, \mathcal{N}_{b,1}\rangle$  é dada abaixo:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.8.9)$$

Diagonalizando o hamiltoniano (3.8.9), resolvendo as EAB (3.8.4) e inserindo suas soluções (descartando aquelas que são espúrias) na equação (3.8.8), obtemos o seguinte comparativo entre as energias:

$l_1$ & $l_2$	Soluções das EAB	Energias ( <i>Ansatz</i> )	Energias (diagonalização)
$l_1 = 0, l_2 = 0$	$v_1 = 0.293i, v_2 = -1.707i$	$E_1 = 2$	$E_1 = 2$
$l_1 = 0, l_2 = 0$	$v_1 = -2.044i, v_2 = -0.245i$	$E_2 = 3.23607$	$E_2 = 3.23607$
$l_1 = 0, l_2 = 0$	$v_1 = -0.556 + 0.437i, v_2 = -v_1^*$	$E_3 = -1.23607$	$E_3 = -1.23607$
$l_1 = 1, l_2 = 0$	$v_1 = -1.70711i$	$E_4 = 2.41421$	$E_4 = 2.41421$
$l_1 = 1, l_2 = 0$	$v_1 = 0.292893i$	$E_5 = -0.414215$	$E_5 = -0.414214$
$l_1 = 0, l_2 = 1$	$v_1 = -1.70711i$	$E_6 = 2.41421$	$E_6 = 2.41421$
$l_1 = 0, l_2 = 1$	$v_1 = 0.292893i$	$E_7 = -0.414215$	$E_7 = -0.414214$
$l_1 = 2, l_2 = 0$		$E_8 = 2$	$E_8 = 2$
$l_1 = 0, l_2 = 2$		$E_9 = 2$	$E_9 = 2$
$l_1 = 1, l_2 = 1$		$E_{10} = 2$	$E_{10} = 2$

**Tabela 3.3:** Soluções e energias para o sistema de 4 poços, com  $N = 2$ 

### 3.8.3 Cargas Conservadas

Através de uma análise do hamiltoniano  $H_{3,1}$  do sistema 3 + 1, fica evidente, por razões de simetria, que ele pode ser reduzido a um subsistema 2 + 1 através das seguintes escolhas (de forma alguma únicas):

$$\begin{aligned} N_{a,23} &= N_{a,2} + N_{a,3} \\ A &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha a_{23} \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

Onde  $a_{23} \equiv \frac{\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3}{\alpha}$ . De forma a satisfazer  $\alpha_1^2 + \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ , deve-se ter  $\alpha = \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ .

Podemos definir o operador  $\Gamma_1$ , em concordância com as escolhas para o subsistema 2 + 1, como:

$$\Gamma_1 = \alpha_1 a_{23} - \alpha a_1 = \alpha_1 \frac{\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} - \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} a_1 \quad (3.8.11)$$

De forma que a carga  $Q_1^{(3+1)}$ , dada por  $\Gamma_1^\dagger \Gamma_1$ , será explicitamente:

$$\begin{aligned} Q_1^{(3+1)} &= (1 - \alpha_1^2) N_{a,1} + \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_1^2} (\alpha_2^2 N_{a,2} + \alpha_3^2 N_{a,3}) \\ &\quad + \frac{\alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3}{1 - \alpha_1^2} (a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger) - \alpha_1 \alpha_2 (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) - \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 + a_1 a_3^\dagger) \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

De forma a satisfazer as relações em (3.3.3), deve haver um vetor  $\mu_1$  que gere  $\Gamma_1$  através do produto interno  $\langle \mu_1, a \rangle$ . Esse vetor é dado por:

$$\mu_1 = \left( \alpha, -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha}, -\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha} \right) \quad (3.8.13)$$

De posse desse vetor, é possível obter imediatamente um vetor  $\mu_2$  simultaneamente ortogonal a  $\alpha$  e  $\mu_1$ , através de:

$$\mu_2 = \mu_1 \times \alpha \quad (3.8.14)$$

O que resulta em:

$$\mu_2 = \left( 0, -\frac{\alpha_1^2 \alpha_3}{\alpha} - \alpha \alpha_3, \frac{\alpha_1^2 \alpha_2}{\alpha} + \alpha \alpha_2 \right) \quad (3.8.15)$$

Assim, o operador  $\Gamma_2$  pode ser obtido como:

$$\Gamma_2 = \langle \mu_2, a \rangle = \frac{\alpha_2}{\alpha} a_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha} a_2 \quad (3.8.16)$$

Portanto, a carga  $Q_2^{(3+1)}$  será, após certa manipulação algébrica:

$$Q_2^{(3+1)} = \Gamma_2^\dagger \Gamma_2 = \frac{1}{1 - \alpha_1^2} \left[ \alpha_3^2 N_{a,2} + \alpha_2^2 N_{a,3} - \alpha_2 \alpha_3 (a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger) \right] \quad (3.8.17)$$

## Capítulo 4

# Interpretação Física das Cargas Conservadas

*Os que não querem ser vencidos pela verdade, serão vencidos pelo erro.*

Santo Agostinho

Nesta seção, daremos significado físico às cargas conservadas (com enfoque especial para uma certa escolha de parâmetros) com auxílio de diferentes métodos. Primeiramente, faremos uma análise semiclássica do hamiltoniano dos sistemas para obter expressões analíticas que serão de grande ajuda na interpretação das cargas conservadas. Nessa análise, mostraremos que existem condições específicas para que bósons fiquem “restritos” aos poços de uma única classe, constituindo um regime de tunelamento denominado de *ressonância*. Embora o hamiltoniano original (2.0.1) não pareça contemplar esse regime (já que não inclui tunelamento de bósons entre poços de uma mesma classe), será mostrado nas seções subsequentes que é possível conectar um hamiltoniano efetivo (para o regime de ressonância) e o hamiltoniano original por meio de Teoria de Perturbação Dependente do Tempo. Obtidas as relações desejadas, serão feitas dinâmicas quânticas para os sistemas de forma a demonstrar a equivalência dos hamiltonianos ao serem utilizados os parâmetros obtidos.

Por fim, utilizando as expressões das cargas conservadas para os sistemas particulares, mostrar-se-á, com a inclusão de uma constante (advinda da Teoria de Perturbação), que as cargas conservadas são *dinamicamente* equivalentes aos hamiltonianos originais (até mesmo em caso de tunelamento anisotrópico) nas condições em que há ressonância de bósons de uma mesma classe.

### 4.1 ANÁLISE SEMICLÁSSICA DO HAMILTONIANO

Partindo do hamiltoniano (2.0.1) e introduzindo os operadores semiclássicos [31]:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow e^{i\phi_A} \sqrt{N_A} & A^\dagger &\rightarrow \sqrt{N_A} e^{-i\phi_A} \\ B &\rightarrow e^{i\phi_B} \sqrt{N_B} & B^\dagger &\rightarrow \sqrt{N_B} e^{-i\phi_B} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Com a restrição  $N_A + N_B = N$ , temos:

$$H = U(N - 2N_B)^2 + \mu(N - 2N_B) + 2J\sqrt{N_A N_B} \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (4.1.2)$$

Com um pouco de manipulação algébrica, temos:

$$H = UN^2(1 - 2n_B)^2 + \mu N(1 - 2n_B) + NJ\sqrt{1 - (1 - 2n_B)^2} \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (4.1.3)$$

A partir daqui, trataremos sempre da fração de bósons  $n_{\gamma,i} \equiv N_{\gamma,i}/N$  de bósons no poço  $i$  da classe  $\gamma$ . Portanto, é conveniente que trabalhemos com  $h = \frac{H}{N}$ ; assim:

$$h = UN(1 - 2n_B)^2 + \mu(1 - 2n_B) + 2J\sqrt{n_B(1 - n_B)} \cos(\phi) \quad (4.1.4)$$

Onde definimos  $\phi = \phi_1 - \phi_2$ .

Vamos considerar, por simplicidade, uma situação em que o potencial externo  $\mu$  é nulo. Também consideraremos que todos os bósons estejam inicialmente nos poços da classe  $A$  (aqui não faz diferença se for na classe  $A$  ou  $B$ , devido à simetria do hamiltoniano), uma vez que existem experimentos com essa condição inicial. Com isso, temos que, no tempo  $t = 0$ :

$$h(t = 0) = UN \quad (4.1.5)$$

Por conservação de energia,  $h(t \neq 0) = h(t = 0)$  e, portanto:

$$UN = UN(1 - 2n_B)^2 + 2J\sqrt{n_B(1 - n_B)} \cos \phi \quad (4.1.6)$$

O que, com certa manipulação algébrica, resulta em:

$$n_B = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\chi} \sqrt{\chi^2 - \cos^2 \phi}, \quad \chi \equiv \frac{UN}{J} \quad (4.1.7)$$

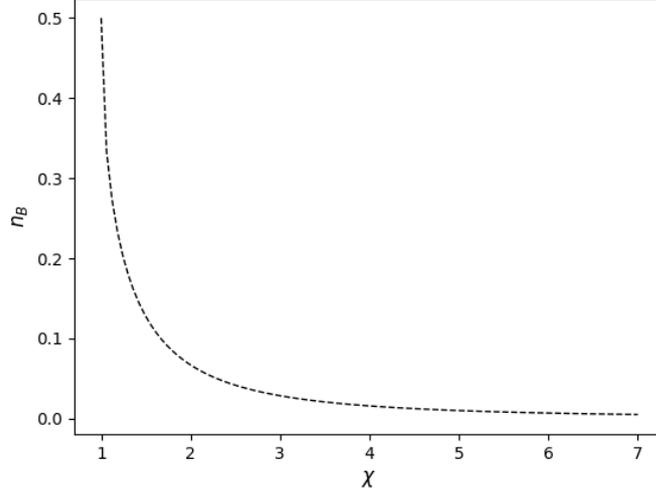
A equação (4.1.7) é fundamental para o que pretendemos fazer aqui. Como  $n_A + n_B = 1$ , temos que:

$$n_A = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\chi} \sqrt{\chi^2 - \cos^2 \phi} \quad (4.1.8)$$

O que é fundamentalmente a mesma equação que a (4.1.7). A escolha entre a solução positiva ou negativa dá-se através da suposição feita acerca do estado inicial do sistema: se, inicialmente, toda a fração de bósons se encontra nos poços da classe  $A$ , então é pouco provável que eles tendam, à medida em que o tempo evolui, a ficarem localizados na classe  $B$ . O mesmo argumento vale para a classe  $B$ . Portanto, temos, para um sistema com  $n_A(0) \approx 1$ :

$$n_B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\chi} \sqrt{\chi^2 - \cos^2 \phi} \quad (4.1.9)$$

Se considerarmos  $\cos^2 \phi = 1$ , podemos tentar estabelecer um valor de  $\chi$  a partir do qual o sistema passará a localizar os bósons nos poços da classe  $A$ . A figura (4.1) faz um “plot” de  $n_B$  como função de  $\chi$ , para  $\cos(\phi) = \pm 1$ .



**Figura 4.1:** Fração de bósons nos poços da classe A como função de  $\chi = UN/J$

Da figura (4.1) vemos que, para  $\chi > 5$ ,  $n_B \approx 0$ . Cabe ressaltar, aqui, que com a conservação de energia para todo tempo, todas as expressões obtidas para  $n_A$  e  $n_B$  também são para todo tempo; isso significa que com uma condição inicial  $n_A(0) \approx 1$ ,  $n_B(0) \approx 0$  e uma escolha de parâmetros  $U$ ,  $N$  e  $J$  de forma que  $\chi > 5$ , a fração de bósons em poços da classe B será nula, também para todo tempo  $t$ . Com esse limite determinado analiticamente, passaremos à formulação dos hamiltonianos efetivos de tunelamento e, juntamente com os hamiltonianos “originais”, faremos sua dinâmica quântica, mostrando, para os casos em que o tunelamento é isotrópico, a equivalência entre seus resultados.

## 4.2 HAMILTONIANO EFETIVO E DINÂMICA DAS CARGAS CONSERVADAS

A partir dos resultados obtidos anteriormente, sabemos que, para uma escolha de  $\chi > 5$ , os bósons tendem a permanecer nos poços da classe que, inicialmente, possuía toda a fração de bósons. Escrevemos, agora, o hamiltoniano (3.0.1) como  $H = H_I$  (hamiltoniano de interação) +  $V$ , onde:

$$\begin{aligned} H_I &= U(N - 2N_B)^2 \\ V &= J(A^\dagger B + AB^\dagger) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Usando a condição inicial  $N_A \approx N$ ,  $N_B \approx 0$ , temos, para o hamiltoniano de interação:

$$H_I |\mathcal{N}_{a,1}, \dots, \mathcal{N}_{a,n}, \mathcal{N}_{b,1}, \dots, \mathcal{N}_{b,m}\rangle \approx \varepsilon_I |\mathcal{N}_{a,1}, \dots, \mathcal{N}_{a,n}, \mathcal{N}_{b,1}, \dots, \mathcal{N}_{b,m}\rangle \tag{4.2.2}$$

Onde  $\varepsilon_I = UN^2$  é o autovalor do hamiltoniano de interação. Ou seja, a menos de uma constante -  $\varepsilon_I$  -, é possível construir um hamiltoniano efetivo, que leve em conta apenas termos de tunelamento. Com a suposição  $n_A(0) \approx 1$ , deve haver tunelamento de bósons apenas entre os poços da classe “A”. Portanto, podemos escrever o hamiltoniano efetivo ( $H_{eff}$ ) como:

$$H_{eff} \approx J_{eff} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n a_i a_j^\dagger \quad (4.2.3)$$

Na equação (4.2.3), fica perceptível que não há qualquer diferenciação entre os termos de tunelamento. Por isso, é esperado (e será mostrado explicitamente nas próximas seções) que o hamiltoniano efetivo não seja o modelo correto para os casos anisotrópicos.

Agora, desejamos encontrar uma conexão entre o termo de tunelamento efetivo  $J_{eff}$  e o termo de tunelamento “geral”,  $J$ . Para isso, tratamos  $V$  (4.2.1) como uma pequena perturbação ao hamiltoniano original, já que estamos considerando o caso  $UN > 5J$ . Por Teoria de Perturbação Dependente do Tempo, temos que a taxa de transição entre os estados  $|s\rangle \rightarrow |f\rangle$ , em  $i$ -ésima ordem, é dada por:

$$W_{s \rightarrow f}^{(i)} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | V^{(i)} | s \rangle|^2 \delta(E_s - E_k) \quad (4.2.4)$$

Onde  $V^{(1)} = V$  (Regra de Ouro de Fermi) e  $V^{(2)} = \sum_m \frac{V|m\rangle\langle m|V}{E_s - E_m}$ . Para encontrar a relação, calcularemos explicitamente os elementos de matriz para  $V$  e  $H_{eff}$  de mais baixa ordem não-nulos, igualando o que for obtido para  $V$  com o que for obtido para  $H_{eff}$ . Após, faremos gráficos de comparação entre as dinâmicas quânticas do sistema “original” e do sistema efetivo.

Para a dinâmica quântica, consideramos a evolução temporal (com  $\hbar = 1$ ) do estado inicial  $|\psi(0)\rangle$  dada por:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, 0) |\psi(0)\rangle = \sum_{j=1}^n \langle \phi_j | \psi(0) \rangle |\phi_j\rangle e^{-iE_j t} \quad (4.2.5)$$

Onde  $|\phi_j\rangle$  e  $E_j$  são, respectivamente, o  $j$ -ésimo autoestado e o  $j$ -ésimo autovalor de energia do hamiltoniano considerado. Dessa forma, a dinâmica quântica pode ser vista simplesmente como a evolução temporal do valor esperado da fração de bósons em um poço  $i$ , isto é:

$$\langle n_i(t) \rangle = \frac{1}{N} \langle \psi(t) | N_i | \psi(t) \rangle \quad (4.2.6)$$

Desta forma, temos tudo o que precisamos para calcular as relações entre  $J_{eff}$  e  $J$  e comparar as dinâmicas dos sistemas utilizando o que foi obtido.

### 4.2.1 3 Poços ( $n = 2, m = 1$ )

Para o caso específico de 2+1 poços, o hamiltoniano efetivo é simplesmente:

$$H_{eff} = J_{eff} (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) \quad (4.2.7)$$

Assim, para uma transição de primeira ordem entre os estados  $|N, 0\rangle \otimes |\chi_B\rangle \rightarrow |N-1, 1\rangle \otimes |\chi_B\rangle$ , considerando  $V^{(1)} = H_{eff}$ :

$$\langle \chi_B | \otimes \langle N-1, 1 | H_{eff} | N, 0 \rangle \otimes |\chi_B \rangle = J_{eff} \sqrt{N} \quad (4.2.8)$$

Onde  $|\chi_B\rangle = |0\rangle$ . Considerando  $V^{(1)} = V$ , temos:

$$\begin{aligned} & \langle \chi_B | \otimes \langle N-1, 1 | V | N, 0 \rangle \otimes | \chi_B \rangle \\ & = \langle \chi_B | \otimes \langle N-1, 1 | J(\alpha_1 \beta_1 [a_1^\dagger b_1 + a_1 b_1^\dagger] + \alpha_2 \beta_1 [a_2^\dagger b_1 + a_2 b_1^\dagger]) | N, 0 \rangle \otimes | \chi_B \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Ou seja, para o potencial perturbativo, não há taxa de transição em primeira ordem. Se considerarmos o termo de segunda ordem  $V^{(2)}$ , temos:

$$V^{(2)} = \sum_{\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}} \frac{V | \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1} \rangle \langle \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1} | V}{E_{N,0,0} - E_{\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}}} \quad (4.2.10)$$

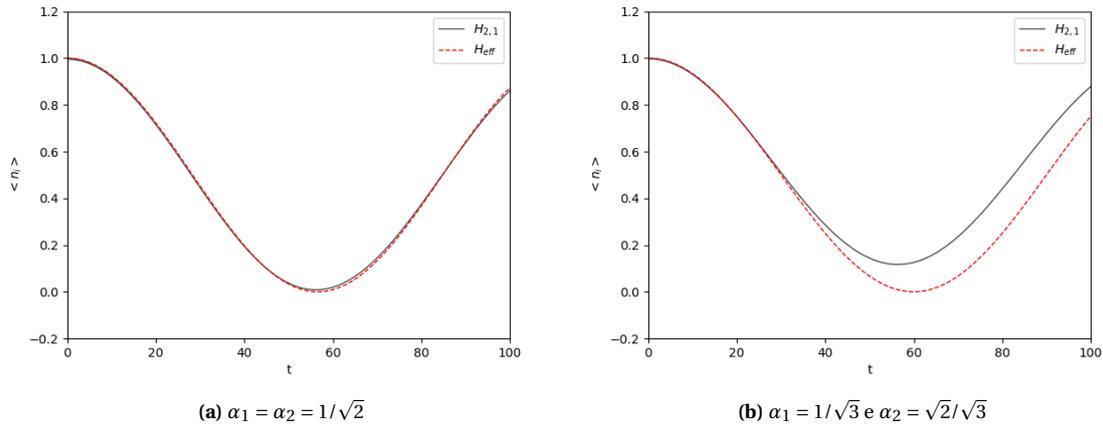
Onde o somatório é realizado sob a restrição:  $\mathcal{N}_{a,1} + \mathcal{N}_{a,2} + \mathcal{N}_{b,1} = N$ . Em segunda ordem, temos o termo não-nulo:

$$\begin{aligned} & \langle N-1, 1, 0 | V^{(2)} | N, 0, 0 \rangle \\ & = \frac{\langle N-1, 1, 0 | V | N-1, 0, 1 \rangle \langle N-1, 0, 1 | V | N, 0, 0 \rangle}{E_{N,0,0} - E_{N-1,0,1}} \\ & = \frac{J_{11} J_{21}}{4U(N-1)} \sqrt{N} \\ & = J^2 \frac{(\alpha_1 \alpha_2)}{4U(N-1)} \sqrt{N} \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Comparando as equações (4.2.8) e (4.2.11), obtemos, para  $J_{eff}$ :

$$J_{eff} = \Lambda J^2 (\alpha_1 \alpha_2), \quad \Lambda = \frac{1}{4U(N-1)} \quad (4.2.12)$$

A figura (4.2) ilustra a comparação entre a dinâmica quântica dos hamiltonianos “original” e efetivo, utilizando o que foi obtido via T.P.D.T para  $J_{eff}$ .

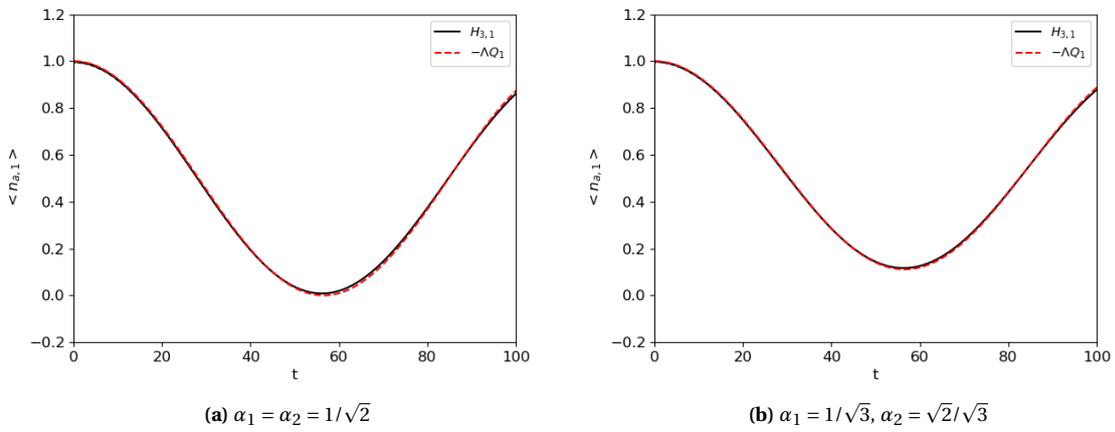


**Figura 4.2:** Dinâmicas para  $N = 10$ ,  $U = 0.5$ ,  $\mu = 0$  e  $J = 1$

Pela figura (4.2), fica claro que, para o caso anisotrópico, a modelagem em termos de um hamiltoniano

efetivo é ruim e incorreto. Isso porque a expressão de  $H_{eff}$  envolve apenas um termo de tunelamento comum a todos os operadores bosônicos, o que não leva em conta possíveis anisotropias (como a da figura (4.2.b)). O que é surpreendente, nesse caso, é que a correta modelagem de um hamiltoniano efetivo que inclua os termos anisotrópicos dá-se pela própria carga conservada  $Q_1^{(2+1)}$ .

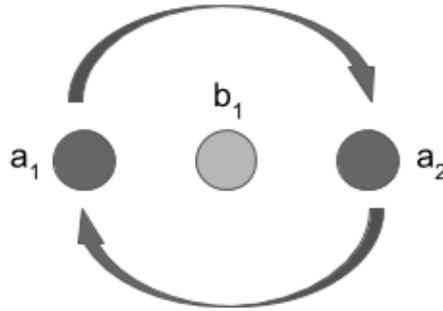
Partindo da expressão para  $Q_1^{(2+1)}$ , não é possível realizar qualquer conexão algébrica de forma a obter, em sua completude, a expressão para  $H_{eff}$ . No entanto, para o caso  $n_A(0) \approx 1$  e  $\chi > 5$ , pode-se verificar numericamente a seguinte equivalência numérica entre  $H_{2,1}$  e  $Q_1^{(2+1)}$ . Essa dinâmica é ilustrada na figura (4.3).



**Figura 4.3:** Comparação das dinâmicas para  $H_{2,1}$  e  $Q_1^{(2+1)}$

É visível, através da figura (4.3), a equivalência entre as dinâmicas para  $H_{2,1}$  e  $-\Lambda Q_1^{(2+1)}$ . Portanto, vemos claramente que a carga conservada corresponde, enquanto operador de translação temporal, ao hamiltoniano original  $H_{2,1}$  nas condições  $UN/J > 5$  e  $n_A(0) \approx 0$ .

A figura (4.4) ilustra a ressonância entre os poços  $a_1$  e  $a_2$ , cuja dinâmica é dada pela carga  $Q_1^{(2+1)}$ .



**Figura 4.4:** Ilustração da dinâmica de  $Q_1^{(2+1)}$  para o sistema 2 + 1.

### 4.2.2 4 Poços ( $n = 2, m = 2$ )

Para o caso de 2+2 poços, o hamiltoniano efetivo é o mesmo que aquele para o sistema de 2+1 poços (já que, para  $n = 2$  e  $m = 2$ , há 2 poços em cada classe):

$$H_{eff} = J_{eff}(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) \quad (4.2.13)$$

Então, para uma transição de primeira ordem entre os estados  $|N, 0\rangle \otimes |\chi_B\rangle \rightarrow |N-1, 1\rangle \otimes |\chi_B\rangle$ , considerando  $V^{(1)} = H_{eff}$ :

$$\langle \chi_B | \otimes \langle N-1, 1 | H_{eff} | N, 0 \rangle \otimes |\chi_B \rangle = J_{eff} \sqrt{N} \quad (4.2.14)$$

Com  $|\chi_B\rangle = |0, 0\rangle$ . Para o potencial “original”,  $V^{(1)} = V$ :

$$\begin{aligned} \langle \chi_B | \otimes \langle N-1, 1 | V | N, 0 \rangle \otimes |\chi_B \rangle \\ = \langle \chi_B | \otimes \langle N-1, 1 | [J_{1,1}(a_1^\dagger b_1 + a_1 b_1^\dagger) + J_{1,2}(a_1^\dagger b_2 + a_1 b_2^\dagger) \\ + J_{2,1}(a_2^\dagger b_1 + a_2 b_1^\dagger) + J_{2,2}(a_2^\dagger b_2 + a_2 b_2^\dagger)] | N, 0 \rangle \otimes |\chi_B \rangle \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Ou seja, semelhantemente ao que ocorreu com o sistema de 2 + 1 poços, nesse sistema também não há transição de primeira ordem entre os estados  $|N, 0\rangle \otimes |\chi_B\rangle \rightarrow |N-1, 1\rangle \otimes |\chi_B\rangle$ . Para transição em segunda ordem, devemos considerar  $V^{(2)}$ :

$$V^{(2)} = \sum_{\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2}} \frac{V | \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2} \rangle \langle \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2} | V}{E_{N,0,0,0} - E_{\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2}}} \quad (4.2.16)$$

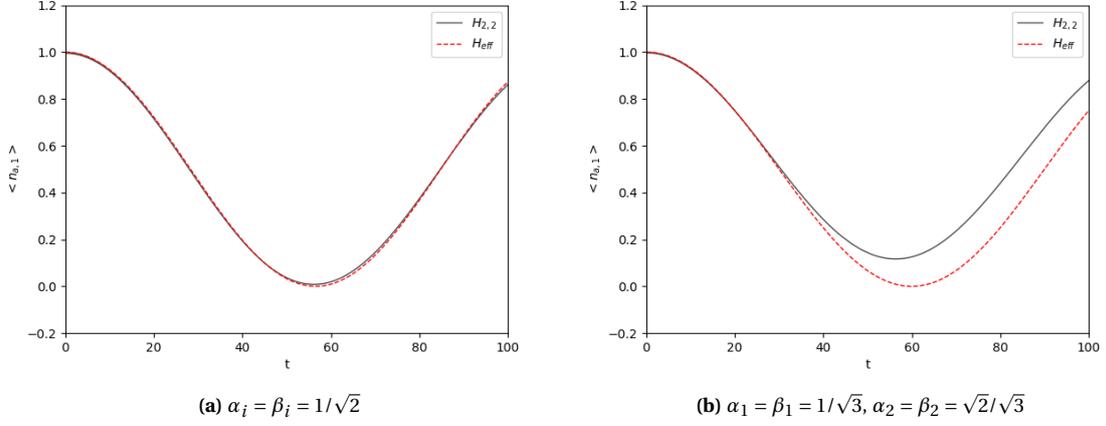
Onde a soma é feita de forma a respeitar:  $\mathcal{N}_{a,1} + \mathcal{N}_{a,2} + \mathcal{N}_{b,1} + \mathcal{N}_{b,2} = N$ . Com isso, o elemento de matriz resultante, em segunda ordem, é:

$$\begin{aligned} \langle \chi_B | \otimes \langle N-1, 1 | V^{(2)} | N, 0 \rangle \otimes |\chi_B \rangle &= \left( \frac{J_{11}J_{21}}{E_{N,0,0,0} - E_{N-1,0,1,0}} + \frac{J_{12}J_{22}}{E_{N,0,0,0} - E_{N-1,0,0,1}} \right) \sqrt{N} \\ &= \frac{\sqrt{N}}{4U(N-1)} (J_{11}J_{21} + J_{12}J_{22}) \\ &= \frac{\sqrt{N}}{4U(N-1)} J^2 \alpha_1 \alpha_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) \\ &= \frac{\sqrt{N}}{4U(N-1)} J^2 \alpha_1 \alpha_2 \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Comparando as equações (4.2.14) com (4.2.17):

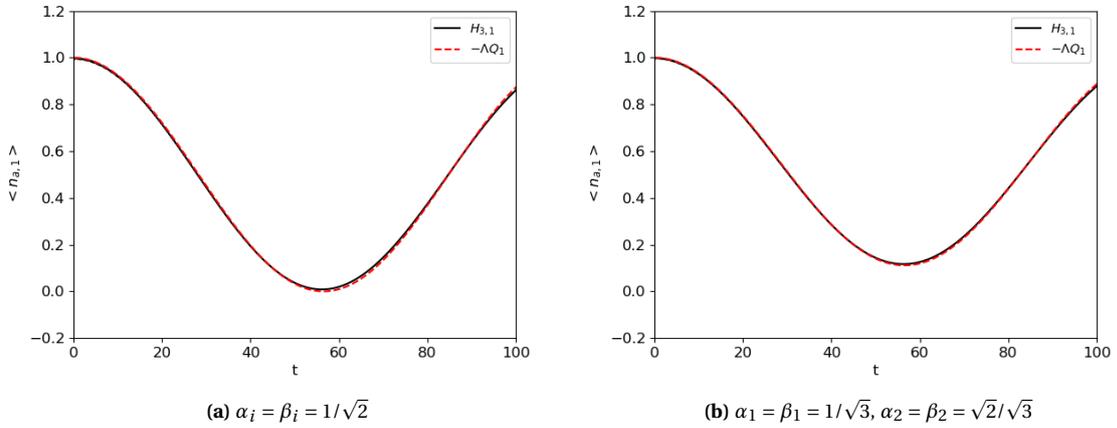
$$J_{eff} = \Lambda J^2 (\alpha_1 \alpha_2), \quad \Lambda = \frac{1}{4U(N-1)} \quad (4.2.18)$$

A figura (4.5) ilustra a comparação entre a dinâmica quântica dos hamiltonianos “original” e efetivo, utilizando o que foi obtido via T.P.D.T para  $J_{eff}$ .



**Figura 4.5:** Comparação entre as dinâmicas de  $H_{2,2}$  e  $H_{eff}$

De acordo com a figura (4.5), vemos novamente que a utilização de um hamiltoniano efetivo para o caso em que há anisotropia nos termos de tunelamento  $\alpha_i$  é errada. De fato, o modelo que descreve corretamente as dinâmicas para os casos anisotrópicos é aquele que utiliza a própria carga  $Q_1^{(2+2)}$  como operador de translação temporal. Embora também não existe conexão algébrica entre  $H_{2,2}$  e  $Q_1^{(2+2)}$ , suas dinâmicas são equivalentes (considerando  $\chi > 5$  e  $n_{a,1}(0) \approx 1$ ) para os casos isotrópico e anisotrópico, conforme figura (4.6).

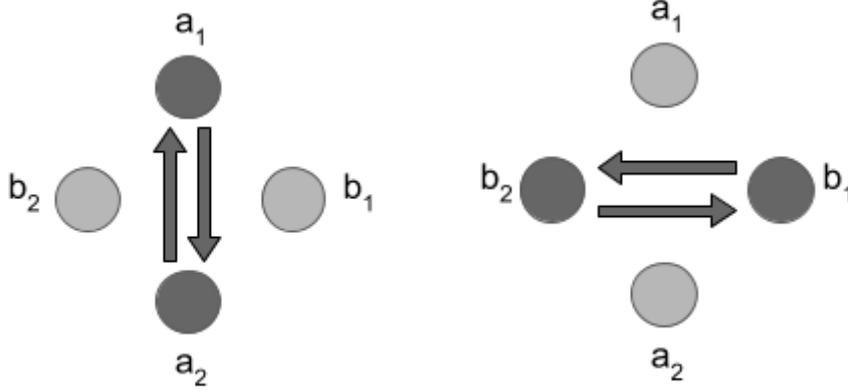


**Figura 4.6:** Comparação entre as dinâmicas de  $H_{2,2}$  e  $-\Lambda Q_1^{(4)}$

A análise da figura (4.6) deixa claro que a carga  $Q_1$  corresponde, enquanto operador de translação temporal, ao hamiltoniano  $H_{2,2}$  no regime  $\chi > 5$ , com condição inicial  $n_A(0) \approx 1$ . De acordo com a equação (4.2.8), não há influência de  $\beta_i$  nas expressões de  $J_{eff}$  e  $\Lambda$ . Ou seja, por mais que a anisotropia nos termos  $\beta$  da classe “B” seja de um grau completamente diferente da anisotropia nos termos  $\alpha$  da classe “A”, a dinâmica envolvendo a carga  $Q_1$  deverá depender somente dos valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , pouco importando a “distribuição” de valores entre  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , desde que seja respeitada a condição  $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ . Isso prova que, para o sistema de 2+2 poços, a carga conservada na classe “A” é completamente independente das escolhas feitas para os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$ .

Além disso, para condição inicial com todos os bósons nos poços da classe B, podemos obter um hamiltoniano efetivo proporcional a  $\bar{Q}_1^{(2+2)}$ .

A figura (4.7) ilustra as situações de ressonância entre os poços.



**Figura 4.7:** Ilustração da dinâmica de  $Q_1^{(2+2)}$  (à esquerda) e  $\bar{Q}_1^{(2+2)}$  (à direita) para o modelo 2 + 2.

#### 4.2.3 4 Poços ( $n = 3, m = 1$ )

Para o caso de 3+1 poços, o hamiltoniano efetivo deve compreender um regime de tunelamento entre os três poços da classe A, isso é:

$$H_{eff} = J_{eff}(a_1^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_3 + a_1^\dagger a_2 + h.c.) \quad (4.2.19)$$

Dessa forma, para uma transição de primeira ordem entre os estados  $|N, 0, 0\rangle \otimes |\chi_B\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|N-1, 1, 0\rangle + |N-1, 0, 1\rangle) \otimes |\chi_B\rangle$ , considerando  $V^{(1)} = H_{eff}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \langle \chi_B | \otimes (\langle N-1, 1, 0 | + \langle N-1, 0, 1 |) H_{eff} |N, 0, 0\rangle \otimes |\chi_B\rangle = J_{eff} \sqrt{2N} \quad (4.2.20)$$

Com  $|\chi_B\rangle = |0\rangle$ . Para o potencial “original”,  $V^{(1)} = V$ :

$$\begin{aligned} & \langle \chi_B | \otimes (\langle N-1, 1, 0 | + \langle N-1, 0, 1 |) V |N, 0, 0\rangle \otimes |\chi_B\rangle \\ &= \langle \chi_B | \otimes (\langle N-1, 1, 0 | + \langle N-1, 0, 1 |) [J_{11}(a_1^\dagger b_1 + a_1 b_1^\dagger) + J_{21}(a_2^\dagger b_1 + a_2 b_1^\dagger) \\ &+ J_{31}(a_3^\dagger b_1 + a_3 b_1^\dagger)] |N, 0, 0\rangle \otimes |\chi_B\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Assim, a transição de primeira ordem entre os estados  $|N, 0, 0\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|N-1, 1, 0\rangle + |N-1, 0, 1\rangle) \otimes |0\rangle$  é nula. Para a transição de segunda ordem, devemos considerar  $V^{(2)}$ :

$$V^{(2)} = \sum_{\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{a,3}, \mathcal{N}_{b,1}} \frac{V |\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{a,3}, \mathcal{N}_{b,1}\rangle \langle \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{a,3}, \mathcal{N}_{b,1}| V}{E_{N,0,0,0} - E_{\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{a,3}, \mathcal{N}_{b,1}}} \quad (4.2.22)$$

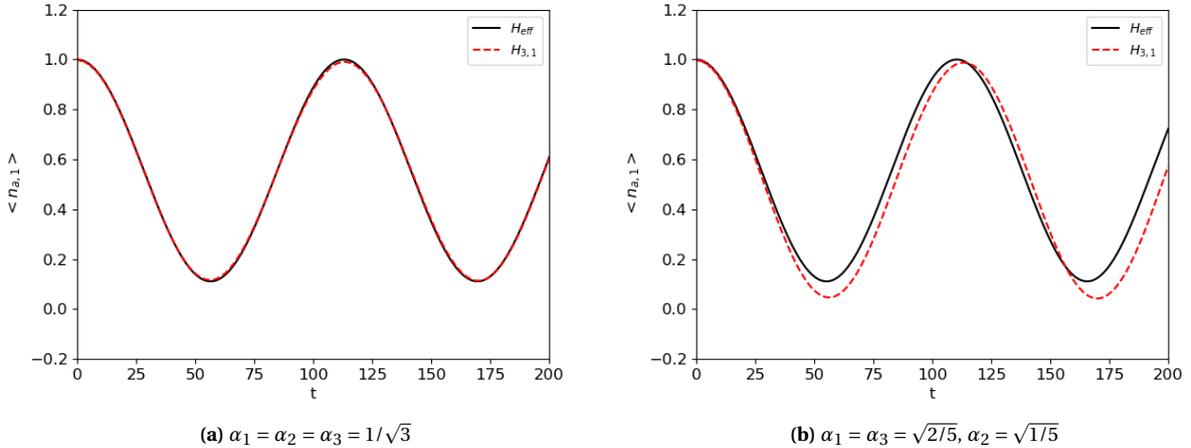
Onde a soma é feita mantendo-se  $\mathcal{N}_{a,1} + \mathcal{N}_{a,2} + \mathcal{N}_{a,3} + \mathcal{N}_{b,1} = N$ . Portanto, o elemento de matriz resultante, para a transição de segunda ordem, será:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \chi_B | \otimes (\langle N-1, 1, 0 | + \langle N-1, 0, 1 |) V^{(2)} |N, 0, 0\rangle \otimes | \chi_B \rangle &= \frac{J_{1,1}(J_{2,1} + J_{3,1})}{E_{N,0,0,0} - E_{N-1,0,0,1}} \sqrt{\frac{N}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{J_{1,1}(J_{2,1} + J_{3,1})}{4U(N-1)} \\ &= \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{J^2 \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3)}{4U(N-1)} \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

O que, comparando com (4.2.20), resulta em:

$$J_{eff} = \Lambda' J^2 \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3), \quad \Lambda' = \frac{1}{8U(N-1)} \quad (4.2.24)$$

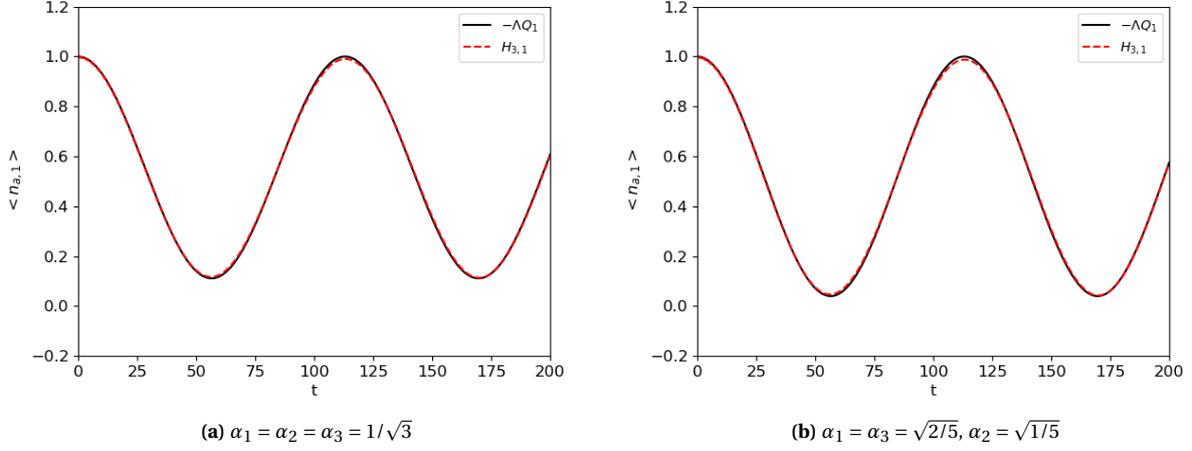
A figura (4.8) ilustra a comparação entre as dinâmicas de  $H_{3,1}$  e  $H_{eff}$ , para os casos isotrópico e anisotrópico, com  $J = 1$ ,  $U = 0.5$ ,  $N = 10$ ,  $\mu = 0$  e  $|\psi(0)\rangle = |N, 0, 0\rangle \otimes |0\rangle$ .



**Figura 4.8:** Comparação entre  $H_{3,1}$  e  $H_{eff}$  para os casos isotrópico e anisotrópico

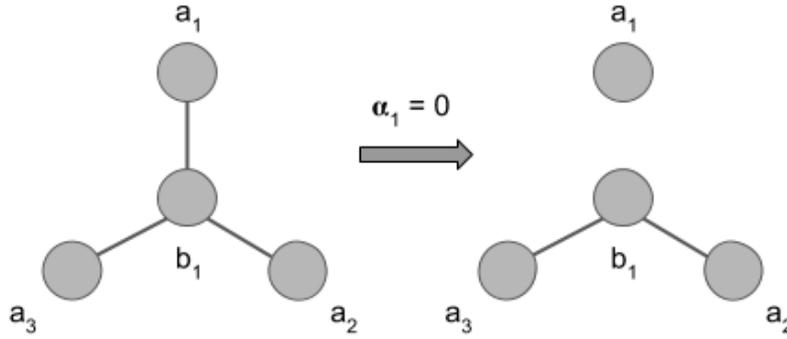
Da mesma forma como ocorreu com os casos anteriores, o hamiltoniano efetivo com um termo comum a todos os tunelamentos não reproduz, corretamente, o esperado para o caso anisotrópico. Assim, por coerência, pode-se imaginar que a carga  $Q_1^{(3+1)}$ , obtida através de uma estrutura 2 + 1 do sistema 3 + 1, deve reproduzir corretamente os casos de ressonância isotrópica e anisotrópica.

Assim, consideramos como hamiltoniano efetivo  $-\Lambda Q_1^{(3+1)}$ , onde  $\Lambda$  é o mesmo definido para os casos 2 + 1 e 2 + 2. Com a escolha de parâmetros  $U = 0.5$ ,  $N = 10$ ,  $\mu = 0$  e  $|\psi(0)\rangle = |N, 0, 0\rangle \otimes |0\rangle$ , obtemos:



**Figura 4.9:** Comparativo entre  $H_{3,1}$  e  $-\Lambda Q_1^{(3+1)}$  para os casos isotrópico e anisotrópico

Dessa forma, vemos que a carga  $Q_1^{(3+1)}$  do modelo 3 + 1 também corresponde a um regime de ressonância, no qual todos os bósons tunelam entre os poços de uma mesma classe (no caso, a classe em que se encontravam inicialmente). Diferentemente dos sistemas 2+1 e 2+2, no entanto, nesse caso a segunda carga não é equivalente à primeira (correspondendo à outra classe). Isso porque as duas cargas dizem respeito à mesma classe de poços - A. Além disso, como é possível ver na equação (3.8.17), a carga  $Q_2^{(3+1)}$  não contém termos de  $a_1$  ou  $a_1^\dagger$ ; ou seja, é como se houvesse uma supressão do tunelamento entre o poço  $b_1$  e o poço  $a_1$  (equivalente a considerar  $\alpha_1 = 0$ ), conforme ilustra a figura (4.10).



**Figura 4.10:** Esquema da supressão de tunelamento entre  $b_1$  e  $a_1$

Fazendo  $\alpha_1 = 0$ , o hamiltoniano  $H_{3,1}$  (3.8.1) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
 H_{3,1} = & U(N_{a,1} + N_{a,2} + N_{a,3} - N_{b,1})^2 + \mu(N_{a,1} + N_{a,2} + N_{a,3} - N_{b,1}) \\
 & + J[\alpha_2(a_2^\dagger b_1 + a_2 b_1^\dagger) + \alpha_3(a_3^\dagger b_1 + a_3 b_1^\dagger)]
 \end{aligned}
 \tag{4.2.25}$$

Semelhantemente à carga  $Q_1^{3+1}$ , podemos supor que a carga  $Q_2^{3+1}$  também corresponda a um hamiltoniano de ressonância entre os poços da classe A, sem considerar, no entanto, o poço  $a_1$ . Considerando como condição inicial  $|0, N, 0\rangle \otimes |0\rangle$ , queremos encontrar uma constante  $\Omega$  tal que  $H_{3,1} = -\Omega Q_2$  para o regime ressonante; assim, o elemento de matriz da transição de primeira ordem  $|0, N, 0\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |0, N-1, 1\rangle \otimes |0\rangle$ , para  $-\Omega Q_2$ , é dado por:

$$\langle 0, N-1, 1, 0 | -\Omega Q_2 | 0, N, 0, 0 \rangle = \Omega \alpha_2 \alpha_3 \sqrt{N}. \quad (4.2.26)$$

A transição  $|0, N, 0\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |0, N-1, 1\rangle \otimes |0\rangle$  é nula para  $H_{3,1}$ , considerando ordem um. Em segunda ordem, temos:

$$\sum_{\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2}} \frac{\langle 0, N-1, 1, 0 | V_{3,1} | \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2} \rangle \langle \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2} | V_{3,1} | 0, N, 0, 0 \rangle}{E_{0,N,0,0} - E_{\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2}}}. \quad (4.2.27)$$

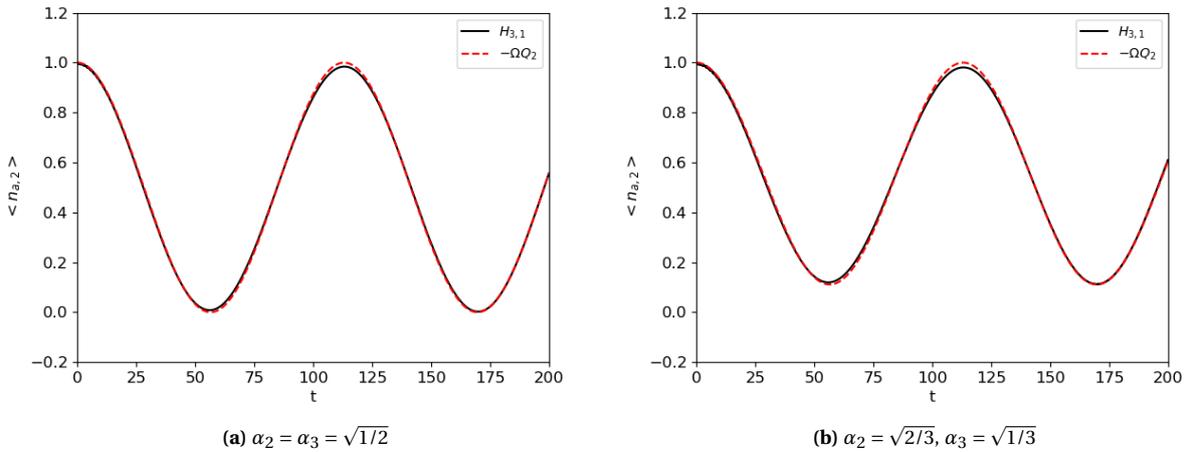
Acima,  $V_{3,1} \equiv J\alpha_2(a_2^\dagger b_1 + a_2 b_1^\dagger) + J\alpha_3(a_3^\dagger b_1 + a_3 b_1^\dagger)$ . Substituindo em (4.2.27), obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2}} J^2 \alpha_2 \alpha_3 \sqrt{N} \cdot \frac{\langle 0, N-1, 0, 1 | \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2} \rangle \langle \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2} | 0, N-1, 0, 1 \rangle}{E_{0,N,0,0} - E_{\mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1}, \mathcal{N}_{b,2}}} \\ = \frac{J^2 \alpha_2 \alpha_3 \sqrt{N}}{E_{0,N,0,0} - E_{0,N-1,0,1}} = \frac{J^2 \alpha_2 \alpha_3 \sqrt{N}}{UN^2 - U(N-2)^2} = \frac{J^2 \alpha_2 \alpha_3 \sqrt{N}}{4U(N-1)}, \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

de forma que, comparando as equações (4.2.27) e (4.2.29):

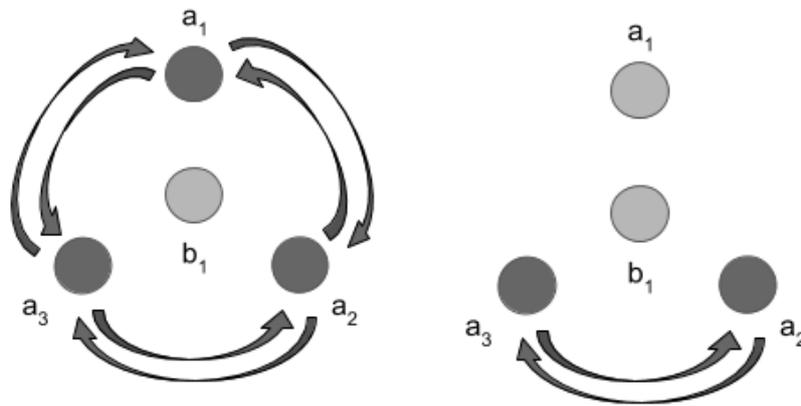
$$\Omega = \frac{J^2}{4U(N-1)} \quad (4.2.29)$$

A figura (4.11) mostra o comparativo entre as dinâmicas de  $H_{3,1}$  e  $-\Omega Q_2^{(3+1)}$ , para os casos isotrópico e anisotrópico. Para tanto, escolhemos como condição inicial  $|\psi(0)\rangle = |0, N, 0\rangle \otimes |0\rangle$  e os parâmetros  $U = 0.5$ ,  $J = 1$  e  $N = 10$ .



**Figura 4.11:** Comparativo entre as dinâmicas de  $H_{3,1}$  e  $-\Omega Q_2^{(3+1)}$

A figura (4.11) deixa claro que a carga  $Q_2^{3+1}$  também corresponde a um regime ressonante, desde que consideradas as escolhas  $UN/J > 5$  e  $\alpha_1 = 0$ , i.e., apenas no subsistema 2 + 1 formado pelos poços  $a_2$ ,  $a_3$  e  $b_1$ . Isso pode ser melhor percebido na análise esquemática da dinâmica de  $Q_1^{(3+1)}$  e  $Q_2^{(3+1)}$ , conforme a figura (4.12).



**Figura 4.12:** Ilustração da dinâmica de  $Q_1^{(3+1)}$  (à esquerda) e  $Q_2^{(3+1)}$  (à direita) para o modelo 3 + 1.

Assim, podemos concluir que a construção e interpretação das cargas conservadas dependem da condição inicial e que, de fato, o que mostramos são apenas alguns exemplos de um cenário físico mais rico, mas que ainda precisa ser explorado.

## Capítulo 5

# Conclusão

*Não importa quanto a vida possa ser ruim, sempre existe algo que você pode fazer, e triunfar. Enquanto há vida, há esperança.*

Stephen Hawking

Nesse trabalho, estudamos uma família de modelos integráveis de tunelamento quântico de átomos bosônicos ultrafrios, particularizando para três casos distintos. Para cada caso, obtivemos as expressões matemáticas para as cargas conservadas, dando a interpretação física da dinâmica gerada por elas (mostrando, assim, que elas equivalem a um hamiltoniano efetivo de ressonância).

No Capítulo 2 foi feita uma breve introdução ao modelo integrável de Bose-Hubbard de dois poços, destacando sua extensa análise já realizada na literatura, e ao modelo de três poços, salientando sua aplicação física, diferente daquela do modelo de dois poços. Após isso, mostrou-se que esses sistemas nada mais são do que particularizações de um modelo mais abrangente, que descreve uma família de sistemas de  $n + m$  poços em interação, sendo três desses sistemas o foco desse trabalho: os modelos de  $2 + 1$ ,  $2 + 2$  e  $3 + 1$  poços.

Tendo feito uma revisão de Integrabilidade Clássica, o Capítulo 3 evidencia a não-axiomatização do caso quântico, em detrimento do caso clássico: enquanto esse tem definições claras, aquele não possui bases bem estabelecidas (sendo adotada uma definição específica, dada em termos da matriz  $R$ , de  $T(u)$  e de  $\tau(u)$ ). Assim, mostrou-se que, com a realização algébrica escolhida, a separação do sistema em duas classes é imediata, o que foi de grande utilidade, já que a família de modelos estudada também é composta de duas classes principais. Com isso, foram mostrados explicitamente os métodos utilizados para encontrar as soluções exatas do modelo, de forma a se obter, explicitamente, expressões para as autoenergias e os autoestados do hamiltoniano em questão, sem a necessidade de sua diagonalização (ao custo de resolver um conjunto de equações algébricas acopladas, as EAB). Isso só pode ser feito, no entanto, considerando-se uma extensão ao Método do Espalhamento Quântico Inverso através da introdução de operadores extras, cuja função no método do ansatz algébrico é a de criar bósons a partir dos estados de vácuo, formando os pseudovácuos adequados. Esses mesmos operadores também são os responsáveis em fornecer todas as cargas conservadas desses sistemas.

Por fim, com o auxílio dos métodos de Análise Semiclássica e Teoria de Perturbação Dependente do Tempo, no Capítulo 4 foi dada a interpretação física das cargas conservadas para os sistemas de  $2 + 1$ ,  $2 + 2$  e  $3 + 1$  poços.

Nesses três casos, as cargas correspondem a regimes de ressonância de bósons nos poços de uma mesma classe, além de serem dinamicamente equivalentes ao “seu” hamiltoniano original, quando feita a escolha de parâmetros  $UN/J \geq 5$ . Além disso, fica claro, através da comparação das figuras (4.3) e (4.6), que as cargas possuem uma dinâmica praticamente idêntica nos sistemas de  $2 + 1$  e  $2 + 2$  poços. De fato, elas têm a mesma expressão nos dois sistemas (considerando, é claro, a carga correspondente à classe A), o que corrobora com a proposta de independência entre as classes, já favorecida pela exclusividade dos operadores bosônicos.

Dessa forma, pode-se concluir que os resultados obtidos nesse trabalho certamente permitem vislumbrar um potencial muito rico para futuras aplicações. Embora a construção e a interpretação das cargas conservadas dependam das condições iniciais - como foi mostrado no decorrer do trabalho -, elas serão muito úteis na interpretação física das  $n + m - 2$  cargas conservadas do modelo geral de  $n + m$  poços, em aplicações na atomotônica e, possivelmente, na esquematização de um gate de computação quântica (no caso  $3 + 1$ ).

## Apêndice A

# Integrabilidade Clássica: Pares de Lax e Matrizes R, de Monodromia e de Transferência

Neste apêndice, revisaremos alguns conceitos importantes da integrabilidade clássica. Inicialmente, supomos duas matrizes  $L$  e  $M$  tais que as equações de Hamilton possam ser obtidas através de:

$$\frac{dL}{dt} = [M, L]. \quad (\text{A.0.1})$$

Nesse caso, dizemos que as matrizes  $L$  e  $M$  formam um *Par de Lax*. A partir da equação (C.0.1) podemos obter imediatamente um conjunto de quantidades conservadas (não necessariamente independentes):

$$Q_n \equiv \text{tr}\{L^n\}. \quad (\text{A.0.2})$$

Derivando em relação ao tempo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_n}{dt} &= \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr}\{L^i [M, L] L^{n-1-i}\} = \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr}\{L^i (ML^{n-i} - LML^{n-i-1})\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr}\{L^i ML^{n-i}\} - \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr}\{L^i LML^{n-i-1}\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

Entretanto, nada garante que essas integrais de movimento estejam em involução (e, portanto, que o sistema seja integrável). O seguinte teorema garante a integrabilidade clássica do sistema:

*Os autovalores de  $L$  estão em involução se existe um elemento  $r_{12} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  que seja função das variáveis do espaço de fase, tal que:*

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]. \quad (\text{A.0.4})$$

Acima,  $L_1$  é o operador  $L$  definido sobre o espaço  $\mathfrak{g} \otimes 1$  e  $L_2$  é definido sobre o espaço  $1 \otimes \mathfrak{g}$ , e o elemento

$r_{12}$  (denominado *matriz-r clássica*) é um elemento do espaço  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ . Para que a quantidade  $\{L_1, L_2\}$  satisfaça a *identidade de Jacobi*, é condição *suficiente* [32] que:

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0, \quad (\text{A.0.5})$$

onde a equação (A.0.5) é chamada *Equação Clássica de Yang-Baxter* (ECYB). Portanto, esse formalismo fornece um método para a obtenção das quantidades conservadas  $Q_n$  do sistema, assegurando a integrabilidade (visto que as quantidades  $Q_n$  estão necessariamente em involução). A iminente vantagem do método é que as matrizes  $L$  e  $M$  podem ser definidas como função de um parâmetro  $u$  (parâmetro espectral), de forma que é possível obtermos uma família infinita de quantidades conservadas (não necessariamente independentes e/ou distintas) por meio da expansão em *Série de Taylor* em  $u$ . Dessa forma, o conceito de integrabilidade pode ser estendido para sistemas com infinitos graus de liberdade (como *teorias de campo*, por exemplo). Para tanto, devemos adaptar a ideia de *Pares de Lax*, de forma a torná-la adequada aos novos sistemas.

Seja  $\phi = \phi(\vec{r}, t)$  um campo clássico, descrito pela densidade lagrangeana  $\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})$ . A minimização da ação  $S[\phi]$ , dada por  $S[\phi] = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x$  dá origem às Equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{A.0.6})$$

Em um sistema com 1+1 dimensões, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{A.0.7})$$

A teoria de campos descrita pela densidade  $\mathcal{L}$  será dita *integrável* se for possível obter as Equações de Euler-Lagrange por meio de duas matrizes  $L$  e  $M$  (par de Lax), dependentes do parâmetro espectral  $u$ , que satisfaçam:

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} = [M, L]. \quad (\text{A.0.8})$$

A relação (C.0.8) pode ser descrita pelo *problema linear auxiliar*:

$$(\partial_x - L)\phi = 0, \quad (\partial_t - M)\phi = 0. \quad (\text{A.0.9})$$

Uma vez encontrados, os pares de Lax permitem, a princípio, obter uma sequência de quantidades conservadas [33]. Considere uma translação espacial do campo  $\phi(x, t)$  entre os pontos  $x'$  e  $x''$ , em um tempo fixo  $t$ . A alteração no campo pode ser descrita como:  $\phi(x'', t) = T(u)\phi(x', t)$ , sendo  $T(u)$  uma matriz quadrada satisfazendo o problema linear auxiliar:

$$(\partial_{x''} - L)T(u) = 0, \quad (\text{A.0.10})$$

cuja solução formal dá origem à *matriz de monodromia*  $T(u)$ :

$$T(u) = P \exp \left[ \int_{x'}^{x''} L(x, t, u) dx \right], \quad (\text{A.0.11})$$

onde  $P$  representa o operador *ordenamento de caminho*. A aplicação da matriz de monodromia pode ser pensada como a realização de um transporte paralelo ao longo do segmento  $[x', x'']$ . Além disso, derivando

$T(u)$  em relação ao tempo, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} T(u) &= \frac{d}{dt} P \exp \left[ \int_{x'}^{x''} L(x, t, u) dx \right] \\
 &= \int_{x'}^{x''} P \exp \left[ \int_x^{x''} L(v, t, u) dv \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} L(x, t, u) \right] P \exp \left[ \int_{x'}^x L(v, t, u) dv \right] dx \\
 &= \int_{x'}^{x''} P \exp \left[ \int_x^{x''} L(v, t, u) dv \right] \left( \frac{\partial M}{\partial x} - [L, M] \right) P \exp \left[ \int_{x'}^x L(v, t, u) dv \right] dx \\
 &= \int_{x'}^{x''} \frac{\partial}{\partial x} \left( P \exp \left[ \int_x^{x''} L(v, t, u) dv \right] M P \exp \left[ \int_{x'}^x L(v, t, u) dv \right] \right) dx \\
 &= M(x'') P \exp \left[ \int_{x'}^{x''} L(v, t, u) dv \right] - P \exp \left[ \int_{x'}^{x''} L(v, t, u) dv \right] M(x') \\
 &= M(x'') T(u) - T(u) M(x').
 \end{aligned} \tag{A.0.12}$$

Se supusermos o segmento  $[x', x'']$  como  $[0, 2\pi]$  tal que o campo  $\phi(x, t)$  possua condições de contorno periódicas nas extremidades do segmento, obtemos que:

$$\frac{d}{dt} T(u) = [M(0, t, u), T(u)], \tag{A.0.13}$$

de forma que o traço da matriz de monodromia, denominado *matriz de transferência*:

$$t(u) \equiv \text{tr } T(u), \tag{A.0.14}$$

é conservado para todo parâmetro espectral  $u$ . Por questões de completeza, devemos assegurar que as matrizes  $t(u)$  estão em involução para diferentes parâmetros espectrais. Tal resultado transcorre da equação (C.0.4) levemente alterada:

$$\{T_1(u), T_2(v)\} = [r_{12}(u-v), T(u) \otimes T(v)], \tag{A.0.15}$$

tal que  $r_{12}$  satisfaz a ECYB:

$$[r_{12}(u-v), r_{13}(u-\omega)] + [r_{12}(u-v), r_{23}(v-\omega)] + [r_{13}(u-\omega), r_{23}(v-\omega)] = 0. \tag{A.0.16}$$

Dessa forma, recuperamos a integrabilidade segundo Liouville, visto que:

$$\{t(u), t(v)\} = 0. \tag{A.0.17}$$

Expandindo  $t(u)$  em série de Taylor, temos:

$$t(u) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n u^n, \text{ onde } Q_n = \left( \frac{1}{n!} \frac{d^n}{du^n} t(u) \right)_{u=0} \tag{A.0.18}$$

Utilizando a equação (C.0.18) na (C.0.17), temos que  $\{Q_\mu, Q_\nu\} = 0$ ,  $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$ , de forma que os coeficientes  $Q_n$  da expansão de  $t(u)$  formam uma família de primeiras integrais de movimento.

## Apêndice B

# Método Algébrico do Ansatz de Bethe

### B.1 EQUAÇÃO DE YANG-BAXTER E REGRAS DE COMUTAÇÃO

Neste apêndice, iremos derivar as regras de comutação para os elementos da matriz de monodromia, necessários para a aplicação do Método Algébrico do Ansatz de Bethe.

Começamos definindo os Pares de Lax  $L^A(u)$  e  $L^B(u)$  para o hamiltoniano (2.0.1):

$$L^A(u) = \begin{pmatrix} u + \eta N_A & A \\ A^\dagger & \eta^{-1} \end{pmatrix} \quad L^B(u) = \begin{pmatrix} u + \eta N_B & B \\ B^\dagger & \eta^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1.1})$$

A matriz de monodromia, dada por:

$$T(u) = L^A(u + \omega) L^B(u - \omega) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1.2})$$

deve satisfazer a Equação de Yang-Baxter (2.2.11):

$$R_{12}(u - v) T_1(u) T_2(v) = T_2(v) T_1(u) R_{12}(u - v). \quad (\text{B.1.3})$$

A equação (A.1.3) pode ser escrita em forma matricial:

$$R(u - v) T(u) \otimes T(v) = T(v) \otimes T(u) R(u - v). \quad (\text{B.1.4})$$

O produto tensorial  $T(u) \otimes T(v)$  é dado por:

$$\begin{aligned}
 T(u) \otimes T(v) &= \begin{pmatrix} T_1^1(u) \begin{pmatrix} T_1^1(v) & T_2^1(v) \\ T_1^2(v) & T_2^2(v) \end{pmatrix} & T_2^1(u) \begin{pmatrix} T_1^1(v) & T_2^1(v) \\ T_1^2(v) & T_2^2(v) \end{pmatrix} \\ T_1^2(u) \begin{pmatrix} T_1^1(v) & T_2^1(v) \\ T_1^2(v) & T_2^2(v) \end{pmatrix} & T_2^2(u) \begin{pmatrix} T_1^1(v) & T_2^1(v) \\ T_1^2(v) & T_2^2(v) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} T_1^1(u)T_1^1(v) & T_1^1(u)T_2^1(v) & T_2^1(u)T_1^1(v) & T_2^1(u)T_2^1(v) \\ T_1^1(u)T_1^2(v) & T_1^1(u)T_2^2(v) & T_2^1(u)T_1^2(v) & T_2^1(u)T_2^2(v) \\ T_1^2(u)T_1^1(v) & T_1^2(u)T_2^1(v) & T_2^2(u)T_1^1(v) & T_2^2(u)T_2^1(v) \\ T_1^2(u)T_1^2(v) & T_1^2(u)T_2^2(v) & T_2^2(u)T_1^2(v) & T_2^2(u)T_2^2(v) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{B.1.5}$$

Dessa forma, a equação (A.1.4) fica:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u-v) & c(u-v) & 0 \\ 0 & c(u-v) & b(u-v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} T_1^1(u)T_1^1(v) & T_1^1(u)T_2^1(v) & T_2^1(u)T_1^1(v) & T_2^1(u)T_2^1(v) \\ T_1^1(u)T_1^2(v) & T_1^1(u)T_2^2(v) & T_2^1(u)T_1^2(v) & T_2^1(u)T_2^2(v) \\ T_1^2(u)T_1^1(v) & T_1^2(u)T_2^1(v) & T_2^2(u)T_1^1(v) & T_2^2(u)T_2^1(v) \\ T_1^2(u)T_1^2(v) & T_1^2(u)T_2^2(v) & T_2^2(u)T_1^2(v) & T_2^2(u)T_2^2(v) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} T_1^1(u)T_1^1(v) & T_1^1(u)T_2^1(v) & T_2^1(u)T_1^1(v) & T_2^1(u)T_2^1(v) \\ T_1^1(u)T_1^2(v) & T_1^1(u)T_2^2(v) & T_2^1(u)T_1^2(v) & T_2^1(u)T_2^2(v) \\ T_1^2(u)T_1^1(v) & T_1^2(u)T_2^1(v) & T_2^2(u)T_1^1(v) & T_2^2(u)T_2^1(v) \\ T_1^2(u)T_1^2(v) & T_1^2(u)T_2^2(v) & T_2^2(u)T_1^2(v) & T_2^2(u)T_2^2(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u-v) & c(u-v) & 0 \\ 0 & c(u-v) & b(u-v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{B.1.6}$$

de onde são obtidas as regras de comutação apresentadas em (3.2.12):

$$\begin{aligned}
 [A(u), A(v)] &= [B(u), B(v)] = [C(u), C(v)] = [D(u), D(v)] = 0, \\
 A(u)C(v) &= \frac{u-v+\eta}{u-v}C(v)A(u) - \frac{\eta}{u-v}C(u)A(v), \\
 D(v)C(u) &= \frac{\eta}{u-v}C(v)D(u) - \frac{u-v+\eta}{u-v}C(u)D(v).
 \end{aligned} \tag{B.1.7}$$

## B.2 OS AUTOVALORES DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

A finalidade do Método Algébrico do Ansatz de Bethe é a de fornecer os autovalores e os autoestados do hamiltoniano do sistema. Isso só é possível se for definido um estado - o estado de Bethe - que seja autoestado da matriz de transferência  $\tau(u)$  mediante condições. Utilizando explicitamente os pseudovácuos  $|\phi_{\{l,k\}}\rangle$ , esse estado é definido como:

$$|\psi_{\{l,k\}}\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-r} \prod_{p=1}^{N-l_p} \prod_{q=1}^{N-k_q} C(v_i) (\Gamma^\dagger)^{l_p} (\bar{\Gamma}^\dagger)^{k_q} |0\rangle, & r < N \\ \prod_{p=1}^{N-l_p} \prod_{q=1}^{N-k_q} (\Gamma^\dagger)^{l_p} (\bar{\Gamma}^\dagger)^{k_q} |0\rangle, & r = N \end{cases} \quad (\text{B.2.1})$$

Acima,  $|0\rangle = \underbrace{|0, \dots, 0\rangle}_n \otimes \underbrace{|0, \dots, 0\rangle}_m$ . Vamos, agora, aplicar a matriz de transferência  $\tau(u) = A(u) + D(u)$  no estado de Bethe. Começando com o caso mais simples ( $r = N$ ), temos:

$$\begin{aligned} \tau(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle &= [A(u) + D(u)] |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\ &= [a(u) + d(u)] |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\ &= \lambda_{\{l,k\}}(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.2.2})$$

Explicitamente, temos, para o caso  $r = N$ :

$$\lambda_{\{l,k\}}(u) = \left( u + \omega + \sum_{i=1}^{n-1} \eta l_i \right) \left( u - \omega + \sum_{j=1}^{m-1} \eta k_j \right) + \eta^{-2} \quad (\text{B.2.3})$$

Para o caso  $r < N$ , utilizando as relações de comutação (A.1.7):

$$\begin{aligned} A(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle &= A(u) \prod_{i=1}^{N-r} C(v_i) |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{N-r} [A(u) C(v_i)] |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{N-r} \left[ \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i) A(u) - \frac{\eta}{u - v_i} C(u) A(v_i) \right] |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\ &= \left[ \prod_{i=1}^{N-r} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i) A(u) - \sum_{i=1}^{N-r} \frac{\eta}{u - v_i} C(u) A(v_i) \right] |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\ &= a(u) \prod_{j=1}^{N-r} \frac{u - v_j + \eta}{u - v_j} |\psi_{\{l,k\}}\rangle - \sum_{i=1}^{N-r} \frac{\eta}{u - v_i} a(v_i) \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j} C(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.2.4})$$

$$\begin{aligned}
 D(u) |\psi_{\{l,k\}}\rangle &= D(u) \prod_{i=1}^{N-r} C(v_i) |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\
 &= \prod_{i=1}^{N-r} [D(u)C(v_i)] |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\
 &= \prod_{i=1}^{N-r} \left[ \frac{u-v_i-\eta}{u-v_i} C(v_i)D(u) + \frac{\eta}{u-v_i} C(u)D(v_i) \right] |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\
 &= \left[ \prod_{i=1}^{N-r} \frac{u-v_i-\eta}{u-v_i} C(v_i)D(u) + \sum_{i=1}^{N-r} \frac{\eta}{u-v_i} C(u)D(v_i) \right] |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\
 &= d(u) \prod_{j=1}^{N-r} \frac{u-v_j-\eta}{u-v_j} |\psi_{\{l,k\}}\rangle + \sum_{i=1}^{N-r} \frac{\eta}{u-v_i} d(v_i) \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i-v_j-\eta}{v_i-v_j} C(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle.
 \end{aligned} \tag{B.2.5}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 \tau(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle &= [A(u) + D(u)] |\phi_{\{l,k\}}\rangle \\
 &= \underbrace{\left[ a(u) \prod_{j=1}^{N-r} \frac{u-v_j+\eta}{u-v_j} + d(u) \prod_{j=1}^{N-r} \frac{u-v_j-\eta}{u-v_j} \right]}_{\lambda_{\{l,k\}}(u)} |\psi_{\{l,k\}}\rangle \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^{N-r} \frac{\eta}{u-v_i} \left[ d(v_i) \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i-v_j-\eta}{v_i-v_j} - a(v_i) \prod_{j \neq i}^{N-r} \frac{v_i-v_j+\eta}{v_i-v_j} \right]}_{\text{termos indesejados} \rightarrow 0} C(u) |\phi_{\{l,k\}}\rangle.
 \end{aligned} \tag{B.2.6}$$

Assim, com a imposição de que  $|\psi_{\{l,k\}}\rangle$  seja autoestado de  $\tau(u)$ , resulta da equação (A.2.6) dois resultados importantes: as EAB e a expressão explícita dos autovalores de  $\tau(u)$  para o caso  $r < N$ :

$$\lambda_{\{l,k\}} = \left( u + \omega + \sum_{i=1}^{n-1} \eta l_i \right) \left( u - \omega + \sum_{j=1}^{m-1} \eta k_j \right) \prod_{j=1}^{N-r} \frac{u-v_j+\eta}{u-v_j} + \eta^{-2} \prod_{j=1}^{N-r} \frac{u-v_j-\eta}{u-v_j}. \tag{B.2.7}$$

## Apêndice C

# Representação Matricial do Hamiltoniano

Neste apêndice, faremos explicitamente a representação matricial do hamiltoniano  $H_{n,m}$  (2.0.1) na base dos estados de Fock, de forma a ser possível a obtenção de seus autovalores e autovetores por meio de diagonalização exata. Seja  $H_{n,m}$  dado por:

$$H_{n,m} = U(N_A - N_B)^2 + \mu(N_A - N_B) + J(A^\dagger B + AB^\dagger). \quad (\text{C.0.1})$$

Seja, agora, a base  $\mathcal{B}$  formada pelos estados de Fock:

$$\mathcal{B} = \{|N, \dots, 0, 0, \dots, 0\rangle, \dots, |0, \dots, N, 0, \dots, 0\rangle, \dots, |0, \dots, 0, N, \dots, 0\rangle, \dots, |0, \dots, 0, 0, \dots, N\rangle\}. \quad (\text{C.0.2})$$

Dessa forma, a representação matricial de  $H_{n,m}$  em  $\mathcal{B}$  será:

$$[H_{n,m}] = \begin{pmatrix} \langle N, \dots, 0, 0, \dots, 0 | H_{n,m} | N, \dots, 0, 0, \dots, 0 \rangle & \dots & \langle 0, \dots, 0, 0, \dots, N | H_{n,m} | N, \dots, 0, 0, \dots, 0 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle N, \dots, 0, 0, \dots, 0 | H_{n,m} | 0, \dots, 0, 0, \dots, N \rangle & \dots & \langle 0, \dots, 0, 0, \dots, N | H_{n,m} | 0, \dots, 0, 0, \dots, N \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.3})$$

Note que essa representação não é, de forma alguma, única. Isso não é um problema, desde que haja equivalência entre os autovalores das “diferentes” representações e consistência nas quantidades calculadas mediante (e/ou após) a evolução temporal dos autoestados da representação.

Por exemplo, para o caso do sistema de 2+1 poços, com o hamiltoniano descrito por:

$$H_{2,1} = U(N_{a,1} + N_{a,2} - N_{b,1})^2 + \mu(N_{a,1} + N_{a,2} - N_{b,1}) + J(\alpha_1 [a_1^\dagger b_1 + a_1 b_1^\dagger] + \alpha_2 [a_2^\dagger b_1 + a_2 b_1^\dagger]). \quad (\text{C.0.4})$$

Teremos a seguinte representação matricial, considerando apenas 1 bóson:

$$[H_{2,1}] = \begin{pmatrix} \langle 1, 0, 0 | H_{2,1} | 1, 0, 0 \rangle & \langle 0, 1, 0 | H_{2,1} | 1, 0, 0 \rangle & \langle 0, 0, 1 | H_{2,1} | 1, 0, 0 \rangle \\ \langle 1, 0, 0 | H_{2,1} | 0, 1, 0 \rangle & \langle 0, 1, 0 | H_{2,1} | 0, 1, 0 \rangle & \langle 0, 0, 1 | H_{2,1} | 0, 1, 0 \rangle \\ \langle 1, 0, 0 | H_{2,1} | 0, 0, 1 \rangle & \langle 0, 1, 0 | H_{2,1} | 0, 0, 1 \rangle & \langle 0, 0, 1 | H_{2,1} | 0, 0, 1 \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.5})$$

Os elementos de matriz  $\langle \mathcal{N}'_{a,1}, \mathcal{N}'_{a,2}, \mathcal{N}'_{b,1} | H_{2,1} | \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1} \rangle$  são dados por:

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathcal{N}'_{a,1}, \mathcal{N}'_{a,2}, \mathcal{N}'_{b,1} | H_{2,1} | \mathcal{N}_{a,1}, \mathcal{N}_{a,2}, \mathcal{N}_{b,1} \rangle \\
 &= [U(\mathcal{N}_{a,1} + \mathcal{N}_{a,2} - \mathcal{N}_{b,1})^2 + \mu(\mathcal{N}_{a,1} + \mathcal{N}_{a,2} - \mathcal{N}_{b,1})] \delta_{\mathcal{N}'_{a,1}, \mathcal{N}_{a,1}} \delta_{\mathcal{N}'_{a,2}, \mathcal{N}_{a,2}} \delta_{\mathcal{N}'_{b,1}, \mathcal{N}_{b,1}} \\
 &+ J\alpha_1 (\sqrt{\mathcal{N}_{a,1}(\mathcal{N}_{b,1} + 1)} \delta_{\mathcal{N}'_{a,1}, \mathcal{N}_{a,1}-1} \delta_{\mathcal{N}'_{b,1}, \mathcal{N}_{b,1}+1} + \sqrt{\mathcal{N}_{b,1}(\mathcal{N}_{a,1} + 1)} \delta_{\mathcal{N}'_{a,1}, \mathcal{N}_{a,1}+1} \delta_{\mathcal{N}'_{b,1}, \mathcal{N}_{b,1}-1}) \delta_{\mathcal{N}'_{a,2}, \mathcal{N}_{a,2}} \\
 &+ J\alpha_2 (\sqrt{\mathcal{N}_{a,2}(\mathcal{N}_{b,1} + 1)} \delta_{\mathcal{N}'_{a,2}, \mathcal{N}_{a,2}-1} \delta_{\mathcal{N}'_{b,1}, \mathcal{N}_{b,1}+1} + \sqrt{\mathcal{N}_{b,1}(\mathcal{N}_{a,2} + 1)} \delta_{\mathcal{N}'_{a,2}, \mathcal{N}_{a,2}+1} \delta_{\mathcal{N}'_{b,1}, \mathcal{N}_{b,1}-1}) \delta_{\mathcal{N}'_{a,1}, \mathcal{N}_{a,1}}.
 \end{aligned} \tag{C.0.6}$$

Assim, a representação em (B.0.5) assume a forma explícita:

$$[H_{2,1}] = \begin{pmatrix} U + \mu & J\alpha_1\sqrt{2} & 0 \\ J\alpha_1\sqrt{2} & U + \mu & J\alpha_2\sqrt{2} \\ 0 & J\alpha_2\sqrt{2} & U - \mu \end{pmatrix}. \tag{C.0.7}$$

Como os estados de Fock são autoestados dos operadores  $N_i$ , temos que os termos dispostos na diagonal principal das matrizes que representam os hamiltonianos são devidos à interação entre os bósons.

A representação matricial de casos com mais bósons e/ou poços é feita de forma similar.

# Referências Bibliográficas

- [1] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989.
- [2] J. Liouville. Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique, présentée au bureau des longitudes le 29 juin 1853. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pages 137–138, 1855.
- [3] E. Schrödinger. Quantisierung als eigenwertproblem. *Ann. Phys.*, 384(4):361–376, 1926.
- [4] E. Schrödinger. Quantisierung als eigenwertproblem. *Ann. Phys.*, 384(6):489–527, 1926.
- [5] H. Bethe. Zur theorie der metalle. *Zeitschrift für Physik*, 71(3):205–226, 1931.
- [6] J. B. McGuire. Study of exactly soluble one-dimensional n-body problems. *Journal of Mathematical Physics*, 5(5):622–636, 1964.
- [7] Elliott H. Lieb. Exact solution of the problem of the entropy of two-dimensional ice. *Phys. Rev. Lett.*, 18:692–694, 1967.
- [8] C. N. Yang. Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1312–1315, 1967.
- [9] R. J. Baxter. Exactly solved models in statistical mechanics. In *Integrable systems in statistical mechanics*, page 5. World Scientific, 1985.
- [10] L.D. Faddeev. Algebraic aspects of the bethe ansatz. *International Journal of Modern Physics A*, 10(13):1845–1878, 1995.
- [11] Vladimir E Korepin and Fabian H L Eler. *Exactly solvable models of strongly correlated electrons*. World Scientific, 1994.
- [12] G Santos, A Foerster, I Roditi, Z V T Santos, and A P Tonel. Exactly solvable models for triatomic-molecular Bose-Einstein Condensates. page 11, 2008.
- [13] Bernd Wolf, Andreas Honecker, Walter Hofstetter, Ulrich Tutsch, and Michael Lang. Cooling through quantum criticality and many-body effects in condensed matter and cold gases. *International Journal of Modern Physics B*, 28(26):1430017, 2014.
- [14] Bose. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik*, 26(1):178–181, 1924.
- [15] A Einstein. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1924.

- [16] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [17] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [18] Michael Albiez, Rudolf Gati, Jonas Fölling, Stefan Hunsmann, Matteo Cristiani, and Markus K. Oberthaler. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic josephson junction. *Phys. Rev. Lett.*, 95:010402, 2005.
- [19] J. Links, A. Foerster, A. P. Tonel, and G. Santos. The two-site bose-hubbard model. *Annales Henri Poincaré*, 7:1591–1600, 2006.
- [20] D. Rubeni, A. Foerster, E. Mattei, and I. Roditi. Quantum phase transitions in bose-einstein condensates from a bethe ansatz perspective. *Nuclear Physics B*, 856:698–715, 2012.
- [21] Karin Wittmann Wilsmann, Leandro H Ymai, Arlei Prestes Tonel, Jon Links, and Angela Foerster. Control of tunneling in a triple-well system: An atomtronic switching device. 3(2):1–7, 2017.
- [22] Karin Wittmann Wilsmann. Quebra da integrabilidade para um modelo de tunelamento quântico de três poços. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.
- [23] A. P. Tonel, L. H. Ymai, A. Foerster, and J Links. Integrable model of bosons in a four-well ring with anisotropic tunneling. *J. Phys. A*, 48(49):1–13, 2015.
- [24] L. H. Ymai, A. P. Tonel, A. Foerster, and J. Links. Quantum integrable multi-well tunneling models. *J. Phys. A*, 50(26):1–14, 2017.
- [25] D Rubeni, J Links, P S Isaac, and A Foerster. Two-site Bose-Hubbard model with nonlinear tunneling: Classical and quantum analysis. *Phys. Rev. A*, 95(4):1–11, 2017.
- [26] T. Lahaye, T. Pfau, and L. Santos. Mesoscopic ensembles of polar bosons in triple-well potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 104:170404, 2010.
- [27] N. A. Lemos. *Mecânica analítica*. Livraria da Física, 2007.
- [28] Jean-Sébastien Caux and Jorn Mossel. Remarks on the notion of quantum integrability. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011(02):P02023, 2011.
- [29] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, and L. A. Takhtajan. The quantum inverse problem method. 1. *Theor. Math. Phys.*, 40:688–706, 1980. *Teor. Mat. Fiz.*40,194(1979).
- [30] A. G. Izergin and V. E. Korepin. The pauli principle for one-dimensional bosons and the algebraic bethe ansatz. *Journal of Soviet Mathematics*, 34(5):1933–1937, 1986.
- [31] Biao Wu and Jie Liu. Commutability between the semiclassical and adiabatic limits. *Phys. Rev. Lett.*, 96:020405, 2006.
- [32] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, and Cambridge University Press. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge Monographs on Mathem. Cambridge University Press, 2003.
- [33] Alessandro Torrielli. Lectures on classical integrability. *J. Phys. A*, 49(32):323001, 2016.