Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Harmonicidade de aplicações de Gauss e subvariedades com vetor curvatura média paralelo

Tese de Doutorado

Daniel Francisco Bustos Ríos

Porto Alegre, 21 de dezembro de 2018

Tese submetida por Daniel Francisco Bustos Ríos[1], como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca examinadora:
Prof. Dr. Álvaro Krüger Ramos (UFRGS)
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (UFRGS, ORIENTADOR)
Prof.ª Dr.ª Patrícia Kruse Klaser (UFSM)
Prof. Dr. Pedro Fusieger (UFSM)

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

No ensino médio quando escolhi estudar matemática não imaginava o belo universo de construções, ideias e oportunidades de novos conhecimentos ao qual estava entrando e que iam me cativar de tal forma que nasceria em mim o sonho de fazer um mestrado e um doutorado em matemática, para desta forma poder seguir uma carreira de pesquisa em matemática.

São muitas as pessoas que contribuíram diferentes peças para formar e atingir este sonho, das quais sinto um imenso agradecimento. A seguir vou me dirigir particularmente a algumas destas pessoas.

Professor Jaime, te agradeço por tua orientação durante o doutorado, por todo teu tempo e pelas sempre proveitosas discussões, contigo aprendi que por mais clássico que seja um tópico sempre tem alguma coisa para ser feita. Te agradeço a humildade que tens para compartilhar toda tua experiência de pesquisa em matemática, por confiar em mim e por pensar nas possibilidades para meu futuro.

Álvaro, te agradeço pela parceria, mas sobretudo pela disposição para discutir sobre qualquer tema, de matemática ou da vida, por todas tuas sugestões e ensinamentos, por sempre me motivar a estudar, fazer matemática, participar dos eventos de geometria e das diversas atividades.

Agradeço ao Instituto de Matemática e Estatística por ter me aceitado como seu aluno e a todos os ensinamentos dos diversos professores durante o mestrado e o doutorado. Em especial ao professor Alveri por sua orientação durante o mestrado, às professoras Pati e Miriam por me mostrarem a porta da geometria, não vou esquecer que desde o início vocês acreditaram em mim.

Agradeço ao grupo dos harmônicos de Santa Maria, pelas discussões e hospitalidade.

Te agradezco mamá, papá y hermana, gracias porque desde chiquito me dieron todas las herramientas para vivir, gracias por siempre estar ahí para escucharme y compartir nuestras alegrias y tristezas. Gracias por las “alas”! A ustedes les debo este y cada uno de mis logros. Los amo!

Flaca esposa mia te agradeço por muitas coisas, principalmente é claro por me amar. Te agradeço o esforço e o entusiasmo com que enfrentas o dia a dia, por acreditar em mim e em nossa relação, por ter tomado o risco para poder caminharmos juntos em tempo e espaço. Te amo!

Agradeço a todos meus amigos que conheci aqui em Porto Alegre. Especialmente, ao Félix e ao Leo pela parceria, ao seu Geraldo e dona Miguelina por sempre terem os braços abertos para nos receber no seu lar.

Agradeço à banca examinadora por ter aceitado o convite para participar na avaliação deste trabalho.

Por fim, agradeço a CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro sem o qual teria sido impossível o desenvolvimento do doutorado.

Resumo

Seja M uma subvariedade de uma variedade Riemanniana N. Denote por $\mathcal{N}(M)$ o fibrado vetorial (sobre M) das seções do fibrado normal de M e por $\mathcal{E}(M)$ o fibrado vetorial das seções do fibrado vetorial de endomorfismos de TM munido com a métrica de Hilbert-Schimdt. Seja $B : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{E}(M)$ o homomorfismo entre fibrados $B(\eta) = S_\eta$, onde S_η é a segunda forma fundamental de M determinada por $\eta \in \mathcal{N}(M)$. Seja $B^* : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{N}(M)$ o homomorfismo entre fibrados definido pontualmente como a adjunta de B. Além disso, consideremos o homomorfismo de fibrados normal de Ricci, $\mathrm{Ric}_M^\perp : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{N}(M)$ definido, em cada fibra, como o seguinte traço: Para $\eta_1, \eta_2 \in T_p^\perp M$,

$$\langle \mathrm{Ric}_M^\perp(\eta_1)(p), \eta_2 \rangle := tr\left((X,\ Y) \in T_pM \times T_pM \mapsto \langle R(\eta_1, X)\eta_2, Y\rangle \in \mathbb{R}\right).$$

Como resultados principais da tese apresentamos classes de variedades Riemannianas N e M (como espaços simétricos N e subvariedades M com vetor curvatura média paralelo) às quais associamos a cada seção normal η paralela de M uma aplicação de Gauss $\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^m$ e mostramos que η é um autovetor paralelo do homomorfismo autoadjunto entre fibrados $B^*B + \mathrm{Ric}_M^\perp : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{N}(M)$ se e somente se γ_η é harmônica, onde $\mathbb{S}^m$ é a esfera Euclidiana da dimensão apropriada.

Palavras-chave: Laplaciano, aplicações de Gauss, autoaplicações do Laplaciano, subvariedades isoparamétricas, subvariedades mínimas, subvariedades com vetor curvatura média, ações polares.

Abstract

Let M be a submanifold of a Riemannian manifold N. Denote by $\mathcal{N}(M)$ the vector bundle (over M) of sections of the normal bundle of M and by $\mathcal{E}\,(M)$ the vector bundle of sections of the vector bundle of endomorphisms of TM equipped with the Hilbert-Schimdt metric. Let $B : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{E}(M)$ be the bundle homomorphism $B(\eta) = S_\eta$, where S_η is the second fundamental form of M determined by $\eta \in \mathcal{N}(M)$. Let $B^* : \mathcal{E}\,(M) \to \mathcal{N}(M)$ be the bundle homomorphism defined as the fiber-wise adjoint map of B. Also, consider the normal Ricci bundle homomorphism $\mathrm{Ric}_M^{\perp} : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{N}(M)$ defined, at each fiber, as the following trace: For $\eta_1, \eta_2 \in T_p^{\perp}M$

$$\left\langle \mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta_1)(p), \eta_2 \right\rangle = tr\left((X,\ Y) \in T_pM \times T_pM \mapsto \langle \mathrm{R}(\eta_1, X)\eta_2, Y\rangle \in \mathbb{R}\right).$$

As main results of this thesis we present classes of Riemannian manifolds N and M (as symmetric spaces N and submanifolds M with parallel mean curvature vector) in which one associates to each unit parallel normal section η of M a Gauss map $\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^m$ and it holds that η is an eigenvector of the self-adjoint bundle homomorphism $B^*B + \mathrm{Ric}_M^{\perp} : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{N}(M)$ if and only if γ_η is harmonic, $\mathbb{S}^m$ being a unit Euclidean sphere of some appropriate dimension m.

Keywords: Laplacian, Gauss maps, eigenmaps of the Laplacian, isoparametric submanifolds, minimal submanifolds, submanifolds with parallel mean curvature vector, polar actions.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A aplicação de Gauss de hipersuperfícies e subvariedades de variedades Riemannianas é um tópico fundamental de estudo em geometria diferencial. Existe uma ampla variedade de literatura estendendo e estudando, por diferentes pontos de vista, a aplicação de Gauss de superfícies do espaço Euclidiano a subvariedades de dimensão e codimensão arbitraria e em espaços ambientes muito mais gerais. Citamos aqui uma pequena fração do universo de estudos envolvendo este tópico: [5], [6], [7], [8], [10], [12], [15], [19], [23], [24], [25], [31], [32], [35], [36], [41], [43].

Outro campo de estudo muito fértil que tem um papel fundamental na atualidade é o das aplicações harmônicas. Recordemos que a energia de uma aplicação $\phi : M \to N$ entre as variedades Riemannianas M e N em um domínio Ω de M está determinada por

$$E_\Omega(\phi) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|d\phi\|^2 dM.$$

Assim sendo, a aplicação ϕ é dita harmônica se e somente se é um ponto crítico da energia. Para teoria básica e um panorama atual referente a este assunto ver o "survey" de F. Hélein e J. Wood [29] e alguns artigos e livros representativos [20], [21], [22], [27], [28], [46].

Historicamente, as propriedades das aplicações harmônicas têm fornecido notáveis ferramentas e conexões entre análise e geometria diferencial. Sem dúvida, um ponto fundamental na historia destas relações é devida a E. Ruh e J. Vilms. Eles provam em [43] que o campo de tensões da aplicação de

Gauss generalizada (clássica)

$$G : M \to G(n, m),$$

de uma subvariedade imersa M, de dimensão n, no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^m$ pode ser identificada com a derivada covariante do vetor curvatura média $\overrightarrow{H}$ de M no $\mathbb{R}^m$. Em vista disto eles obtêm que a aplicação de Gauss G de M é harmônica se e somente se o vetor curvatura média $\overrightarrow{H}$ é paralelo.

A harmonicidade da aplicação de Gauss também está naturalmente relacionada com resultados sobre a imagem da aplicação de Gauss. Tal é o caso do celebrado Teorema 1.1, enunciado abaixo, devido a D. Hoffman, R. Osserman e R. Schoen [33]. No mesmo artigo, eles estendem *(HOS)* para superfícies em $\mathbb{R}^4$ usando a harmonicidade das projeções da aplicação de Gauss em $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{S}^2_2$.

Teorema 1.1. *(HOS) Seja S uma superfície orientada e completa de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$. Se a imagem da aplicação de Gauss de S está contida em algum hemisfério aberto, então S é o plano. Se a imagem da aplicação de Gauss de S está contida em algum hemisfério, então S é o plano ou o cilindro circular reto.*

Diversos autores têm obtido versões do Teorema de Ruh-Vilms e resultados sobre a imagem de aplicações de Gauss por translação para hipersuperfícies em certos espaços ambiente [36], [19], [6], [23], [41] e [8]. A finalidade deste trabalho é generalizar a codimensão de alguns resultados desses trabalhos e desta forma mostrar vínculos essenciais entre subvariedades com vetor curvatura média paralelo e harmonicidade de aplicações de Gauss em codimensão arbitraria, em certos espaços ambiente.

Para este propósito é essencial definir o endomorfismo autoadjunto B^*B, do fibrado das seções do fibrado normal $T^\perp M$, determinado pela segunda forma fundamental de uma variedade M isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana N. Nesse sentido, consideremos o fibrado dos endomorfismos lineares

$$End(M) := \{(p, T) \mid T \text{ é um endomorfismo linear de } T_pM\},$$

com a métrica de Hilbert-Schmidt.

Deste modo, denotando por $\mathcal{E}(M)$ o conjunto das seções de $End(M)$ e por $\mathcal{N}(M)$ o conjunto das seções de $T^{\perp}M$, definimos o homomorfismo de fibrados $B : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{E}(M)$ que associa a cada seção normal η do fibrado normal a segunda forma fundamental de M na direção de η, isto é, se η é uma seção do $T^{\perp}M$ então $B(\eta) = S_{\eta}$. Ademais podemos definir o homomorfismo entre fibrados

$$B^* : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{N}(M)$$

adjunto a B pela relação

$$\langle B(\eta), T\rangle = \langle \eta, B^*(T)\rangle.$$

Diremos que uma seção η do fibrado normal $T^{\perp}M$ de M é um autovetor do endomorfismo autoadjunto B^*B se $B^*B(\eta) = \lambda\eta$, para alguma função $\lambda : M \to \mathbb{R}$.

Os autovetores paralelos de B^*B são de vital importância neste trabalho pois em diversos ambientes as aplicações de Gauss por translação associadas a estes autovetores são harmônicas. Além disso, se os autovalores associados são constantes então estes autovetores são pontos críticos do funcional

$$F : \mathcal{N}(M) \to \mathbb{R}$$

definido em um domínio Ω de M por

$$F(\nu) = \frac{\int_{\Omega} \|\nabla\nu\|^2 dM}{\int_{\Omega} \|\nu\|^2 dM}, \tag{1.1}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de N. Mais geralmente, se o autovalor associado a um autovetor paralelo é não constante então este é um ponto crítico de F entre as seções em $\mathcal{N}(M)$ com norma 1.

Neste trabalho mostramos é possivel diagonalizar B^*B por vetores paralelos com autovalores constantes em órbitas principais de ações polares. Antes de enunciar esse resultado recordamos a definição de ação polar. Para referências de ações polares, ver [3].

Definição 1.2. *Uma ação isométrica de um grupo de Lie compacto* $\mathbb{G}$ *sobre* *uma variedade Riemanniana completa M é dita uma ação polar se existe uma subvariedade imersa, completa e conexa Σ, chamada seção, que intersecta todas as órbitas da ação e a interseção de Σ com as órbitas é ortogonal.*

Teorema 1.3. *Seja $\mu : \mathbb{G} \times N \to N$ uma ação polar sobre uma variedade Riemanniana N. Então o endomorfismo autoadjunto B^*B das órbitas principais $\mathbb{G}(x)$ é diagonalizável por campos de vetores paralelos com autovalores constantes.*

Tendo definido o operador B^*B e seguindo o recentre trabalho [8], associamos a cada campo de vetores unitário η normal a uma subvariedade M de $\mathbb{S}^7$ uma aplicação de Gauss octoniana,

$$\gamma_\eta(x) = x^{-1} \cdot \eta(x).$$

Desta forma, caracterizamos as aplicações de Gauss octonianas harmônicas associadas a campos de vetores normais paralelos e que são múltiplos do vetor curvatura média (ver Teorema 1.1 de [7] para o caso subvariedades mínimas) como autovetores do endomorfismo B^*B. Precisamente,

Teorema 1.4. *Seja M uma subvariedade com vetor curvatura média normalizado paralelo de codimensão $1 \leq k \leq 5$ de $\mathbb{S}^7$ e seja $\eta \in \mathcal{N}(M)$ uma seção normal unitária paralela de M tal que $\overrightarrow{H} = h\eta$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^6 \subset T_1\mathbb{S}^7$ *satisfaz*

$$\Delta\gamma_\eta = -\left(7 - k + \|S_\eta\|^2\right)\gamma_\eta;$$

ii) η *é um autovetor do endomorfismo autoadjunto* B^*B *com autovalor* $\|S_\eta\|^2$;

iii) $\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^6$ *é uma aplicação harmônica;*

iv) η *é um ponto crítico de* $F : \mathcal{N}(M) \to \mathbb{R}$ *restrito ao subfibrado das seções unitárias do fibrado normal, onde* F *é definido por* (1.1).

Como consequência do teorema anterior, obtemos uma versão do Teorema Ruh-Vilms para hipersuperficies orientáveis das esferas $\mathbb{S}^k$, com $k =$

3, 4, 5, 6, 7, estendendo desta forma os trabalhos [36] e [8] onde $k = 3$ e $k = 7$, respectivamente.

Outra aplicação relevante que obtemos do Teorema 1.4 é a construção de autoaplicações do Laplaciano em subvariedades isoparamétricas mínimas de $\mathbb{S}^7$, Teorema 1.5 enunciado abaixo. Recordamos que uma subvariedade dos espaços simplesmente conexos com curvatura seccional constante é dita isoparamétrica se tem fibrado normal flat e as curvaturas principais ao longo de campos normais paralelos são constantes.

Na atualidade as subvariedades isoparamétricas são um campo de pesquisa muito ativo, com estudos, problemas e muitas conjeturas ainda por ser resolvidas. Para um panorama global com que é tratado este assunto ver [14].

Um caso especial de aplicações harmônicas acontece quando o contradomínio é a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, isto é, $\phi : M \to \mathbb{S}^n$ é harmônica se e somente se $\Delta(\phi) = \lambda\phi$, onde Δ é o Laplaciano de $\mathbb{R}^{n+1}$ e λ uma função definida sobre M. Quando λ é uma função constante então ϕ é dita uma autoaplicação do Laplaciano, ver por exemplo [20], [21], [22].

Teorema 1.5. *Seja M uma subvariedade isoparamétrica compacta e mínima da esfera $\mathbb{S}^7$ com codimensão $1 \leq k \leq 5$. Então o endomorfismo autoadjunto B^*B tem autovalores $\sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_k$ constantes não negativos e os autovetores $\eta_1, \cdots, \eta_k$ formam uma base ortonormal paralela de $\mathcal{N}(M)$, tais que γ_{η_j} é uma autoaplicação do Laplaciano de M com autovalores $7 - k + \sigma_j$, isto é, $\Delta\gamma_{\eta_j} = -\left(7 - k + \sigma_j\right)\gamma_{\eta_j}$. Mais ainda, $\sigma_j = \|S_{\eta_j}\|^2$, $1 \leq j \leq k$. Particularmente, para qualquer $e \in T_1\mathbb{S}^7$ dado, as funções $\left\langle \gamma_{\eta_j}, e \right\rangle$ são autofunções do Laplaciano de M com autovalor $7 - k + \sigma_j$, $1 \leq j \leq k$.*

Uma consequência em relação a imagem das aplicações de Gauss obtidas neste trabalho é o Corolário 4.12, onde se mostra que se M é uma hipersuperficie compacta e orientável com curvatura média constante de uma esfera totalmente geodésica $\mathbb{S}^k$ de $\mathbb{S}^7$, com $k = 3, 4, 5, 6, 7$, então a imagem da aplicação de Gauss não está contida em hemisfério aberto de $\mathbb{S}^6$.

Em contraste as consequências obtidas considerando a imagem das aplicações de Gauss de subvariedades em hemisférios fechados são diferentes das de hemisférios abertos. Dada a extensão das definições e terminologia do resultado referimos o leitor diretamente ao Capitulo 4, Teorema 4.13. Constando que este resultado estende o Teorema 10 de [8], no caso mínimo.

Por outro lado, em espaços homogêneos e espaços simétricos seguindo as construções de [6] e [41], escrevemos os espaços simétricos na forma $\mathbb{G}/\mathbb{K}$, onde $\mathbb{G}$ é um grupo de Lie com uma métrica pseudo Riemanniana bi-invariante e $\mathbb{K}$ um subgrupo de Lie fechado de $\mathbb{G}$ de modo que a métrica é tal que a projeção $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{K}$ é uma submersão pseudo Riemanniana, e associamos a cada uma seção normal unitária η de uma subvariedade M de $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ a aplicação de Gauss

$$\begin{array}{rcl} \gamma_\eta : M & \to & \mathbb{S}^{n+k+r-1} \subset \mathfrak{g} \\ p & \mapsto & \Gamma_p(\eta(p)), \end{array}$$

onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de $\mathbb{G}$ com dimensão $n+k+r$ e $\Gamma_p(\eta(p))$ denota a translação à origem do levantamento de $\eta(p)$ na fibra $\pi^{-1}(p)$.

Neste contexto é necessario definir o endomorfismo autoadjunto de Ricci normal em uma subvariedade M de uma variedade N como segue:

Sejam v_1, $v_2 \in T_pN$, escrevemos $\mathrm{Ric}_M(v_1, v_2)(p)$ para denotar o traço da forma bilinear simétrica

$$(x, y) \in T_pM \times T_pM \mapsto \langle \mathrm{R}(v_1, x)v_2, y\rangle \in \mathbb{R},$$

sobre o espaço tangente T_pM, onde R o tensor de curvatura de N. Assim o endomorfismo autoadjunto de Ricci normal do fibrado $T^\perp M$,

$$\mathrm{Ric}^\perp_M : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{N}(M)$$

está determinado pela relação

$$\mathrm{Ric}_M(\eta_1, \eta_2) = \langle \mathrm{Ric}^\perp_M(\eta_1), \eta_2\rangle,$$

para η_1 e η_2 seções de $T^\perp M$.

Tendo definido Ric_M é possível fazer o cálculo do Laplaciano de uma aplicação de Gauss γ_η e obter como consequência o Corolário 1.6 que caracteriza as subvariedades com vetor curvatura média normalizado paralelo dos espaços simétricos.

Recordemos que uma subvariedade immersa isometricamente em uma variedade Riemanniana tem vetor curvatura média normalizado paralelo se localmente existe um vetor unitário e paralelo, na conexão normal de M, η tal que $\overrightarrow{H} = h\eta$, onde h é alguma função definida localmente sobre a subvariedade. Pelo que sabemos este conceito foi primeiramente definido por chen [11] e claramente é uma extensão do conceito de variedades com vetor curvatura média paralelo. Note por exemplo, que toda hipersuperfície orientável tem vetor curvatura média normalizado paralelo. Adicionalmente, se uma subvariedade tem vetor curvatura média paralelo não nulo então a subvariedade tem vetor curvatura média normalizado paralelo.

Corolário 1.6. *Seja M uma subvariedade imersa de dimensão n de um espaço simétrico $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ de dimensão $n+r$. Se M tem vetor curvatura média normalizado e $\overrightarrow{H} = h\eta$ com η definido globalmente então a aplicação de Gauss γ_η satisfaz*

$$\Delta(\gamma_\eta) = -\Gamma\left(n\, grad_M \|\overrightarrow{H}\| + B^*B(\eta) + \mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta)\right).$$

Em particular, se $\overrightarrow{H} \neq 0$, M é uma subvariedade com vetor curvatura média paralelo não nulo se e somente se o Laplaciano da aplicação de Gauss dada pela translação de $\eta = \frac{\overrightarrow{H}}{\|\overrightarrow{H}\|}$ satisfaz

$$\Delta(\gamma_\eta) = -\Gamma\left(B^*B(\eta) + \mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta)\right).$$

Um resultado análogo do Teorema 1.4 é obtido em espaços simétricos, Corolário 4.19, do qual decorre, como caso especial, que o fenómeno encontrado no Teorema 1.5 também acontece em qualquer esfera $\mathbb{S}^n$.

Teorema 1.7. *Se M é uma subvariedade isoparamétrica compacta e mínima da esfera $\mathbb{S}^n = O(n+1)/O(n)$, de dimensão $k < n$. Então, existe uma base ortonormal $\{\eta_1, \cdots, \eta_{n-k}\}$ paralela do fibrado normal de M tal que as respectivas aplicações de Gauss por translação $\gamma_{\eta_1}, \cdots, \gamma_{\eta_{n-k}} : M \to \mathbb{S}^q \subset \mathfrak{o}(n)$ são autoaplicações do Laplaciano, onde $\mathfrak{o}(n)$ é a álgebra de Lie do grupo ortogonal de isometrias de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $q = dim(\mathfrak{o}(n)) - 1$.*

Antes de descrever a organização do trabalho queremos dar a relevância ao Lema 1.8, pois este é a base fundamental para o desenvolvimento de toda a teoria e resultados apresentados no trabalho.

Lema 1.8. *Sejam M uma subvariedade de dimensão n isometricamente imersa em uma variedade Riemannianan N de dimensão m, V um campo de Killing de M e η um campo normal unitário de M. Seja*

$$f : M \to \mathbb{R}$$

a função definida por

$$f(q) = \langle \eta, V \rangle(q), \quad q \in M.$$

Então f satisfaz a seguinte identidade

$$\begin{array}{rcl} \Delta(f) & = & \langle (\operatorname{div}(\nabla\eta))^{\perp}, V\rangle - \langle \operatorname{Ric}_M^{\perp}(\eta), V\rangle - n\langle grad\langle \overrightarrow{H}, \eta\rangle, V\rangle \\ & & +n\langle \overrightarrow{H}, [V, \eta]\rangle + 2\langle \nabla\eta, \nabla V\rangle - 2\langle \nabla^{\perp}\eta, \nabla V^{\top}\rangle \end{array},$$

onde $\langle \nabla\eta, \nabla V\rangle$ e $\langle \nabla^{\perp}\eta, \nabla V^{\top}\rangle$ denotam denotam respectivamente os traços das formas bilineares, para cada $p \in M$,

$$X, Y \in T_pM \times T_pM \mapsto \langle \nabla_X\eta, \nabla_Y V\rangle,$$

e

$$X, Y \in T_pM \times T_pM \mapsto \langle \nabla_X^{\perp}\eta, \nabla_Y V^{\top}\rangle.$$

O lema 1.8 estende para codimensão qualquer a formula do Laplaciano, descoberta por S. Fornari e J. Ripoll [26], da função $f = \langle \eta, V\rangle$ definida sobre uma hipersuperfície orientada M de uma variedade Riemanniana N, onde η é um vetor unitário normal a M e V é um campo de Killing de N, isto é,

$$\Delta(f) = -n\langle gradH, V\rangle - (\operatorname{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f.$$

Por sua vez, os resultados de [26] são baseados nesta formula. Vale a pena mencionar que muitos dos resultados referentes à aplicação de Gauss (por translação) dos artigos acima mencionados podem ser mais facilmente obtidos usando esta fórmula.

Para finalizar esta introdução descreveremos brevemente a organização do trabalho.

Usamos o capítulo 2 de preliminares para fixar notações e algumas definições que serão usadas ao longo texto.

No capítulo 3 nos centramos fundamentalmente no rough Laplaciano $\mathrm{div}(\nabla\eta)$ de uma seção normal η qualquer de uma subvariedade M. O resultado primário deste capítulo é o Lema 1.8.

O capítulo 4 tem como eixo central as aplicações definidas por campos normais, as quais chamaremos em geral de aplicações de Gauss. Mostramos boas propriedades das aplicações de Gauss em subvariedades isoparamétricas, subvariedades mínimas, com vetor curvatura média paralelo, vetor curvatura média normalizado paralelo e órbitas de ações polares em espaços simétricos. Esse capítulo está separado nas três seções 4.1, 4.2 e 4.3, referentes ao espaço euclidiano, a esfera $\mathbb{S}^7$ com a estrutura dos octônios e aos espaços simétricos, respectivamente.

Capítulo 2

Preliminares

A finalidade deste capítulo é fixar algumas notações e definições básicas que serão usadas ao longo do texto.

Todas as variedades no texto são consideradas conexas. Seja N uma variedade Riemanniana com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. O fibrado tangente de N será denotado por TN, além disso, os conjuntos dos campos de vetores C^∞ tangentes a N e das funções C^∞ são indicados por $\mathfrak{X}(N)$ e $C^\infty(N)$, respectivamente.

Seja M uma subvariedade imersa isometricamente em uma variedade Riemanniana N. A menos que declaremos o contrário, ao longo do trabalho denotaremos a conexão Riemanniana de N por ∇.

Usaremos $\mathcal{N}(M)$ para indicar o conjunto das seções do fibrado normal de M em N. Seja um campo de vetores normal $\eta \in \mathcal{N}(M)$. O operador de forma $S_\eta : T_pM \to T_pM$ em direção de η está definido por

$$\langle B(X,Y), \eta \rangle = \langle S_\eta(X), Y \rangle,$$

onde B é a segunda forma fundamental da imersão e $X, Y \in T_pM$.

Consideremos o fibrado dos endomorfismos lineares

$$End(M) := \{(p, T) \mid T \text{ é um endomorfismo linear de } T_pM\},$$

com a métrica natural de Hilbert-Schmidt, ou seja, se $T_1, T_2 \in End(M)_p$ então

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \sum_i \langle T_1(E_i), T_2(E_i) \rangle,$$

onde $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é uma base ortonormal do T_pM. Denotando por $\mathcal{E}(M)$ o conjunto das seções de $End(M)$, temos o homomorfismo de fibrados

$$B : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{E}(M)$$

que associa a cada seção normal η do fibrado normal a segunda forma fundamental de M na direção de η, isto é, se η é uma seção do $T^{\perp}M$ então $B(\eta) = S_\eta$. Ademais podemos definir o homomorfismo entre fibrados

$$B^* : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{N}(M)$$

adjunto a B pela relação

$$\langle B(\eta), T\rangle = \langle \eta, B^*(T)\rangle.$$

Segue pela definição que o endomorfismo de fibrados $B^*B : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{N}(M)$ é autoadjunto. Diremos que uma seção η do fibrado normal $T^{\perp}M$ de M é um autovetor do endomorfismo autoadjunto B^*B se $B^*B(\eta) = \lambda\eta$, para alguma função $\lambda : M \to \mathbb{R}$.

Incluímos aqui também a definição da norma da segunda forma fundamental B dada por

$$\|B\|^2 = \sum_{i,j} \|B(E_i, E_j)\|^2,$$

onde $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é um referencial ortonormal de uma vizinhança de M.

Complementarmente, recordamos que os tensores de curvatura R e $\mathrm{R}^{\perp}$ estão definidos por

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(X,Y)Z &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \\ \mathrm{R}^{\perp}(X,Y)\eta &= \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\eta - \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\eta + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta, \end{aligned}$$

para X, Y, Z campos de vetores de M, η campo normal de M e $\nabla^{\perp}$ a conexão normal de M em N.

Sejam v_1, $v_2 \in T_pN$, escrevemos $\mathrm{Ric}_M(v_1, v_2)(p)$ para denotar o traço da forma bilinear simétrica

$$(x, y) \in T_pM \times T_pM \mapsto \langle \mathrm{R}(v_1, x)v_2, y\rangle \in \mathbb{R},$$

sobre o espaço tangente T_pM. Assim o endomorfismo autoadjunto de Ricci normal do fibrado $T^{\perp}M$,

$$\mathrm{Ric}_M^{\perp} : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{N}(M)$$

está determinado pela relação

$$\mathrm{Ric}_M(\eta_1, \eta_2) = \langle \mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta_1), \eta_2 \rangle,$$

para η_1 e η_2 seções de $T^{\perp}M$. Diremos que o endomorfismo de Ricci normal é ortogonal se $v_1, v_2 \in T_p^{\perp}M$ são vetores ortogonais então $\mathrm{Ric}_M(v_1, v_2) = 0$.

Apresentamos para finalizar esta primeira parte de terminologia básica definimos o rough Laplaciano e a Proposição 2.1 que será usada em vários momentos nos capítulos posteriores.

Consideremos o fibrado $F : TN \to M$, dado pela imersão de M em N. Denotaremos o conjunto das seções deste fibrado por $\Gamma(F)$ e definimos o operador rough Laplaciano $\mathrm{div}(\nabla(\cdot)) : \Gamma(TN) \to \Gamma(TN)$ do fibrado F no aberto $U \subseteq M$ por

$$\mathrm{div}(\nabla(\zeta)) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \zeta - \nabla_{\nabla^{\top}_{E_i} E_i} \zeta),$$

onde $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é um referencial ortonormal em U.

Proposição 2.1. *Sejam $M \subset T \subset N$ onde T é uma subvariedade totalmente umbílica da variedade Riemanniana N e M uma hipersuperfície de T.*

i) Seja η um campo de vetores unitário normal a M em T. Então, o campo η é paralelo no fibrado normal de M em N.

ii) Seja ζ um campo normal a T em N que é paralelo na conexão normal de T. então a restrição de ζ a M é um campo normal a M em N que é paralelo na conexão normal de M em N.

Demonstração. Primeiramente, demonstramos o item *i)*.

i) Denotemos por $\overline{\overline{\nabla}}, \overline{\nabla}$ e ∇ as conexões de N, T e M respectivamente.

Trivialmente, para todo campo de vetores tangente X de M

$$\langle \overline{\overline{\nabla}}^{\perp}_X \eta, \eta \rangle = 0,$$

onde $\overline{\overline{\nabla}}^{\perp}$ é a conexão normal de M em N, para qualquer campo normal paralelo ζ de T, assim

$$\begin{aligned} \langle \overline{\overline{\nabla}}^{\perp}_X \eta, \zeta \rangle = -\langle \eta, \overline{\overline{\nabla}}^{\perp}_X \zeta \rangle &= \langle \eta, S_\zeta(X) \rangle \\ &= \langle B(X, \eta), \zeta \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde B é a segunda forma fundamental de T em N e $B(\zeta) = S_\zeta$. Ou seja, η é paralelo em N.

A demonstração de item *ii)* segue diretamente.

$\square$

Trataremos agora a terminologia básica de aplicações harmônicas. Sejam $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ e $(N^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$ variedades Riemannianas. Definimos a energia da aplicação $\phi : M \to N$ em um domínio diferenciável Ω de M como

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|d\phi\|^2 dM,$$

onde $\|d\phi\|$ denota a norma *Hilbert-Schmidt* da diferencial $d\phi$. Dizemos que ϕ é uma aplicação harmônica se é um ponto crítico do funcional definido pela energia, ou equivalententemente, se o campo de tensões $\tau(\phi)$ de ϕ é identicamente nulo. A seguir definimos o campo de tensões de ϕ.

Denotamos o fibrado vetorial de M induzido pela aplicação ϕ por

$$\phi^{-1}TN = \{(p, v) \mid p \in M,\ v \in T_{\phi(p)}N\}$$

e lembramos que a conexão Riemanniana $\tilde{\nabla}$ (com a métrica usual) de $\phi^{-1}TN$ é dada por

$$(\tilde{\nabla}_X v)(p) = \left.\frac{Dv}{dt}\right|_{t=0},$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$, v seção de $\phi^{-1}TN$, γ é curva integral de X passando por p em $t = 0$ e $\frac{D}{dt}$ é a derivada covariante de N ao longo de $\phi \circ \gamma$.

Dado $Y \in \mathfrak{X}(M)$ denotamos por $\phi_* Y$ a seção definida por $(\phi_* Y)(p) = d\phi_p Y(p)$ de $\phi^{-1}TN$. Assim, o *campo de tensões* $\tau(\phi)$ de ϕ em um aberto U de M é

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{\nabla}_{e_i} \phi_* e_i - \phi_* \left(\nabla_{e_i} e_i \right) \right),$$

onde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortonormal de U e ∇ é a conexão de M.

Para finalizar este capítulo de preliminares na proposição a seguir enunciamos o cálculo do campo de tensões da composição de aplicações.

Proposição 2.2 (Exemplos 2.2.7, 2.2.8 e 2.2.9 de [29])**.** *Sejam M, N e P variedades Riemanniananas e $\varphi : M \to N$, $\phi : N \to P$ aplicações tais que ϕ é imersão isométrica. Então,*

$$\tau(\phi \circ \varphi)(p) = \sum_{i=1}^{n} B_{\varphi(p)}(\varphi_* e_i, \varphi_* e_i) + d\phi_{\varphi(p)} \tau(\varphi),$$

onde $B_{\varphi(p)}$ é a segunda forma fundamental da imersão ϕ e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortonormal de uma vizinhança de $p \in M$.

Note que como consequência imediata desta proposição temos que o campo de tensões de uma aplicação $\phi : M \to \mathbb{S}^n$ é dado por

$$\tau(\phi) = \Delta(\phi) - \langle \Delta(\phi), \phi \rangle \phi.$$

Capítulo 3

Laplaciano e campos de Killing

O objetivo principal desta seção é estudar o rough Laplaciano $\operatorname{div}(\nabla\eta)$, definido no capítulo anterior, para qualquer seção normal η de M. Em virtude da importância na teoria desenvolvida ao longo do texto, consideramos que o resultado central deste capítulo é o cálculo do Laplaciano da função $f = \langle \eta, V\rangle$, onde V é um campo de Killing.

3.1 Rough Laplaciano

Por razões que ficarão claras nesta seção, ao longo da tese centraremos nossa atenção nas seções normais paralelas à subvariedade M. No resultado a seguir calculamos a parte tangente do rough Laplaciano $\operatorname{div}(\nabla\eta)$.

Proposição 3.1. *Seja M uma variedade isometricamente imersa em uma variedade N e $\eta \in \mathcal{N}(M)$, então todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz:*

$$\langle \operatorname{div}(\nabla\eta), X\rangle = \operatorname{Ric}_M(\eta, X) - n\langle grad\langle \overrightarrow{H}, \eta\rangle, X\rangle + n\langle \overrightarrow{H}, \nabla_X\eta\rangle + 2\langle \nabla X, \nabla^{\perp}\eta\rangle,$$

onde $\langle \nabla X, \nabla^{\perp}\eta\rangle = tr((X_1, X_2) \in TM \times TM \mapsto \langle \nabla_{X_1}X, \nabla^{\perp}_{X_2}\eta\rangle)$.

Demonstração. Dado $p \in M$, tome $\{E_1, \cdots, E_n\}$ um referencial geodésico de M em p. Então, sabemos que,

$$\operatorname{div}(\nabla\eta) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta.$$

Observamos agora que em p temos as seguintes igualdades $[E_i, E_j](p) = 0$ $\langle \nabla_{E_i}[E_i, E_j], \eta\rangle = \langle [E_i, [E_i, E_j]], \eta\rangle = 0$, e ao longo de M, $\langle E_j, \eta\rangle = 0$. Assim, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$ temos em p que

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{div}(\nabla\eta), E_j\rangle &= -\sum_{i=1}^{n} (\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}E_j, \eta\rangle + 2\langle \nabla_{E_i}E_j, \nabla_{E_i}\eta\rangle) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \big(\langle \nabla_{E_i}[E_i, E_j], \eta\rangle + \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_i, \eta\rangle + 2\langle \nabla_{E_i}E_j, \nabla^{\perp}_{E_i}\eta\rangle\big) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \big(\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_i, \eta\rangle\big) - 2\langle \nabla E_j, \nabla^{\perp}\eta\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(\langle R(E_i, E_j)E_i, \eta\rangle - \langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle\big) - 2\langle \nabla E_j, \nabla^{\perp}\eta\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(\langle R(E_i, E_j)E_i, \eta\rangle - E_j\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle + \langle \nabla_{E_i}E_i, \nabla_{E_j}\eta\rangle\big) \\
&\quad -2\langle \nabla E_j, \nabla^{\perp}\eta\rangle \\
&= \operatorname{Ric}_M(\eta, E_j) - n\langle grad_M\langle \overrightarrow{H}, \eta\rangle, E_j\rangle + n\langle \overrightarrow{H}, \nabla_{E_j}\eta\rangle \\
&\quad -2\langle \nabla E_j, \nabla^{\perp}\eta\rangle.
\end{aligned}$$

portanto, escrevendo $X = x_1E_1 + \cdots + x_nE_n$ e observando que p é qualquer, podemos concluir

$$\langle \operatorname{div}(\nabla\eta), X\rangle = \operatorname{Ric}_M(\eta, X) - n\langle grad_M\langle \overrightarrow{H}, \eta\rangle, X\rangle + n\langle \overrightarrow{H}, \nabla_X\eta\rangle + 2\langle \nabla X, \nabla^{\perp}\eta\rangle.$$

□

Corolário 3.2. *Seja M uma subvariedade totalmente geodésica de dimensão n de uma variedade Riemanniana N. Então a parte tangente do rough Laplaciano de um campo normal η está dada por*

$$(\operatorname{div}\nabla\eta)^{\top}(p) = \operatorname{Ric}_M(\eta, X_1)(p)X_1(p) + \cdots + \operatorname{Ric}_M(\eta, X_n)(p)X_n(p),$$

onde $X_1, \cdots, X_n$ é uma base ortonormal do espaço tangente T_pM.

Claramente, do Corolário 3.2, segue que se M é uma subvariedade totalmente geodésica de um espaço simplesmente conexo com curvatura seccional constante, a saber, a esfera $\mathbb{S}^n$, o hiperbólico real $\mathbb{H}^n$ ou o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e η é um campo normal de M então $\operatorname{div}(\nabla\eta) = (\operatorname{div}(\nabla\eta))^{\perp}$.

Corolário 3.3. *Seja M uma variedade de dimensão n isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana N e η uma seção normal paralela de M. Então, a seguinte identidade é satisfeita:*

$$\langle \operatorname{div}(\nabla\eta), X\rangle = \operatorname{Ric}_M(\eta, X) - n\langle grad_M\langle \overrightarrow{H}, \eta\rangle, X\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Particularmente, se M é uma hipersuperfície orientável de N e η uma seção normal unitária então

$$\langle \operatorname{div}(\nabla\eta), X\rangle = \operatorname{Ric}(\eta, X) - n\langle grad_M(H), X\rangle,$$

onde H é a curvatura média de M e $\operatorname{Ric}(\cdot,\cdot)$ denota o tensor de Ricci usual de N.

Caso M seja uma hipersuperfície orientável de uma variedade Riemanniana N então trivialmente temos que a parte normal de $\operatorname{div}(\nabla\eta)$ é um múltiplo do campo η. Contudo este fato, para subvariedades de codimensão qualquer, é uma condição forte.

Notemos que $\langle \operatorname{div}(\nabla\eta), \eta\rangle = -\|\nabla\eta\|^2$, assim, procuramos soluções da equação diferencial parcial

$$(\operatorname{div}(\nabla\eta))^{\perp} = -\|\nabla\eta\|^2\eta,$$

ou equivalentemente,

$$(\operatorname{div}(\nabla\eta))^{\perp} = -(\|B^*B(\eta)\|^2 + \|\nabla^{\perp}\eta\|^2)\eta.$$

Tendo calculado a parte tangente de $\operatorname{div}(\nabla\eta)$, motivados pelo fato que no espaço Euclidiano

$$\operatorname{div}(\nabla\eta) = \Delta(\eta)$$

onde Δ é o Laplaciano das coordenadas de η e sabendo que, Proposição 2.2, η é harmônica se $\Delta(\eta) = \lambda\eta$, gostaríamos de dissertar brevemente sobre o fato que $(\operatorname{div}(\nabla\eta))^{\perp}$ seja um múltiplo de η. Pontualmente, mostraremos que os pontos críticos da energia por variações de norma 1, equação (3.1), no espaço de Sobolev $H_1(\mathcal{N}(M))$, são solução fraca da equação diferencial parcial

$$(\mathrm{div}(\nabla\eta))^{\perp} = -\|\nabla\eta\|^2\eta.$$

Precisamente, se M for uma subvariedade orientável compacta de uma variedade Riemanniana N. Uma função $f \in L^1(M)$ é fracamente diferenciável com respeito a $X \in \mathfrak{X}(M)$ se existe $g \in L^1(M)$ tal que

$$\int_M g\phi dM = -\int_M f\{X(\phi) + \phi\mathrm{div}(X)\}dM,$$

para todo $\phi \in C^{\infty}(M)$, e usamos a notação $X(f) = g$. Dizemos que f é fracamente diferenciável se $X(f)$ existe para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. O espaço de Sobolev $W^{1,2}(M)$ de M é o espaço de funções fracamente diferenciaveis f tais que $f^2,\ X(f)^2 \in L^1(M)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. O espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathcal{N}(M))$ de $\mathcal{N}(M)$ é o espaço dos campos normais η de M tais que a função $\langle\eta, Z\rangle \in W^{1,2}(M)$, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Podemos estender a conexão Riemanniana ∇ de N atuando em $\mathcal{N}(M)$ a uma conexão Riemanniana fraca ∇ atuando em $W^{1,2}(\mathcal{N}(M))$, isto é,

$$\langle\nabla_Y\eta, Z\rangle = Y\langle\eta, Z\rangle - \langle\eta, \nabla_Y Z\rangle,$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(N)$ e todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. O espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathcal{N}(M))$ tem uma estrutura de espaço de Hilbert com o produto interno a seguir: Para $\eta, \nu \in W^{1,2}(\mathcal{N}(M))$,

$$\langle\eta, \nu\rangle = \int_M \langle\eta, \nu\rangle + \int_M \langle\nabla\eta, \nabla\nu\rangle.$$

Seja $\nu \in W^{1,2}(\mathcal{N}(M))$ e consideremos o seguinte funcional em um dominio Ω de M definido por

$$F(\nu) = \frac{\int_\Omega \|\nabla\nu\|^2 dM}{\int_\Omega \|\nu\| dM}. \tag{3.1}$$

Definamos o espaço

$$H_1(\mathcal{N}(M)) = \{\nu \in \mathcal{N}(M) \mid \|\nu\| = 1 \text{ q.t.p}\}$$

e seja η um ponto crítico de $F|_{H_1(\mathcal{N}(M))}$. Para qualquer $N \in \mathcal{N}(M)$ consideramos a variação $\eta_N(t) = \frac{\eta+tN}{\|\eta+tN\|}$ de η. Assim podemos considerar F como

$$F(t) := F(\eta_N(t)) = \int_\Omega \|\eta_N(t)\|^2.$$

Ou seja,

$$F(t) = \int_M \left(\|\nabla \frac{\eta}{\|\eta+tN\|}\|^2 + 2t\langle \nabla \frac{\eta}{\|\eta+tN\|}, \nabla \frac{N}{\|\eta+tN\|}\rangle + t^2 \|\nabla \frac{N}{\|\eta+tN\|}\|^2 \right) dM.$$

Derivando e avaliando em $t = 0$, segue que η satisfaz que $F'(0) = 0$ se e somente se

$$\int_M \langle \nabla\eta, \nabla N\rangle dM = \int_M \|\nabla\eta\|^2 \langle \eta, N\rangle dM.$$

Esta equação quer dizer que η é uma solução fraca do problema inicial. Eventualmente, se $\eta \in \mathcal{N}(M)$, segue do teorema do divergente que

$$\int_M \langle \operatorname{div}(\nabla\eta), N\rangle = -\int_M \langle \nabla\eta, \nabla N\rangle$$

e consequentemente, a seção η satisfaz a equação

$$(\operatorname{div}(\nabla\eta))^\perp = -\|\nabla\eta\|^2\eta.$$

A existência de um minimizante η do funcional F só pode ser garantida em espaços de Sobolev. Foge do propósito deste trabalho uma abordagem de teoria da regularidade.

A discussão acima revela outra motivação para encontrar autovetores paralelos do endomorfismo autoadjunto B^*B, em virtude que estes são pontos críticos do funcional F por variações de norma 1. É importante destacar que se as variações não são restritas às de norma 1, então os pontos críticos do funcional que campos são paralelos são autovetores de B^*B com autovalores constantes. Referenciamos [44] e as referências contidas neste artigo. Nas seções e capítulos posteriores estudaremos em geral problemas quando η é uma seção paralela.

Por outro lado, J. Eschenburg mostrou em [18] que se V é um campo de

Killing de uma variedade Riemanniana N então $\nabla^2_{A,B}V+R(V,A)B=0$, onde A,B são vetores de N e $\nabla^2_{A,B}V$ é a segunda derivada covariante do fibrado $TN \to N$, isto é, $\nabla^2_{A,B}V := \nabla_A\nabla_B V - \nabla_{\nabla_A B}V$. No Lema a seguir mostramos que o rough Laplaciano do fibrado $TN \to M$ sastisfaz uma propriedade semelhante à provada por Eschenburg.

Lema 3.4. *Seja M uma variedade isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana N e V um campo de Killing de N. Então, a seguinte identidade é satisfeita para todo campo normal η*

$$-\langle \operatorname{div}(\nabla V), \eta\rangle = \operatorname{Ric}_M(\eta, V) + n\langle \overrightarrow{H}, \nabla_\eta V\rangle. \tag{3.2}$$

Demonstração. Seja $\{E_1, \cdots, E_n\}$ um referencial geodésico de uma vizinhança em M de p e estendamos estes campos a uma vizinhança de p em N de modo que a extensão seja paralela ao longo da geodésica definida por η. Lembrando que V é um campo de Killing temos:

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{div}(\nabla V), \eta\rangle(p) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V, \eta\rangle(p) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(E_i\langle \nabla_{E_i}V, \eta\rangle - \langle \nabla_{E_i}V, \nabla_{E_i}\eta\rangle\right)(p) \\
&= -\sum_{i=1}^n \left(\langle \nabla_\eta V, \nabla_{E_i}E_i\rangle + \langle \nabla_{E_i}\nabla_\eta V, E_i\rangle + \langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}V\rangle\right).
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos, ficamos com

$$\sum_{i=1}^n \langle E_i, \nabla_{E_i}\nabla_\eta V\rangle = -n\langle \overrightarrow{H}, \nabla_\eta V\rangle - \langle \operatorname{div}(\nabla V), \eta\rangle - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}V\rangle. \tag{3.3}$$

Por outro lado, lembrando que $\nabla_\eta E_i(p) = 0$ segue

$$0 = \langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle = \langle \nabla_\eta\nabla_{E_i}V, E_i\rangle + \langle \nabla_{E_i}V, \nabla_\eta E_i\rangle = \langle \nabla_\eta\nabla_{E_i}V, E_i\rangle(p).$$

e,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{R}(\eta, \mathrm{E_i})\mathrm{V}, \mathrm{E_i}\rangle(\mathrm{p}) &= \langle \nabla_{E_i}\nabla_\eta V, E_i\rangle - \langle \nabla_\eta \nabla_{E_i} V, E_i\rangle + \langle \nabla_{[\eta, E_i]} V, E_i\rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i}\nabla_\eta V, E_i\rangle - \langle \nabla_{E_i} V, [\eta, E_i]\rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i}\nabla_\eta V, E_i\rangle + \langle \nabla_{E_i} V, \nabla_{E_i}\eta\rangle,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\langle E_i, \nabla_{E_i}\nabla_\eta V\rangle = \langle \mathrm{R}(\eta, \mathrm{E_i})\mathrm{V}, \mathrm{E_i}\rangle - \langle \nabla_{\mathrm{E_i}}\mathrm{V}, \nabla_{\mathrm{E_i}}\eta\rangle. \tag{3.4}$$

Portanto, das equações (3.3) e (3.4) concluímos que

$$\langle \mathrm{div}(\nabla V), \eta\rangle = -\mathrm{Ric}_M(\eta, V) - n\langle \overrightarrow{H}, \nabla_\eta V\rangle.$$

□

Corolário 3.5. *Seja M uma imersão isométrica mínima de uma variedade Riemanniana N e V um campo de Killing de N. Então, a seguinte identidade é satisfeita para todo campo normal η*

$$\langle \mathrm{div}(\nabla V), \eta\rangle = -\mathrm{Ric}_M(\eta, V). \tag{3.5}$$

No que segue calcularemos o Laplaciano da função $f = \langle \eta, V\rangle$ definida sobre uma subvariedade M de uma variedade Riemanniana N, do modo mais geral encontrada neste trabalho.

Lema 3.6. *Sejam M uma subvariedade de dimensão n isometricamente imersa em uma variedade Riemannianan N de dimensão m, V um campo de Killing de M e η um campo normal unitário de M. Seja*

$$f : M \to \mathbb{R}$$

a função definida por

$$f(q) = \langle \eta, V\rangle(q), \quad q \in M.$$

Então f satisfaz a seguinte identidade

$$\begin{array}{rcl}\Delta(f) & = & \langle(\mathrm{div}(\nabla\eta))^{\perp}, V\rangle - \langle \mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta), V\rangle - n\langle grad\langle\overrightarrow{H},\eta\rangle, V\rangle \\ & & +n\langle\overrightarrow{H},[V,\eta]\rangle + 2\langle\nabla\eta,\nabla V\rangle - 2\langle\nabla^{\perp}\eta,\nabla V^{\top}\rangle\end{array},$$

onde $\langle\nabla\eta,\nabla V\rangle$ e $\langle\nabla^{\perp}\eta,\nabla V^{\top}\rangle$ denotam denotam respectivamente os traços das formas bilineares, para cada $p\in M$,

$$X,Y\in T_pM\times T_pM\mapsto\langle\nabla_X\eta,\nabla_Y V\rangle,$$

e

$$X,Y\in T_pM\times T_pM\mapsto\langle\nabla_X^{\perp}\eta,\nabla_Y V^{\top}\rangle.$$

Demonstração. Dado $p\in M$, seja $\{E_1,\cdots,E_n\}$ um referencial geodésico em p, então

$$\Delta(f)(p)=\sum_{i=1}^{n}E_iE_i(f),\ \text{onde } f=\langle\eta,V\rangle.$$

Note que

$$\Delta(f) \;=\; \langle\mathrm{div}(\nabla\eta),V\rangle+2\langle\nabla\eta,\nabla V\rangle+\langle\eta,\mathrm{div}(\nabla V)\rangle.$$

Desta equação e do Lema 3.4, temos

$$\Delta(f) \;=\; \langle\mathrm{div}(\nabla\eta),V\rangle+2\langle\nabla\eta,\nabla V\rangle-\mathrm{Ric}_M(\eta,V)-n\langle\overrightarrow{H},\nabla_\eta V\rangle. \quad (3.6)$$

Escrevendo $V=V^{\perp}+V^{\top}$ temos

$$\langle\mathrm{div}(\nabla\eta),V\rangle \;=\; \langle\mathrm{div}(\nabla\eta),V^{\top}\rangle+\langle(\mathrm{div}(\nabla\eta))^{\perp},V\rangle \quad (3.7)$$

e

$$\mathrm{Ric}_M(\eta,V^{\top}) \;=\; \mathrm{Ric}_M(\eta,V)-\langle\mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta),V\rangle. \quad (3.8)$$

Lembrando que

$$\begin{array}{l}\langle\mathrm{div}(\nabla\eta),V^{\top}\rangle=\mathrm{Ric}_M(\eta,V^{\top})-n\langle grad\langle\overrightarrow{H},\eta\rangle,V^{\top}\rangle+n\langle\overrightarrow{H},\nabla_V\eta\rangle \\ \qquad\qquad -2\langle\nabla^{\perp}\eta,\nabla V^{\top}\rangle,\end{array} \quad (3.9)$$

então das equações (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9)

$$\begin{aligned}\Delta(f)(p) &= \langle(\operatorname{div}(\nabla\eta))^{\perp}, V\rangle - \langle\operatorname{Ric}_M^{\perp}(\eta), V\rangle - n\langle grad\langle\overrightarrow{H},\eta\rangle, V\rangle \\ &\quad + n\langle\overrightarrow{H}, [V,\eta]\rangle + 2\langle\nabla\eta,\nabla V\rangle - 2\langle\nabla^{\perp}\eta, \nabla V^{\top}\rangle\end{aligned}.$$

□

É claro que quando M é uma hipersuperfície orientável de uma variedade Riemannianan N então o vetor normal é paralelo no fibrado normal de M. Em vista disso, o seguinte corolário também estende a codimensão na Proposição 3.6 da formula descoberta por S. Fornari e J. Ripoll em [26].

Corolário 3.7. *Seja M uma variedade de dimensão n isométricamente imersa em uma variedade Riemanniana N de dimensão m, V um campo de Killing de N e η um campo de vetores paralelo no fibrado normal de M. Então, se $f : M \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$f(q) = \langle\eta(q), V(q)\rangle, \;\; q \in M$$

vale que

$$-\Delta(f) = n\langle grad\langle\overrightarrow{H},\eta\rangle, V\rangle + n\langle\overrightarrow{H}, \nabla_{\eta}V\rangle + \langle B^{*}B(\eta), V\rangle + \langle\operatorname{Ric}_M^{\perp}(\eta), V\rangle,$$

onde $\overrightarrow{H}$ é o vetor curvatura média de M em N.

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\{E_1(p), \;\cdots,\; E_n(p)\}$ uma base do espaço tangente T_pM que diagonaliza a segunda forma fundamental de M na direção de η, então, como η é paralelo e V um campo de Killing de N, segue

$$\langle\nabla\eta,\nabla V\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle S_{\eta}(E_i), \nabla_{E_i}V\rangle = 0.$$

Assim, do Lema 3.6

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \langle(\operatorname{div}(\nabla\eta))^{\perp}, V\rangle - \langle\operatorname{Ric}_M^{\perp}(\eta), V\rangle - n\langle grad\langle\overrightarrow{H},\eta\rangle, V\rangle \\ &\quad - n\langle\overrightarrow{H}, \nabla_{\eta}V\rangle\end{aligned} \tag{3.10}$$

Seja ν um campo de vetores normal a M, dado que η é uma seção normal paralela do fibrado normal de M então $\langle\nabla_{E_i}\eta,\nu\rangle = 0$, $i = 1, \;\cdots,\; n$. Derivando novamente com respeito a E_i e somando em i, temos

$$\langle \operatorname{div}(\nabla\eta), \nu\rangle + \langle S_\eta, S_\nu\rangle = 0,$$

deste modo, $\langle \operatorname{div}(\nabla\eta), \nu\rangle = -\langle B^*B(\eta), \nu\rangle$. Concluímos então que

$$-\Delta(f) = n\langle grad\langle \overrightarrow{H}, \eta\rangle, V\rangle + n\langle \overrightarrow{H}, \nabla_\eta V\rangle + \langle B^*B(\eta), V\rangle + \langle \operatorname{Ric}_M^{\perp}(\eta), V\rangle,$$

□

Quando M é uma hipersuperfície de N então $\operatorname{Ric}_M(\eta,\eta)$ é o Ricci usual de N na direção de η e o endomorfismo autoadjunto dado pela segunda forma fundamental satisfaz $B^*B(\eta) = -\|S_\eta\|^2\eta$. De sorte que reobtemos a Proposição 1 de [26].

Corolário 3.8. *Seja M uma hipersuperfície orientada de uma variedade N de dimensão $n+1$. Sejam η um vetor normal unitário de M e V um campo de Killing de N. Definindo $f = \langle V, \eta\rangle$, então a seguinte identidade é satisfeita*

$$\Delta(f) = -n\langle V, grad(H)\rangle - (\operatorname{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f,$$

onde H é a curvatura média de M.

Capítulo 4

Aplicações de Gauss por translações

Este capítulo tem como eixo central as aplicações definidas por campos normais, as quais chamaremos em geral de aplicações de Gauss. Mostramos boas propriedades das aplicações de Gauss em subvariedades isoparamétricas, subvariedades mínimas, com vetor curvatura média paralelo, vetor curvatura média normalizado paralelo e órbitas principais de ações polares.

Outros objetos clássicos de estudo desde as origens da geometria diferencial são as superfícies mínimas e com curvatura média constante ou, mais geralmente, subvariedades com vetor curvatura média paralelo de variedades Riemannianas, as quais tem a propriedade de ser pontos críticos de certos funcionais. Uma classificação completa de subvariedades no espaço eulidiano com vetor curvatura média paralelo é um problema ainda aberto. Clasificações, no caso superfícies em espaços forma simplesmente conexos foram feitas por B. Chen em [10] e S. Yau em [48].

Dizemos que uma subvariedade imersa isometricamente em uma variedade Riemanniana tem vetor curvatura média normalizado paralelo se localmente existe um vetor unitário e paralelo η tal que $\overrightarrow{H} = h\eta$, onde h é alguma função definida localmente sobre a subvariedade. Pelo que sabemos este conceito foi primeiramente definido por Chen [11] e claramente é uma extensão do conceito de variedades com vetor curvatura média paralelo. Trivialmente, se uma subvariedade tem vetor curvatura média paralelo não nulo então a subvariedade tem vetor curvatura média normalizado paralelo. Note também por exemplo, que toda hipersuperfície orientável tem vetor curvatura média normalizado paralelo.

A seguir descrevermos brevemente as seções 4.1, 4.2 e 4.3 que compõem este capítulo.

Na seção 4.1, caracterizamos as subvariedades com vetor curvatura média paralelo que tem fibrado normal flat do espaço Euclidiano em termos do endomorfismo autoadjunto dado pela segunda forma fundamental e o Laplaciano, construimos autoaplicações em subvariedades isoparamétricas e mostramos a harmonicidade da aplicação de Gauss produto exterior em superfícies mínimas com fibrado normal flat do espaço Euclidiano e da esfera Euclidiana.

Na seção 4.2, seguindo [7] e [8], usamos a multiplicação octoniana $\cdot$ de $\mathbb{S}^7$ para associar a cada campo de vetores unitário η normal a uma subvariedade M de $\mathbb{S}^7$ uma aplicação de Gauss octoniana $\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^6$, $\gamma_\eta(x) = x^{-1} \cdot \eta(x)$. Damos extensões dos resultados desses trabalhos sobre a imagem da aplicação de Gauss, harmonicidade, codimensão e topologia das subvariedades.

Na seção 4.3, seguindo [6] e [41], construimos aplicações de Gauss por "levantamento e translação" em espaços simétricos. Uma vez que o Laplaciano das aplicações de Gauss depende dos endomorfismos autoadjuntos B^*B e $\mathrm{Ric}_M^\perp$, apresentamos uma condição suficiente e necessária para que uma subvariedade com vetor curvatura média normalizado paralelo tenha vetor curvatura média paralelo. Igualmente, caracterizamos as aplicações de Gauss por translação harmônicas definidas em subvariedades mínimas por campos de vetores paralelos em termos algébricos, isto é, como autovalores do endomorfismo autoadjunto $B^*B + \mathrm{Ric}_M^\perp$.

Por fim, ainda na seção 4.3, mostramos que o endomorfismo autoadjunto B^*B é diagonalizável por vetores normais paralelos em órbitas principais de ações polares.

4.1 Espaço Euclidiano

Iniciaremos dando, no Teorema a seguir, uma extensão na codimensão da fórmula

$$\Delta(\eta) = -n grad_M(H) - \|B\|^2\eta, \tag{4.1}$$

de hipersuperfícies orientáveis do $\mathbb{R}^{n+1}$, onde η é um campo de vetores unitário normal da hipersuperfície, em termos do endomorfismo autoadjunto da segunda forma fundamental. Precisamente, provamos o seguinte

Teorema 4.1. *Seja M^n uma variedade isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+r}$ e η um campo normal de vetores paralelo. Então,*

$$\Delta(\eta) = -ngrad\langle \overrightarrow{H}, \eta\rangle - B^*B(\eta).$$

Demonstração. Como o tensor de curvatura de $\mathbb{R}^{n+r}$ é identicamente zero então $\mathrm{Ric}_M^{\perp} \equiv 0$. Denotemos por $\{e_1, \cdots, e_{n+r}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+r}$. Assim, do Corolário 3.7 segue

$$\begin{aligned}\Delta(\eta) = \mathrm{div}(\nabla\eta) &= \langle \mathrm{div}(\nabla\eta), e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle \mathrm{div}(\nabla\eta), e_{n+r}\rangle e_{n+r} \\ &= -ngrad_M\langle \overrightarrow{H}, \eta\rangle - B^*B(\eta)\end{aligned}$$

$\square$

Do Teorema 4.1 segue que se a subvariedade M tem vetor curvatura média paralelo então o endomorfismo autoadjunto B^*B coincide com o operador Laplaciano $-\Delta$ no subfibrado vetorial de seções paralelas do fibrado normal. Em vista disto, se o fibrado normal é flat podemos mostrar a recíproca. Note ainda que se a codimensão de M em $\mathbb{R}^{n+2}$ é 2 e M tem vetor curvatura média paralelo não nulo então o fibrado normal de M é flat.

Teorema 4.2. *Seja M uma subvariedade do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+r}$ com fibrado normal flat. Então, M tem vetor curvatura média paralelo se e somente se os operadores $-\Delta$ e B^*B coincidem no conjunto das seções paralelas definidas localmente em M.*

Demonstração. Suponha primeiro que $-\Delta = B^*B$ no conjunto das seções paralelas de M definidas localmente. Seja $\{v_1, \cdots, v_r\}$ uma base ortonormal do espaço $T_p^{\perp}M$ e estendamos esta base paralelamente a uma base $\eta_1, \cdots \eta_r$ do fibrado normal definida localmente. Definamos agora as funções $a_i = \langle \overrightarrow{H}, \eta_i\rangle$ em uma vizinhança de M, $i = 1, \cdots, r$, então pelo Teorema 4.1 segue que

$$-\Delta(\eta_i) = grad_M(a_i) + B^*B(\eta_i),$$

diante disso, $a_1, \cdots, a_r$ são constantes. Por conseguinte, $\overrightarrow{H} = a_1\eta_1 + \cdots a_r\eta_r$ é um campo paralelo.

A recíproca segue diretamente do Teorema 4.1. $\square$

Caso M seja uma hipersuperfície orientável, então $B^*B(\eta) = \|B\|^2\eta$, donde segue a harmonicidade da aplicação de Gauss sempre que $B^*B(\eta) = \Delta(\eta)$, isto é, a aplicação de Gauss é harmônica se e somente se M tem curvatura média constante (ver [43]). Esta abordagem permite caracterizar as seções normais paralelas que são harmônicas como autovetores do endomorfismo autoadjunto da segunda forma fundamental.

Corolário 4.3. *Seja M^n uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+r}$ com vetor curvatura média paralelo e η um campo de vetores paralelo do fibrado normal de M. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\eta : M \to \mathbb{S}^{n+r-1}$ é uma aplicação harmônica.*
2. *$\Delta(\eta) = -\|S_\eta\|^2\eta$.*
3. *η é um autovetor de B^*B com autovalor $\|S_\eta\|^2$.*

Um caso muito cativante de subvariedades com vetor curvatura média paralelo é dado pelas subvariedades isoparamétricas, definidas como subvariedades com fibrado normal flat e com curvaturas principais constantes ao longo de campos de vetores normais paralelos. No seguinte corolário mostramos que se M é uma subvariedade isoparamétrica de $\mathbb{R}^{n+r}$ então existem seções harmônicas que geram o espaço normal. Mais ainda, estas seções harmônicas tem autovalores constantes, ou seja, são autoaplicações do Laplaciano.

Corolário 4.4. *Seja M^n uma subvariedade isoparamétrica de $\mathbb{R}^{n+r}$. Então o endomorfismo autoadjunto B^*B tem autovalores constantes não negativos $0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_r$ e existe uma base ortonormal paralela $\eta_1, \cdots, \eta_r$ de $\mathcal{N}(M)$ de autovetores. Mais ainda, as aplicações $\eta_i : M \to \mathbb{S}^{n+r-1}$ são autoaplicações do Laplaciano e*

$$\Delta(\eta_i) = -\sigma_i\eta_i,$$

onde o autovalor constante σ_i é igual a $\|S_{\eta_i}\|^2$.

Demonstração. Fixemos um ponto $p \in M$ e seja $\{v_1, \cdots, v_r\}$ uma base ortonormal de autovetores do endomorfismo autoadjunto $B^*B : T_p^\perp M \to T_p \perp M$. Como o fibrado normal de uma subvariedade isoparamétrica é globalmente flat, ver [45], podemos estender esta base a uma base ortonormal globalmente definida de vetores paralelos $\eta_1, \cdots, \eta_r$ do fibrado normal $\mathcal{N}(M)$. Mais ainda, como M é isoparamétrica, os autovalores dos operadores S_{η_i}, $i = 1, \cdots, r$, são constantes, então as funções $\langle S_{\eta_i}, S_{\eta_j} \rangle$ são constantes. Assim,

$$\langle B^*B(\eta_i), \eta_j \rangle = \langle B^*B(\eta_i), \eta_j \rangle_p = \delta_{ij}.$$

Por conseguinte, $\eta_1, \cdots, \eta_r$ são autovalores de B^*B. A prova conclui pelo Corolário 4.3. □

Para finalizar esta seção apontamos que o estudo dos autovalores do operador autoadjunto B^*B mostra quando a codimensão de M pode ser reduzida em subvariedades com vetor curvatura média paralelo. Isto é, M está contida em um hiperplano do espaço Euclidiano se e somente se existe um autovetor do endomorfismo autoadjunto da segunda forma fundamental que é paralelo e cuja imagem está contida em um hemisfério aberto da esfera.

Precisamente, seja M uma subvariedade compacta com vetor curvatura média paralelo de $\mathbb{R}^{n+r}$. Se um autovalor η de B^*B for paralelo e a imagem de $\eta : M \to \mathbb{S}^{n+r-1}$ está contida em um hemisfério aberto então o vetor η é constante e a codimensão de M é reduzida a $r-1$. De fato, note que η satisfaz a identidade $\Delta(\eta) = -\|S_\eta\|^2\eta$ e que existe um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+r}$ tal que $\langle \eta, v \rangle > 0$, de sorte que a função $\langle \eta, v \rangle$ é superharmônica e portanto constante não nula. Diante disso, a segunda forma fundamental S_η na direção de η é identicamente nula. Adicionalmente, como η é paralelo na conexão normal então concluímos que η é constante. Fixando $p_0 \in M$, consideremos uma curva $\alpha : I \to M$ que passa por p_0. Então a função $\langle \alpha(t) - f(p_0), \eta(t) \rangle$ é constante e igual a 0. Como consequência disto temos que M está contida no subespaço ortogonal $(\mathbb{R}\eta)^\perp$ a η no ponto p_0, isto é, $T_{p_0}\mathbb{R}^{n+r} = \mathbb{R}\eta \oplus (\mathbb{R}\eta)^\perp$.

4.1.1 Aplicação de Gauss produto exterior

Como consequência do capítulo anterior podemos dar uma demonstração acessível e em termos atuais da harmonicidade da aplicação de Gauss dada pelo produto exterior de formas diferenciais de uma subvariedade orientável com vetor curvatura média paralelo e fibrado normal flat. Este resultado foi mostrado inicialmente por K. Chen em [13].

Seja u um vetor do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, denotaremos por u^* a $1-$forma definida por u. O conjunto das $r-$formas de $\mathbb{R}^n$ o denotamos por $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ e o munimos com o produto interno usual, isto é,

$$\langle u_1^* \wedge \cdots u_r^*, v_1^* \wedge \cdots v_r^* \rangle = det(\langle u_i, v_j \rangle).$$

Seja M uma variedade orientada imersa isometricamente no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+r}$. A aplicação de Gauss produto exterior de M é definida por

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : M & \to & \mathbb{S}^{d_{n,r}} \subset \Lambda^r(\mathbb{R}^n) \\ p & \mapsto & \gamma_1^* \wedge \cdots \wedge \gamma_r^*, \end{array}$$

onde $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_r\}$ é uma base ortonormal positiva do $T_p^\perp M$ e $d_{n,r} = \binom{n+r}{r} - 1$. A boa definição segue do produto interno, isto é, se $\{\eta_1, \cdots, \eta_r\}$ é outra base positiva do $T_p^\perp M$ então $\langle \gamma_1^* \wedge \cdots \wedge \gamma_r^*, \eta_1^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^* \rangle = 1$.

No teorema a seguir mostramos que a aplicação produto exterior satisfaz uma fórmula análoga a equação (4.1).

Teorema 4.5. *Seja M uma variedade orientada de dimensão n isometricamente imersa no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+r}$ com fibrado normal flat. Se M tem vetor curvatura média paralelo então a aplicação de Gauss produto exterior satisfaz*

$$\Gamma(p) = -\|B\|^2 \Gamma.$$

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\{\eta_1, \cdots, \eta_r\}$ uma base ortonormal paralela positiva de uma vizinhança em torno de p no fibrado normal de M. Vamos calcular o Laplaciano de $\Gamma : M \to \mathbb{S}^{d_{n,r}} \subset \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$, isto é, o Laplaciano de cada coordenada. Sejam X e Y vetores tangentes a M em p então é fácil ver que

$$X(\Gamma) = ((\nabla_X \eta_1)^* \wedge \eta_2^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^*) + \cdots + (\eta_1^* \wedge \eta_2^* \wedge \cdots \wedge (\nabla_X \eta_r)^*) \, .$$

Por economia escreveremos $\nabla_X(\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_r)_i$ e $\nabla_X \nabla_Y \, (\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_r)_{ij}$ para denotar $\eta_1^* \wedge \cdots \wedge (\nabla_X \eta_i)^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^*$ e $\eta_1^* \wedge \cdots \wedge (\nabla_X \eta_i)^* \wedge \cdots \wedge (\nabla_Y \eta_j)^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^*$.

Seja $E_1, \cdots, E_n$ um referencial geodésico de M em p. Então,

$$\begin{aligned}
\Delta(\Gamma)(p) &= \sum_{i=1}^{n} E_i E_i(\Gamma) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i E_i(\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_r) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} (\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_r)_{jk}
\end{aligned}$$

Como o fibrado normal de M é flat então podemos escolher o referencial geodésico de modo que diagonalize simultaneamente as segundas formas fundamentais $S_{\eta_1}, \; \cdots, \; S_{\eta_r}$. Consequentemente, se $j \neq k$ temos

$$\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} (\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_r)_{jk} = 0$$

pois η_j e η_k são paralelos, $S_{\eta_j}(E_i) = \lambda_i^j E_i$ e $S_{\eta_k}(E_i) = \lambda_i^k E_i$, onde λ denota o autovalor correspondente. Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta(\Gamma)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} (\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_r)_{jj} \\
&= (\Delta(\eta_1)^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^*) + \cdots + (\eta_1^* \wedge \cdots \wedge \Delta(\eta_r)^*) \, .
\end{aligned}$$

Daqui e do fato que $\Delta(\eta_i) = -B^* B(\eta_i)$ (Teorema 4.2) segue que

$$\begin{aligned}
\Delta(\Gamma)(p) &= (\Delta(\eta_1)^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^*) + \cdots + (\eta_1^* \wedge \cdots \wedge \Delta(\eta_r)^*) \\
&= -\left(B^* B(\eta_1)^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^*\right) - \cdots - \left(\eta_1^* \wedge \cdots \wedge B^* B(\eta_r)^*\right) \\
&= -\left(\|S_{\eta_1}\|^2 \eta_1^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^*\right) - \cdots - \left(\eta_1^* \wedge \cdots \wedge \|S_{\eta_r}\|^2 \eta_r^*\right) \\
&= -\|B\|^2 \Gamma.
\end{aligned}$$

$\square$

Corolário 4.6. *Seja M uma subvariedade orientada imersa no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+r}$ com fibrado normal flat. Se o vetor curvatura média de M é paralelo então a aplicação de Gauss produto exterior é harmônica.*

A hipótese de orientabilidade no corolário acima pode ser omitida. Em vista que podemos considerar a aplicação de Gauss produto exterior na projetivização do espaço das formas $\Lambda^r(\mathbb{R}^{n+r})$, usaremos a mesma notação para esta aplicação, isto é, $\Gamma : M \to \mathbb{RP}^{d_{n,r}}$, onde $d_{n,r} = \binom{n+r}{r} - 1$.

Mostramos agora a relação da aplicação de Gauss generalizada ("clássica") com a aplicação de Gauss produto exterior. Para isto definimos o mergulho de Plücker

$$\begin{aligned} \wp : G(n, \mathbb{R}^{n+r}) &\to \mathbb{RP}^{d_{n,r}} \\ P &\mapsto [v_1^* \wedge \cdots \wedge v_r^*], \end{aligned}$$

onde $\{v_1, \cdots, v_r\}$ é qualquer base ortonormal do $r-$plano P. Recordamos que o mergulho de Plücker é uma imersão isométrica mínima.

Diante disso, é claro que se M é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+r}$ e $G : M \to G(n, n+r)$ a aplicação de Gauss generalizada então a aplicação de Gauss produto exterior não é nada mais que $\Gamma = \wp \circ G$, ou seja, a composta entre a aplicação de Gauss generalizada e o mergulho de Plücker. Estudos sobre a imagem da aplicação de Gauss generalizada clássica na esfera de $\Lambda^r(\mathbb{R}^{n+r})$ podem ser encontrados em [5] e [47].

Provamos agora a recíproca do Corolário 4.6. Isto é, seja M uma variedade de dimensão n isometricamente imersa no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+r}$ com o fibrado normal flat. Então, se a aplicação de Gauss produto exterior Γ for harmônica, o vetor curvatura média de M é paralelo.

De fato, seja $\{e_1, \ \cdots \ , \ e_n\}$ um referencial ortonormal de uma vizinhança de M. Então, pelo Lema 2.2, temos

$$0 = \tau(\Gamma)(p) = \tau(\wp \circ G) = \sum_{i=1}^{m} B_{G(p)}(G_* e_i, G_* e_i) + d\wp\tau(G).$$

Particularmente, $0 = (\tau(\Gamma)(p))^{\top} = d\wp\tau(G)$. Isto é, a aplicação de Gauss

G é harmônica. Em vista disso e do Teorema de Ruh-Vilms concluímos o afirmado.

Entretanto, note que se M é uma subvariedade com vetor curvatura média paralelo e fibrado normal flat da uma esfera unitária $\mathbb{S}^{n+r} \subset \mathbb{R}^{n+r}$, então M é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+r+1}$ com vetor curvatura média paralelo e fibrado normal flat. Consequentemente, a aplicação de Gauss produto exterior é harmônica.

Do mesmo modo como é possível dar uma definição de aplicação de Gauss generalizada de maneira intrínseca para subvariedades da esfera, veja [24], podemos dar uma definição de aplicação de Gauss produto exterior para subvariedades da esfera considerando só o espaço normal à subvariedade na esfera. Precisamente, seja M uma subvariedade de dimensão n imersa na esfera $\mathbb{S}^{n+r}$. Definimos a aplicação de Gauss produto exterior da esfera por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbb{S}^{n+r}} : M \quad &\rightarrow \quad \mathbb{RP}^{d_{n,r+1}} \\ p \quad &\mapsto \quad [\eta_1^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^*], \end{aligned}$$

onde $\{\eta_1, \cdots, \eta_r\}$ é qualquer base ortonormal do $T_p^\perp M \subset T_p\mathbb{S}^{n+r}$. É fácil ver que esta aplicação está bem definida.

Teorema 4.7. *Seja M uma subvariedade mínima de $\mathbb{S}^{n+r}$ com fibrado normal flat então a aplicação de Gauss produto exterior da esfera é harmônica.*

Demonstração. De maneira análoga à demonstração do Teorema 4.6 podemos escolher um referencial ortonormal paralelo $\{\eta_1, \cdots, \eta_r\}$ de uma vizinhança do fibrado normal de M em p e um referencial geodésico $\{E_1, \cdots, E_n\}$ de p e mostrar que

$$\Delta(\phi)(p) \quad = \quad (\Delta(\eta_1)^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^*) + \cdots + (\eta_1^* \wedge \cdots \wedge \Delta(\eta_r)^*)\,,$$

onde $\phi = \eta_1^* \wedge \cdots \wedge \eta_r^*$ é uma aplicação definida em uma vizinhança de p. É fácil ver que $\eta_1, \cdots, \eta_r$ são campos paralelos a M em $\mathbb{R}^{n+r+1}$ e o vetor curvatura média de M em $\mathbb{R}^{n+r+1}$ é um múltiplo do vetor posição $\xi(p) = p$.

Logo, pelo Teorema 4.1 e o fato que M é mínima em $\mathbb{S}^{n+r}$ temos

$$\begin{aligned}\Delta(\phi)(p) &= -\|S_{\eta_1}\|^2\phi - \cdots - \|S_{\eta_r}\|^2\phi \\ &= -\|B\|^2\phi.\end{aligned}$$

Notando que localmente $\Gamma_{\mathbb{S}^{n+r}} = \pi \circ \varphi$, onde a projeção $\pi : \mathbb{S}^{d_{n,r}} \to \mathbb{RP}^{d_{n,r}}$ é uma submersão Riemanniana e que da Proposição 2.2, temos $\tau(\Gamma_{\mathbb{S}^{n+r}})(p) = d\pi_{\varphi(p)}\tau(\phi)$. Então, podemos concluir que a aplicação de Gauss $\Gamma_{\mathbb{S}^{n+r}}$ é harmônica. □

4.2 A estrutura octoniana de $\mathbb{S}^7$ e aplicações de Gauss octonianas

Nesta seção usamos a multiplicação octoniana $\cdot$ de $\mathbb{S}^7$ para associar a cada campo de vetores unitário η normal a uma subvariedade M de $\mathbb{S}^7$, uma aplicação de Gauss octoniana $\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^6$, $\gamma_\eta(x) = x^{-1} \cdot \eta(x)$. Seguiremos as notações e definições dadas em [7] e [8] e obtemos extensões na codimensão dos resultados desses trabalhos sobre harmonicidade de aplicações de Gauss octonianias e topologia das subvariedades.

4.2.1 Construções e definições

Os octônios são definidos como a álgebra de Cayley-Dickson $\mathcal{C}_8$, como referência ver [4]. Dado um numero $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, a álgebra de Cayley-Dickson $\mathcal{C}_n$ é uma estrutura de álgebra de divisão sobre $\mathbb{R}^{2^n}$ definida indutivamente por $\mathcal{C}_0 = \mathbb{R}$ e pelas seguintes formulação por recursividade: Se $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ estão em $\mathbb{R}^{2^n} = \mathbb{R}^{2^{n-1}} \times \mathbb{R}^{2^{n-1}}$, $n \geq 1$, então

$$x \cdot y = (x_1 y_1 - \overline{y_2} x_2, y_2 x_1 + x_2 \overline{y_1}), \tag{4.2}$$

onde

$$\overline{x} = (\overline{x}_1, -x_2),$$

com $\overline{x} = x$ se $x \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, a multiplicação dos octônios é descrita na base canônica $\{1,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7\}$ na tabela 4.1

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabela 4.1: Tabela de Multiplicação octoniana

Como referência da álgebra dos octônios ver [4].

Aqui usamos a notação $\mathbb{O} = \mathcal{C}_8$ para os octônios e denotamos por 1 o elemento neutro de $\mathbb{O}$. Os octônios $\mathbb{O}$ é uma álgebra normada, isto é, $\|x \cdot y\| = \|x\|\|y\|$, para quaisquer $x,\ y \in \mathbb{O}$, onde $\|\ \|$ é a norma usual de $\mathbb{R}^8$, e $\|x\| = \sqrt{x \cdot \overline{x}}$. Definindo $\mathrm{Re}(x) = (x + \overline{x})/2$ temos

$$T_1\mathbb{S}^7 = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid \mathrm{Re}(x) = 0\}.$$

As translações à direita e à esquerda são denotadas por $R_x, L_x : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$, e definidas por $R_x(v) = v \cdot x$, $L_x(v) = x \cdot v$, $v \in \mathbb{O}$. R_x e L_x são aplicações ortogonais se $\|x\| = 1$, e são anti-simétricas se $\mathrm{Re}(x) = 0$. Em particular, a esfera unitária $\mathbb{S}^7$ é preservada por translações à esquerda e à direita de vetores unitários, mais ainda, qualquer $v \in T_1\mathbb{S}^7$ determina um campo de Killing V_v de $\mathbb{S}^7$ dado pela translação à esquerda, $V(x) = x \cdot v$, $x \in \mathbb{S}^7$. Definimos a aplicação de translação

$$\begin{aligned} \Gamma : T\mathbb{S}^7 &\to T_1\mathbb{S}^7 \\ (x, v) &\mapsto L_{x^{-1}}(v). \end{aligned}$$

Usaremos a notação $\Gamma_x(v) = \Gamma(x, v)$. Se M é uma subvariedade de $\mathbb{S}^7$, uma seção global unitária η de M determina uma aplicação de Gauss octoniana

$$\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^6 \subset T_1\mathbb{S}^7$$

e está dada por

$$\gamma_\eta(x) = \Gamma_x(\eta(x)) = x^{-1} \cdot \eta(x), \quad x \in \mathbb{S}^7,$$

onde $\mathbb{S}^6$ é a esfera unitária de $T_1\mathbb{S}^7$.

4.2.2 Aplicações de Gauss octonianas

No teorema a seguir note que se a subvariedade é mínima então trivialmente toda seção unitária paralela no fibrado normal é um múltiplo do vetor curvatura média. Assim, neste teorema estamos incluido as mínimas como no Teorema 1.1 de [7] e o vetor paralelo $\eta = \frac{\overrightarrow{H}}{\|\overrightarrow{H}\|}$.

Teorema 4.8. *Seja M uma subvariedade com vetor curvatura média normalizado paralelo de codimensão $1 \leq k \leq 5$ de $\mathbb{S}^7$ e seja $\eta \in \mathcal{N}(M)$ uma seção normal unitária paralela de M tal que $\overrightarrow{H} = h\eta$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^6 \subset T_1\mathbb{S}^7$ *satisfaz*

$$\Delta\gamma_\eta = -\left(7 - k + \|S_\eta\|^2\right)\gamma_\eta;$$

ii) η *é um autovetor do endomorfismo autoadjunto B^*B com autovalor* $\|S_\eta\|^2$;

iii) $\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^6$ *é uma aplicação harmônica;*

iv) η *é um ponto crítico de $F : \mathcal{N}(M) \to \mathbb{R}$, equação* (3.1), *restrito ao subfibrado das seções unitárias do fibrado normal.*

Demonstração. Seja $\{v_1, \cdots, v_7\}$ uma base ortonormal do espaço tangente $T_1\mathbb{S}^7$. Assim, os campos $V_{v_1}, \cdots, V_{v_n}$ definidos por translação dos elementos desta base são campos de Killing. Fixemos x em M, seja η como no enunciado do teorema e note que $\mathrm{Ric}_M(\eta) = (7-k)\eta$. Então, do Corolário 3.7 temos

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma_\eta(x) &= \sum_{i=1}^{7}(\Delta\langle\gamma_\eta, v_i\rangle)v_i \\
&= \sum_{i=1}^{7}(\Delta\langle\eta, V_{v_i}\rangle)v_i \\
&= -\sum_{i=1}^{7}(\langle B^*B(\eta), V_{v_i}\rangle - (7-k)\langle\eta, V_{v_i}\rangle)v_i \\
&= -\Gamma_x(B^*B(\eta)(x)) - (7-k)\gamma_\eta(x).
\end{aligned}$$

Em virtude que γ_η é harmônica se e somente se $\Delta\gamma_\eta$ é um múltiplo de γ_η, decorre que i) e iii) são equivalentes e portanto i), iii) e iv) são equivalentes. Para ver que ii) também é equivalente às anteriores, observe que $B^*B(\eta) = \|S_\eta\|^2\eta$ equivale a $\Gamma(B^*B(\eta)) = \|S_\eta\|^2\gamma_\eta$ então γ_η é harmonica se e somente se η é um autovetor de $B^*B(\eta)$, ou equivalentemente

$$\Delta\gamma_\eta(x) = -\left(\|S_\eta\|^2 + (7-k)\right)\gamma_\eta(x).$$

$\square$

Uma consequência imediata do Teorema 4.8 é uma versão do Teorema do tipo Ruh-Vilms. No Corolário 8 de [8] se establece que se M é uma hipersuperfície orientável da esfera $\mathbb{S}^7$ então a aplicação de Gauss octoniana é harmônica se e somente se M tem vetor curvatura média constante. No Corolário 1.2 de [7] os autores estenderam este resultado, isto é, mostraram que a aplicação de Gauss octoniana de hipersuperfícies mínimas das esferas $\mathbb{S}^k$, $k = 3, \cdots, 7$ é harmônica. No resultado a seguir unificamos estes fatos e mostramos que a harmonicidade é satisfeita exatamente quando as hipersuperfícies tem curvatura média constante.

Corolário 4.9. *Para $k \in \{3, 4, \ldots, 7\}$, seja $\mathbb{S}^k$ uma esfera totalmente geodésica de $\mathbb{S}^7$ com dimensão k e M uma hipersuperfície orientável de $\mathbb{S}^k$. Seja η campo de vetores unitário de M em $\mathbb{S}^k$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) M tem vetor curvatura média constante;

ii) A aplicação de Gauss octoniana γ_η é harmônica;

iii) A aplicação de Gauss octoniana γ_η satisfaz

$$\Delta\gamma_\eta = -\left(k - 1 + \|B\|^2\right)\gamma_\eta.$$

Demonstração. Da Proposição 2.1 segue que M tem vetor curvatura média $\overrightarrow{H} = H\eta$ normalizado paralelo em $\mathbb{S}^7$. As equivalências seguem do Teorema 4.8 em vista que η é um autovetor do endomorfismo autoadjunto B^*B. $\square$

Caso M seja uma hipersuperfície não orientável na esfera totalmente geodésica $\mathbb{S}^k,\ k = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ de $\mathbb{S}^7$ então podemos considerar a aplicação de Gauss octoniana natural definida como segue

$$\begin{array}{rccl} \gamma_{[\eta]}: & M & \to & \mathbb{RP}^6 \\ & x & \mapsto & [x^{-1}\cdot\eta] \end{array}$$

onde η é campo normal unitário de M em $\mathbb{S}^k$ definido localmente em torno de x e $\mathbb{RP}^6$ é o espaço projetivo real de $T_1\mathbb{S}^7$. Da Proposição 2.2, segue que M é uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^k$ com vetor curvatura média constante se e somente se a aplicação octoniana $\gamma_{[\eta]}$ é harmônica.

No resultado a seguir construimos aplicações de Gauss octonianas que são autoaplicações do Laplaciano definidas em subvariedades isoparamétricas minimas de $\mathbb{S}^7$. Para a existência de subvariedades isoparamétricas mínimas veja por exemplo [39].

Teorema 4.10. *Seja M uma subvariedade isoparamétrica compacta e mínima da esfera $\mathbb{S}^7$ com codimensão $1 \leq k \leq 5$. Então o endomorfismo autoadjunto B^*B tem autovalores $\sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_k$ constantes não negativos e os autovetores $\eta_1, \cdots, \eta_k$ formam uma base ortonormal paralela de $\mathcal{N}(M)$, tais que γ_{η_j} é uma autoaplicação do Laplaciano de M com autovalores $7 - k + \sigma_j$, isto é, $\Delta\gamma_{\eta_j} = -\left(7 - k + \sigma_j\right)\gamma_{\eta_j}$. Mais ainda, $\sigma_j = \|S_{\eta_j}\|^2$, $1 \leq j \leq k$. Particularmente, para qualquer $e \in T_1\mathbb{S}^7$ dado, as funções $\left\langle \gamma_{\eta_j}, e\right\rangle$ são autofunções do Laplaciano de M com autovalor $7 - k + \sigma_j$, $1 \leq j \leq k$.*

Demonstração. Seja M como no enunciado do teorema. Fixemos $x \in M$ e denotemos o endomorfismo linear B^*B em x por $B^*B(x)$. Em vista que $B^*B(x)$

é não negativo e autoadjunto existe uma base ortonormal $\{\nu_1, \cdots, \nu_k\}$ de $T_x^{\perp} M$ de autovetores de $B^*B(x)$ com autovalores $0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_k$.

Por outro lado, é bem sabido que uma subvariedade da esfera $\mathbb{S}^n$ é isoparamétrica em $\mathbb{S}^n$ se e somente se é isoparamétrica em $\mathbb{R}^{n+1}$. De [45] sabemos que existe uma base ortonormal paralela de vetores unitários $\{\tau_1, \cdots, \tau_{k+1}\}$ de M em $\mathbb{R}^{n+1}$ e definimos, para $1 \leq j \leq k$,

$$\eta_j(y) = \sum_{i=1}^{k+1} a_{ji}\tau_i(y), \ y \in M,$$

se

$$\nu_j = \sum_{i=1}^{k+1} a_{ji}\tau_i(x).$$

Os campos de vetores η_j são ortogonais a M em $\mathbb{S}^n$ pois da Proposição 2.1 o campo de vetores $V(y) = y$, $y \in M$, é paralelo na conexão normal de M em $\mathbb{R}^{n+1}$ e

$$\langle \eta_j(x), V(x) \rangle = \langle \nu_j, V(x) \rangle = 0.$$

Mais ainda, η_j é paralelo pois é uma combinação linear, com coeficientes constantes, de vetores paralelos, $1 \leq j \leq k$. Assim, M tem fibrado normal globalmente flat. Fazendo uma prova análoga à feita na demonstração do Corolário 4.4 garantimos a existencia de uma base ortonormal $\{\eta_1, \cdots, \eta_k\}$ de autovetores paralelos do endomorfismo autoadjunto B^*B com autovalores constantes $\sigma_j = \|S_{\eta_j}\|^2$, $1 \leq j \leq k$. Assim sendo, as aplicações de Gauss octonianas $\gamma_{\eta_1}, \cdots, \gamma_{\eta_k}$ são autoaplicações do Laplaciano com autovalores dados por $7 - k + \sigma_1, \cdots, 7 - k + \sigma_k$, respectivamente. $\square$

A imagem da aplicação de Gauss de superfícies mínimas e com curvatura média constante no espaço Euclidiano é um tópico clássico de estudo em geometria diferencial. É bem sabido que se a imagem da aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa de $\mathbb{R}^3$ está contida em um hemisfério de $\mathbb{S}^2$ então a superfície é um plano. É possível definir, a aplicação de Gauss de uma hipersuperfice mínima orientável M da esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ com campo de vetores normal unitário η como a aplicação de Gauss usual $\gamma : M \to \mathbb{S}^{n+1}$, $\gamma(x) = \eta(x)$, $x \in M$.

E. De Giorgi [17] e, independentemente J. Simons [42] provaram que se

M é compacta e $\gamma(M)$ pertence a um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$ então M é uma hiperesfera totalmente geodésica de $\mathbb{S}^{n+1}$. Como consequencia dos Teoremas 4.8 e 4.9, obtemos aqui um resultado similar para subvariedades com vetor curvatura média normalizado paralelo de codimensão arbitraria (em particular as mínimas) de $\mathbb{S}^7$: (Ver Teorema 1.4 de [7]).

Teorema 4.11. *Seja M uma subvariedade compacta com vetor curvatura média normalizado paralelo $\overrightarrow{H} = h\eta$ de codimensão $1 \leq k \leq 5$ da esfera $\mathbb{S}^7$ tal que η é um autovetor de B^*B. Então, a imagem da aplicação de Gauss octoniana γ_η não está contida em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^6$.*

Demonstração. Seja η seção normal unitária de M como no enunciado do Teorema. Assumamos que a imagem da aplicação γ_η está contida em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^6$ centrado no vetor v. Então, $\langle \gamma_\eta(x), v \rangle > 0$ para todo $x \in M$. Como M é compacta então existe uma vizinhança U de v em $\mathbb{S}^6$ tal que $\langle \gamma_\eta(x), w \rangle > 0$ para todo $x \in M$ e para todo $w \in U$. Claramente, em U podemos escolher 7 vetores linearmente independentes $w_1, \ldots, w_7$. Da igualdade (i) do Teorema 4.8 segue que cada função $f_i = \langle \gamma_\eta, w_i \rangle$ é superharmônica, $1 \leq i \leq 7$. Assim, como M é uma subvariedade compacta, portanto f_i é constante e, $\Delta f_i = 0$. Além disso, o coeficiente de γ_η em (i) é não nulo, temos novamente de (i) que f_i é identicamente zero. Concluimos que em cada ponto $x \in M$ o vetor não nulo $\gamma_\eta(x)$ é ortogonal a 7 vetores linearmente independentes em um espaço vetorial de dimensão 7, contradição. $\square$

Corolário 4.12. *Seja M uma hipersuperfície compacta e orientável de $\mathbb{S}^k$, para $k = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ com curvatura média constante e η campo de vetores normal unitário de M em $\mathbb{S}^k$. Então, a imagem da aplicação de Gauss octoniana γ_η não está contida em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^6$.*

No Teorema 4.13 estudamos as imagens das aplicações de Gauss de superfícies mínimas compactas e orientáveis das esferas $\mathbb{S}^k$, $k = 3, 4, 5, 6, 7$. Este resultado estende o Teorema 10 de [8], no caso mínimo.

Uma esfera totalmente geodésica T de dimensão 5 da esfera $\mathbb{S}^6 \subset T_1\mathbb{S}^7$ é determinada por um hiperplano P_T passando pela origem de $T_1\mathbb{S}^7$. Dizemos que as esferas totalmente geodésicas $T_1, T_2, \cdots, T_j$ de dimensão 5 de $\mathbb{S}^6$ são linearmente independentes, $1 \leq j \leq 7$, se os vetores normais que correspondem aos hiperplanos $P_{T_1}, \cdots, P_{T_j}$ são linearmente independentes em $\mathbb{S}^7$. O conjunto $T_1 \cup \cdots \cup T_j$ divide a esfera $\mathbb{S}^6$ em 2^j componentes conexas chamadas 2^j-ortantes. Em particular, se $j = 1$, os 2^j-ortantes são hemisférios.

No Teorema a seguir $\mathbb{S}^k$, $k = 3, 4, 5, 6, 7$, é uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{S}^7$, $\{\zeta_1, \cdots, \zeta_{7-k}\}$ um referencial ortonormal paralelo do fibrado normal $\mathbb{S}^k$ em $\mathbb{S}^7$ e suas respetivas aplicações de Gauss octonianas são denotadas por $\tilde{\zeta}_i,\ i = 1, \cdots 7-k$.

Teorema 4.13. *Seja M uma superfície mínima compacta e orientável da esfera $\mathbb{S}^k$, $k = 3, 4, 5, 6, 7$ e η seção normal unitária de M em $\mathbb{S}^k$. Considerando as aplicações de Gauss octonionicas $\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^6$ e $\tilde{\zeta}_i : M \to \mathbb{S}^6,\ i = 1, \cdots 7-k$. temos que as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) Para $i = 1, \cdots, 7-k$, as imagens de $\gamma(M)$ e $\tilde{\zeta}_i(M)$ estão contidas em um 2^j-ortante de $\mathbb{S}^6$, definido por certas esferas totalmente geodésicas linearmente independentes $T_1, \cdots, T_j$ de $\mathbb{S}^6$.

ii)

$$\gamma(M) \subset \bigcap_{l=1}^{j} T_l \quad e \quad \tilde{\zeta}_i(M) \subset \bigcap_{l=1}^{j} T_l, \qquad \textit{para todo}\ \ 1 \leq i \leq 7-k.$$

iii) Seja $\{v_1, \cdots, v_j\}$ uma base de

$$\left(\bigcap_{l=1}^{j} P_{T_l}\right)^{\perp}$$

e seja $\mathcal{H}$ a álgebra de Lie gerada pelos campos de Killing $V_{v_1}, \cdots, V_{v_j}$. Então, $\mathcal{H}$ é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie do grupo de isometrias de M. Particularmente, $\dim(\mathrm{Iso}(M)) \geq j$.

Demonstração. Assumamos que as imagens $\gamma_\eta(M)$ e $\tilde{\zeta}_i(M)$ $i = 1, \cdots, 7-k$ estão contidas em um 2^j-ortante de $\mathbb{S}^6$, então, existem vetores linearmente independentes $\{v_1, \cdots, v_j\}$ de $T_1\mathbb{S}^7$ tais que

$$\langle \gamma_\eta, v_l \rangle \geq 0, \quad \text{e} \quad \langle \tilde{\zeta}_i, v_l \rangle \geq 0$$

para todo $0 \leq l \leq j$ e $1 \leq i \leq r$. Então, pelo Teorema 4.8

$$\Delta\langle \gamma_\eta, v_l\rangle = \langle \Delta(\gamma_\eta), v_l\rangle = -(k-1+\|S_\eta\|^2)\langle \gamma_\eta, v_l\rangle \leq 0,$$

e

$$\Delta\langle \tilde{\zeta}_i, v_l\rangle = \langle \Delta(\tilde{\zeta}_i), v_l\rangle = -(k-1)\langle \tilde{\zeta}_i, v_l\rangle \leq 0.$$

Deste modo, as funções $\langle \gamma_\eta, v_l\rangle$ e $\langle \tilde{\zeta}_i, v_l\rangle$ são superharmônicas em M, consequentemente $\langle \gamma_\eta, v_l\rangle = 0 = \langle \tilde{\zeta}_i, v_l\rangle$. Isto é,

$$\gamma_{\eta_i}(M) \subset \bigcap_{l=1}^{j} T_l \quad \text{e} \quad \tilde{\zeta}_i(M) \subset \bigcap_{l=1}^{j} T_l$$

Isto prova que i) é equivalente a ii). A equivalência entre ii) e iii), segue das igualdades $\langle \gamma_\eta, v_l\rangle = \langle \eta, V_{v_l}\rangle$ e $\langle \tilde{\zeta}_i, v_l\rangle = \langle \zeta_i, V_{v_l}\rangle$. Note ainda que os campos $V_{v_{l_1}}$ e $V_{v_{l_2}}$ são de Killing em $\mathbb{S}^7$ e $[V_{v_{l_1}}, V_{v_{l_2}}]$ também é um campo de Killing de $\mathbb{S}^7$. $\square$

Uma consequência imediata do Teorema anterior é que se um dos itens (e portanto todos) é satisfeito então a característica de Euler da hipersuperfície M de $\mathbb{S}^k$ é zero.

Depois de estudar hipersuperfícies com curvatura média constante na esfera $\mathbb{S}^7$ em [8] os autores estudam as hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^3$, isto é, definem uma aplicação de Gauss de hipersuperfícies de $\mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^2$. No Teorema 17 de [8] eles encontram o Laplaciano e mostram a relação entre o Laplaciano da aplicação de Gauss e as hipersuperfícies de $\mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^2$ com curvatura média constante. No Teorema 4.14 estendemos este resultado para hipersuperfícies do espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$.

Consideremos o espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^3$ como o quociente da esfera unitária $\mathbb{S}^7$ pela ação de Hopf de $\mathbb{S}^1$, com a métrica "Fubiny-Study", de modo que a projeção $\pi : \mathbb{S}^7 \to \mathbb{S}^7/\mathbb{S}^1 = \mathbb{CP}^3$ é uma submersão Riemanniana.

Pela Proposição 16 de [8] sabemos que se $\mathbb{CP}^2$ é o cut locus de $\pi(1) \in \mathbb{CP}^3$ então existem campos de Killing $Z_1, \cdots, Z_6$ de $\mathbb{CP}^3$ que são linearmente independentes em todo ponto de $N := \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^2$. Consideremos o espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$ como uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{CP}^3$ de codimensão real 2 que está contida em $N = \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^2$, neste caso diremos que $\mathbb{CP}^2$ está fora do cut locus de $\pi(1)$.

Definimos a translação

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : T(\mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^2) & \to & \mathbb{R}^6 \\ (x, v) & \mapsto & (\langle Z_1(x), v\rangle, \ \cdots, \ \langle Z_6(x), v\rangle), \end{array}$$

e usamos a notação $\Gamma_x(v)$ para denotar $\Gamma(x, v)$. É fácil ver que para cada $x \in \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^2$ fixado, Γ_x é um isomorfismo linear.

Seja M uma hipersuperfície orientável de um espaço projetivo $\mathbb{CP}^2$ fora do cut locus de $\mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^2$, e seja η um campo normal unitário de M em $\mathbb{CP}^2$ então definimos a aplicação de Gauss de M por

$$\begin{array}{rcl} \gamma : M & \to & \mathbb{R}^6 \\ x & \mapsto & \Gamma_x(\eta(x)). \end{array}$$

Teorema 4.14. *Seja M uma hipersuperfície orientável de um espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$ fora do cut locus de $\pi(1)$ em $\mathbb{CP}^3$. Então, a aplicação de Gauss de M satisfaz*

$$\Delta(\gamma) = -3\Gamma_p(grad(H)) - (6 + \|B\|^2)\gamma,$$

onde H é a curvatura média de M. Em particular, uma hipersuperfície orientável M do espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$ fora do cut locus de $\pi(1)$ tem curvatura média constante se e somente se a aplicação de Gauss de M satisfaz

$$\Delta(\gamma) = -(6 + \|S_\eta\|^2)\gamma.$$

Demonstração. Seja η campo normal unitário de M em $\mathbb{CP}^2$. Fixemos um ponto $x \in M$ e consideremos uma base ortonormal $\{\eta(x), \zeta_1(x), \zeta_2(x)\}$ do espaço ortogonal a M em $\mathbb{CP}^3$ no ponto x, isto é, $\zeta_1(x)$, $\zeta_2(x)$ são normais a $\mathbb{CP}^2$ em $\mathbb{CP}^3$. Inicialmente mostraremos que η é um autovetor do endomorfismo autoadjunto $\mathrm{Ric}_M^{\perp}$ e que $\mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta(x)) = 6\eta(x)$. Definamos a isometría

$$\begin{aligned} J : T_x\mathbb{CP}^3 &\rightarrow T_x\mathbb{CP}^3 \\ v &\mapsto d\pi_{\tilde{x}} i\tilde{v}, \end{aligned}$$

onde a projeção $\pi : S^7 \rightarrow \mathbb{CP}^3$ é uma submersão Riemanniana, $\tilde{x}$ está na fibra de x e $\tilde{v}$ é o levantamento horizontal de v em $\tilde{x}$. É fácil ver que J é uma isometria linear bem definida de $T_x\mathbb{CP}^3$. Pelo tensor de curvatura de $\mathbb{CP}^3$ temos, para todo campo tangente X de M, que

$$R(\eta, X)\zeta_i(x) = 2\langle \eta, J(X)\rangle J(\zeta_i)(x),$$

$i = 1, 2$. Logo, $\langle R(\eta, X)\zeta_i, X\rangle = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_M(\eta(x)) &= \mathrm{Ric}_M(\eta, \eta)\eta \\ &= (\mathrm{Ric}(\eta) - \langle R(\eta, \zeta_1)\eta, \zeta_1\rangle - \langle R(\eta, \zeta_2)\eta, \zeta_2\rangle)\eta \\ &= 6\eta, \end{aligned}$$

Por outro lado, note que o endomorfismo autoadjunto da segunda forma funtamental satisfaz $B^*B(\eta) = \|B\|^2\eta$ e que a seção normal unitária η é paralela em $\mathbb{CP}^3$, Proposição 2.1. A demonstração segue do Corolário 3.6. $\square$

4.3 Aplicações de Gauss por translação em espaços simétricos

O propósito principal desta seção é aplicar os resultados do Capítulo 3 em outros espaços ambiente ao espaço Euclideano. A aplicação de Gauss de hipersuperfícies definida por translação tem sido estudada por diferentes autores em diferentes tipos de variedades Riemannianas. Por exemplo, em grupos de Lie com métrica bi-invariante [19], em certos espaços homogêneos [6], em espaços simétricos [41], em variedades Killing paralelizaveis [26], na esfera $\mathbb{S}^7$ com a multiplicação octoniana [7] e [8]. Claramente, é possível estender muitos dos resultados desses trabalhos, contudo nos focaremos somente em espaços simétricos notando que os resultados podem ser abordados de maneira natural nos outros espaços ambiente.

4.3.1 Construções e definições

Nesta seção seguimos as construções e notações em espaços homogêneos e espaços simétricos de [6] e [41].

Seja N um espaço simétrico, então N pode ser visto isometricamente como um quociente

$$\mathbb{G}/\mathbb{K} = \{x\mathbb{K} \mid x \in \mathbb{G}\},$$

onde $\mathbb{G}$ é um grupo de Lie munido com uma métrica pseudo bi-invariante e $\mathbb{K}$ é um subgrupo de fechado de $\mathbb{G}$. Precisamente, o grupo de Lie $\mathbb{G}$ é a componente conexa da identidade do grupo de Lie $ISO(N)$ de isometrias de N e $\mathbb{K}$ é o grupo de isotropia para algum $p \in N$, fixado. A métrica Riemanniana sobre $\mathbb{G}/\mathbb{K} = \{x\mathbb{K} \mid x \in M\}$ é definida de modo que a projeção $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{K}$ é uma submersão pseudo-Riemanniana e a pseudo-métrica bi-invariante de $\mathbb{G}$ é um múltiplo de forma de Killing de $\mathbb{G}$, ver [30] e [41].

O conjunto de vetores verticais de cada $x \in \mathbb{G}$ da submersão $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{K}$, é o subespaço $T_x(x\mathbb{K})$ de $T_x\mathbb{G}$, e o conjunto de vetores horizontais em x é $(T_x(x\mathbb{K}))^\perp$. Denotaremos por l_x a isometria linear definida sobre vetores horizontais em x, isto é,

$$l_x := d\pi_x|_{(T_x(x\mathbb{K}))^\perp} : T_x(x\mathbb{K})^\perp \to T_{\pi(x)}\mathbb{G}/\mathbb{K}.$$

A multiplicação à esquerda define uma ação natural $\mu : \mathbb{G} \times \mathbb{G}/\mathbb{K} \to \mathbb{G}/\mathbb{K}$ do grupo de Lie $\mathbb{G}$ sobre a variedade $\mathbb{G}/\mathbb{K}$. Isto é, para cada $g \in \mathbb{G}$,

$$\mu(g, x\mathbb{K}) = \pi(L_g(x)),$$

onde L_g denota a translação à esquerda de g em $\mathbb{G}$ (a translação à direita é denotada por R_g.) Em vista que a projeção é uma submersão pseudo Riemanniana e que a pseudo métrica sobre $\mathbb{G}$ é bi-invariante segue que esta ação é isométrica.

O campo de ação de $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ determinado por cada $V \in \mathfrak{g}$ é denotado por

$\zeta(V)$ e definido como segue

$$\zeta(V)(p) := \frac{d}{dt}\mu(exp(tV), p)|_{t=0}.$$

Então, para cada $p = x\mathbb{K}$ temos que

$$\begin{aligned}\zeta(V)(p) &= \frac{d}{dt}\pi(exp(tV)x)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\pi(R_x(exp(tV)))|_{t=0} \\ &= (d\pi)_x(dR_x)_e V.\end{aligned}$$

É fácil ver que o fluxo φ_t de $\zeta(V)$ é $\varphi_t(\cdot) = \mu(\exp(tV), \cdot)$. Em particular, isto mostra que o campo de ação $\zeta(V)$ é um campo de Killing sobre $\mathbb{G}/\mathbb{K}$.

Definimos a aplicação de translação $\Gamma : T(\mathbb{G}/\mathbb{K}) \to \mathfrak{g}$, em $p \in \mathbb{G}$ por

$$\begin{aligned}\Gamma_p : T_p(\mathbb{G}/\mathbb{K}) &\to \mathfrak{g} \\ v &\mapsto (dR_{x^{-1}})_x l_x^{-1}(v),\end{aligned}$$

onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de $\mathbb{G}$.

Proposição 4.15. *Para cada $p \in \mathbb{G}/\mathbb{K}$, a transformação linear*

$$\Gamma_p : T_p(\mathbb{G}/\mathbb{K}) \to \mathfrak{g}$$

está bem definida e preserva produto interno.

Demonstração. Se $x, y \in \pi^{-1}(p)$ então $y = R_k(x)$ para algum $k \in \mathbb{K}$. Então, para qualquer vetor horizontal $v \in T_x\mathbb{G}$ observamos que $l_x(v) = (d\pi)_y(dR_k)_x(u) = l_y((dR_k)_x(v))$, pois R_k preserva horizontalidade. Note que $[(dR_k)_x]^{-1} = (dR_{k^{-1}})_y = (dR_{y^{-1}x})_y$, então,

$$\begin{aligned}(dR_{x^{-1}})_x l_x^{-1}(v) &= (dR_{x^{-1}})_x[(dR_k)_x]^{-1} l_y^{-1}(v) \\ &= (dR_{x^{-1}})_x(dR_{y^{-1}x})_y l_y^{-1}(v) \\ &= (dR_{y^{-1}})_y l_y^{-1}(v)\end{aligned}$$

Portanto, Γ_p está bem definida. Pela definição da métrica em $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ é claro que Γ_p preserva produto interno. □

4.3.2 Aplicações de Gauss por translação

Nesta seção assumiremos que as dimensões dos grupos de Lie $\mathbb{G}$ e $\mathbb{K}$, são respectivamente $n+r+k$ e k, com $r \geq 1$.

Definição 4.16. *Seja M uma variedade imersa isometricamente em um espaço simétrico $\mathbb{G}/\mathbb{K}$. Cada campo de vetores normal e unitário η sobre M define uma aplicação de Gauss por translação dada por*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_\eta : M & \to & \mathbb{S}^{n+r+k-1} \\ p & \mapsto & \Gamma_p(\eta(p)). \end{array}$$

No teorema a seguir, calculamos o Laplaciano das aplicações de Gauss dadas por translações de vetores normais paralelos sobre subvariedades de espaços simétricos.

Teorema 4.17. *Seja M uma variedade de dimensão n isometricamente imersa em um espaço simétrico $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ de dimensão $n+r$ e seja η um campo de vetores paralelo de M. Então, a aplicação de Gauss γ_η satisfaz*

$$\begin{aligned} -\Delta(\gamma_\eta) &= \Gamma_p\Big(n grad_M\langle\overrightarrow{H},\eta\rangle + B^*B(\eta) + \mathrm{Ric}_M^\perp(\eta)\Big) \\ &\quad + n\sum_{i=1}^{n+r+k}\langle\overrightarrow{H},\nabla_\eta\zeta(V_i)\rangle(p)V_i, \end{aligned}$$

onde $\{V_1,\ \cdots,\ V_{n+r+k}\}$ é uma base ortonormal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathbb{G}$ e $\zeta(V_1),\ \cdots,\ \zeta(V_{n+r+k})$ são seus campos de ação.

Demonstração. Seja η um campo de vetores normal de M que é paralelo e unitário e $V_1,\ \cdots,\ V_{n+r+r}$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$. O Laplaciano de γ_η satisfaz

$$-\Delta(\gamma_\eta) = -\sum_{i=1}^{n+r+k}\Delta\langle\gamma_\eta, V_i\rangle V_i = -\sum_{i=1}^{n+r+k}\Delta\langle\eta,\zeta(V_i)\rangle V_i$$

Assim, pelo Lema 3.6 temos que, em um ponto $p \in M$,

$$-\Delta(\gamma_\eta)(p) = \sum_{i=1}^{n+r+k} \Big(n\langle grad_M \langle \overrightarrow{H}, \eta\rangle, \zeta(V_i)\rangle + \langle \mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta), \zeta(V_i)\rangle V_i + \langle B^*B(\eta), \zeta(V_i)\rangle$$

$$+ n\langle \overrightarrow{H}, \nabla_\eta \zeta(V_i)\rangle \Big) V_i$$

$$= \Gamma_p \left(n\, grad_M \langle \overrightarrow{H}, \eta\rangle + \mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta) + B^*B(\eta) \right) + n \sum_{i=1}^{n+r+k} \langle \overrightarrow{H}, \nabla_\eta \zeta(V_i)\rangle V_i.$$

□

Lembremos que uma subvariedade M imersa isometricamente em uma variedade Riemanniana N tem vetor curvatura média normalizado paralelo se localmente existe um vetor unitário e paralelo η tal que $\overrightarrow{H} = \alpha\eta$. Uma condição natural a ser estudada é quando esta condição equivale a subvariedade ter vetor curvatura média paralelo. No resultado a seguir mostramos justamente que isto acontece se o Laplaciano da aplicação de Gauss dada pela translação de $\frac{\overrightarrow{H}}{\|\overrightarrow{H}\|}$ depende somente dos endomorfismos autoadjuntos da segunda forma fundamental e de Ricci normal sobre M.

Corolário 4.18. *Seja M uma subvariedade imersa de dimensão n de um espaço simétrico $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ de dimensão $n + r$. Se M tem vetor curvatura média normalizado e $\overrightarrow{H} = h\eta$ com η definido globalmente então a aplicação de Gauss γ_η satisfaz*

$$\Delta(\gamma_\eta) = -\Gamma \left(n\, grad_M \|\overrightarrow{H}\| + B^*B(\eta) + \mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta) \right).$$

Em particular, se $\overrightarrow{H} \neq 0$, M é uma subvariedade com vetor curvatura média paralelo não nulo se e somente se o Laplaciano da aplicação de Gauss dada pela translação de $\eta = \frac{\overrightarrow{H}}{\|\overrightarrow{H}\|}$ satisfaz

$$\Delta(\gamma_\eta) = -\Gamma \left(B^*B(\eta) + \mathrm{Ric}_M^{\perp}(\eta) \right).$$

Particularmente, uma subvariedade M do espaço Euclidiano com vetor curvatura média normalizado paralelo não nulo tem vetor curvatura média paralelo se e somente se

$$-\Delta(\eta) = B^*B(\eta),$$

onde $\eta = \frac{\overrightarrow{H}}{\|\overrightarrow{H}\|}$.

Corolário 4.19. *Seja M uma variedade de dimensão n imersa isométricamente em um espaço simétrico $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ de dimensão $n+r$. Se M tem vetor curvatura média normalizado $\overrightarrow{H} = h\eta$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\gamma_\eta : M \to \mathbb{S}^{n+r+k-1} \subset \mathfrak{g}$ *é uma aplicação harmônica;*

ii) η *é um autovetor do endomorfismo*

$$B^*B + \mathrm{Ric}_M^\perp : \mathcal{N}(M) \to \mathcal{N}(M);$$

iii) O Laplaciano da aplicação γ_η *satisfaz*

$$\Delta(\gamma_\eta)(p) = -(\|S_\eta(p)\|^2 + \mathrm{Ric}_M(\eta(p)))\gamma_\eta(p),$$

onde $\mathrm{Ric}_M(\eta(p)) = \mathrm{Ric}_M(\eta(p), \eta(p))$.

O corolário anterior mostra a equivalência entre o problema de harmonicidade das aplicações de Gauss com um problema algébrico dos autovetores do endomorfismo autoadjunto $B^*B + \mathrm{Ric}_M^\perp$.

No teorema a seguir mostramos que as órbitas principais de ações polares provêm exemplos onde o operador autoadjunto B^*B é diagonalizável por vetores normais paralelos com autovalores constantes.

O Teorema do toro maximal (ver Teorema 4.1 de [3]) garante que a interseção dos toros maximais de um grupo de Lie compacto $\mathbb{G}$ com as órbitas da ação por conjugação

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{G} \times \mathbb{G} & \to & \mathbb{G} \\ (g, x) & \mapsto & gxg^{-1}, \end{array}$$

é ortogonal. Diante disso, a ação por conjugação é um exemplo de ação polar. Relembramos a definição de ação polar a seguir:

Definição 4.20. *Uma ação isométrica de um grupo de Lie compacto $\mathbb{G}$ sobre uma variedade Riemanniana completa M é dita uma ação polar se existe uma subvariedade imersa, completa e conexa Σ, chamada seção, que intersecta todas as órbitas da ação e a interseção de Σ com as órbitas é ortogonal.*

A representação adjunta de um grupo de Lie compacto $Ad : \mathbb{G} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, definida pela derivada na origem da ação por conjugação a_g é um exemplo básico de uma ação polar. É bem sabido que as órbitas principais da ação por conjugação são variedades isoparamétricas do espaço Euclidiano correspondente $\mathfrak{g}$.

Uma ação natural sobre o espaço simétrico $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ é a ação isotrópica pelo subgrupo $\mathbb{K}$, isto é, $\mu(k, g\mathbb{K}) = kg\mathbb{K}$. Os "flat maximal" do espaço simétrico $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ são justamente as seções desta ação.

As órbitas $\mathbb{G}(x)$ de uma ação μ de um grupo de Lie $\mathbb{G}$ em uma variedade Riemanniana N são subvariedades imersas de N. Ora, se a ação μ é polar então o fibrado normal das órbitas principais é globalmente flat.

Seja $\mu : \mathbb{G} \times N \to N$ uma ação polar sobre uma variedade Riemanniana N. Fixando $g \in \mathbb{G}$, denotemos por $\mu^g : N \to N$ a aplicação determinada por $\mu^g(\cdot) = \mu(g, \cdot)$. Para cada $\eta \in T_x^\perp \mathbb{G}(x)$ definimos o campo normal equivariante $\widehat{\eta}$ por

$$\widehat{\eta}(\mu(g, x)) = d(\mu^g)_x \eta.$$

É fácil ver que $\widehat{\eta}$ é um campo normal bem definido. Para aspectos básicos de ações isométricas veja [3].

Teorema 4.21. *Seja $\mu : \mathbb{G} \times N \to N$ uma ação polar sobre uma variedade Riemanniana N. Então o endomorfismo autoadjunto B^*B das órbitas principais $\mathbb{G}(x)$ é diagonalizável por campos de vetores paralelos com autovalores constantes.*

Demonstração. Fixemos $x \in N$, seja $\{\eta_1(x), \cdots, \eta_r(x)\}$ uma base de autovetores do operador autoadjunto B^*B definido no espaço normal $T_x^\perp M$. Como μ é uma ação polar segue que os campos normais equivariantes correspondentes

$$\widehat{\eta_i}(\mu(g, x)) = d(\mu^g)_x \eta_i(x),$$

com $i = 1, \cdots, r$, são paralelos. Mostraremos que de fato estes campos diagonalizam B^*B em todo ponto. Fixemos η_l e η_k na base escolhida. Sejam $\{v_1, \cdots, v_r\}$ e $\{w_1, \cdots, w_r\}$ bases ortonormais de $T_x\mathbb{G}(x)$ que diagonalizam as segundas formas fundamental $S_{\eta_l(x)}$ e $S_{\eta_k(x)}$, respectivamente, isto é, $S_{\eta_l(x)}(v_i) = \lambda_i v_i$ e $S_{\eta_k(x)}(w_i) = \sigma_i w_i$. Escrevemos agora uma base em termos da outra:

$$v_i = a_1^i w_1 + \cdots a_r^i w_r, \quad i = 1, \cdots, r.$$

Por outro lado, é fácil ver que $S_{\widehat{\eta}_i(\mu(g,x))} = d\mu^g S_{\eta_i(x)} d\mu^{g^{-1}}$ (Proposição 3.78 de [3]) e que para todo $i = 1, \cdots, n$, os campos definidos por $V_i(\mu(g,x)) = d\mu^g v_i$ e $W_i(\mu(g,x)) = d\mu^g w_i$ são autovetores de $S_{\widehat{\eta}_l}$ e $S_{\widehat{\eta}_l}$ com autovalores constantes iguais a λ_i e σ_i. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\langle S_{\widehat{\eta}_l}, S_{\widehat{\eta}_k}\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle S_{\widehat{\eta}_l}(V_i), S_{\widehat{\eta}_k}(V_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} \langle S_{\widehat{\eta}_l}(V_i), S_{\widehat{\eta}_k}(a_i^j W_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} a_i^j \langle S_{\widehat{\eta}_l}(V_i), S_{\widehat{\eta}_k}(W_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} a_i^j \langle \lambda_i V_i, \sigma_j W_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} a_i^j \lambda_i \sigma_j \langle v_i, w_j\rangle,
\end{aligned}$$

como todos os termos a_j^i, λ_i, σ_j e $\langle v_i, w_j\rangle$ são constantes temos que $\langle S_{\widehat{\eta}_l}, S_{\widehat{\eta}_k}\rangle$ é constante ao longo de $\mathbb{G}(x)$, para todo $\eta_l(x)$ e $\eta_k(x)$. Ou seja,

$$\langle B^*B(\widehat{\eta}_l), \widehat{\eta}_k\rangle = \langle S_{\eta_l(x)}, S_{\eta_k(x)}\rangle = \delta_{lk}\langle S_{\eta_l(x)}, S_{\eta_k(x)}\rangle.$$

Isto é,

$$B^*B(\widehat{\eta}_i) = \|S_{\widehat{\eta}_i}\|^2 \widehat{\eta}_i,$$

para todo $i = 1, \cdots, r$. □

Corolário 4.22. *Se o endomorfismo de Ricci de uma órbita principal de uma ação polar $\mu : \mathbb{G} \times \mathbb{G}/\mathbb{K}$ sobre um espaço simétrico $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ é ortogonal e a* *órbita é uma subvariedade mínima então existe uma base paralela do fibrado normal tal que suas aplicações de Gauss por translação são harmônicas.*

Para finalizar mencionaremos alguns exemplos onde o endomorfismo de Ricci normal de uma subvariedade é ortogonal.

Lembremos que se N é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante k então o tensor de curvatura é determinado por

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = k\left(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle\right).$$

Por conseguinte o endomorfismo de Ricci normal de uma subvariedade M é ortogonal e satisfaz

$$\mathrm{Ric}_M(\eta(p)) = (nk)\eta(p),$$

para todo $\eta(p) \in T_p^{\perp}M$.

Em grupos de Lie compactos semisimples com métrica bi-invariante, nos espaços projetivos complexos $\mathbb{CP}^n$ ou mais geralmente em variedades de Einstein as subvariedades de codimensão 2 tem endomorfismo de Ricci normal ortogonal e para qualquer campo normal unitário η de M é satisfeito que

$$\mathrm{Ric}_M(\eta(p)) = (\mathrm{Ric}(\eta) - k_p(\eta,\eta^{\perp}))\eta(p),$$

onde $\eta^{\perp}$ é um vetor normal unitario normal a M e ortogonal a $\eta(p)$, $k_p(\eta,\eta^{\perp})$ é a curvatura seccional do plano gerado por $\eta(p)$ e $\eta^{\perp}(p)$. Note ainda que se N é um espaço simétrico simplesmente conexo indecomponível então N é uma variedade de Einstein (ver [18]).

Na seção anterior construirmos autoaplicações octonianas do Laplaciano sobre subvariedades isoparamétricas mínimas de $\mathbb{S}^7$. A continuação ilustramos que, de maneira análoga, existem aplicações de Gauss por translação, como espaço simétrico, que são autoaplicações em subvariedades isoparamétricas mínimas das $\mathbb{S}^n$.

Teorema 4.23. *Se M é uma subvariedade isoparamétrica compacta e mínima da esfera $\mathbb{S}^n = O(n+1)/O(n)$, de dimensão $k < n$. Então, existe uma base ortonormal $\{\eta_1, \cdots, \eta_{n-k}\}$ paralela do fibrado normal de M tal que as respectivas aplicações de Gauss por translação $\gamma_{\eta_1}, \cdots, \gamma_{\eta_{n-k}} : M \to \mathbb{S}^q \subset \mathfrak{o}(n)$*

são autoaplicações do Laplaciano, onde $\mathfrak{o}(n)$ *é a álgebra de Lie do grupo ortogonal de isometrias de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* $q = dim(\mathfrak{o}(n)) - 1$.

Por fim, observamos que um resultado análogo ao Teorema 4.13 aqui é igualmente válido supondo a hipótese natural sobre as normas das segundas formas fundamentais e o endomorfismo de Ricci normal (veja por exemplo [26]), isto é, $\mathrm{Ric}_M(\eta_i) \geq -\|S_{\eta_i}\|^2$.

Referências Bibliográficas

[1] Abresch, U., Rosenberg, H.:"*A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$". Acta Math. 193, n. 2, 141–174 (2004).

[2] Alencar, H., do Carmo, M., Tribuzy, R.:"*A Hopf Theorem for ambient spaces of dimensions higher than three*". J. Diff. Geom. 84, 1–17 (2010).

[3] Alexandrino M. , Bettiol R.,"*Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*". Springer, Berlin (2015).

[4] Baez J. :"*The octonions*", Bull. of the Amer. Math. Soc., Vol. 39, n. 2, 145-205 (2001).

[5] Borisenko A. A., . Nikolaevskii Yu. A: "*Grassmannian manifolds and the Grassmannian image of submanifolds*", Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys], 46 , 41–83 (1991).

[6] Bittencourt F., Ripoll J.: "*Gauss map harmonicity and mean curvature of a hypersurface in a homogeneous manifold*", Pacific J. Math. 224, n. 1, 45-63, (2006).

[7] Bittencourt F., Bustos D., Fusieger P., Figueiredo E., Ripoll J.: "*Minimal isoparametric submanifolds of* $\mathbb{S}^7$ *and octonionic eigenmaps*", preprint, arXiv: 1808.06802.

[8] Bittencourt F. , Fusieger P., Longa E. R., Ripoll J.: "*Normed division algebras, Gauss map and the topology of constant mean curvature hypersurfaces* $\mathbb{S}^7$ *and* $\mathbb{CP}^3$", preprint, arXiv:1703.02560.

[9] do Carmo M.: "*Some recent developments on Hopf's holomorphic form*", Results Math. 60 , n. 1-4, 175–183 (2011).

[10] Chen B. Y.:"*On the surface with parallel mean curvature vector*", Indiana Univ. Math. J. 22, 655–666, (1973).

[11] Chen B. Y.: "*Surfaces with parallel normalized mean curvature vector*", Monat. Math. 90, 185-194, (1980).

[12] Chen B. -Y., Piccinni P.:" *Submanifolds with finite type Gauss map*". Bull. Aust. Math. Soc. , 35, 161–186 (1987).

[13] Chen K. :"*The geometry of Grassmann manifolds as submanifolds*", Adv. in Math.(Beijing) 16, 334-335 (1987).

[14] Cecil T. E., Ryan P. T.:" *Geometry of hypersurfaces*", Springer Monogr. Math., Springer- Verlag, 10, New York (2015).

[15] Chern S.-S., Lashof R. K.: "*On the total curvature of immersed manifolds*", Amer. J. Math. (79) 2, 306-318(1957).

[16] Colding T.H., Minicozzi W. P. II: " *A course in minimal surfaces.*", number 121 in graduate Studies in Mathematics AMS, (2011).

[17] De Giorgi E.: "*Una estensione del teorema di Bernstein*", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) 19, 79–85 (1965).

[18] Eschenburg J.-H.:"*Lecture notes on symmetric spaces*", preprint, (1997).

[19] Espírito-Santo N., Fornari S., Frensel K., Ripoll J.:"*Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie group with a bi-invariant metric*", Manuscripta Math. 111, n. 4, 459-470 (2003).

[20] Eells J., Lemaire L.:" *A report on Harmonic Maps*", Bull. London Math soc., Vol. 10, 1-68, (1978).

[21] Eells J., Lemaire L.:"*Selected Topics in Harmonic Maps*", C.B.M.S. Regional Conf. Series, vol. 50 American Mathematical Society, Providence, RI, (1983).

[22] Eells J., Lemaire L.: "*Another report on harmonic maps*", Bull. London Math. Soc., 20, 385-524 (1988).

[23] Fernández I., Mira P.:" *Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$", Amer. J. Math. 129, n. 4, 1145-1181, (2007).

[24] Obata M.: "*The Gauss map of immersions of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature*", J. Differential Geometry, 2, 217-–223 (1968).

[25] Osserman R.: "*Minimal surfaces, Gauss maps, total curvature, eigenvalue estimates, and stability*", In The Chern Symposium 1979 (Proc. Internat. Sympos., Berkeley, Calif., 1979), (Springer, New York, 199-–227, (1980)).

[26] Fornari S., Ripoll J.: "*Killing fields, mean curvature, translations Maps*", Ilinois Journal of Mathematics, Vol. 48, n. 4, 1385-1403, (2004).

[27] Hélein F.: "*Harmonic maps, constant mean curvature surfaces and integrable systems*", Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser (2001).

[28] Hélein F.:"*Harmonic maps, conservation laws and moving frames*", Cambridge Tracts in Mathematics 150, Cambridge University Press (2002).

[29] Hélein F., Wood J. C.: "*Harmonic maps:Handbook of global analysis*", Elsevier Sci. B. V., 417–491, 1213, (2008).

[30] Helganson S.: "*Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*", Graduate Studies in Mathematics, AMS, Vol 34 (1974).

[31] Hoffman D. A., Osserman R.: "*The Gauss map of surfaces in* $\mathbb{R}^n$", J. Differential Geom. (18) 4 733–754 (1983).

[32] Ishihara T.: "*The Harmonic Gauss maps in a generalized sense*", J. London Math. Soc. (26), 104-112, (1982).

[33] Hoffman D. A., Osserman R., Schoen R.: "*On the Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{R}^4$", Comment. Math. Helv. 57 n. 1, 519-531 (1982).

[34] Leite M. L., Ripoll J.: "*On quadratic differentials and twisted normal maps of surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$", Results Math. 60, 351-360 (2011).

[35] Liu X.: "*Rigidity of the Gauss map in compact Lie group*", Duke Math. J., 77, no. 2, 447–480 (1995).

[36] Masal'tsev L. A.: "*A Version of the Ruh–Vilms Theorem for Surfaces of Constant Mean Curvature in* $\mathbb{S}^3$", Math. Notes 73, 85-96, (2003).

[37] Münzner H.-F.: "*Isoparametrische Hyperflächen in Sphären I*", Math. Ann. 251, 57–71 (1980).

[38] Münzner H.-F: "*Isoparametrische Hyperflächen in Sphären II*", Math. Ann. 256, 215–232 (1981).

[39] Palais R., Terng C.: "*Critical point theory and submanifold geometry*", Lecture Notes in Mathematics, 1353, (1980).

[40] Qian C. , Tang Z.: "*Isoparametric foliations, a problem of Eells–Lemaire and conjectures of Leung*", Proc. London Math. Soc. (3) 112, 979–1001, (2016).

[41] Ramos A., Ripoll J.: "*An extension of Ruh-Vilms theorem to hypersurfaces in symmetric spaces and some applications*", Transactions of the AMS, Vol 368, n. 7, 4731–4749, (2015).

[42] Simons J., "*Minimal varieties in riemannian manifolds*", Ann. of Math. (2) 88 , 62–105 (1968).

[43] Ruh E., Vilms J.: "*The tension field of the Gauss map*", Trans. of the Amer. Math., Vol. 149, 569-573 (1979).

[44] Salvai M.:"*On the energy of sections of trivializable sphere bundles*", Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 60 , pp. 147-155, (2002).

[45] Terng C.: "*Isoparametric submanifolds and their Coxeter groups*", J. of Differential Geometry, (21) 79–107(1985).

[46] Urakawa H.: "*Calculus of variations and harmonic maps*", Trans. of Math. Monogr., vol. 132. American Mathematical Society, Providence, RI (1993).

[47] Wang C.P.: "*On the Gauss map of a submanifold in* $\mathbb{R}^n$ *and* $\mathbb{S}^n$", Differential geometry and differential equations (Shanghai 1985), Lecture Notes in Math. 1255, 109-129 (1987).

[48] Yau S. T.: "*Submanifolds with constant mean curvature I.*", Amer. J. Math. 96, 346–366 (1974).