

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Estudo sobre as propriedades dos esquemas de unitarização eiconal e da matriz U

Miguel Bernardi Pinheiro de Moraes

Trabalho de Conclusão de Curso do
curso de Bacharelado em Física, sob
orientação do Prof. Dr. Emerson Luna.

Porto Alegre, Brasil

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, às minhas duas famílias: uma que deixei temporariamente para trás e reencontro de tempos em tempos numa cidadezinha no interior de São Paulo, e outra que encontrei aqui, numa cidade um pouco maior do Rio Grande do Sul. Em especial, agradeço à minha mãe e à Ariel. Não teria chegado tão longe sem vocês.

Em segundo lugar, à todos os amigos que me acolheram ao longo do curso. Isso deixou o percurso incrivelmente mais suportável e feliz, mesmo nos momentos de maior dificuldade e pressão.

Por fim, sou eternamente grato aos meus professores, e principalmente àqueles que me instigaram a refletir sobre a física e sobre o meu futuro papel como cientista. Acredito que uma formação completa se dê não só ao frequentar aulas ou resolver listas e ler livros, mas também por enxergar os problemas internos e externos ao nosso ambiente - os que nos afetam e os que não nos afetam - e buscar a melhor solução para estes.

Devo um agradecimento especial ao professor Emerson (ao qual chamo simplesmente de Luna), por ter me acolhido como orientando e sempre ter sido paciente.

Sua orientação foi irretocável. Obrigado.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as propriedades analíticas de dois esquemas de unitarização - o eiconal e a matriz- U - em processos de espalhamento em altas energias. Estes esquemas de unitarização são motivados por duas maneiras de mapear a densidade da matriz de espalhamento, $S(s, b)$, no círculo unitário, o que nos permite estudar, por exemplo, propriedades como inelasticidade e unitariedade em processos de espalhamento.

A relação entre as fases das amplitudes de espalhamento unitarizadas em cada esquema é também analisada.

Abstract

In this work, we will study the analytical properties of two unitarization schemes - the eikonal and the U -matrix - in the scattering process in high energies. These unitarization schemes are motivated by two different ways to map the density of the scattering matrix, $S(s, b)$ into the unitary circle, which allows us to study, for example, properties like inelasticity and unitarity in scattering processes.

The relation between the phases of the unitarized scattering amplitudes in each scheme is also analysed.

Sumário

1	Introdução	7
2	Preliminares	9
2.1	A amplitude de espalhamento	9
2.2	Teorema óptico	12
3	Expansão em ondas parciais e Invariantes de Mandelstam	13
3.1	Expansão em ondas parciais	13
3.2	Variáveis de Mandelstam	15
4	A função eiconal	20
4.1	A aproximação de altas energias	20
4.2	A função de perfil	22
4.3	A função eiconal na aproximação de Born	22
4.4	A expansão em ondas parciais em altas energias	23
5	Esquemas de unitarização	27
5.1	Unitariedade e analiticidade	27
5.2	O processo de unitarização	29
6	Conclusão e perspectivas	36

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudamos algumas propriedades analíticas de dois esquemas de unitarização encontrados na literatura. Tal estudo é importante pois, nas escalas de energia atualmente alcançadas pelo LHC (Large Hadron Collider), de aproximadamente 13,0 TeV, quantidades físicas conhecidas como *seções de espalhamento* podem vir a divergir de acordo com teoria de espalhamento quântico, e isso não deve ocorrer [1]. Essa escala de energia deve crescer cada vez mais, e deve-se garantir que exista um formalismo consistente com as medições experimentais - isso é, que leve a valores finitos para as quantidades medidas. A *unitarização* garante que isso seja satisfeito.

Como forma de introduzirmos o formalismo relacionado, iniciamos nosso estudo investigando o fenômeno do *espalhamento quântico*, onde duas ou mais partículas interagem sob a ação de um potencial espalhador. Neste contexto, a equação diferencial que rege os fenômenos quânticos é a equação de Schrödinger, publicada em 1926 por Erwin Schrödinger. Na parte inicial deste trabalho partimos desta equação, onde supomos uma solução para a função de onda da partícula espalhada, e calculamos a quantidade física chamada *amplitude de espalhamento*.

O quadrado do módulo da amplitude de espalhamento é o que chamamos de *seção de choque diferencial*, que pode ser integrada para encontrarmos a *seção de choque total*, que dá a probabilidade de que um dado evento (espalhamento) ocorra.

Em seguida apresentamos o teorema ótico, que associa a parte imaginária da amplitude de espalhamento à seção de choque total, e então desenvolvemos o formalismo de *expansão em ondas parciais*. Este método consiste em expandir a amplitude de espalhamento em função do número de onda, k , e do ângulo polar, θ . Dessa forma, é possível também calcularmos a *seção de choque elástica*, que está associada à probabilidade de uma colisão elástica ocorrer.

Na seção seguinte, apresentamos os *invariantes de Mandelstam*. Essas variáveis são convenientes no estudo de processos de espalhamento em altas energias, o que permite que várias das quantidades previamente definidas sejam escritas como funções dessas variáveis. Além disso, o conceito de *canais* surge neste contexto. Uma das representações utilizadas neste trabalho, a *eiconal*,

será escrita como uma função do invariante s , que representa a *energia de centro de massa* do sistema.

O que segue disso é uma das possíveis construções da representação eiconal, feita no espaço do parâmetro de impacto, \mathbf{b} . Este processo se dá pela obtenção da função eiconal, que representa, em altas energias, o que os *phase shifts* representam no processo de expansão em ondas parciais. O significado dessa função também é explorado.

No último capítulo estudamos o processo de unitarização de amplitudes de espalhamento. Definimos a unitariedade fazendo uso dos conceitos já construídos ao longo deste trabalho. Apresentamos duas possíveis (mas não únicas) formas de satisfazer a unitariedade, e discutimos as possíveis consequências.

Por fim, os dois esquemas de unitarização são aplicados ao estudo do processo de espalhamento em altas energias. Um destes esquemas é o já bem conhecido e explorado formalismo eiconal, e o outro esquema, menos difundido na literatura, é o formalismo da matriz- U . As propriedades destes esquemas são estudadas e comparadas a partir do cálculo de quantidades como a *seção de choque inelástica* e a *função de recobrimento inelástico*. Concluimos que ambos os esquemas satisfazem unitariedade e possuem as mesmas propriedades.

O principal objetivo deste trabalho é o estudo e entendimento do processo de unitarização, que pode ser aplicado em dados experimentais de colisões obtidos pelo LHC, e o uso de dois esquemas de unitarização permite que este estudo seja feita de forma mais eficiente. O que seja feito de novo, a partir do formalismo estudado neste trabalho, é o cálculo de seções de choque utilizando o formalismo da matriz U , algo inédito que, portanto, poderá produzir novos resultados que auxiliarão na construção de um melhor entendimento sobre colisões em altas energias.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 A amplitude de espalhamento

O movimento relativo entre duas partículas interagindo através do potencial $V(\mathbf{r})$ é governado pela equação de onda da Mecânica Quântica, a equação de Schrödinger [2]:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

onde μ é a massa reduzida do sistema. O problema é equivalente ao do espalhamento de uma partícula de massa μ por um potencial fixo $V(\mathbf{r})$. Podemos simplificar o problema fazendo as seguintes identificações:

$$k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E, \quad (2.2)$$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{2\mu}{\hbar} V(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Onde k^2 representará o quadrado momentum linear da partícula que estamos estudando. Utilizando as definições dadas acima, podemos reescrever a equação de Schrödinger na forma

$$[\nabla^2 - U(\mathbf{r}) + k^2]\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.4)$$

Se assumirmos que a função de onda da partícula antes do espalhamento é uma onda plana, veremos que, assintoticamente, a função de onda após o espalhamento será uma superposição da função de onda plana incidente com uma função de onda esférica, que surge do centro de espalhamento. Dessa forma,

$$\psi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (2.5)$$

onde os vetores de onda antes e depois do processo de espalhamento são dados por \mathbf{k} e \mathbf{k}' . Por considerações de conservação de energia, vemos que os módulos dos vetores de onda antes e depois devem ser iguais, ou seja

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| \equiv k. \quad (2.6)$$

Na equação (2.5), o coeficiente que multiplica a função de onda esférica, $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, é denominado *amplitude de espalhamento*, que contém a informação da dinâmica do processo de colisão. Em geral, $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ será uma função dos ângulos polar, θ , e azimutal, ϕ , além dos vetores de onda nos estados inicial e final.

A solução para a equação (2.4), satisfazendo a condição dada em (2.5), é dada pela equação integral de *Lippmann-Schwinger* [2]:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (2.7)$$

Considerando que o potencial vai à zero no infinito mais rapidamente que r^{-1} , teremos

$$rU(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

onde, podemos expressar

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} = \sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}$$

Podemos expressar $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, onde $\hat{\mathbf{r}}$ é unitário e $r = |\mathbf{r}|$, e então reescrevemos

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r \sqrt{1 - \frac{2}{r}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}$$

Se $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$, podemos escrever o este resultado de forma aproximada, como poderemos reescrever a equação integral de Lippmann-Schwinger na forma

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \int e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(r - \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r} \right) U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (2.8)$$

Ao compararmos a equação acima com a forma da função de onda após o espalhamento, (2.5), concluímos que

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{1}{4\pi} \int e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (2.9)$$

Definimos o vetor transferência de tri-momentum linear como

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \quad (2.10)$$

cujo módulo é dado por

2.1 A amplitude de espalhamento

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|^2 = (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = \mathbf{k}'^2 + \mathbf{k}^2 - 2k'k \cos \theta.$$

Mas da condição de conservação de energia, (2.6), os módulos dos vetores de onda antes e depois do espalhamento devem ser iguais. Portanto,

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|^2 = 2k^2(1 - \cos \theta) = 2k^2(1 - \cos \theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Tirando a raiz quadrada, encontramos

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2}. \quad (2.11)$$

Por fim, podemos definir a seção de choque diferencial elástica do processo de espalhamento, que é dada pelo quadrado do módulo da amplitude de espalhamento,

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = |f(k, \theta, \phi)|^2. \quad (2.12)$$

É importante notar, neste ponto, que a amplitude de espalhamento pode ser tanto uma função dos vetores \mathbf{k} e \mathbf{k}' quanto uma função de $|\mathbf{k} = k|$, $|\mathbf{k}' = k'|$ e dos ângulos θ e ϕ . Consideramos até agora um espalhamento elástico. Isso significa que o comprimento de onda da onda espalhada é igual ao da onda incidente, $\lambda = \lambda'$.

Apresentamos na Figura a seguir a visualização para algumas quantidades já definidas, como o ângulo de espalhamento, θ e a seção diferencial $d\Omega$.

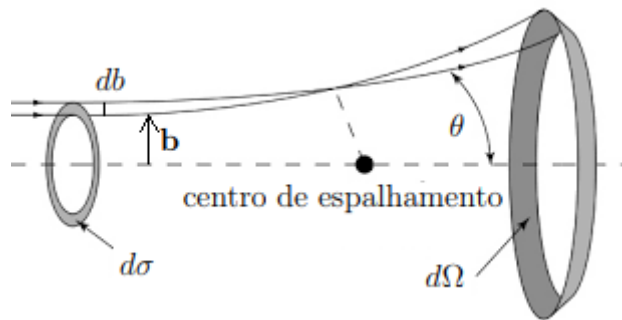


Figura 2.1: Quantidades importantes no problema do espalhamento.

Vamos definir o parâmetro de impacto, \mathbf{b} , como sendo a distância perpendicular entre o centro de espalhamento e o caminho seguido pela partícula que sofrerá o espalhamento, e também seu diferencial, db . É comum decompor o vetor posição da partícula espalhada, \mathbf{r} , em duas componentes: uma na direção de \mathbf{b} e outra na direção na qual a partícula se desloca, perpendicular à \mathbf{b} .

2.2 Teorema óptico

O teorema óptico, peça fundamental na teoria do espalhamento de ondas, relaciona a amplitude de espalhamento frontal com a seção de choque total do processo:

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 M}{\hbar^2} |\langle \mathbf{k} | V | \psi^+ \rangle|^2, \quad (2.13)$$

onde ψ^+ está relacionada à função de onda após o espalhamento. Na amplitude de espalhamento, $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, já que a amplitude de espalhamento frontal se dá com $\theta = 0$. Utilizando a equação de Lippmann-Schwinger [2], é possível mostrar que a parte imaginária da amplitude de espalhamento é dada por

$$\text{Im} \langle \mathbf{k} | V | \psi^+ \rangle = -\pi \int d\Omega' \frac{Mk}{\hbar^2} |\langle \mathbf{k} | V | \psi^+ \rangle|^2. \quad (2.14)$$

Dessa forma, utilizando a relação que dá a seção de choque diferencial (2.12), obtemos

$$\text{Im} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 M}{\hbar^2} \left(-\frac{\pi Mk}{\hbar^2} \int d\Omega' \frac{Mk}{\hbar^2} |\langle \mathbf{k} | V | \psi^+ \rangle|^2 \right), \quad (2.15)$$

que pode ser reescrita como

$$\text{Im} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot}. \quad (2.16)$$

Uma derivação mais completa do teorema óptico, neste contexto, pode ser obtida a partir da aproximação da equação de Schrödinger para o espalhamento, partindo de (2.5) e considerando a onda plana incidente se propagando na direção z . Assim, expandindo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em série de Taylor, considerando pequenos valores de z e θ , e então calculando $|\psi|^2$, será possível calcularmos a integral desta quantidade sobre uma seção no plano xy , pequena o suficiente para que seja válida a aproximação de pequenos ângulos. Utilizando algumas relações do cálculo de variáveis complexas, obtemos finalmente a equação (2.16.)

Capítulo 3

Expansão em ondas parciais e Invariantes de Mandelstam

3.1 Expansão em ondas parciais

Para um potencial espalhador esfericamente simétrico, a amplitude de espalhamento f não depende do ângulo azimutal. Dessa forma, $f \rightarrow f(k, \theta)$. A integração sobre o ângulo ϕ é trivial, e podemos escrever a seção de choque diferencial elástica como

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\cos\theta} = 2\pi|f(k, \theta)|^2. \quad (3.1)$$

O elemento $d\Omega \rightarrow d\phi d(\cos\theta)$ vem do fato de quê devemos integrar todos os elementos que contribuem para a seção de choque total.

Ainda para o caso de potenciais centrais, a amplitude de espalhamento pode ser expandida na base de *polinômios de Legendre* da função $\cos\theta$, em uma série de ondas parciais:

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)a_l(k)P_l(\cos\theta), \quad (3.2)$$

onde a soma é feita sobre todos os estados possíveis de momentum angular l . Os coeficientes $a_l(k)$ são as amplitudes das l -ésimas ondas parciais, dados por

$$a_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l(k)} - 1}{2ik} \simeq \frac{S_l(k) - 1}{2ik}, \quad (3.3)$$

onde a quantidade $\delta_l(k)$ chamada de *phase shift* da l -ésima onda parcial, enquanto $S_l(k)$ é o elemento da matriz de espalhamento para um estado de momentum angular l bem definido, dado por $e^{2i\delta_l(k)}$.

O significado de $\delta_l(k)$ pode ser entendido se compararmos o comportamento assintótico da parte radial livre da função u_l , que vem do procedimento de separação de variáveis adotado ao resolver uma equação de Schrödinger em coordenadas esféricas, dada por

CAPÍTULO 3. EXPANSÃO EM ONDAS PARCIAIS E INVARIANTES DE MANDELSTAM

$$u_l(r)|_{r \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{kr} \operatorname{sen} \left(kr - \frac{\pi l}{2} \right), \quad (3.4)$$

com a parte radial da função de onda no estado emergente do espalhamento, dada por

$$\phi_l(r)|_{r \rightarrow \infty} \sim \frac{e^{i\delta_l}}{kr} \operatorname{sen} \left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l \right). \quad (3.5)$$

A única diferença entre as funções de onda antes e depois do espalhamento é justamente a fase δ_l , o que mostra que toda a informação dinâmica do processo de espalhamento está contida no *phase shift*.

Lembrando das condições de ortogonalidade dos polinômios de Legendre,

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\cos \theta) P_j(\cos \theta) d \cos \theta = \frac{2\delta_{l,j}}{2l+1}, \quad (3.6)$$

após substituirmos as expressões (3.2) e (3.3) na equação da seção de choque diferencial elástica sem dependência azimutal (3.1), obteremos

$$\frac{d\sigma_{el}}{d \cos \theta} = 2\pi \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l(k)} - 1}{2ik} P_l(\cos \theta) \right|^2. \quad (3.7)$$

O cálculo do módulo quadrado na equação (3.7) deve ser feito de maneira metódica. Teremos, ao fazer isso, um produto de somatórias - cada termo de uma soma multiplicando todos os termos da outra. Para que isso seja levado em conta, tomaremos a segunda soma sobre um outro índice, j : isso não altera de forma alguma o resultado, já que i (ou j) é um *índice mudo*.

Devemos lembrar também de tomar a conjugação completa em uma das somas, já que o quadrado do módulo de um número complexo, z , é dado por $|z|^2 = zz^*$. Desta forma

$$|f(k, \theta)|^2 = \left(\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l(k)} - 1}{2ik} P_l(\cos \theta) \right) \left(- \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \frac{e^{-2i\delta_j(k)} - 1}{2ik} P_j(\cos \theta) \right).$$

Podemos colocar todos os termos de dentro das somatórias juntos, e deixar as duas somatórias à esquerda. Em prática, isso não é necessário, mas facilita a visualização do que está ocorrendo. O sinal negativo na segunda soma irá se cancelar com o sinal negativo que advém do produto das unidades imaginárias no denominador de cada uma das somas:

$$|f(k, \theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (2l+1)(2j+1) P_l(\cos \theta) P_j(\cos \theta) (e^{2i\delta_l(k)} - 1)(e^{-2i\delta_j(k)} - 1).$$

Finalmente, a expressão para a seção de choque diferencial (3.7) será

3.2 Variáveis de Mandelstam

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\cos\theta} = \frac{\pi}{2k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (2l+1)(2j+1) P_l(\cos\theta) P_j(\cos\theta) (e^{2i\delta_l(k)} - 1)(e^{-2i\delta_j(k)} - 1).$$

Encontramos a seção de choque elástica integrando o lado direito em $\cos\theta$, de -1 até $+1$,

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{2k^2} \int_{-1}^{+1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (2l+1)(2j+1) P_l(\cos\theta) P_j(\cos\theta) (e^{2i\delta_l(k)} - 1)(e^{-2i\delta_j(k)} - 1) d\cos\theta.$$

Para seguirmos em frente, devemos usar condição de ortogonalidade entre polinômios de Legendre, dada pela equação (3.6). Como resultado, surge uma *delta de kronecker* na expressão da seção de choque elástica,

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (2l+1)(2j+1) (e^{2i\delta_l(k)} - 1)(e^{-2i\delta_j(k)} - 1) \frac{\delta_{l,j}}{2l+1}.$$

Uma vez que $\delta_{l,j}$ seleciona apenas os termos com $l = j$, teremos

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l(k)} - 1)(e^{-2i\delta_l(k)} - 1). \quad (3.8)$$

A expressão ainda pode ser reescrita em termo dos elementos de matriz da matriz de espalhamento S , na forma

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |S_l(k) - 1|^2. \quad (3.9)$$

3.2 Variáveis de Mandelstam

No estudo experimental de processos difrativos, podemos determinar o tipo de processo ao olharmos para a configuração cinemática do estado final, isto é, o estado do sistema após a interação. Essa configuração deve independer do referencial inercial, e isso nos diz que as quantidades físicas que satisfaçam essa condição sejam *invariantes de Lorentz*.

Para que consigamos escrever as seções de choque como função de quantidades que sejam invariantes de Lorentz, introduziremos a seguir as chamadas *variáveis de Mandelstam*.

Seja um processo de espalhamento exclusivo de dois corpos escrito na forma

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \quad (3.10)$$

CAPÍTULO 3. EXPANSÃO EM ONDAS PARCIAIS E INVARIANTES DE MANDELSTAM

ou seja, onde o estado inicial é formado pelas partículas 1 e 2, que interagem, se espalham, e formam um estado final composto pelas partículas 3 e 4.

Um exemplo disso é dado pela aniquilação de pares, que é o processo de aniquilação de um par elétron-pósitron, indo para um estado final onde se encontram dois fótons,

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Um outro exemplo disso é o espalhamento Compton, onde um elétron e um fóton interagem, e são espalhados para um estado final contendo um elétron e um fóton,

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma.$$

Para descrevermos este processo, são necessárias apenas duas variáveis cinemáticas independentes. Entretanto, temos mais de duas variáveis cinemáticas independentes à disposição, como os 4-momenta das partículas e os produtos escalares entre estas quantidades. Porém, fazendo considerações de conservação de 4-momentum, vemos que

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu, \quad (3.11)$$

onde o quadri-momentum é definido como

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right).$$

Aqui, μ representa as componentes ($\mu = 0, 1, 2$ e 3) de um quadri-vetor qualquer. A componente 0 está associada à coordenada $\frac{E}{c}$ e as outras três componentes são as mesmas componentes do momentum linear, \mathbf{p} .

Com este resultado, podemos definir as três variáveis de Mandelstam:

$$s = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = (p_3^\mu + p_4^\mu)^2, \quad (3.12)$$

$$t = (p_1^\mu - p_3^\mu)^2 = (p_2^\mu - p_4^\mu)^2, \quad (3.13)$$

$$u = (p_1^\mu - p_4^\mu)^2 = (p_2^\mu - p_3^\mu)^2. \quad (3.14)$$

A partir da conservação de 4-momentum podemos facilmente verificar uma importante relação entre essas variáveis:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2, \quad (3.15)$$

onde consideramos que a velocidade da luz, c , é igual à unidade.

3.2 Variáveis de Mandelstam

Em geral, as variáveis escolhidas para caracterizar os processos de espalhamento são s e t , que representam, respectivamente, o quadrado da energia total no centro de massa das duas partículas e o quadrado do momentum transferido, respectivamente.

Se estudamos este problema no referencial do centro de massa, colocando o eixo z como o eixo no qual as partículas 1 e 2 se deslocam e levando em conta que as partículas 3 e 4 sejam espalhadas por um ângulo θ , como na Figura 3.1, então a conservação de energia-momentum nos dá:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0. \quad (3.16)$$

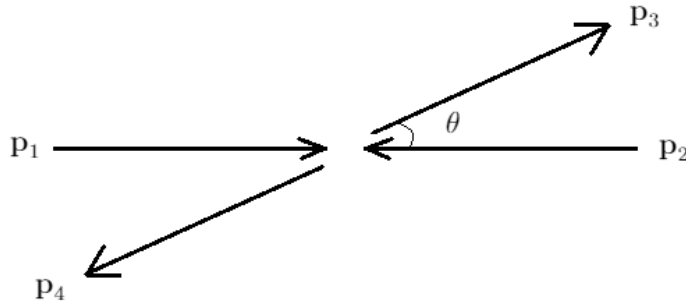


Figura 3.1: Espalhamento visto do referencial do centro de massa.

Assim, podemos escrever todos os p^μ como função de suas respectivas energias, do momentum do centro de massa $|\mathbf{p}| = p_z$ e do momentum transverso [3, 4].

$$p_1^\mu = (E_1, 0, 0, p_z), \quad (3.17)$$

$$p_2^\mu = (E_2, 0, 0, -p_z), \quad (3.18)$$

$$p_3^\mu = (E_3, \mathbf{p}_\perp, p'_z), \quad (3.19)$$

$$p_4^\mu = (E_4, -\mathbf{p}_\perp, -p'_z). \quad (3.20)$$

A expressão para as energias são dadas por

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_1^2 - m_2^2), \quad (3.21)$$

$$E_2 = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_2^2 - m_1^2), \quad (3.22)$$

$$E_3 = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_3^2 - m_4^2), \quad (3.23)$$

$$E_4 = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_4^2 - m_3^2). \quad (3.24)$$

Notamos que quando $s \rightarrow \infty$ todas as energias se aproximam de $\frac{\sqrt{s}}{2}$. Com auxílio da figura 3.1, vemos que

CAPÍTULO 3. EXPANSÃO EM ONDAS PARCIAIS E INVARIANTES DE MANDELSTAM

$$p'_z = |\mathbf{p}'| \cos \theta, \quad (3.25)$$

$$p'_\perp = |\mathbf{p}'| \sin \theta, \quad (3.26)$$

ou, em termos das variáveis de Mandelstam

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_1^2, m_2^2), \quad (3.27)$$

$$\mathbf{p}'^2 = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_1^2, m_4^2), \quad (3.28)$$

onde $\lambda(x, y, z)$ é a função triangular, definida como

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz. \quad (3.29)$$

Combinando as equações (3.17-3.28) e usando a definição (3.29), podemos extrair a quantidade $\cos \theta$ como função dos invariantes escolhidos, s e t :

$$\cos \theta = \frac{s^2 + 2s(2t - \sum_i m_i^2) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2) \lambda^{1/2}(s, m_3^2, m_4^2)}. \quad (3.30)$$

Um caso específico do espalhamento exclusivo de dois corpos é o espalhamento elástico, onde as partículas encontradas nos estados inicial e final são as mesmas:

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2'. \quad (3.31)$$

Se estudarmos um problema do tipo (3.31), com a condição extra de que as partículas 1 e 2 tenham a mesma massa, as variáveis independentes podem ser escritas de forma simplificada:

$$|\mathbf{p}| = \frac{1}{2} \sqrt{s - 4m^2}, \quad (3.32)$$

$$\cos \theta = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}. \quad (3.33)$$

Se invertermos as equações acima, (3.32) e (3.33), obtemos uma nova expressão para os invariantes de Mandelstam - lembrando que essa forma é válida apenas para o espalhamento elástico de duas partículas de mesma massa:

$$s = 4(k^2 + m^2), \quad (3.34)$$

$$t = -4k^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (3.35)$$

Podemos também reescrever u na forma

3.2 Variáveis de Mandelstam

$$u = -2k^2(1 + \cos \theta), \quad (3.36)$$

onde k é o módulo do momentum no referencial do centro de massa, $|\mathbf{p}|$. Adotamos a letra k para simplificar a notação.

Se o problema de espalhamento de dois corpos contém apenas uma partícula virtual, é comum descrever essa partícula em um determinado canal. O tipo do canal deste processo será determinado pelas configurações dos estados inicial e final. Por exemplo, o espalhamento exclusivo de dois corpos dado por (3.10) é definido como um processo de canal- s , já que para este processo, o invariante s é o quadrado da energia total no centro de massa.

Se usarmos a simetria de cruzamento da matriz S [5, 6], podemos reescrever este mesmo processo mudando o estado inicial e final mutuamente, mas devemos tomar, para tanto, a antipartícula respectiva de cada partícula trocada. Por exemplo, a simetria de cruzamento para 2 e 3 é escrita como

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4, \quad (3.37)$$

que é a reação original, porém descrita no canal- t . A notação $\bar{3}$ representa a antipartícula de 3. Sobre este ponto de vista, podemos afirmar que as duas reações descritas no começo desta subseção, a aniquilação de pares e o espalhamento Compton, são o mesmo processo. Já que pode-se trocar o elétron de um dos lados da equação pelo fóton do outro lado da equação, tomando suas respectivas antipartículas. A antipartícula do elétron é o pósitron, e a do fóton é o próprio fóton, dessa forma, podemos sair de um dos processos e usando simetria de cruzamento, chegar no outro.

Reescrevendo t e s para este processo, obtemos

$$t = 4(k_t^2 + m^2), \quad (3.38)$$

$$s = -4k_t^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (3.39)$$

É importante ressaltar que nos capítulos 2 e 3 os cálculos apresentados foram feitos usando mecânica quântica não relativística e, nesta subseção, construímos invariantes relativísticos para que no capítulo 5 possamos escrever quantidades como a amplitude de espalhamento e as seções de choque como funções dos invariantes relativísticos desenvolvidos.

Entretando, devemos ressaltar que a análise de ondas parciais desenvolvidas não parte da equação de Schrödinger e, assim, é mais geral que os cálculos feitos partindo da equação de Schrödinger. Isso ocorre porquê, se partimos desta equação, estamos num formalismo essencialmente *não relativístico*. Partindo da expansão em ondas parciais, estamos livres deste problema e podemos generalizar o cálculo das quantidades de interesse para o caso relativístico, utilizando as variáveis de Mandelstam aqui desenvolvidas.

Capítulo 4

A função eiconal

4.1 A aproximação de altas energias

Vamos obter a aproximação eiconal fazendo o estudo do problema de espalhamento no limite de altas energias, em mecânica quântica não relativística. Neste caso, a energia cinética da partícula é muito maior que a interação entre a partícula e o potencial espalhador, ou seja,

$$E \gg |V(\mathbf{r})|. \quad (4.1)$$

Neste caso, uma outra relação que existe é a de que o comprimento de onda partícula que sofre o espalhamento é muito menor que o alcance da interação, a . Dessa forma, essa outra condição é dada por

$$ka \gg 1. \quad (4.2)$$

A solução para a equação de Schrödinger, neste caso, é dada por

$$\psi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (4.3)$$

Esse perfil para $\psi(\mathbf{r})$ é sugerido por considerar que quando as condições (4.1) e (4.2) são satisfeitas, o espalhamento ocorrerá predominantemente em ângulos pequenos. Podemos chegar à essa conclusão de forma mais intuitiva levando em conta que, pelo fato da energia cinética da partícula ser muito grande, o tempo da interação é muito pequeno. Ou, também, podemos simplesmente ver a interação como uma perturbação, e tratar o efeito dessa perturbação em primeira ordem.

Para obtermos a função $\phi(\mathbf{r})$, é necessário resolvermos a equação de Schrödinger. Esse problema é facilitado se consideramos essa equação na forma (2.4)

$$[\nabla^2 - U(\mathbf{r}) + k^2]\phi(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0. \quad (4.4)$$

O laplaciano atua nas coordenadas \mathbf{r} , de forma que

4.1 A aproximação de altas energias

$$\nabla^2(\phi(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \nabla \cdot [\nabla(\phi(\mathbf{r}))e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \phi(\mathbf{r})\nabla(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})].$$

Como $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$, em coordenadas cartesianas, e o produto escalar entre \mathbf{k} e \mathbf{r} é dado por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, então

$$\nabla(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = i(k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k})e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\nabla^2(\phi(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \nabla \cdot [\nabla(\phi(\mathbf{r}))e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + i\mathbf{k}\phi(\mathbf{r})i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}].$$

Podemos então reescrever a equação (4.4) na forma

$$[\nabla^2 + 2i\mathbf{k} \cdot \nabla - U(\mathbf{r})]\phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.5)$$

com a seguinte condição de contorno:

$$\phi(x, y, -\infty) = 1. \quad (4.6)$$

No regime de altas energias, temos boas justificativas para supor que tanto ϕ quanto U apenas variam ao longo de uma distância muito maior que $1/k$. Dessa forma, podemos negligenciar a derivada segunda em ϕ , e o que nos sobra é

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial z} - U(x, y, z) \right] \phi(x, y, z) = 0. \quad (4.7)$$

Aqui, ressaltamos que a derivação restante é apenas na direção z , já que estamos supondo uma partícula com um vetor de onda tal que $\mathbf{k} = k\mathbf{z}$, ou seja, a partícula se propaga na direção z , onde \mathbf{z} representa o vetor unitário nessa direção.

A solução da equação (4.7), com a condição de contorno (4.6), é dada por

$$\phi(x, y, z) = \exp\left(-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z U(x, y, z') dz'\right). \quad (4.8)$$

Lembrando que a função de onda da partícula é dada por $\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r})$, e decompondo $\mathbf{r} = \mathbf{b} + z\mathbf{z}$, escrevemos a solução do problema que estamos estudando como

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z U(\mathbf{b}, z') dz'\right). \quad (4.9)$$

4.2 A função de perfil

Nesta seção, vamos obter uma expressão analítica para $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ apresentada na seção 1.1, sem usar a expansão em ondas parciais. Fazendo isso, a função eiconal aparece naturalmente.

Usando a equação para a amplitude de espalhamento obtida a partir da aproximação da equação de Schrödinger, (2.9), e usando a equação (4.9) como função de onda, obtemos

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int d^2b e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot(\mathbf{b}+z\mathbf{k})} U(\mathbf{b}, z) e^{\left(-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z U(\mathbf{b}, z') dz'\right)}, \quad (4.10)$$

onde usamos $d^3r = dzd^2b$. Ainda podemos usar a identidade

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} \left(\exp \left[-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z U dz' \right] \right) = U \exp \left[-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z U dz' \right],$$

e $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ para reescrevermos $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ da seguinte forma:

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left(1 - e^{-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\mathbf{b}, z) dz} \right). \quad (4.11)$$

Agora vamos definir a função eiconal como

$$\chi(\mathbf{b}) = -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\mathbf{b}, z) dz; \quad (4.12)$$

dessa forma, reescrevemos a amplitude de espalhamento de forma mais enxuta,

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left(1 - e^{i\chi(\mathbf{b})} \right). \quad (4.13)$$

Neste ponto, podemos também definir a função de perfil, $\Gamma(\mathbf{b})$,

$$\Gamma(\mathbf{b}) \equiv 1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}, \quad (4.14)$$

que é muito útil, pois permite que $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ seja calculada como a transformada de Fourier da função de perfil.

Analogamente, obtemos a função de perfil como a transformada de Fourier inversa da amplitude de espalhamento:

$$\Gamma(\mathbf{b}) = -\frac{2\pi i}{k} \int d^2q f(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}}. \quad (4.15)$$

4.3 A função eiconal na aproximação de Born

Agora, vamos usar novamente a equação (4.9), analisando seu limite assintótico $z \rightarrow \infty$. Neste caso, a integral de $U(\mathbf{b}, z)$, vai de $-\infty$ até $+\infty$,

4.4 A expansão em ondas parciais em altas energias

$$\Psi(\mathbf{r})|_{z \rightarrow \infty} \sim e^{i\chi(\mathbf{b})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (4.16)$$

onde notamos que $\chi(\mathbf{b})$ representa a mudança de fase da função de onda devida ao processo de espalhamento.

Sabendo disso, vamos considerar o caso onde χ representa uma pequena mudança de fase, $\chi(\mathbf{b}) \ll 1$. Isso deve ser esperado quando consideramos processos altamente energéticos, já que no curto tempo de interação a fase não se altera muito e nessas condições é muito plausível utilizar a expansão da função exponencial em série de Taylor,

$$e^{i\chi(\mathbf{b})} \approx 1 + i\chi(\mathbf{b}),$$

o que nos permite escrever nossa amplitude de espalhamento da equação (4.13) na forma

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} (1 - 1 + i\chi(\mathbf{b})).$$

Portanto a amplitude de espalhamento resulta simplesmente na expressão

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{k}{2\pi} \int d^2b e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \chi(\mathbf{b}).$$

Substituindo a definição da função eiconal, ainda no limite de $z \rightarrow +\infty$ e de uma mudança de fase pequena,

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{k}{2\pi} \int d^2b e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \left[-\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\mathbf{b}, z) dz \right];$$

rearranjando os termos, obtemos

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} U(\mathbf{r}). \quad (4.17)$$

Reconhecemos a expressão acima como a *aproximação de Born* [2]. Isso é coerente com a interpretação física da função eiconal, e também com a sua expressão: a integral do potencial que causa o espalhamento.

Quando o potencial espalhador é pouco intenso se comparado com a energia da partícula espalhada, espera-se que a fase da função de onda mude pouco e que, neste limite, a *aproximação de Born* explique de forma correta o processo de espalhamento.

4.4 A expansão em ondas parciais em altas energias

Se o potencial $U(\mathbf{r})$ tiver simetria azimutal, é possível realizarmos a integração nessa variável na equação (4.13). Para tanto, escrevemos

$$d^2b = bdbd\phi,$$

e

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{b} = qb \cos \phi,$$

onde ϕ é o ângulo entre os vetores \mathbf{q} e \mathbf{b} . Consideramos a equação (2.11),

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2},$$

para escrevemos a integração para a amplitude de espalhamento usando a equação (4.13). A integração na variável ϕ vai de 0 até 2π ,

$$f(k, \theta, \phi) = \frac{ik}{2\pi} \int bdb(1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}) \int_0^{2\pi} d\phi e^{ik\theta b \cos \phi}, \quad (4.18)$$

e como o potencial dentro da função eiconal não depende de ϕ , escrevemos essa integração separadamente. Vamos considerar a identidade a seguir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi} d\phi = J_0(x), \quad (4.19)$$

onde $J_0(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie, mostrada na Figura 4.1. Podemos identificar nesta expressão o termo que aparece na segunda integração na equação (4.18), onde $x = kb\theta$, e realizando a integração, nossa amplitude de espalhamento em altas energias terá a forma

$$f(k, \theta, \phi) = ik \int bdb(1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}) J_0(qb). \quad (4.20)$$

Também é possível obter a representação eiconal partindo da expansão em ondas parciais. Para tanto, consideramos novamente que o espalhamento seja predominantemente em ângulos pequenos, $\theta \rightarrow 0$, e que valores grandes de l são importantes para o cálculo.

Nestas condições, os polinômios de Legendre da expansão em ondas parciais se aproximam da função J_0 quando $\theta \rightarrow 0$:

$$P_l(\cos \theta) \simeq J_0(l\theta). \quad (4.21)$$

Isso está ilustrado na Figura a seguir (4.1).

E então, novamente, substituímos a soma em l por uma integração em l . Lembrando da equação (3.2), nossa nova amplitude de espalhamento se torna:

$$f(k, \theta) \simeq \int_0^\infty dl(2l + 1) J_0(l\theta) a(l, k), \quad (4.22)$$

onde $a(l, k)$ é escrito em termos dos elementos de matriz da matriz $S_l(k)$. Para seguir em frente, usamos a relação $kb = l + \frac{1}{2}$, de onde podemos obter $dl = kdb$. Assim

4.4 A expansão em ondas parciais em altas energias

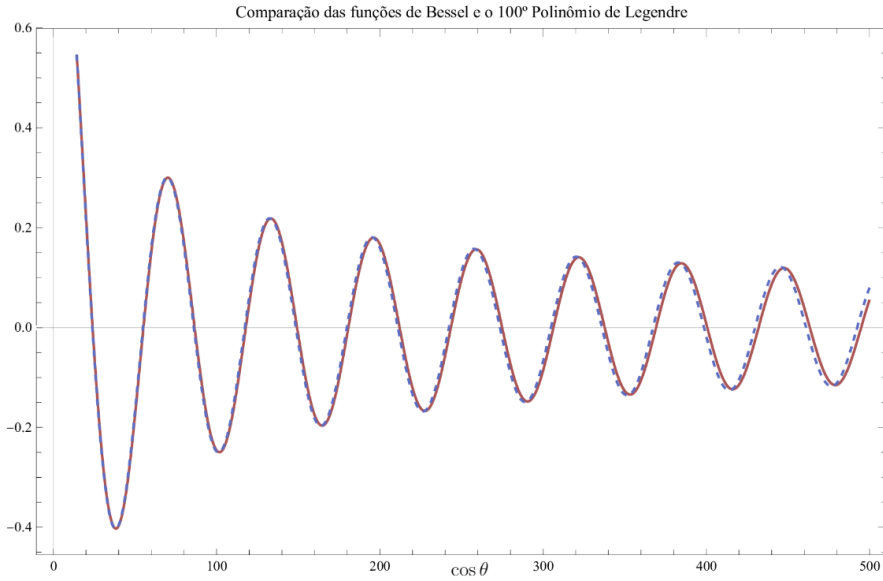


Figura 4.1: Função J_0 de Bessel (linha contínua) e 100^{o} polinômio de Legendre (linha tracejada) da variável $\cos \theta$, para valores pequenos de θ .

$$f(k, \theta) = 2k^2 \int b db J_0(kb\theta) a(k, b), \quad (4.23)$$

que nos permite escrever $f(k, \theta)$ em termos da função de perfil definida em (4.14),

$$f(k, \theta) = ik \int b db J_0(kb\theta) \Gamma(k, b). \quad (4.24)$$

Na expressão acima, $\Gamma(k, b)$ é dada por

$$\Gamma(k, b) = -2ika(k, b) = 1 - e^{2i\delta(k)},$$

onde reconhecemos $2\delta(k) = \chi(k, b)$. Novamente, obtemos que o significado físico da função eiconal é a mudança de fase devida ao processo de espalhamento em altas energias.

É importante ressaltar que a obtenção da representação eiconal obtida nesta sessão é mais geral, embora menos didática, que a feita anteriormente e que como esta demonstração não partiu da equação de Schrödinger, ela se mantém válida no caso relativístico.

Por fim, escrevemos as seguintes quantidades, fundamentais no estudo de problemas de espalhamento: as seções de choque elástica, inelástica e total,

$$\sigma_{el} = \int d^2\mathbf{b} |\Gamma(b)|^2, \quad (4.25)$$

$$\sigma_{inel} = \int d^2\mathbf{b} (2\text{Re}[\Gamma(b)] - |\Gamma(b)|^2), \quad (4.26)$$

$$\sigma_{tot} = 2 \int d^2\mathbf{b} \text{Re}[\Gamma(b)]. \quad (4.27)$$

Essas equações serão reescritas em outra forma no capítulo seguinte, em termos do que vamos definir como *função de recobrimento inelástico*.

Por fim, devemos ressaltar o importante ponto de que a representação eiconal e seus resultados básicos foram devidamente apresentados e estamos em condições de iniciar o estudo sobre as propriedades analíticas desta representação, e também da representação da *Matriz-U* no estudo do espalhamento em altas energias, que é um dos pontos fundamentais deste trabalho.

Capítulo 5

Esquemas de unitarização

5.1 Unitariedade e analiticidade

Num processo de espalhamento no regime de altas energias, a seção de choque elástica se relaciona à amplitude de espalhamento [7] a partir da relação

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2} |a(s, t)|^2, \quad (5.1)$$

onde s e t são as variáveis de Mandelstam já apresentadas em (3.12,3.13). Dessa forma, podemos escrever a função de recobrimento inelástico como uma transformada de Fourier no espaço do parâmetro de impacto \mathbf{b} ,

$$G_{inel}(s, \mathbf{b}) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{a(s, t)}{2s} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}}. \quad (5.2)$$

A amplitude de espalhamento $a(s, t)$, no limite de altas energias, relaciona-se à amplitude de espalhamento definida em (4.23) como

$$\frac{1}{8\pi\sqrt{s}} a(s, t) \rightarrow f(k, \theta). \quad (5.3)$$

onde a relação entre o invariante s e k é dada na equação (3.34).

A seção de choque diferencial é geralmente representada como uma função do quadri momentum transferido, t , que se relaciona ao $\cos\theta$, num espalhamento exclusivo de dois corpos, através de

$$d \cos \theta = \frac{2s}{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2) \lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_3^2, m_4^2)} dt \simeq \frac{2}{s} dt \quad \text{em } s \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Novamente, se considerarmos que a amplitude de espalhamento não depende do ângulo azimutal, encontramos

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi^2 \lambda(s, m_1^2, m_2^2)} |a(s, t)|^2, \quad (5.5)$$

que se reduz à expressão (5.1) para valores grandes de s .

Usando (5.2), obtemos as seguintes expressões para as seções de choque total e elástica

$$\sigma_{tot} = 2 \int d^2\mathbf{b} \operatorname{Im} G(s, \mathbf{b}), \quad (5.6)$$

$$\sigma_{el} = \int d^2\mathbf{b} |G(s, \mathbf{b})|^2. \quad (5.7)$$

Podemos escrever o quadrado da densidade da matriz de espalhamento usando $S(s, \mathbf{b}) = 1 + iG(s, \mathbf{b})$. Dessa forma, obtemos a relação

$$|S(s, \mathbf{b})|^2 = 1 - 2 \operatorname{Im}[G(s, \mathbf{b})] + |G(s, \mathbf{b})|^2. \quad (5.8)$$

A unitariedade da matriz- S impõe que

$$|S(s, \mathbf{b})|^2 \leq 1. \quad (5.9)$$

A contribuição de canais inelásticos no processo de espalhamento é dada por

$$\eta_{in}(s, \mathbf{b}) = 1 - |S(s, \mathbf{b})|^2 \geq 0. \quad (5.10)$$

Existem várias formas de representar $S(s, \mathbf{b})$ de tal forma que (5.10) seja satisfeita. Neste trabalho, consideramos duas delas.

A primeira representação é uma parametrização do círculo unitário no plano complexo - para que todos os valores mapeados sejam menores ou igual à unidade - através de uma exponencial, com a condição:

$$S(s, \mathbf{b}) = \exp(i z(s, \mathbf{b})), \quad (5.11)$$

$$\operatorname{Im}[z(s, \mathbf{b})] \geq 0. \quad (5.12)$$

Essa forma de representar o círculo unitário faz a ligação com a representação exponencial, ou eiconal, que já foi apresentada neste trabalho, definida na equação (4.12) e com suas propriedades exploradas no Capítulo 4.

Uma outra forma de satisfazer a relação (5.10) é através de uma transformação de Möbius, que é um homomorfismo [8] entre uma função e uma região escolhida no plano complexo. Uma transformação de Möbius geral tem a forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (5.13)$$

Fazendo a transformação para o círculo unitário, obtemos

$$S(s, \mathbf{b}) = \frac{1 + iz'(s, \mathbf{b})}{1 - iz'(s, \mathbf{b})}, \quad (5.14)$$

$$\text{Im}[z'(s, \mathbf{b})] \geq 0. \quad (5.15)$$

A condição acima é a origem da representação racional, ou representação da Matriz- U . Algumas propriedades dessa representação serão apresentadas posteriormente neste capítulo. As duas representações serão utilizadas no problema do espalhamento no regime de altas energias, onde a unitariedade tem um papel fundamental.

5.2 O processo de unitarização

Nesta seção, vamos usar a representação eiconal e a representação da matriz- U no estudo do processo de unitarização. Como a amplitude de espalhamento deve estar contida no círculo unitário, devemos usar $S(s, \mathbf{b})$ tal que a relação (5.10) seja satisfeita.

Como foi comentado na seção anterior, existem várias formas de se garantir unitariedade - dentre elas, as representações exponencial e racional - portanto, temos a liberdade de escolher uma representação.

Fisicamente, a unitariedade deve ser garantida independente do esquema de unitarização usado, mas ainda assim devemos esperar resultados diferentes para diferentes esquemas, já que eles incluem diferentes conjuntos de estados inelásticos no canal- s .

Vamos usar a função de recobrimento inelástico, $G(s, b)$, na forma (5.2). No espaço do parâmetro de impacto, podemos escrever $\chi(s, b)$ como uma transformada de Fourier [2,6],

$$\chi(s, \mathbf{b}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} f(s, q^2) d^2\mathbf{q}, \quad (5.16)$$

e também podemos isolar $G(s, b)$ a partir da relação $S(s, b) = 1 + iG(s, \mathbf{b})$, assim poderemos escrever a seção de choque total em função de $G(\chi(s, b))$ como uma integração sobre todos os valores possíveis de b ,

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \int_0^\infty G(\chi(s, b)) b db. \quad (5.17)$$

Para a representação eiconal, a forma funcional de G é dada por

$$G_e(s, b) = [1 - e^{-\chi(s, b)}], \quad (5.18)$$

e para a representação da matriz- U a forma funcional de G é dada por

$$G_u(s, b) = 2 \frac{\hat{\chi}(s, b)}{1 + \hat{\chi}(s, b)}, \quad (5.19)$$

$$\hat{\chi}(s, b) = \frac{\chi(s, b)}{2}, \quad (5.20)$$

onde $\chi(s, b)$ é a função eiconal já apresentada anteriormente, mas agora com dependência em s .

Além do método utilizado neste trabalho, que vem do estudo da equação de Schrödinger e do método de expansão em ondas parciais, a função eiconal pode ser obtida através de diagramas simples na aproximação de árvore, que é o nível de menor ordem de um diagrama de Feynman. Entretanto, existem diagramas de ordem mais altas quando estados inelásticos no canal- s são levados em conta, e ninguém sabe realmente quais são os diagramas principais e como somá-los. Dessa forma, todas essas aproximações existentes para este problema ainda são fenomenológicas.

Duas condições importantes devem ser satisfeitas por qualquer esquema de unitarização. A primeira delas, que já foi investigada neste trabalho para a representação eiconal, é que no limite de baixas energias as amplitudes de espalhamento unitarizada em qualquer esquema devem ser iguais: na expressão (4.17), vimos que a amplitude obtida a partir da representação eiconal recai na amplitude calculada na aproximação de Born.

A segunda condição a ser satisfeita é que nenhuma amplitude unitarizada pode exceder o vínculo unitário superior, que pode ser igual à 1 ou 2, dependendo do esquema de unitarização utilizado. Isso vem do fato de quê, ao escrevermos $S(s, b)$ utilizando as representações possíveis, quando χ varre todos os valores possíveis desde 0 até $+\infty$, $S(s, b)$ varrerá todo o intervalo entre 0 e 1 para a representação exponencial, e todo o intervalo entre 0 e 2 para a representação racional.

Podemos analisar as seções de choque inelástica para estes dois esquemas. Para tanto, utilizaremos uma forma estendida para a representação eiconal, onde trocamos $\chi(s, b) \rightarrow \hat{\chi}(s, b)$ e adicionamos um fator 2 à normalização em relação à (5.17)

$$\sigma_{tot}(s) = 8\pi \int_0^\infty [1 - e^{-\hat{\chi}(s, b)}] b db. \quad (5.21)$$

Assim, podemos escrever a seção de choque inelástica para a representação eiconal como

$$\eta_{eico}(s, b) = e^{-\chi(s, b)} [1 - \exp(-\chi(s, b))], \quad (5.22)$$

e para a representação da matriz- U ,

$$\eta_u(s, b) = e^{-\chi(s, b)} \left[\frac{2\hat{\chi}(s, b)}{1 + \hat{\chi}(s, b)} \right]. \quad (5.23)$$

5.2 O processo de unitarização

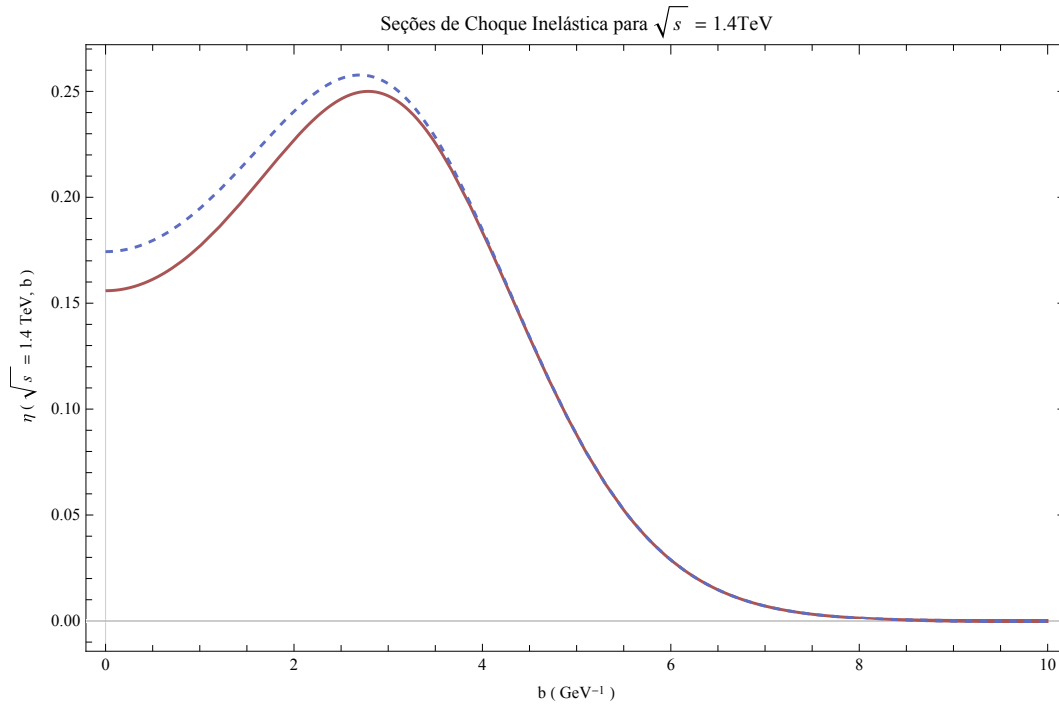


Figura 5.1: A curva contínua corresponde ao esquema eiconal, enquanto a curva tracejada, corresponde à matriz- U .

Apresentamos o cálculo para $\eta(s, b)$ para os esquemas, dadas pelas equações (5.22) e (5.23), utilizando uma eiconal fenomenológica na forma

$$\chi(s, b) = 0.005 s^{0.4} \exp(-b^2/9), \quad (5.24)$$

como apresentada em [1].

Aqui, $s = \frac{s'}{s_0}$, onde s_0 tem dimensão de energia, e advém do fato de que a função χ deve ser adimensional. Podemos ver isso observando o fato de que, no esquema Eiconal, a função χ aparece no argumento de uma exponencial e, portanto, deve ser adimensional. Assim, apesar de estarmos considerando $\chi(s, \mathbf{b})$ para uma dada energia, essa função é *adimensional*.

Consideramos $s_0 = 1\text{GeV}$ para mantermos a ordem de grandeza nas quais queremos fazer nossa análise.

O primeiro gráfico apresenta o cálculo para $\sqrt{s'} = 1.4 \text{ TeV}$, e o segundo, o cálculo para $\sqrt{s'} = 14 \text{ TeV}$. Podemos notar que os esquemas apresentam formas muito parecidas para $\eta(s, b)$.

Ambas as soluções estão contidas no círculo unitário, alcançam o máximo do vínculo unitário quando $s \rightarrow \infty$, e possuem as mesmas propriedades analíticas assintoticamente.

Podemos também estudar a função de recobrimento inelástico para cada esquema. Para tanto, vamos colocar o esquema da matriz- U numa forma similar ao eiconal, e para isso usaremos o teorema ótico (2.16) com uma normalização diferente, onde a seção de choque total será dada por

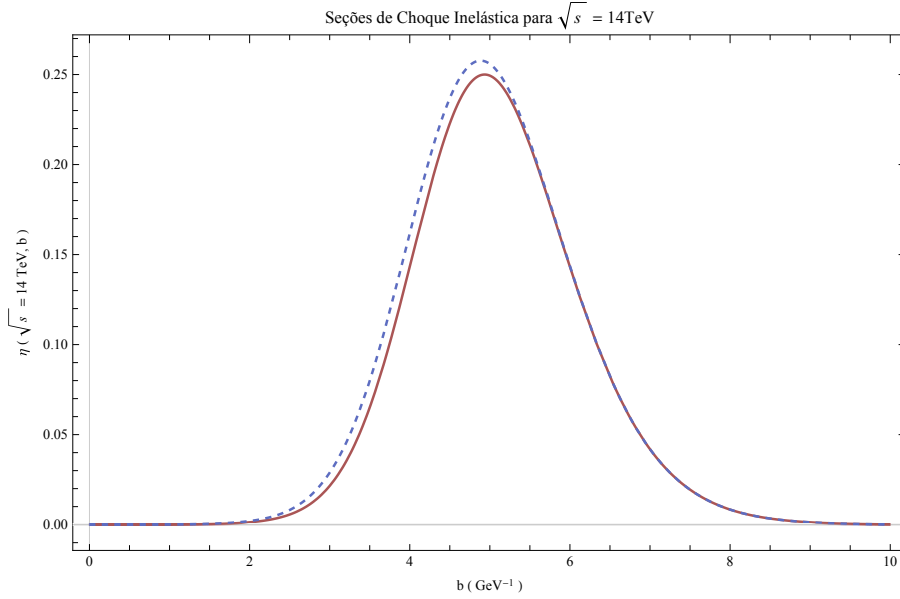


Figura 5.2: A curva contínua corresponde ao esquema eiconal, enquanto a curva tracejada, corresponde à matriz- U

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \operatorname{Im} F(s, t), \quad (5.25)$$

que é o procedimento contrário ao que foi feito quando estendemos a representação eiconal, na equação (5.21).

Podemos reescrever a seção de choque total no espaço do parâmetro de impacto na forma

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \int_0^\infty b \left[\frac{\chi(s, b)}{1 + \chi(s, b)} \right] db, \quad (5.26)$$

de onde tiramos que a função de recobrimento inelástico é dada por

$$\frac{\chi(s, b)}{1 + \chi(s, b)}. \quad (5.27)$$

Essa forma para a matriz- U satisfaz todas as propriedades analíticas da representação eiconal, e sua seção de choque inelástica é dada por

$$\eta_u^{est}(s, b) = \frac{1}{2} \frac{\chi(s, b) + 2\chi^2(s, b)}{[1 + \chi(s, b)]^2}, \quad (5.28)$$

onde o índice *est* denota que esta é a função de recobrimento inelástico no esquema estendido, (5.26).

Ressaltamos que este esquema possui limite de disco negro[6], e que quando $s \rightarrow \infty$, $\sigma_{el} \rightarrow \sigma_{inel}$, onde o máximo de inelasticidade é atingido.

É interessante observar o comportamento de $G(s, b)$ para os dois esquemas de unitarização considerados neste trabalho. Para tanto, foi utilizada uma eiconal na forma (5.24). Utilizamos para estes cálculos as funções de recobrimento apresentadas em (5.18), para a eiconal, e (5.27), para a matriz- U .

5.2 O processo de unitarização

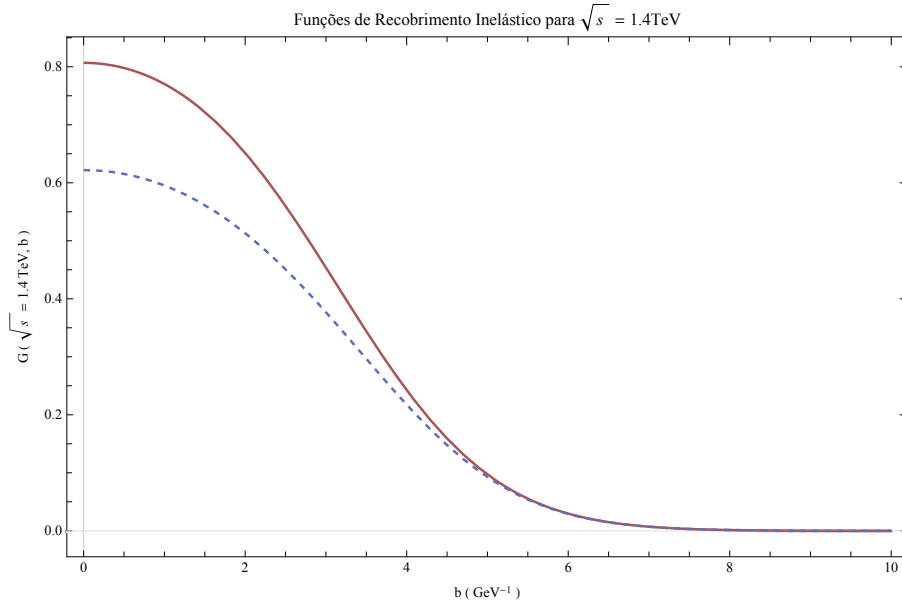


Figura 5.3: A curva contínua corresponde ao esquema eiconal, enquanto a curva listrada, corresponde à matriz- U .

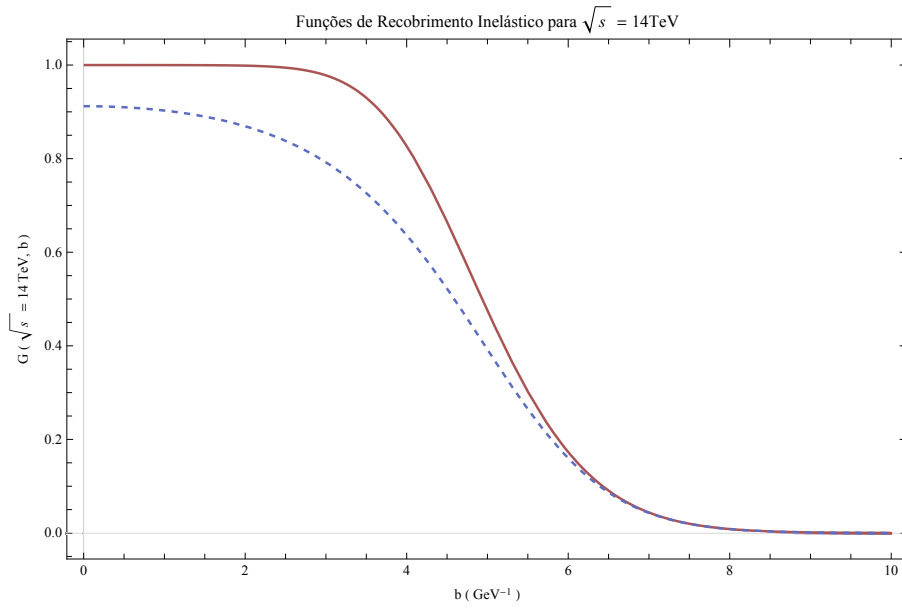


Figura 5.4: A curva contínua corresponde ao esquema eiconal, enquanto a curva listrada, corresponde à matriz- U .

No primeiro gráfico, Figura 5.3, foi utilizado $\sqrt{s} = 1.4$ TeV. Observamos que para $b = 0$, a função de recobrimento inelástico atinge o seu máximo, tanto para a representação eiconal quanto para a representação da matriz- U , e então decrescem e atingem zero à medida que b cresce.

Para o segundo gráfico, Figura 5.4, foi utilizado $\sqrt{s} = 14$ TeV. O comportamento assintótico ($b \rightarrow \infty$) se mantém, e podemos ver que na representação eiconal, atinge-se o máximo de inelasticidade, quando $\sigma_{el}/\sigma_{inel} = 1$, regime no qual eventos elásticos acontecem tanto quanto eventos inelásticos.

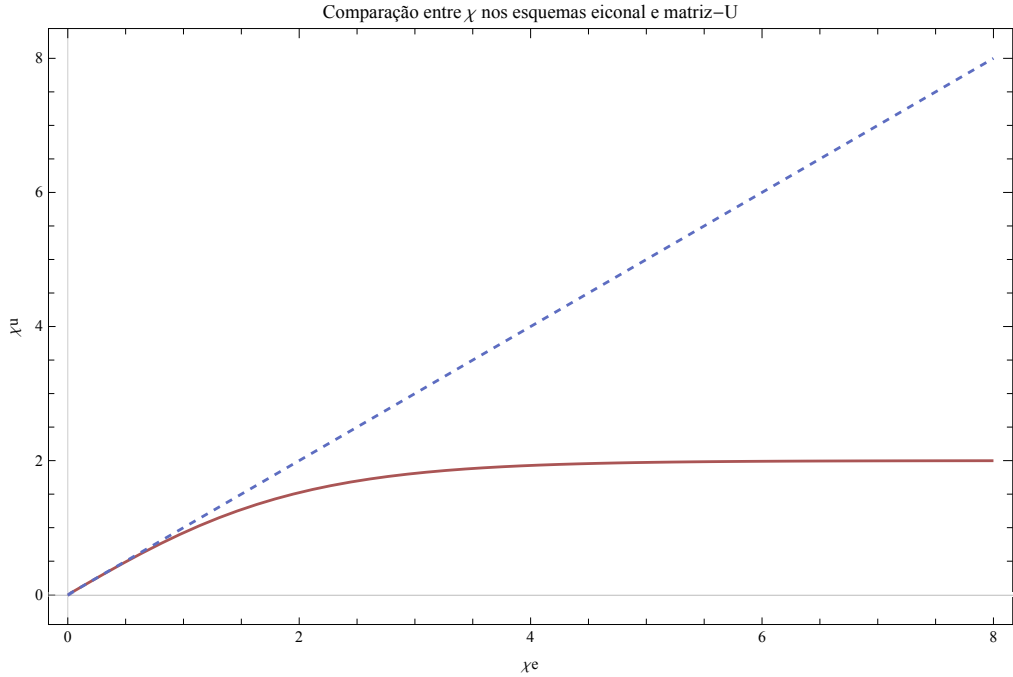


Figura 5.5: A linha tracejada representa χ_e e a contínua representa χ_u .

Podemos também comparar diretamente os dois esquemas, assumindo que (5.18) e (5.19) estão normalizados e igualando essas quantidades. Vamos identificar $\chi \rightarrow \chi_e$ e $\hat{\chi} \rightarrow \chi_u$. Isso nos dá

$$1 - e^{\chi_e(s,b)} = 2 \frac{\chi_u(s,b)}{1 + \chi_u(s,b)}, \quad (5.29)$$

que podemos reescrever como

$$\chi_u(s,b) = 2 \tanh \frac{1}{2} \chi_e(s,b) \quad (5.30)$$

ou como,

$$\chi_e(s,b) = \ln \left[\frac{1 + \chi_u(s,b)/2}{1 - \chi_u(s,b)/2} \right]. \quad (5.31)$$

Podemos analisar estas relações vendo como χ_e , quando escrito em função de χ_u varia conforme χ_u varia, ou vice versa. Para fazer essa análise, fizemos os gráficos das relações (5.30) e (5.31).

No primeiro gráfico, Figura 5.5, $\chi_u = \chi_u(\chi_e)$, e vemos que existe um vínculo de unitariedade. Em altas energias, quando $\chi_e \rightarrow \infty$, vemos que $\chi_u \rightarrow 2$, e dessa forma, a forma pela qual cada uma dessas fases dependem da energia é diferente.

No segundo gráfico, Figura 5.6, $\chi_e = \chi_e(\chi_u)$, e também observamos um vínculo de unitariedade.

Analisando estes gráficos, junto das equações (5.30) e (5.31), vemos que o limite de altas energias no esquema de unitarização da matriz- U corresponde

5.2 O processo de unitarização

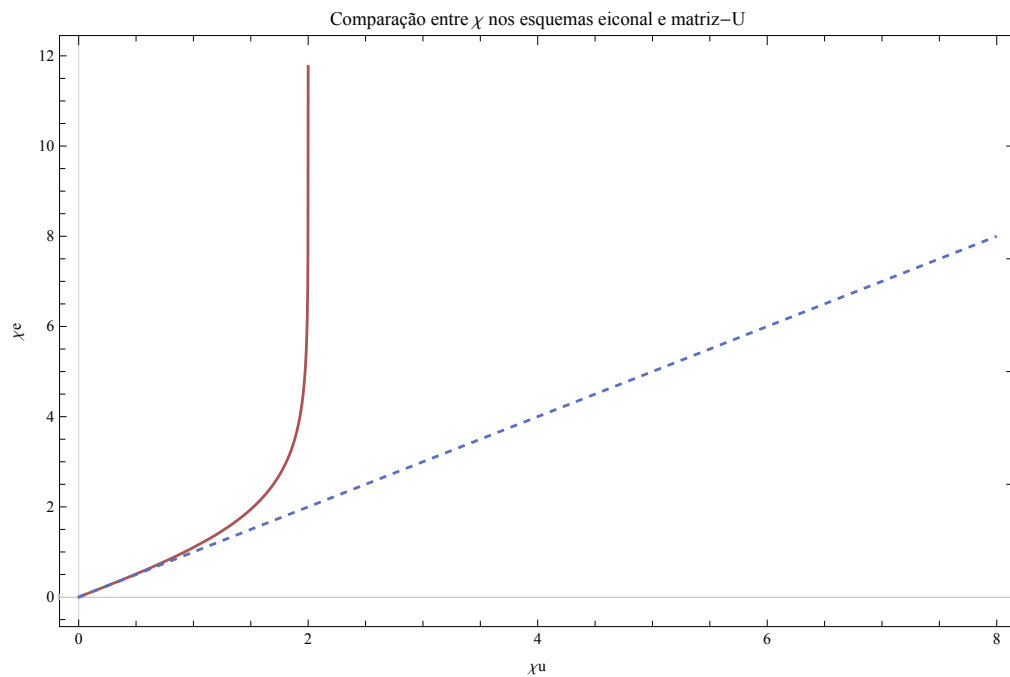


Figura 5.6: A linha tracejada representa χ_u e a contínua representa χ_e .

à amplitudes unitarizadas em baixas energias na representação eiconal [1].

Dessa forma, partindo do que foi desenvolvido ao longo deste trabalho e das análises feitas neste Capítulo, pudemos estudar amplamente os dois esquemas de unitarização. Concluímos que ambos cumprem o objetivo que buscávamos, que é garantir unitariedade, e que estes possuem as mesmas propriedades.

Capítulo 6

Conclusão e perspectivas

Este trabalho teve como foco o estudo do espalhamento em altas energias, mais particularmente dos esquemas de unitarização utilizados, o eiconal e a matriz- U . O estudo geral das propriedades destes esquemas mostra que ambos são boas representações para o problema tratado, como mostram as Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4.

Dessa forma, mostramos que as duas representações para $S(s, \mathbf{b})$ são válidas e não existe motivo para descartar alguma destas, já que ambas satisfazem unitariedade e possuem as mesmas propriedades analíticas. Mostramos isso a partir de uma extensão da representação eiconal, dada pelas equações (5.21) e (5.22) para obtermos propriedades do representação racional e, em seguida, fizemos uma extensão da representação eiconal, dada pelas equações (5.25) e (5.26).

Ambos os esquemas levam à relações $\sigma_{el}/\sigma_{inel} = 1$ e a função de recobrimento inelástico em cada um dos esquemas alcançam o máximo do vínculo unitário quando $s \rightarrow \infty$ e assintoticamente possuem as mesmas propriedades.

Além disso, mostramos explicitamente que se assumirmos que as duas representações são iguais, obtemos um vínculo entre χ_e e χ_u , como mostram as Figuras (5.5) e (5.6).

Este trabalho gera a possibilidade de estudarmos as diferenças entre os esquemas de unitarização em amplitudes de espalhamentos comumente encontradas na literatura. Por exemplo, poderemos aplicar o formalismo desenvolvido no estudo da unitarização de amplitudes baseadas na fenomenologia de Regge, que são analíticas por construção. Ou ainda, verificar as diferenças entre os esquemas eiconal e de matriz- U em amplitudes de modelos baseados em QCD, por meio de uma análise puramente numérica. Tais estudos seriam interessantes levando-se em conta a atual escala de energia do LHC.

Referências Bibliográficas

- [1] O. V. Selyugin, Jean-René Cudell, E. Predazzi, *Analytic properties of different unitarization schemes*, The European Physical Journal: Special Topics, vol. 162, 2008.
- [2] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley - MA, Revised edition, 1994.
- [3] Mateus Broilo da Rocha, *Fatores de Forma inspirados na Cromodinâmica Quântica*, Dissertação de mestrado, 2015.
- [4] V. Barone and E. Predazzi, *High-Energy Particle Diffraction*, Springer-Verlag, 2002; R.J. Eden, P.V. Landshoff, D.I. Olive, and J.C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*, Cambridge University Press, 1966.
- [5] David Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-Vch, Revised 2nd edition, 2008.
- [6] Francis Halzen, Alan D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Particle Physics*, Wiley, First edition, 1984.
- [7] Jean-René Cudell and O. V. Selyugin, *New analytic unitarization schemes*, Physics Review D: Particles and Fields, vol. 79, 2009.
- [8] James Ward Brown, Ruel V. Churchill, McGraw-Hill Education, *Complex Variables and Applications*, 9th edition, 2013.