

## PERSPECTIVAS AXONOMÉTRICAS E VISTAS PRINCIPAIS NO ENSINO DE GEOMETRIA DESCRITIVA

### *AXONOMETRIC AND ORTHOGRAPHIC VIEWS IN THE DESCRIPTIVE GEOMETRY TEACHING*

Fábio Gonçalves Teixeira<sup>1</sup>

#### **Resumo**

Este trabalho apresenta as aplicações dos conceitos de perspectiva axonométrica e de vistas ortográficas principais como temáticas para a solução de problemas através do uso de Geometria Descritiva. A obtenção de perspectiva é utilizada para o entendimento do conceito de vistas auxiliares sucessivas e para promover a compreensão tridimensional dos objetos em estudo. O artigo descreve as formas de gerar perspectivas axonométricas a partir de qualquer ponto de vista utilizando a Geometria Descritiva. Por outro lado, a obtenção de vistas principais também é utilizada para reforçar a compreensão de vistas auxiliares sucessivas, porém em um contexto ainda mais complexo, onde o estudante deve escolher as direções de forma a encontrar as vistas principais. Através destas direções, é possível escolher a sequência de planos auxiliares que resultam nas vistas ortográficas principais. O uso destes dois conceitos não usuais no contexto do ensino da Geometria Descritiva pode promover uma melhor compreensão de vários de seus conteúdos.

**Palavras-chave:** Geometria Descritiva, Perspectiva, Vistas Principais

#### **Abstract**

This work present axonometric and orthographic views to learning of Descriptive Geometry concepts. Axonometric views are a good way to show the utility of successive auxiliary views because they present the process and promote the 3D comprehension of objects. The paper proposes ways to build axonometric projections from any point of view by Descriptive Geometry tools. Besides, the use of the principal views enhances the understanding of successive auxiliary views, but in a more complex context where the student must choose directions to find the correct projections. Through these directions, you can choose the sequence of auxiliary planes that result in orthographic views. This work shows how two unusual concepts in the Descriptive Geometry education context can promote a better understanding of many of its contents.

**Keywords:** Descriptive Geometry, Axonometric Views, Orthographic View.

---

<sup>1</sup> Doutor em Engenharia Mecânica, PGDesign - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, fabiogt@ufrgs.br

## 1. Introdução

A Geometria Descritiva (GD) foi criada por Gaspar Monge como uma ferramenta de projeto (MONGE, 1827) e sua sistematização contribuiu para o início da revolução industrial, no final do século XVIII. A abordagem de projeções e diferentes vistas de um objeto impulsionou o desenvolvimento de máquinas mais complexas, pois possibilitou uma maior precisão dos projetos. Além disso, a GD permitia a solução de complexos problemas geométricos tridimensionais de forma gráfica e precisa. A partir do seu desenvolvimento, a GD passou a ser a base do Desenho Técnico, principal forma de representação e comunicação do projeto (GREY, 2007). Assim, a GD é uma disciplina fundamental no currículo dos cursos em que o projeto está entre as principais atribuições profissionais, como é o caso da Engenharia, da Arquitetura e do Design (CECCARELLI, 2010).

A maior dificuldade para a aprendizagem da GD está na sua base axiomática e no uso de situações abstratas utilizadas no ensino tradicional e na quase totalidade da literatura especializada. O estudo exclusivo de objetos geométricos abstratos como ponto, reta e plano, apesar de lógico, não contempla os conhecimentos prévios dos aprendizes e limitam a visão de sua aplicabilidade como uma ferramenta de projeto.

Diante disso, Teixeira et al. (2006) desenvolveram uma nova abordagem para o ensino de GD que utilizava o projeto como a base do processo de aprendizagem, a qual foi denominada como *Design-Based Learning* (DBL). Nesta abordagem, são utilizados objetos sólidos facetados como objetos de estudo, onde faces correspondem a planos, arestas correspondem a retas e vértices correspondem a pontos.

O uso de objetos sólidos no ensino da GD evita abstrações desnecessárias, aumenta as possibilidades de aplicações concretas de projeto geométrico e aproveita os conhecimentos prévios e as experiências concretas dos aprendizes com objetos reais. Dentre as novas possibilidades de aplicação da GD, está a geração de perspectivas axonométricas do objeto em estudo através de vistas auxiliares sucessivas. A perspectiva possibilita uma visualização mais intuitiva de um objeto, pois aproxima o desenho convencional da experiência visual. Assim, criar perspectivas utilizando GD auxilia na aprendizagem dos processos da própria GD, além de contribuir para o desenvolvimento da visão espacial. De forma complementar, também é possível utilizar a determinação das vistas principais (VP) como uma aplicação de vistas auxiliares sucessivas. Neste caso, além de auxiliar na aprendizagem das operações da GD, o uso de VP potencializa a visão espacial e o entendimento das projeções ortogonais dos objetos.

Este trabalho tem como objetivo mostrar as possibilidades de aplicação da perspectiva e da obtenção de vistas principais de objetos sólidos facetados no ensino da GD, buscando incrementar as aplicações de vistas auxiliares sucessivas, contribuir para o raciocínio espacial e para o entendimento da visibilidade de retas e planos.

## 2. Perspectiva Axonométrica na Geometria Descritiva

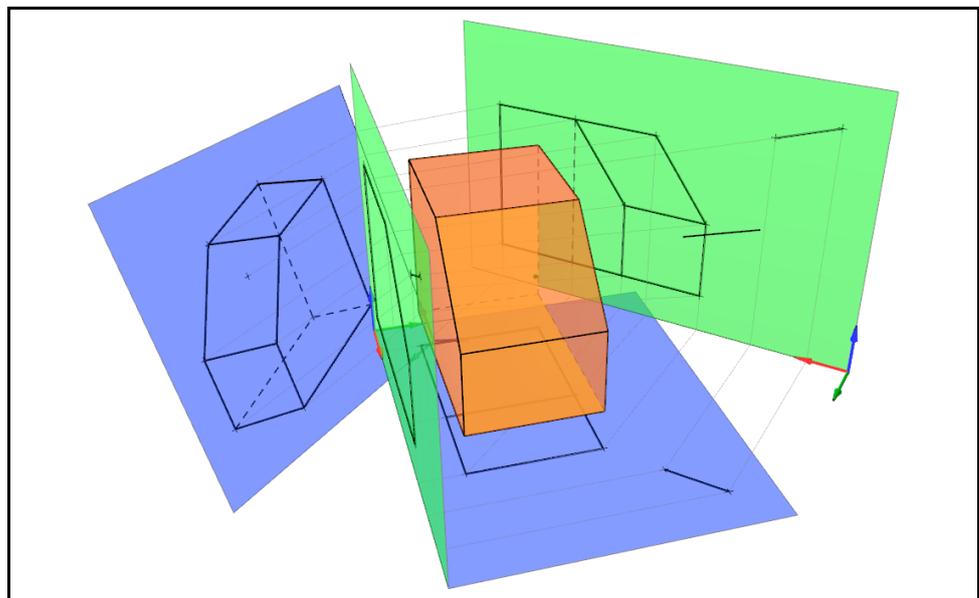
Uma das principais dificuldades para a compreensão da GD é a visualização tridimensional de objetos, pois esta deve ser construída mentalmente a partir das vistas ortográficas dos mesmos. Isto é especialmente complexo para os iniciantes, o que cria um paradoxo no processo de aprendizagem, o qual necessita deste entendimento tridimensional para ser completo. Por outro lado, quando uma vista em perspectiva de uma peça é apresentada, a sua compreensão visual é facilitada, pois as suas formas

tridimensionais se destacam.

Como a perspectiva axonométrica é uma projeção ortogonal, a partir das vistas ortográficas de um objeto, é possível obter qualquer posição de perspectiva utilizando apropriadas e sucessivas mudanças de plano de projeção (MPP). Por apropriadas, entendem-se aquelas MPP que resultem em uma projeção correspondente a uma direção de observação específica. Um plano de projeção sempre tem a sua direção de observação correspondente a uma reta com projeção acumulada no mesmo. Assim, o plano de projeção horizontal tem a posição de observação correspondente a uma reta vertical, que tem projeção acumulada no mesmo. Da mesma forma, o plano frontal de projeção tem a direção de observação correspondente a uma reta de topo, também com projeção acumulada. Portanto, para se obter uma projeção segundo uma determinada direção de observação, é necessário obter a projeção acumulada de uma reta com esta direção (ADAMS e BILLOW, 1988).

Se um objeto está posicionado alinhado em relação aos eixos do sistema de projeção, com suas projeções correspondendo às suas vistas ortográficas principais, uma direção de observação em perspectiva certamente irá corresponder a uma reta oblíqua. Para acumular uma reta oblíqua são necessárias duas MPP sucessivas, sendo a primeira para obter a Verdadeira Grandeza (VG), com um plano auxiliar paralelo à reta, e a segunda para obter a projeção acumulada, com um plano auxiliar perpendicular à reta. A Figura 1 ilustra em 3D o processo de acumulação da direção de observação, gerando a vista em perspectiva. É possível identificar a direção de observação representada como um vetor, pois o sentido de observação também é importante.

**Figura 1: Mudanças de plano sucessivas para acumular a projeção da direção de observação, obtendo a projeção em perspectiva.**

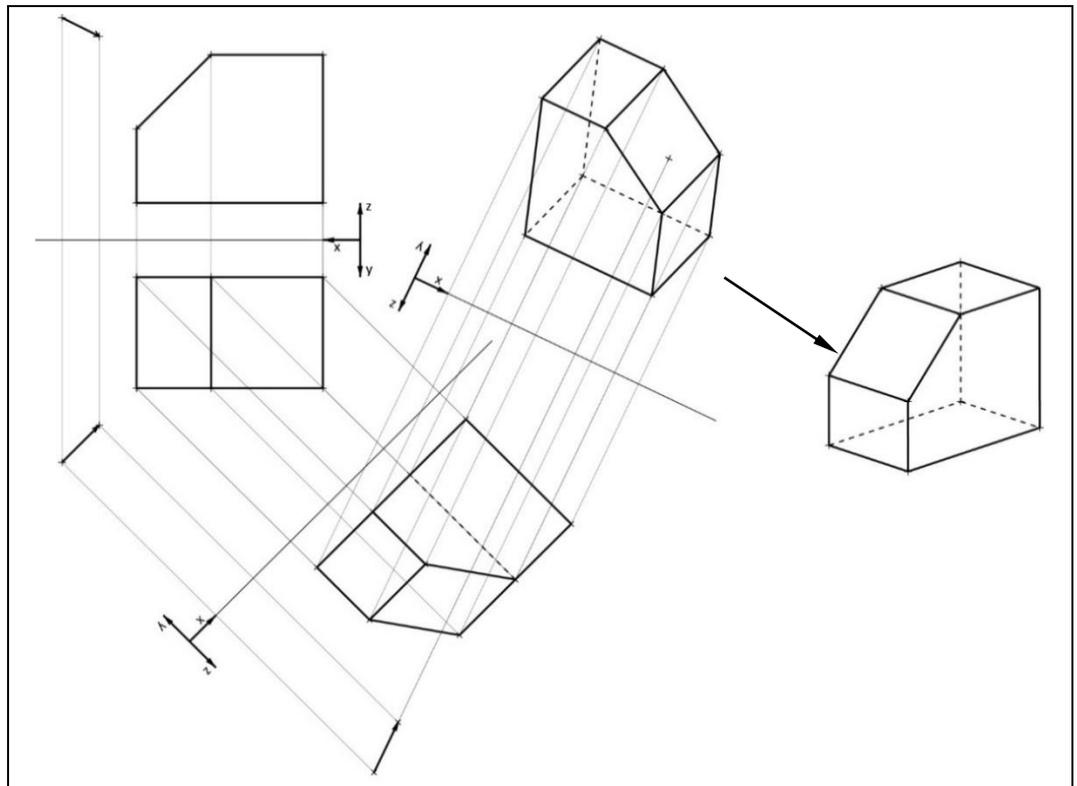


Fonte: Elaborado pelo autor.

O vetor de observação indica o sentido de observação e, conseqüentemente, define onde deve ser posicionado o segundo plano de projeção que irá conter a perspectiva da peça. O plano é colocado atrás da peça, considerando a orientação do

vetor. A Figura 2 apresenta a representação em é pura do processo de obtenção de perspectiva da mesma peça já mostrada na Figura 1. É possível observar que a projeção em perspectiva fica posicionada de forma oblíqua, devido aos posicionamentos dos planos auxiliares e do processo de rebatimento. Na mesma Figura 2, é possível observar a perspectiva reposicionada, através do alinhamento vertical das arestas que eram originalmente verticais na peça. Esta é apenas uma das infinitas perspectivas que poderiam ser obtidas da peça pelas inúmeras possibilidades de posicionamento do vetor de observação.

**Figura 2: Representação em é pura da obtenção da perspectiva da peça**



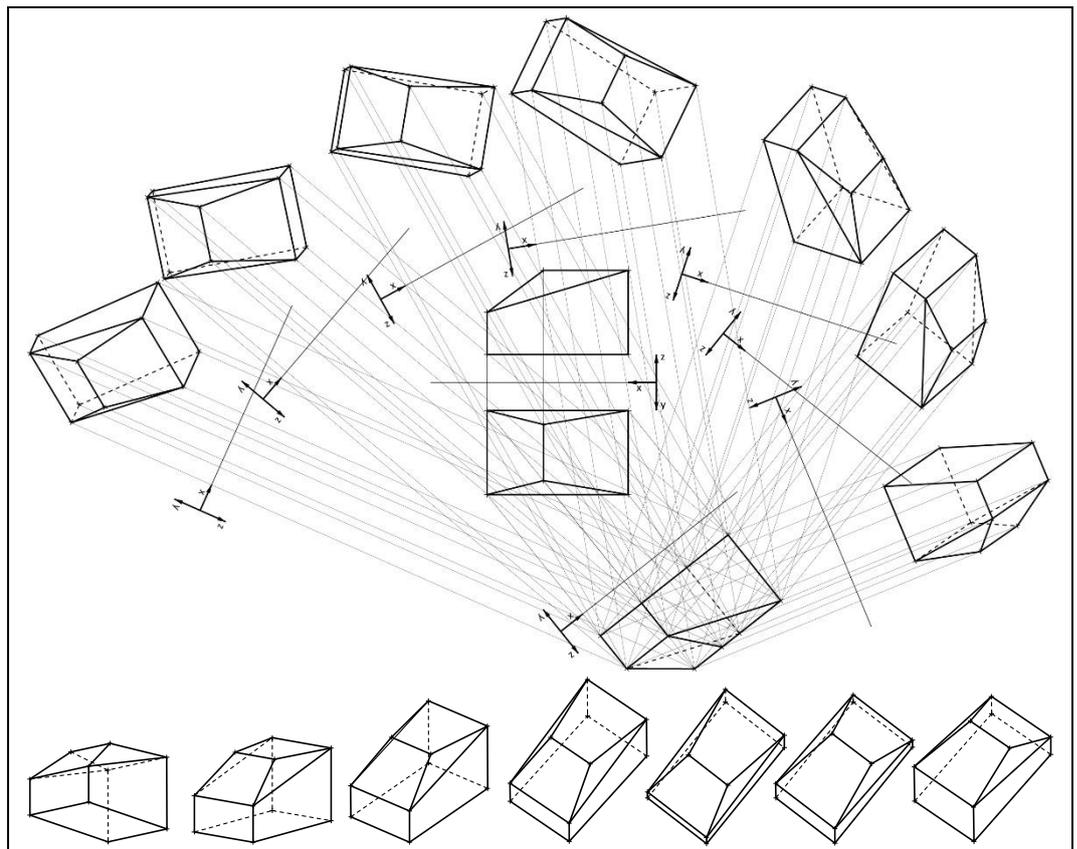
Fonte: Elaborado pelo autor.

Alterando o ângulo de inclinação do vetor de observação, é possível gerar perspectivas que privilegiem a vista superior, com inclinação mais próximas da vertical, ou que enfatizem a porção anterior da peça, com inclinações mais próximas da horizontal. Da mesma forma, é possível alterar o ângulo de rotação do vetor de observação para priorizar a vista frontal e lateral ou posterior e lateral. Assim, é possível gerar perspectivas com qualquer posição de observação de forma precisa e com total controle sobre o vetor de observação. Um exemplo destas possibilidades é mostrado na Figura 3, que mostra várias (7) projeções em perspectiva de uma mesma peça. As diferentes perspectivas são geradas pela variação da inclinação do vetor de observação. Cada posição do vetor corresponde a uma vista auxiliar secundária com linha de terra perpendicular ao vetor.

Estes exemplos demonstram por si que o uso da perspectiva no ensino da GD é uma forma importante de mostrar as aplicações das vistas auxiliares, demonstrando sua

aplicação e a relação com os resultados diretamente. Além disso, a perspectiva auxilia na visualização tridimensional de peças com geometria complexa tendo como dados apenas as vistas ortográficas, as quais nem sempre são de fácil interpretação. Por outro lado, o uso da perspectiva reforça a própria lógica e o entendimento das vistas ortográficas, pois compreensão tridimensional do objeto permite distinguir a localização dos elementos apresentados nas vistas ortográficas.

**Figura 3: Geração de várias perspectivas com diferentes ângulos de inclinação.**

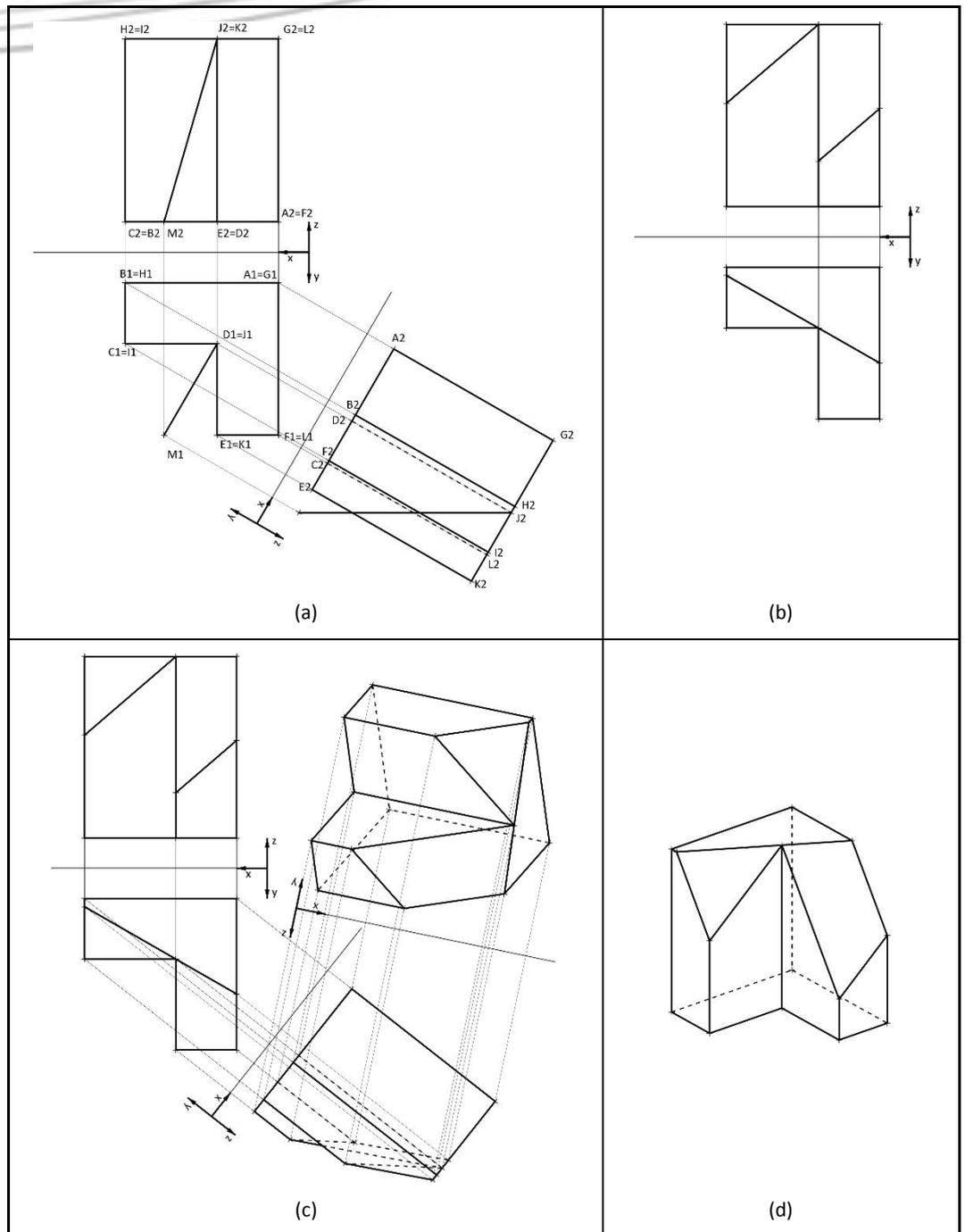


Fonte: Elaborado pelo autor.

Um exemplo prático de uso da perspectiva como ferramenta de visualização tridimensional na GD diz respeito à visualização de peças cortadas. Os cortes constituem um importante conteúdo para o ensino de interseções na GD. Quando uma peça é cortada por um plano, a sua visualização tridimensional pode ser dificultada, considerando somente as suas vistas ortográficas. Assim, é possível fazer o uso da perspectiva para visualizar a peça cortada de forma a compreender a forma tridimensional resultante.

A Figura 4 mostra uma aplicação da perspectiva no entendimento da geometria tridimensional de uma peça resultado de um corte. Na Figura 4a, a peça é cortada por um plano oblíquo definido por sua reta de máximo declive. Neste caso, a VG da reta de máximo declive corresponde à projeção acumulada do plano. Assim, foi feita uma vista auxiliar para encontrar a VG da reta de máximo declive, a qual corresponde à projeção acumulada do plano, que foi utilizado para cortar a peça.

Figura 4: Uso da perspectiva para evidenciar a forma tridimensional da peça após o corte.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O resultado do corte pode ser visto na Figura 4b, onde são apresentadas as vistas ortográficas da peça cortada. Estas vistas são de difícil interpretação para os aprendizes. Assim, é construída uma vista em perspectiva através de duas MPP sucessivas (Figura 4c). A perspectiva final, com a orientação corrigida, é mostrada na Figura 4d. A perspectiva obtida através deste método é exata, mesmo quando são utilizados ângulos de visualização arbitrários. A projeção resultante permite

compreender claramente a forma final da peça e os efeitos do corte em relação a peça original. Assim, o uso da perspectiva reforça o aprendizado do corte e também das próprias vistas auxiliares, pois os conteúdos são abordados de forma integrada, onde as suas características e utilidade ficam evidentes. O estudo de perspectivas de objetos sólidos é mais familiar para os estudantes quando comparado ao estudo de objetos abstratos, como planos e retas infinitas, o que contribui para o aprendizado dos alunos.

### 3. Obtenção de Vistas Principais na Geometria Descritiva

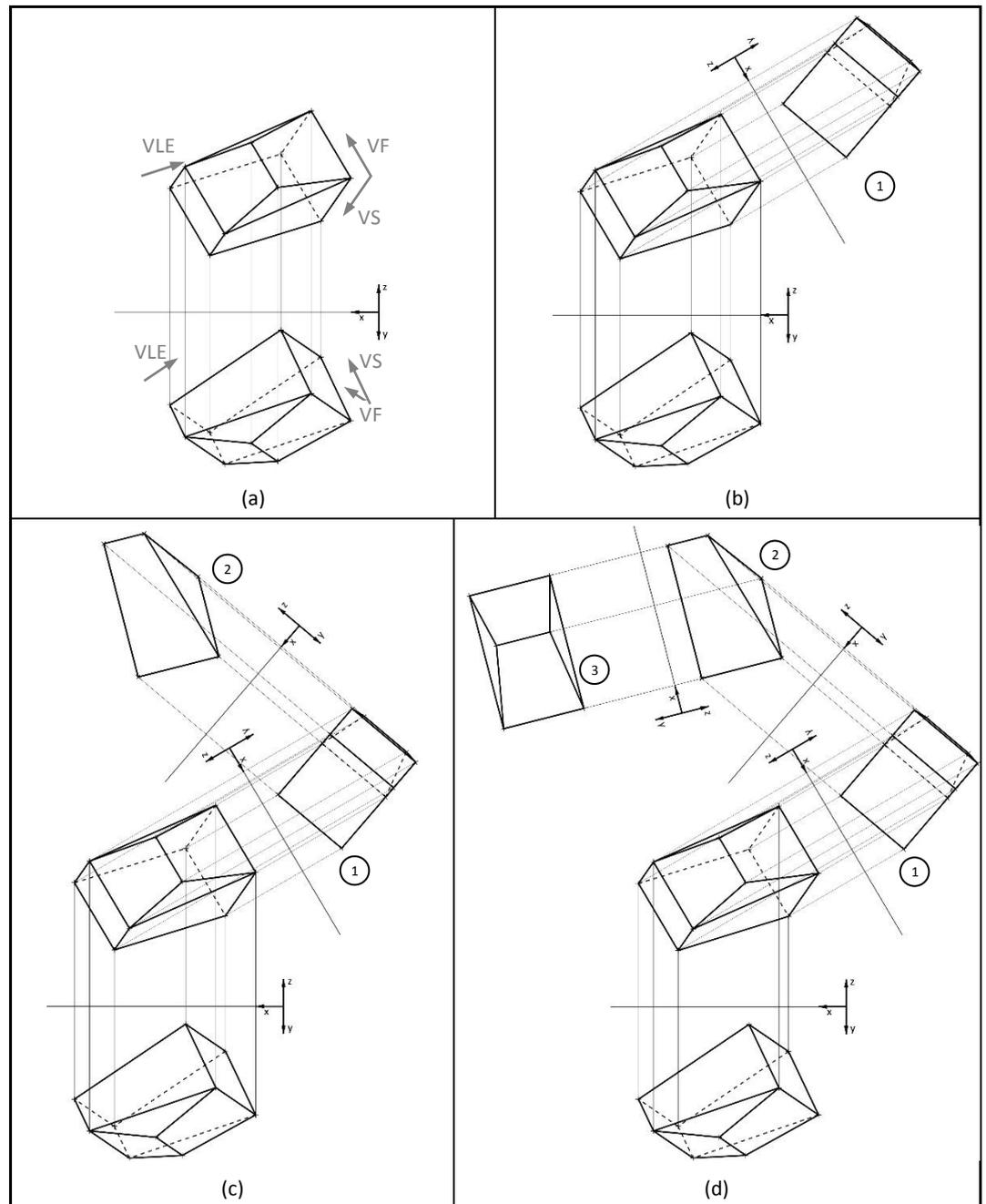
Se por um lado o estudo da perspectiva na GD permite um melhor entendimento dos processos de obtenção de vistas auxiliares, do próprio sistema de projeção ortogonal, além da geometria tridimensional do objeto de estudo, o processo inverso, a obtenção das vistas principais a partir de vistas em perspectiva de um objeto, também pode ser muito útil para a compreensão de conceitos importantes da GD, como a obtenção de vistas auxiliares sucessivas e o seu correto posicionamento, além do próprio conceito de vistas ortográficas principais. Assim, a obtenção de vistas principais tem função complementar ao ensino da perspectiva na GD, pois fecha um ciclo que é a própria lógica de perspectivas e das vistas principais (HAWK, 1962).

As vistas principais de um objeto são projeções alinhadas com os eixos do Sistema Referência (SR) e posicionadas segundo determinados critérios recomendados pela literatura e pelas normas do Desenho Técnico. As vistas principais são importantes, pois representam os objetos em vistas onde há verdadeiras grandezas de suas dimensões, possibilitando a sua construção física e permitindo intervenções ou modificações da sua geometria. Assim as vistas principais estão relacionadas diretamente ao projeto. A vista principal, em geral, é a vista frontal, que caracteriza a posição de utilização ou que apresenta mais detalhes e um número menor de linhas invisíveis (NBR 10067, 1995, p.4). As demais vistas são determinadas em função da vista principal.

Quando uma peça está representada em projeções que não correspondem às suas vistas principais, estas podem ser obtidas a partir das vistas auxiliares sucessivas (VAS), até que as vistas principais da peça sejam obtidas. O processo de obtenção de vistas principais por VAS inicia pela escolha das direções que serão definidas como principais da peça e quais posições estas direções deverão ocupar em relação ao SR. Esta escolha está diretamente relacionada à escolha de vistas. Assim, ao definir como será a vista frontal (VF), é possível entender em que posições devem estar determinadas arestas e planos.

No exemplo da Figura 5a, após escolhida a vista frontal (VF) e a vista superior (VS), é possível entender que as arestas paralelas à direção VF, que são oblíquas, deverão ficar posicionadas como retas de topo na vista frontal. A primeira vista auxiliar (Figura 5b) é realizada visando tornar horizontais as arestas paralelas à VF. Isto é feito como uma etapa intermediária para tornar estas arestas em topo, pois toda reta de topo também é paralela ao plano horizontal. A segunda vista auxiliar (Figura 5c) visa acumular as arestas paralelas à VF, obtendo assim a vista frontal da peça. A terceira e sucessiva vista auxiliar (Figura 5d) é definida de forma a acumular as arestas paralelas à direção VS, gerando uma projeção correspondente à vista superior da peça. Finalmente, ainda seria possível obter outras vistas ortográficas, como a vista lateral esquerda através de uma quarta vista auxiliar sucessiva, a qual corresponde à direção VLE da Figura 5.

Figura 5: a) Peça com projeções oblíquas. b) Primeira vista auxiliar buscando deixar a direção escolhida paralela ao PH no novo sistema de referência. c) Segunda vista auxiliar sucessiva, gerando a vista frontal. d) Terceira vista auxiliar sucessiva, para gerar a vista superior.



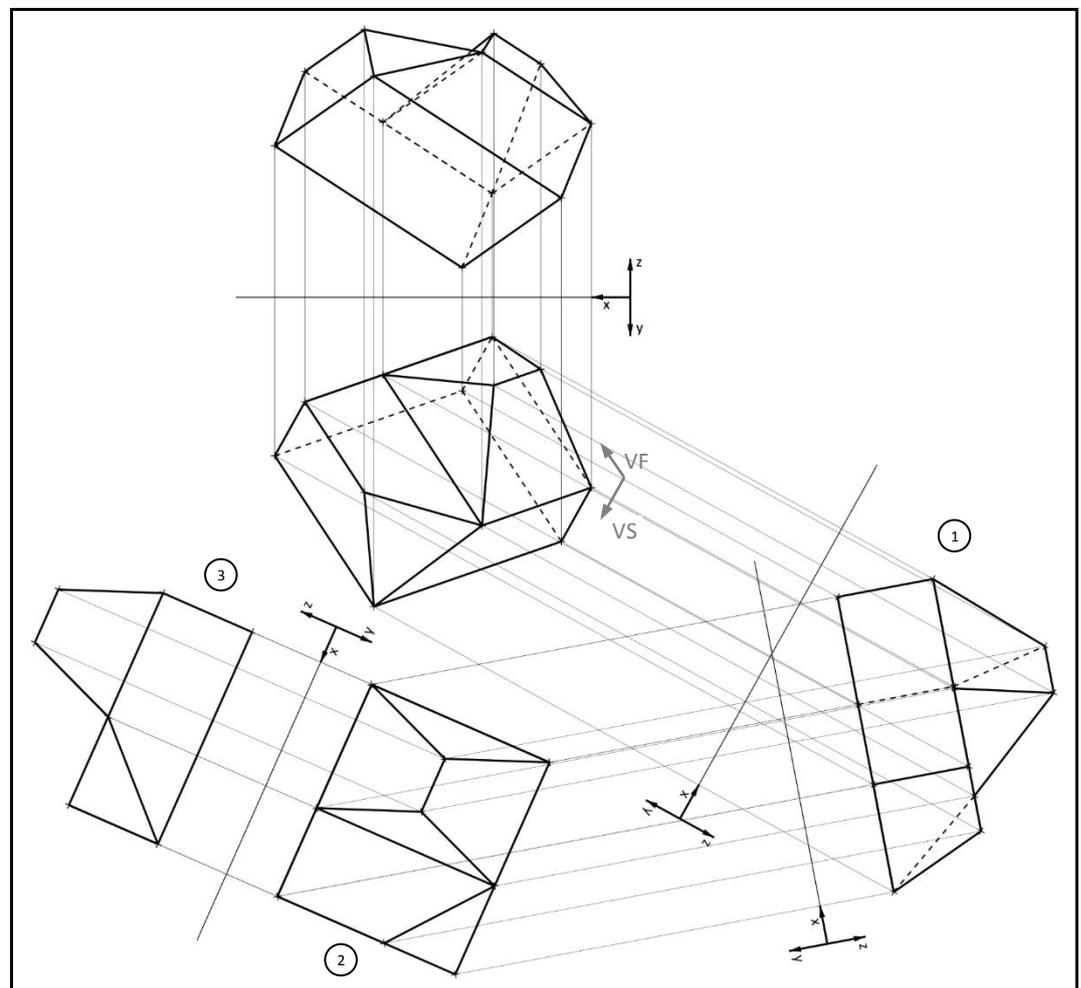
Fonte: Elaborado pelo autor.

A principal característica deste processo é uso de três ou mais vistas auxiliares sucessivas, o que não é comum no ensino de GD. Outra característica importante é que o aprendiz deve escolher as vistas principais e também as direções de observação, permitindo o exercício do raciocínio espacial, o que ainda é reforçado pela necessidade de escolha das mudanças de plano apropriadas para a criação de cada vista auxiliar. Este é um processo complexo que exige conhecimento, o que torna o uso de vistas principais

uma aplicação importante das vistas auxiliares na GD, permitindo reforçar e contextualizar vários conteúdos importantes para o seu entendimento.

A seguir, são descritos mais alguns exemplos na obtenção de vistas principais e suas aplicações através da GD. Um exemplo interessante é a planificação da superfície de um objeto para calcular a área total e para a sua posterior construção. A Figura 6 apresenta um sólido em projeções não ortográficas e, portanto, não apresenta nenhuma dimensão principal em verdadeira grandeza. Assim, é possível determinar as vistas principais para obter as suas dimensões. Nas vistas principais, algumas faces podem se projetar em verdadeira grandeza. As demais podem ter suas verdadeiras grandezas determinadas por até duas vistas auxiliares sucessivas cada uma.

Figura 6: Exemplo de aplicação de vistas principais.

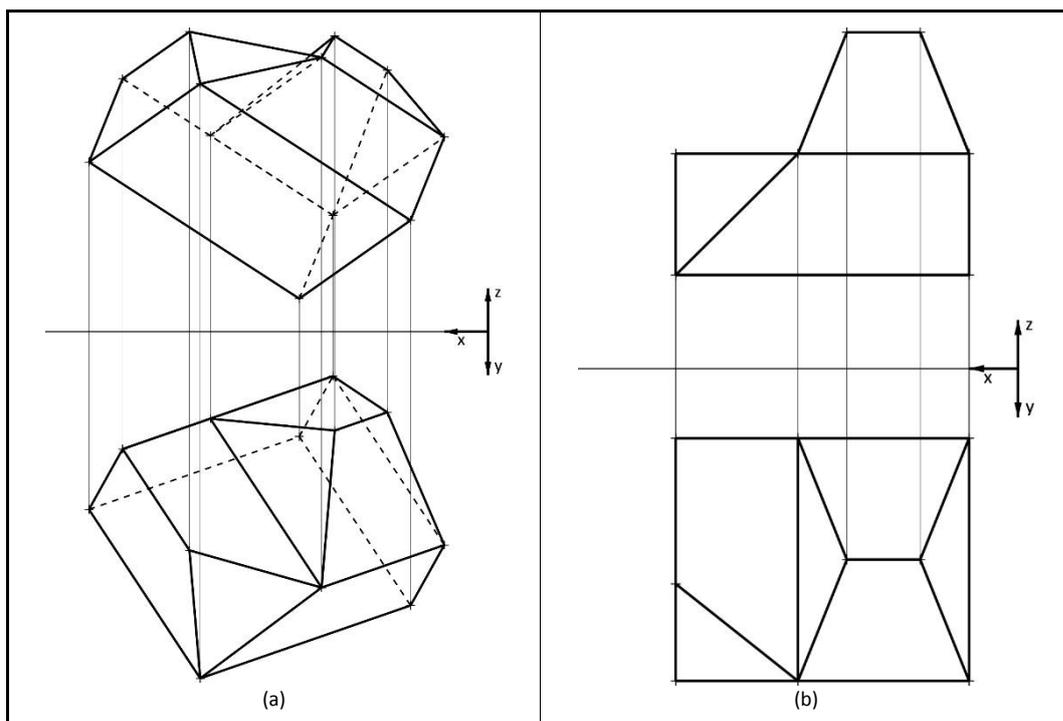


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 6 apresenta a construção das vistas auxiliares para a determinação das vistas principais. A primeira obtém a verdadeira grandeza da direção VS, correspondente à vista superior. A segunda vista auxiliar obtém a projeção acumulada da direção VS, resultando na vista superior, e obtém a verdadeira grandeza da direção VF, correspondente à direção da vista frontal. Finalmente, a terceira vista auxiliar obtém a

projeção acumulada de VF, resultando na vista frontal da peça. A Figura 7 apresenta as vistas originais da peça (Figura 7a) e as vistas principais da peça com a linha de terra da última vista auxiliar ajustada para ficar alinhada com a direção horizontal (Figura 7b).

**Figura 7: Vistas principais: a) Épura com projeções originais; b) Épura com as vistas principais resultado do processo de MPP sucessivas.**

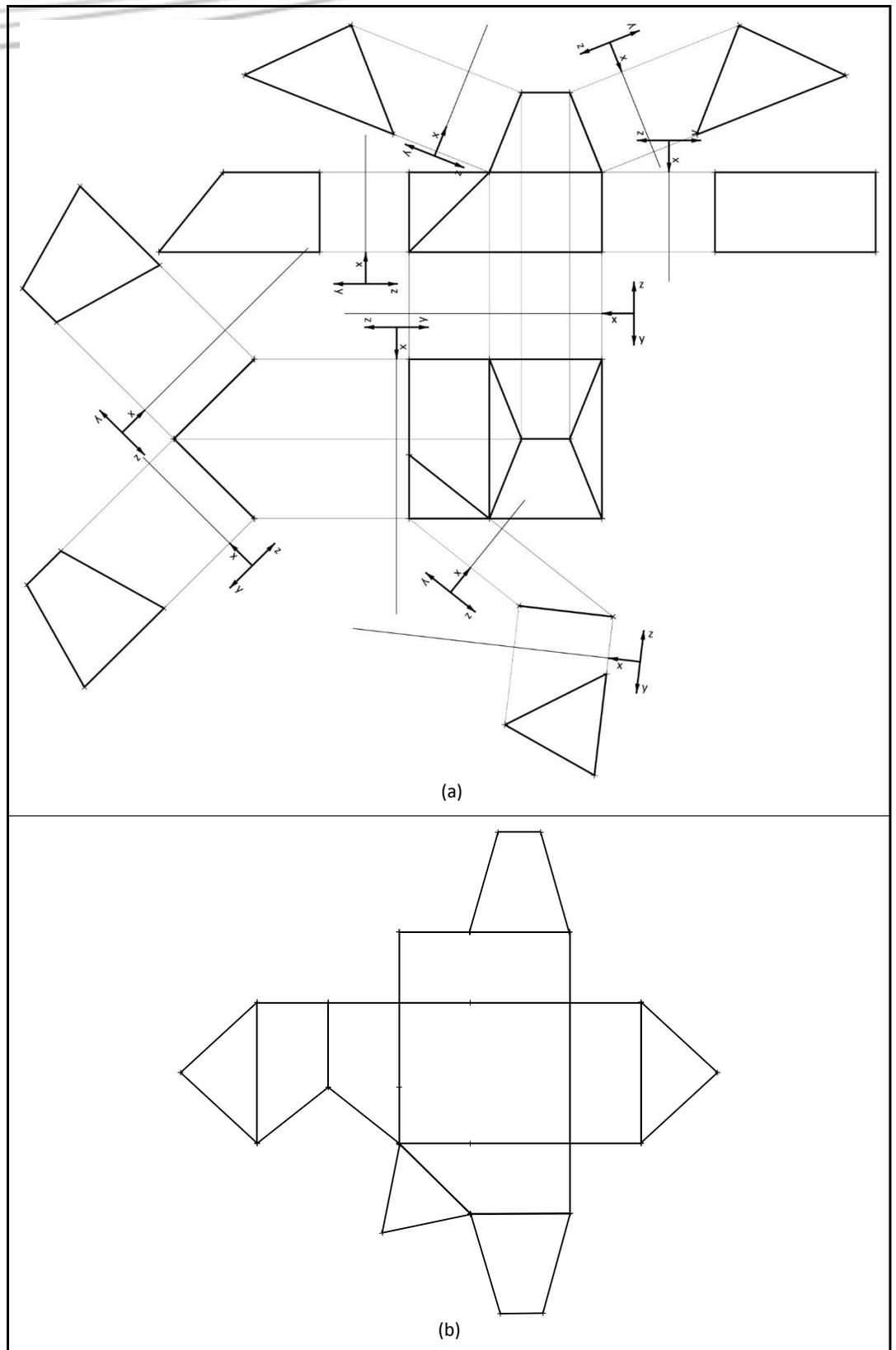


Fonte: Elaborado pelo autor.

Após obter as vistas principais, o sólido já evidencia as suas principais dimensões de forma precisa. Agora, é possível realizar novas operações descritivas para obter as verdadeiras grandezas de todas as suas faces e, assim, poder montar o desenho da superfície do sólido planificada. A Figura 8 apresenta a representação do sólido da Figura 7b, em vistas principais, em uma épura com nove (9) vistas auxiliares para determinar as verdadeiras grandezas de todas as faces que não resultaram em verdadeira grandeza nas vistas principais. Estas vistas auxiliares poderiam ter sido realizadas diretamente na sequência da Figura 6. No entanto, as vistas foram reposicionadas para facilitar a visualização para fins didáticos, além de facilitar o estudo e a construção das novas vistas auxiliares.

Cada uma das faces em verdadeira grandeza pode ser alinhada com a sua face adjacente para construir planificação da superfície do sólido. O cuidado principal na montagem da planificação deve ser em manter o perímetro o menor possível, o que minimiza o comprimento de colagem. A Figura 8b apresenta a superfície planificada do sólido. A partir desta superfície planificada, é possível construir um modelo físico do sólido a partir de uma folha de papel recortada. Esta é uma aplicação que pode ser um recurso didático interessante, pois permite criar um apoio empírico concreto, o que reforça a percepção de vários conceitos da GD. O modelo físico permite comparar a perspectiva gerada através da GD com a perspectiva real percebida pela visão humana.

Figura 8: Vistas auxiliares para determinar as verdadeiras grandezas de todas as faces.



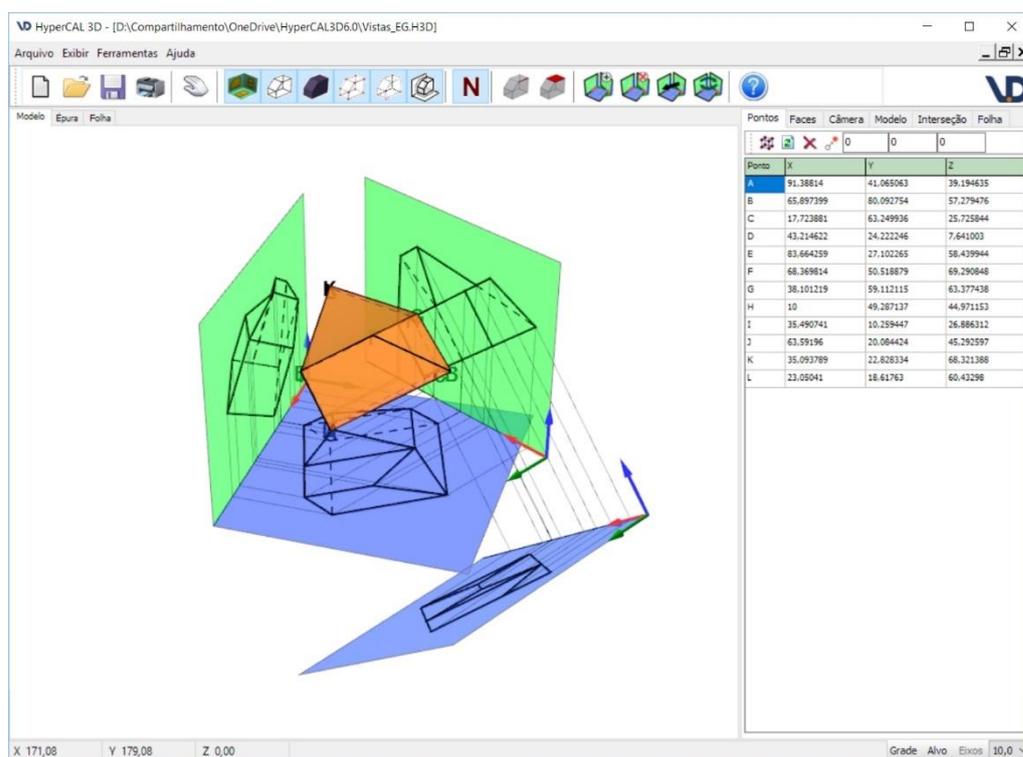
Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4. Implementação no Ensino

A implementação destes conteúdos no processo de ensino em sala de aula só tem sentido no estudo de objetos sólidos. No entanto, isto pode aumentar muito o trabalho manual para a montagem e para a execução de exemplos didáticos. Assim, foi desenvolvido um aplicativo que auxilia a montagem dos sólidos e também conta com as principais operações a GD. Trata-se do HyperCAL<sup>3D</sup> (TEIXEIRA e DOS SANTOS, 2013), um aplicativo com características únicas em nível internacional no que tange aos aspectos das GD.

O HyperCAL<sup>3D</sup> permite a construção de modelos sólidos tridimensionais, a sua manipulação e ainda apresenta várias ferramentas que simulam de forma vetorial todas as operações da GD. As operações são realizadas em 3D através de manipulação direta e em tempo real pelos usuários e podem ser visualizadas em épora. Todas as ilustrações deste artigo foram criadas com auxílio do HyperCAL<sup>3D</sup>. Este aplicativo é usado tanto pelos professores, para montar exemplos e apresentações didáticas, como pelos alunos, que podem resolver problemas diretamente no computador utilizando os conhecimentos de GD.

Figura 9: Interface tridimensional do HyperCAL<sup>3D</sup> com o exemplo das Figuras 6-8.

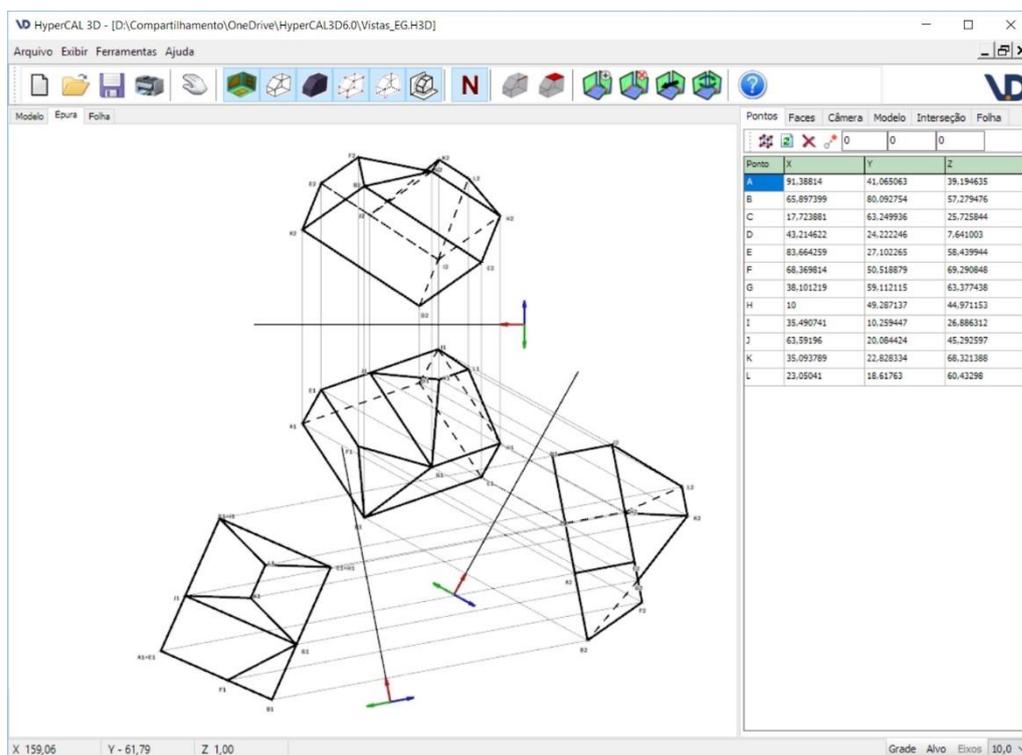


Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, como o HyperCAL<sup>3D</sup> facilita a solução de problemas de GD, criando facilmente vistas auxiliares, é possível incluir os conteúdos de perspectiva, vistas principais e planificação sem aumentar a carga de trabalho dos professores, o que facilita a adesão pelos docentes, além de permitir a criação de um número ilimitado de problemas de estudo e a sua testagem previamente de forma facilitada. A Figura 9

apresenta a interface do HyperCAL<sup>3D</sup> com o exemplo das Figuras 6-8, onde é mostrado o ambiente 3D do *software*. No entanto, o mesmo ainda dispõe de uma interface bidimensional que mostra a épora.

Figura 10: Interface em Épora (Bidimensional) do HyperCAL<sup>3D</sup> com o exemplo das Figuras 6-8.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5. Considerações Finais

A GD é fundamental nos cursos relacionados às atividades de projeto, como a Engenharia a Arquitetura e o Design. O ensino tradicional da GD não aproveita o potencial desta disciplina tão importante para a formação intelectual dos projetistas.

O ensino de GD tem muito a se beneficiar com o estudo da Perspectiva Axonométrica e das vistas principais como aplicações das vistas auxiliares. A perspectiva reforça a ideia básica do conceito de mudança de sistema de referência (mudança de plano), que consiste em criar vistas auxiliares para atender a determinados critérios de visualização. Além disso, permite compreender melhor os objetos em sua forma tridimensional. Por outro lado, as vistas principais consistem em aplicações ainda mais complexas que desafiam o estudante a aplicar os conceitos associados às vistas auxiliares para definir as direções corretas para a sua aplicação. Estes conteúdos associados a uma metodologia que tem o projeto como sua ideia central, baseada em objetos sólidos e com recursos tecnológicos, como o HyperCAL<sup>3D</sup>, resultam em um processo de aprendizagem contextualizado e motivador para os alunos. A prova disso é o considerável aumento dos níveis de aprovação da disciplina, mesmo com o aumento do nível de complexidade gerado por estes conteúdos para os alunos.

### Referências

ADAMS, J. A. e BILLOW, J.M. **Descriptive Geometry and Geometric Modeling: A Basis for Design**. Holt, Rinehart and Winston Ed., New York, 1988.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 10067: Princípios gerais de representação em desenho técnico. Rio de Janeiro: ABNT, 1995.

CECCARELLI, M. Editor. Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science: Their Contributions and Legacies, Part 2. HISTORY OF MECHANISM AND MACHINE SCIENCE, Volume 7. Springer, New York, 2010.

GRAY, J. Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century. Springer Ed., Londres, 2007.

HAWK, M. C. **Theory and problems of descriptive geometry**. Shaum's Outline Series, McGRAW-HILL Ed., New York, 1962.

MONGE, Gaspar. **Géométrie Descriptive**: Théorie des ombres et de la perspective. Paris: Libraire pour les Mathématiques, 1827. 294p.

TEIXEIRA, Fábio G. e DOS SANTOS, Sérgio L. (2013). HyperCAL<sup>3D</sup>, uma ferramenta computacional para o apoio do processo de ensino-aprendizagem de geometria descritiva. **Design & Tecnologia**, Porto Alegre, no. 06, pp.20-32, 2013.

TEIXEIRA, Fábio G.; SILVA, Régio P.; SILVA, Tânia L. K.; HOFFMANN, Anelise T. The Descriptive Geometry Education Through the Design-based Learning. In: 12th International Conference on Geometry and Graphics, Salvador, 2006. **Proceedings...** Salvador, 2006.