

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA TRIDIMENSIONAL COM
RESTRIÇÃO DE TENSÕES

por

Eduardo Decarli Savi

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Dezembro de 2018.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA TRIDIMENSIONAL COM
RESTRIÇÃO DE TENSÕES

por

Eduardo Decarli Savi

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof^a. Thamy Cristina Hayashi
Coordenadora do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes.

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz

Prof. Dr. Felipe Tempel Stumpf

Porto Alegre, Dezembro de 2018.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Sidoli Savi e Edi Decarli Savi e aos meus irmãos, Vinícius Decarli Savi e Fábio Decarli Savi, pela confiança e apoio incondicional, sempre. O esforço de vocês foi fundamental para a conclusão dessa etapa de minha vida.

Agradeço ao Prof. Herbert Gomes Martins, pela dedicação com que acolheu meu projeto, sempre disposto a orientar e compartilhar seu conhecimento, permitindo a conclusão deste trabalho.

Agradeço aos amigos e colegas que contribuíram para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo ensino de excelência passado.

SAVI, E. D. **Otimização topológica tridimensional com restrição de tensões**. 2018. 15p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

RESUMO

A possibilidade de projetar peças mecânicas otimizadas topologicamente em termos da massa do material e que ao mesmo tempo atenda a critérios de falha está cada vez mais presente na rotina de tarefas do engenheiro projetista. Projetos mecânicos eficientes necessariamente passam por alguma forma de otimização. *Softwares* comerciais poderosos (Pyxis, Tosca, Nx 12, etc) já disponibilizam o emprego da otimização topológica em projetos com facilidades ao usuário cada vez maiores. O problema de otimização topológica com restrição de tensões, historicamente foi o que primeiramente recebeu a atenção, com os trabalhos pioneiros de Maxwell e Michell. Sua dualidade com a otimização topológica baseada em rigidez tem sido investigada, tendo sido demonstrada a sua equivalência. Neste trabalho uma otimização topológica com restrição de tensões é apresentada para estruturas tridimensionais. A formulação segue os princípios do consagrado método BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*), estendido aqui para estruturas tridimensionais e sob um enfoque sem a necessidade de cálculos de gradientes para tensões equivalentes de von Mises, no contexto do Método dos Elementos Finitos. Exemplos demonstrativos da aplicação da metodologia em exemplos simples e de complexidade e esforço computacional maiores são apresentados juntamente com conclusões a respeito dos parâmetros empregados nas simulações como filtros lineares para as tensões, taxas evolucionárias e tolerância para convergência do método. Ao final, conclui-se que a implementação foi satisfatória, nos casos analisados, apresentando topologias consistentes com as indicadas na literatura.

PALAVRAS-CHAVE: otimização topológica, restrição de tensão, BESO, elementos finitos.

SAVI, E. D. **Tridimensional topology optimization with stress constraints**. 2018. 15p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

ABSTRACT

The ability in designing topologically optimized mechanical parts in terms of mass which still complies with failure criteria is becoming more and more present in the daily routine of the designer. Efficient designs should, somehow, necessarily be optimized. Powerful commercial software (Pyxis, Tosca, Nx 12, etc.) already provide easy-to-use processing tools for topology optimization solutions. The problem of topological optimization with stress constraint historically was the one that received first attention like in the pioneering works by Maxwell and Michell. Its duality with a topological optimization based on stiffness has been investigated and its equivalence has been allegedly demonstrated. In this work a topological optimization with stress constraint is presented for three-dimensional structures. The formulation follows the well-established principles of BESO (Bidirectional Evolutionary Structural Optimization) and was extended for three-dimensional structures using an approach that dispenses, in a Finite Element Method context, gradient evaluations for von Mises equivalent stress. The examples of the methodology are applied to simple examples and with increase complexity and computational cost. Remarks on the parameters used in the simulations like linear filter for stress, evolutionary rate and tolerance values for the method's convergence are presented and discussed. At the end, it is concluded that the implementation was satisfactory in the test cases, with the topologies that are consistent with those found in the literature.

KEYWORDS: topology optimization, stress constraints, BESO, finite elements.

ÍNDICE

	Pág.
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
ÍNDICE	vi
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	viii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Objetivo.....	2
1.2.1 Objetivo específico.....	2
2 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	3
3.1 Definição de Otimização	3
3.1.1 Métodos BESO e SIMP	4
3.1.2 Síntese do algoritmo BESO com restrição de tensões	4
3.2 Cálculo da proporção de tensão.....	5
3.3 Cálculo da <i>compliance</i>	6
3.4 Estabilização do processo evolutivo.....	6
3.5 Esquema de filtro para tratar problemas de dependência de malha e formação de padrão de tabuleiro.....	6
3.6 Elemento finito hexaédrico tridimensional de 8 nós.....	6
4 METODOLOGIA.....	7
4.1 Otimização topológica de um viga engastada livre.....	8
4.2 Otimização topológica de estrutura de quadricóptero simplificada	9
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	10
5.1 Otimização topológica de viga engastada livre (Validação)	10
5.2 Otimização topológica de estrutura de quadricóptero simplificada	12
6 CONCLUSÕES	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	14
APÊNDICE.....	16

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.1 - Otimização topológica aplicada a suporte de turbinas de avião.....	1
Figura 3.1- Elemento finito isoparamétrico de 8 nós e suas coordenadas naturais.....	7
Figura 4.1 – Formas de evolução do ER ao longo das iterações.	8
Figura 4.2 - Dimensões do domínio de projeto, condições de contorno e condições de carregamento para viga em balanço (Huang e Xie, 2010).	8
Figura 4.3 – Dimensões, carregamentos e vinculações para o exemplo do quadricóptero seguido de exemplo de estrutura de quadricóptero.	9
Figura 5.1 – Evolução da <i>compliance</i> , fração de volume e topologia para otimização de viga engastada livre com restrição de volume (Adaptado de Huang e Xie 2010).	10
Figura 5.2 – Evolução da <i>compliance</i> , fração de volume e topologia final para otimização de viga engastada livre com restrição de volume.	11
Figura 5.3 – Evolução da máxima tensão de von Mises, fração de volume e topologia final para otimização de viga engastada livre baseada em Tensão Proporcional com restrição de tensão.	11
Figura 5.4 – Evolução da máxima tensão de von Mises, fração de volume e topologia final para otimização de viga engastada livre baseada em <i>compliance</i> com restrição de tensão.	12
Figura 5.5 – Evolução da máxima tensão de von Mises, fração de volume e topologia final para otimização de quadricóptero baseada em tensão proporcional com restrição de tensão.....	13
Figura 5.6 – Evolução da máxima tensão de von Mises, fração de volume e topologia final para otimização de quadricóptero baseada em <i>compliance</i> com restrição de tensão.....	13
Figura A.1- Fluxograma do método BESO com restrições de tensões.	16

LISTA DE TABELAS

	Pág.
Tabela 4.1 – Dados de entrada para otimização de viga em balanço (<i>Compliance</i>).....	9
Tabela 4.2 – Dados de entrada para otimização de viga em balanço (Tensão proporcional e <i>Compliance</i>).....	9
Tabela 4.3 – Dados de entrada para otimização da estrutura de quadricóptero (Tensão proporcional e <i>Compliance</i>).....	10
Tabela 5.1 – Comparação entre os algoritmos quanto ao número de iterações, fração de volume, <i>compliance</i> e máxima tensão de Von Mises para otimização de viga engastada livre.....	12
Tabela 5.2 – Comparação entre os algoritmos quanto ao número de iterações, fração de volume, <i>compliance</i> e máxima tensão de Von Mises para otimização de quadricóptero.....	13

1 INTRODUÇÃO

A otimização topológica (OT) de estruturas pode ser definida como a alocação sistemática (colocação ou retirada) de material dentro de um domínio de projeto e sob carregamentos e condições de contorno com o objetivo obter uma estrutura mais eficiente em termos, por exemplo, de maior relação entre rigidez e peso. A otimização topológica é um ramo relativamente novo dentro do estudo de otimização de estruturas. Os princípios básicos de otimização topológicas para estruturas contínuas foram propostos por Bendsøe e Kikuchi em 1988. Desde então, o assunto tem sido extensivamente estudado com diferentes abordagens que, em geral, convergem para a obtenção de estruturas de alta performance ao preço do aumento na complexidade da geometria do componente ou estrutura. Recentemente, os avanços da manufatura aditiva (impressão 3D) tornaram economicamente viável a fabricação de componentes com geometrias de alta complexidade. Para exemplificar, em 2013 a companhia General Electric lançou um desafio de otimização do suporte de turbinas de avião. A figura 1.1 apresenta o suporte não otimizado, o suporte otimizado e a bancada de ensaios do suporte otimizado. Como resultado, a diferença de massa entre suporte não-otimizado e o suporte otimizado foi de 1,7 Kg, o que representou uma redução de 80%. Tanto na aviação quanto no ramo automobilístico, redução de peso quase sempre representa economia de combustível. Assim, supondo que a redução de peso aplicada ao suporte seja aplicada em todas as aeronaves ao redor do mundo, poder-se-ia obter uma economia anual que varia entre 45 milhões e 83 milhões de litros de combustível [GE Challenge, 2018]. Assim, a otimização topológica pode gerar ganhos econômicos bem como ter impacto ambiental positivo através da redução do consumo de material e energia.



Figura 1.1 - Otimização topológica aplicada a suporte de turbinas de avião.
[GE Challenge, 2018]

1.1 Motivação

Qualquer componente não otimizado que seja parte de uma máquina ou sistema, possivelmente possui algum material a mais que o necessário para cumprir sua função estrutural. Em termos de projeto, maior quantidade de material representa aumento do peso do componente, o que demanda uma estrutura mais robusta para suportar o componente, maior custo de transporte e maior consumo de energia para mover o componente, no caso deste ser um componente móvel. Assim, através da otimização topológica pode-se obter estruturas que, em comparação com estruturas não otimizadas, podem suportar os mesmos carregamentos (ou até mais) utilizando menor quantidade de material. Por outro lado, a otimização topológica pode resultar em componentes de geometrias complexas e, assim, difíceis de serem fabricados pelos métodos de manufatura tradicionais. No entanto, a otimização topológica tende a ganhar importância dentro da indústria com os avanços dos métodos de manufatura e fortalecimento da manufatura aditiva (impressão em três dimensões) que permitem a fabricação de componentes com geometrias complexas. Assim, este trabalho motiva-se em investigar e implementar código de otimização topológica para estruturas tridimensionais com restrição de tensões e aplicá-lo a exemplos clássicos disponíveis na literatura.

1.2 Objetivo

O principal objetivo do trabalho é o de desenvolver a otimização topológica de estruturas em três dimensões através do método BESO (Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional). Adicionalmente, a otimização incluiu restrição de tensão para verificar o estado de tensões da estrutura frente ao critério de falha de von Mises, adequado para materiais metálicos.

1.2.1 Objetivo específico

Como objetivo específico teve-se a implementação e adequação de código em linguagem MATLAB (2012) para realizar análise em elementos finitos, de forma eficiente, em uma estrutura retangular com dimensões máximas definidas, pré-processar e pós-processar resultados de forma gráfica. A partir disso, otimizar topologicamente a forma seguindo uma metodologia desenvolvida, garantindo tensões limites inferiores às tensões definidas pelo critério de falha de von Mises.

2 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Historicamente, o tema de otimização topológica foi inicialmente abordado por Maxwell (1872) e posteriormente por Michell (1904) em seu trabalho pioneiro sobre os limites de economia de materiais em estruturas apertadas. Com as possibilidades de processamento numérico e disponibilização de códigos fonte, o tema de otimização topológica tornou-se vasto, apesar de relativamente recente na literatura (Sigmund, 2001, Liu e Tovar, 2014). A maioria dos trabalhos está associada ao problema de otimização topológica para carregamentos estáticos com o objetivo de minimizar a energia de deformação (*compliance*) através da variação de densidades na distribuição de material.

Problemas de otimização topológica que envolvam grande número de elementos tendem a requerer um elevado esforço computacional. Nesse sentido Colominas *et al.* (2009) propuseram a introdução de técnicas de computação numérica de paralelização para reduzir o tempo computacional. O objetivo do problema de otimização foi encontrar a estrutura com menor peso sujeita a restrições de tensão. Colominas *et al.* (2009) identificaram que o estágio de obtenção de derivadas de primeira ordem para as restrições de tensão requerem grande esforço computacional. Para esse caso foi sugerido a utilização de processadores em paralelo para reduzir o tempo computacional. A paralelização do algoritmo apresentou redução no tempo de processamento. Essa diferença ficou mais pronunciada em problemas com elevado número de elementos os quais possuem maior número de variáveis de projeto.

Adicionalmente, Paris *et al.* (2010) sugeriu a otimização topológica com o objetivo de reduzir a massa sujeito a restrições de tensões. Segundo o autor, a abordagem não apresenta problema de padrão de tabuleiro e apresenta uma função objetivo mais realista do ponto de vista de engenharia. O autor propôs a comparação entre restrições de tensões aplicadas localmente, globalmente e em blocos. As restrições globais consistem em utilizar uma função que agrega os efeitos das restrições locais. Essa restrição apresenta enorme redução no esforço computacional, porém não garante a violação de algumas restrições locais. Assim, a imposição de restrições locais é mais confiável, uma vez que essa garante que todos os elementos não violam os critérios de tensão limite. No entanto, a aplicação de restrições locais implica em alto esforço computacional.

Huang e Xie (2010) apresentam em seu livro sobre o método BESO, um capítulo dedicado à otimização de estruturas planas com restrições de tensões. Lá são apresentados os conceitos de tensão equivalente de von Mises assim como os cálculos da sensibilidade (gradientes) das tensões nos elementos em relação às variáveis de projeto (densidades). Exemplos simples da viga engastada livre e outros do tipo estruturas de Michell (1904) (ponte com carga no vão central e torção em torno de suporte fixo) são apresentados para o código BESO bidimensional disponibilizado no livro.

Na revisão bibliográfica, identificou-se alguns trabalhos no Departamento de Engenharia

Mecânica da UFRGS relacionados à otimização topológica com restrição de tensão (Varella, 2015, Thesing, 2013), mas nenhum deles com a formulação para estruturas 3D (Silva, 2012).

Liu e Tovar (2014) apresentam código implementado em Matlab para OT tridimensional para minimização da *compliance* com restrições de volume, ou seja, encontrar a topologia que minimize o trabalho realizado por forças externas para uma determinada fração de volume final desejada. A abordagem com densidades foi utilizada para evitar a formação de uma estrutura perfurada. Supondo uma estrutura com um furo e outra com dois furos menores equivalentes ao da primeira estrutura, a segunda estrutura possui um menor valor de *compliance*. É plausível imaginar que a *compliance* poderia ser reduzida através do aumento sistemático no número de furos com dimensões cada vez menores. Assim, densidades intermediárias são utilizadas, incorporando o problema da estrutura perfurada à própria formulação do problema. No entanto, a utilização de densidades intermediárias dificulta ou impossibilita a fabricação da estrutura. Para contornar esse problema foi incluída uma penalização às densidades intermediárias similar ao método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) que direciona as densidades intermediárias para valores zero ou um. Finalmente, o código implementado em 169 linhas do software MATLAB (2012) convergiu para estruturas ótimas nos exemplos de otimização de viga em balanço, viga MBB e viga em formato de L.

Xia *et al.* (2018) propuseram a minimização da tensão sujeita a uma restrição de quantidade de material disponível. O método BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*), que permite a adição e remoção de material, foi implementado juntamente com um filtro que evita os problemas de estrutura perfurada e elimina a dependência de malha. Apesar da tensão ser de natureza local, a função objetivo utiliza uma representação da tensão global dada pela norma-p, adaptação que pode levar a problemas. A sensibilidade é derivada a partir da função objetivo e indica a direção em que o algoritmo deve seguir dentro do espaço de projeto. Assim, a cada iteração, define-se quais elementos devem ser removidos ou adicionados. Ainda ao atingir a fração de volume desejada, o algoritmo executa mais algumas iterações para permitir a adição e remoção de material de uma região para outra dentro do espaço de projeto. O algoritmo implementado se mostrou efetivo na otimização de casos em duas e três dimensões.

Biyikli e To (2015) propuseram a comparação entre dois problemas de projeto bastante estudados: problema de otimização com restrições de tensão e o problema de minimização da energia de deformação. O primeiro objetiva obter a menor fração de volume que satisfaça a restrição de tensão. O segundo objetiva a minimização da energia de deformação para uma fração de volume determinada. O código desenvolvido foi nomeado pelos autores como otimização topológica proporcional e apresenta uma análise sem avaliação de sensibilidade explícita (gradientes) e que atribui densidades a cada um dos elementos. A densidade pode variar entre um valor muito próximo de 0 (para evitar singularidades) e 1, sendo que 0 representa elemento vazio (ausência de elemento) e 1 representa elemento sólido (presença do elemento). A cada iteração uma certa quantidade de elementos, denominados materiais alvo, têm sua densidade atualizada proporcionalmente ao seu nível de tensão equivalente de von Mises. Além disso, um filtro é aplicado às densidades com a finalidade de suavizar distribuições de densidades na vizinhança dos elementos. O filtro introduz ao algoritmo vantagens como a prevenção de regiões estreitas e cantos vivos, prevenção da ocorrência do fenômeno de tabuleiro e a imposição de dimensão mínima. A restrição de tensão implementada estabelece que todo elemento deve ter tensão de von Mises inferior ao limite do material. Finalmente, os autores concluem que, quando comparado ao algoritmo de minimização da energia de deformação, o algoritmo com restrições diretas de tensão, atinge menor fração de volume para uma mesma tensão assim como uma menor tensão para a mesma fração de volume.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Definição de Otimização

A otimização ou um problema de programação matemática (em termos de minimização), genericamente pode ser colocado da seguinte forma (Rao, 2009):

$$\text{Encontrar } \mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T, \text{ o qual minimiza } f(\mathbf{X}) \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a restrições de } g_j(\mathbf{X}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad l_j(\mathbf{X}) = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

onde \mathbf{X} é chamado de vetor de variáveis de projeto, $f(\mathbf{X})$ é a função objetivo, $g_j(\mathbf{X})$ são as m restrições de desigualdade, e $l_j(\mathbf{X})$ são as p restrições de igualdade. Os métodos existentes e mais adequados para resolver tal problema dependem largamente dos tipos de variáveis de projeto (inteiras, reais, mistas), da dificuldade de cálculos de gradientes da função objetivo, número e tipos de restrições (e também da dificuldade de cálculo de seus gradientes) além, obviamente, do comportamento da função objetivo.

Neste contexto, a otimização topológica é uma metodologia implementada no Método dos Elementos Finitos, de forma a melhor alocar material de uma estrutura, dentro de um espaço de trabalho, e sob condições de contorno e carregamentos, de forma a otimizar (maximizar ou minimizar) funções objetivos pré-definidas como massa, frequências naturais, tensões, carga de flambagem, etc. Neste sentido diferencia-se da otimização paramétrica e de forma, uma vez que a estrutura final pode assumir qualquer forma dentro do espaço(volume) de trabalho original.

3.1.1 Métodos BESO e SIMP

Diversas são as abordagens para tratar o problema de otimização topológica como ESO, BESO, SIMP, Level-set, etc. No método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*, Bendsøe, 1989) o domínio é discretizado em elementos finitos e uma abordagem baseada em densidade é utilizada para representar a presença parcial de material na região do espaço. Cada elemento tem uma densidade associada x_e (variáveis de projeto) que define a rigidez do elemento pelo seu módulo de elasticidade (material isotrópico) $E_e = E_{min} + x_e^p (E_0 - E_{min})$ com $x_e \in [0,1]$, e p um fator de penalização (que varia entre 1 e 3), sendo E_0 e E_{min} o módulo de elasticidade do material e um valor mínimo para evitar a retirada total do elemento, perda da conectividade de malha e singularidade da matriz de rigidez. A massa total da estrutura $M = \sum x_i v_i$ (v_i , volume de cada elemento) é a função objetivo a ser minimizada.

No método BESO, as densidades associadas x_e são variáveis discretas e que podem assumir apenas os valores 0 ou 1, ou de forma prática x_{min} e 1, sendo x_{min} um valor pequeno (neste trabalho, 1×10^{-3}). Em problemas de otimização de tensão, para evitar problemas de singularidade do cálculo das tensões em elementos que foram retirados, no contexto do BESO e SIMP, é empregado o conceito de relaxação- ε , a qual, durante o processo de cálculo, relaxa a condição de 0 e 1 para uma condição de densidades intermediárias (Le *et al.*, 2010) retornando à condição de densidades binárias posteriormente.

3.1.2 Síntese do algoritmo BESO com restrição de tensões

O problema de otimização topológica para mínima energia de deformação com restrições de tensão pode ser colocado como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } C = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \\ & \text{sujeito a: } \max(\sigma_i^{vm}) \leq \sigma_{lim}, \quad \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad x_{min} \leq x_i \leq 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Já o problema de otimização topológica com restrição de tensões pode ser colocado como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } V = \sum_{i=1}^{nelem} x_i v_i \\ & \text{sujeito a: } \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad \max(\sigma_i^{vm}) \leq \sigma_{lim}, \quad x_{min} \leq x_i \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

O problema (3), diferentemente de (2), é não-convexo e altamente não-linear (Biyikli e To, 2015). Percebe-se que em ambos os casos, não se define uma fração de volume final desejada. Este valor será aquele que resultar da otimização uma vez finalizado o processo e atendido a restrição de tensão. Desta forma, a condições iniciais do problema (espaço de trabalho inicial, condições

de contorno e carregamentos) devem gerar a estrutura que atenda à restrição de tensão (a partir de um projeto inicial viável). No contexto do BESO, $x_i = x_{min}$ ou $x_i = 1$. O volume total de material alvo (TM) a ser atingido em cada iteração é dado por $V_{i+1} = V_i(1 \pm ER)$, onde ER é a taxa evolucionária (percentual de material que será retirado/acrescentado) e o sinal dependerá se o critério de tensão é ou não violado (-, se não violado e +, se violado). Na próxima etapa, o algoritmo distribui a quantidade de material alvo V_{i+1} para os elementos segundo a proporção de tensão α_{is}^{norm} de cada elemento ou segundo a *compliance* α_{ic} (que serão explicadas adiante). A quantidade de material alvo deve ser distribuída iterativamente e ponderadamente, pelas proporções de tensão ou pelas energias de deformação. Então, os elementos sólidos ($x_i = 1$) que possuem sensibilidade menor que a sensibilidade limite são removidos. Analogamente, os elementos nulos ($x_i = x_{min}$) que possuem sensibilidade maior que a sensibilidade limite são adicionados. A sensibilidade limite é definida com base no volume total de material alvo (TM). Assim como no método BESO, aqui um modelo de densidade para o módulo elástico do material é empregado $E(x_i) = x_i^p E_1$, onde E_1 denota o módulo de elasticidade de um elemento sólido e p penaliza as variáveis de projeto na direção de aproximar as densidades intermediárias próximas dos extremos x_{min} e 1.

Na Figura A.1 no apêndice, apresenta-se um fluxograma de funcionamento do algoritmo BESO com restrições de tensões.

3.2 Cálculo da proporção de tensão

Para uma estrutura linear isotrópica tridimensional, as tensões de von Mises são definidas como:

$$\sigma_i^{vm} = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}} \quad (4)$$

onde $\sigma_i = (\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx})^T$ é o tensor de tensões cartesianas do elemento (colocado na forma de vetor). Em elementos finitos, a tensão do elemento pode ser calculada a partir dos deslocamentos nodais \mathbf{u}_i e das matrizes constitutiva \mathbf{D} e de deformação \mathbf{B} do elemento i , de forma que:

$$\sigma_i = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}_i \quad (5)$$

No método SIMP, a restrição da tensão é aproximada, visto que a real restrição de tensão é definida como $\max(\sigma_i^{vm}) - \sigma_{lim} \leq 0$ e que é uma função não-diferenciável. A alternativa encontrada é a utilização da norma- q para tensão a qual pondera (com expoente empírico q) as tensões nos elementos de forma que a restrição possa ser diferenciável $[\sum_{i=1}^{nelem} (\sigma_i^{vm})^q]^{1/q} \leq \sigma_{lim}$. Entretanto isto pode gerar problemas, dependendo do valor de q adotado.

Quando o esquema de interpolação de densidades é empregado, a tensão em um elemento i é calculada como $\sigma_i = x_e^p \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}_i$ (assumindo a tensão no centro geométrico do elemento) que aplicada à equação (5) resulta em $\sigma_i^{vm} = x_i^p \sigma_{i0}^{vm}$ onde o índice σ_{i0}^{vm} representa a tensão de von Mises no elemento sólido i ($x_i = 1$) e p um fator de ponderação. A sensibilidade das tensões nos elementos frente às variáveis de projeto x_i fica então definida como:

$$\alpha_{is} = \frac{\sigma_i^{vm}}{x_i} = x_i^{p-1} \sigma_{i0}^{vm} \quad (6)$$

A sensibilidade indicará a preferência de distribuição (retirada/colocação) de elementos na malha de elementos finitos, no contexto do BESO. Obviamente para elementos com $x_i = 1$, $\alpha_i = \sigma_{i0}^{vm}$ e para elementos com $x_i = x_{min}$, $\alpha_i = x_{min}^{p-1} \sigma_{i0}^{vm}$ que para $p \gg 1$, resultará em $\alpha_i = 0$. Na implementação deste trabalho é empregado o grau de proporção da tensão de von Mises, que segue a definição dada por Biyikli e To, 2015.

$$\alpha_{is}^{norm} = \frac{(\sigma_i^{vm})^q v_i}{\sum_{i=1}^{nelem} (\sigma_i^{vm})^q v_i} \quad (7)$$

onde v_i é o volume do elemento i , q é um expoente de proporcionalidade, $nelem$ é o número de elementos da estrutura.

3.3 Cálculo da *compliance*

A *compliance* é definida segundo Huang e Xie (2010) como a energia total de deformação de uma estrutura ou o trabalho realizado pela força externa:

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (8)$$

Quando um elemento sólido é removido da estrutura, a variação na energia total de deformação é igual a energia de deformação do elemento removido. Assim, define-se a sensibilidade para cada um dos elementos finitos como:

$$\alpha_{ic}^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i \quad (9)$$

A equação (9) indica que o aumento na *compliance* devido à remoção de um elemento i é igual a energia de deformação do próprio elemento. Essa definição é denominada *hard-kill* BESO e é um caso particular do método *soft-kill* BESO (utilizada nesse trabalho). O método *soft-kill* incorpora o modelo de material $E(x_i) = x_i^p E_1$ à sensibilidade, que fica definida como:

$$\alpha_{ic} = \frac{x_i^{p-1}}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i \quad (10)$$

onde \mathbf{K}_i^0 é a matriz de rigidez do elemento sólido e p é um fator de penalização. Nota-se que quando p tende ao infinito a rigidez e a sensibilidade dos elementos com densidades intermediárias tendem a zero, aproximando o valor das variáveis de projeto aos extremos x_{min} e 1.

3.4 Estabilização do processo evolutivo

Os valores de sensibilidade definidos nas seções anteriores para *compliance* e tensão proporcional podem ser ponderados com os valores de iterações anteriores a fim de estabilizar o método, utilizando o grau de proporção das tensões, por exemplo, $(\alpha^{norm})^{j+1} = \gamma(\alpha^{norm})^j + (1 - \gamma)(\alpha^{norm})^{j+1}$, ou utilizando a *compliance* $(\alpha_c)^{j+1} = \gamma(\alpha_c)^j + (1 - \gamma)(\alpha_c)^{j+1}$, sendo j o contador de iterações e γ um fator de momento (geralmente 0,5).

3.5 Esquema de filtro para tratar problemas de dependência de malha e formação de padrão de tabuleiro

Nos trabalhos de otimização topológica é usual o emprego de filtros de sensibilidade para evitar arestas, prevenção do fenômeno do padrão de tabuleiro, prevenção da dependência de malha, etc. Um simples filtro linear é aqui usado e vem definido como:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^N \omega(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^N \omega(r_{ij})} \quad (11)$$

onde N é o número de nós que são vizinhos (a uma distância menor ou igual r_{min}) do elemento i , r_{ij} é a distância entre o centro do elemento i e os nós j , $\omega(r_{ij})$ são fatores de ponderação linear ($\omega(r_{ij}) = r_{min} - r_{ij}$ para $dist(i, j) < r_{min}$ e $\omega_{ij} = 0$ para $dist(i, j) \geq r_{min}$) e α_j^n é a sensibilidade dos nós dentro da vizinhança de raio r_{min} com centro no elemento i .

3.6 Elemento finito hexaédrico tridimensional de 8 nós

Na implementação numérica emprega-se um elemento finito hexaédrico isoparamétrico de 8 nós (Figura 3.1).

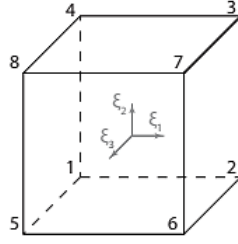


Figura 3.1- Elemento finito isoparamétrico de 8 nós e suas coordenadas naturais.

A matriz constitutiva elástica linear para este elemento tridimensional é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

As funções de forma, em termos das coordenadas naturais do elemento, são dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3) & N_2 &= (1+\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3) & N_3 &= (1+\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_3) \\ N_4 &= (1-\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_3) & N_5 &= (1-\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_3) & N_6 &= (1+\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_3) \\ N_7 &= (1+\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3) & N_8 &= (1-\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3) \end{aligned} \quad (13)$$

E a matriz de deformação \mathbf{B} é dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial \xi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \partial N_1/\partial \xi_2 & 0 & \dots & \partial N_8/\partial \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_1/\partial \xi_3 & \dots & 0 & \partial N_8/\partial \xi_3 \\ \partial N_1/\partial \xi_2 & \partial N_1/\partial \xi_1 & 0 & \dots & \partial N_8/\partial \xi_1 & 0 \\ 0 & \partial N_1/\partial \xi_3 & \partial N_1/\partial \xi_2 & \dots & \partial N_8/\partial \xi_3 & \partial N_8/\partial \xi_2 \\ \partial N_1/\partial \xi_3 & 0 & \partial N_1/\partial \xi_1 & \dots & 0 & \partial N_8/\partial \xi_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

A montagem das matrizes de rigidez do elemento segue o procedimento padrão em elementos finitos com integração de Gauss com 2x2x2 pontos de integração.

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (15)$$

sendo $\det(\mathbf{J})$, o determinante do Jacobiano da transformação x, y, z para ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

4 METODOLOGIA

Os programas implementados seguem o fluxograma apresentado no Apêndice. Os algoritmos incorporam as equações apresentadas na fundamentação teórica e diferem entre si somente quanto ao uso da proporção de tensão ou da *compliance* para distribuição de material na estrutura e quanto à utilização de um fator de amortecimento para a taxa evolucionária (apresentado posteriormente). A taxa evolucionária ER assume valor variável de modo que no início da otimização seja retirada ou adicionada uma fração de volume maior que ao final da otimização. Assim, define-se a taxa evolucionária como:

$$ER^j = ER_{inicial} - \frac{j(ER_{inicial} - ER_{final})}{j_{max}} \quad (16)$$

onde j é o contador de iterações, j_{max} o número máximo de iterações estimado, $ER_{inicial}$ e ER_{final} são dados de entrada do problema, tal que $ER_{inicial} > ER_{final}$. Para o caso da *compliance* um fator de amortecimento C (que varia entre 0 e 1) é incluído para acelerar a

convergência de ER na direção de ER_{final} a cada vez que a restrição de tensão é violada. A utilização desse fator acelera a convergência do algoritmo de minimização da *compliance* com restrição de tensão. Assim, a taxa evolucionária para o caso da *compliance* fica definida como:

$$ER^j = C^j \left(ER_{inicial} - \frac{j(ER_{inicial} - ER_{final})}{j_{max}} \right) \quad (17)$$

$$C^j = \begin{cases} C^j D, & \max(\sigma_i^{vm}) > \sigma_{lim} \\ C^j, & \max(\sigma_i^{vm}) \leq \sigma_{lim} \end{cases}$$

onde D é um coeficiente do fator de amortecimento que varia entre 0 e 1. Enquanto C inicia com valor unitário, D é um dado de entrada do problema. A Figura 4.1 apresenta graficamente três casos de taxas evolutivas ER para 50 iterações com violação da restrição de tensão nas iterações 30 e 40 e um coeficiente de amortecimento $D = 0,8$.

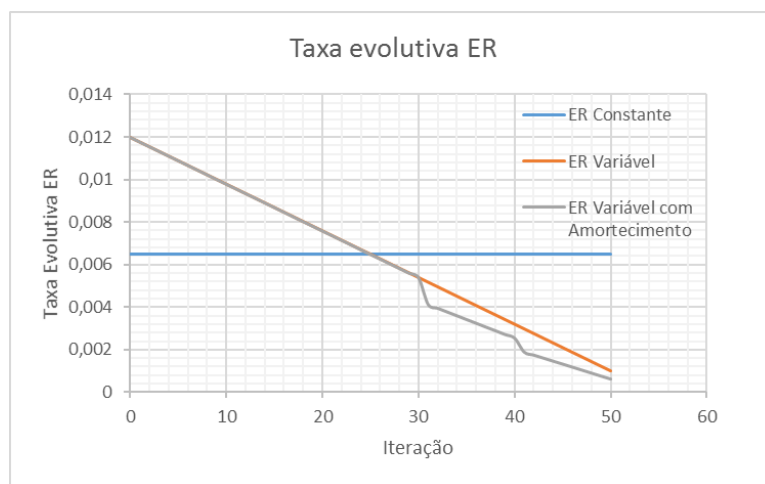


Figura 4.1 – Formas de evolução do ER ao longo das iterações.

4.1 Otimização topológica de um viga engastada livre

O problema de otimização topológica de viga engastada livre tem sido largamente utilizado (*benchmark*) na literatura para validar modelos de otimização. Por vezes os valores utilizados não são realistas, utilizando por exemplo, módulo de elasticidade e cargas com valores unitários. Neste trabalho, optou-se por validar os programas de otimização com base na *compliance* e na tensão proporcional através da comparação dos resultados de otimização de uma viga em balanço proposta por Huang e Xie, 2010. A Figura 4.2 apresenta a geometria do problema de otimização que considera carga de 100N e material com módulo de elasticidade de 100 GPa e Poisson de 0,3.

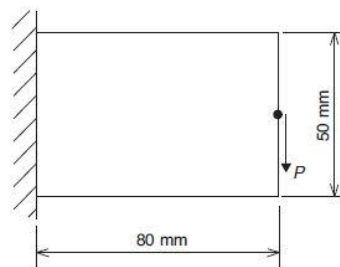


Figura 4.2 - Dimensões do domínio de projeto, condições de contorno e condições de carregamento para viga em balanço (Huang e Xie, 2010).

Huang e Xie (2010) otimizaram a estrutura para a minimização da *compliance* para uma fração de volume de 50% do volume original. Como o critério de parada deste problema é a fração de volume, o problema proposto por Huang e Xie (2010) é replicado de modo a validar o

programa de minimização da *compliance* e extrair o valor da tensão máxima que ocorre ao atingir a fração de volume requerida de 50%. O valor máximo de tensão que ocorre na estrutura otimizada por Huang e Xie (2010) pode então ser utilizado como restrição de tensão para os programas implementados nesse trabalho. Essa comparação é possível pois segundo Li *et al.* (1999), o problema de otimização com critério de rigidez é equivalente ao problema de otimização com critério de tensão para a fração de volume especificada. Assim, dada a restrição de tensão como parâmetro de entrada nos algoritmos implementados, espera-se obter fração de volume de 50% definida Huang e Xie (2010). Os parâmetros utilizados para a otimização da viga em balanço são apresentados na Tabela 4.1 e os resultados são apresentados na seção 5.

Tabela 4.1 – Dados de entrada para otimização de viga em balanço (*Compliance*).

	$nelx$	$nely$	$nelz$	P [N]	E [GPa]	ν	Fração de Volume	ER	r_{min}	x_{min}	ρ
Huang e Xie (2010)	80	-	50	100	100	0,3	0,5	2×10^{-2}	3	1×10^{-3}	3
<i>Compliance</i>	80	1	50	100	100	0,3	0,5	$2,2 \times 10^{-2}$	3	1×10^{-3}	3

Com a tensão máxima alcançada na fração de volume de 50% definiu-se os parâmetros de entrada para a otimização da viga em balanço com os algoritmos de tensão proporcional com restrição de tensão e *compliance* com restrição de tensão. Os parâmetros utilizados são apresentados na tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Dados de entrada para otimização de viga em balanço (Tensão proporcional e *Compliance*).

	$nelx$	$nely$	$nelz$	P [N]	E [GPa]	ν	σ_{max}^{vm} [MPa]	ER_{max}	ER_{min}	r_{min}	x_{min}	ρ	D
<i>Compliance</i>	80	1	50	100	100	0,3	57,36	$1,2 \times 10^{-2}$	1×10^{-3}	3	1×10^{-3}	3	0,5
Tensão Proporcional	80	1	50	100	100	0,3	57,36	$1,2 \times 10^{-2}$	1×10^{-3}	3	1×10^{-3}	3	-

4.2 Otimização topológica de estrutura de quadricóptero simplificada

Para aplicação da programação desenvolvida, neste exemplo, a estrutura de suporte de um quadricóptero é otimizada frente à massa, levando em conta restrições de tensões do material de que será feito. As dimensões do volume inicial de projeto com os carregamentos e vinculações são as indicadas na Figura 4.3.

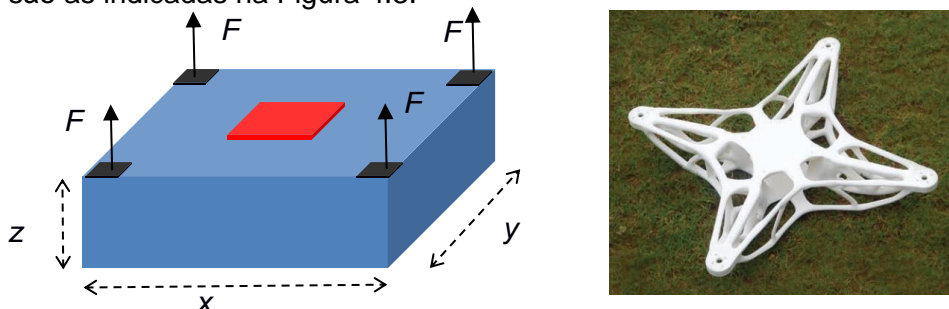


Figura 4.3 – Dimensões, carregamentos e vinculações para o exemplo do quadricóptero seguido de exemplo de estrutura de quadricóptero.

Neste exemplo, as dimensões da estrutura são $x = y = 0,45 \text{ m}$ e $z = 0,18 \text{ m}$ como indicado na Figura 4.3. O carregamento é aplicado distribuído nos quatro cantos com valor $F = 1500 \text{ N}$. O selecionado para o componente é o acrílico-butadieno-estireno (ABS), o qual é utilizado em processos de manufatura aditiva (impressão 3D) e possui com módulo de

elasticidade de $\sigma_{lim} = 43,6$ MPa (Ultimaker 2017). Segundo Cantrell et al. (2017), algumas propriedades de componentes produzidos com ABS e manufatura aditiva apresentam comportamento anisotrópico, no entanto, por simplificação assume-se comportamento isotrópico. Além disso, o material ABS apresenta significativo comportamento de fluência, o que incorre na aplicação de um fator de redução da tensão de escoamento (aqui usada como tensão limite) de valor 10 para atenuar esse efeito indesejado e, como consequência, utiliza-se somente o início da região elástica da curva tensão e deformação. Assim, os parâmetros utilizados para a otimização da estrutura de quadricóptero são apresentadas na tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Dados de entrada para otimização da estrutura de quadricóptero (Tensão proporcional e *Compliance*).

	<i>nelx</i>	<i>nely</i>	<i>nelz</i>	<i>P</i> [N]	<i>E</i> [GPa]	<i>v</i>	σ_{max}^{vm} [MPa]	<i>ER</i> _{max}	<i>ER</i> _{min}	<i>r</i> _{min}	<i>x</i> _{min}	ρ	D
<i>Compliance</i>	40	40	16	1500	1,68	0,3	4,366	5×10^{-2}	1×10^{-3}	3	1×10^{-6}	3	0,75
Tensão Proporcional	40	40	16	1500	1,68	0,3	4,366	2×10^{-2}	5×10^{-4}	3	1×10^{-6}	3	-

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 Otimização topológica de viga engastada livre (Validação)

Os resultados obtidos por Huang e Xie (2010) com elementos planos, são apresentados na Figura 5.1. A Figura 5.2 apresenta os resultados obtidos pelo algoritmo implementado de minimização da *compliance* com restrição de volume (adaptado para o caso plano com um elemento no eixo y).

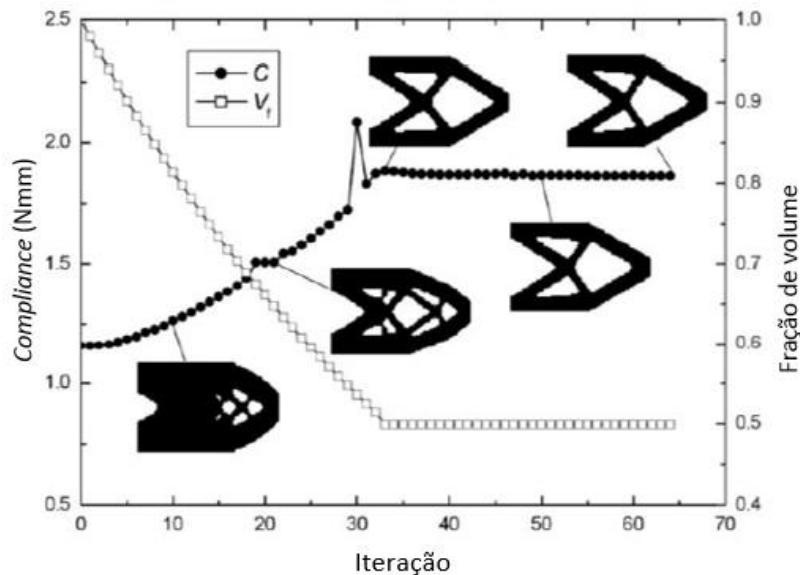


Figura 5.1 – Evolução da *compliance*, fração de volume e topologia para otimização de viga engastada livre com restrição de volume (Adaptado de Huang e Xie 2010).

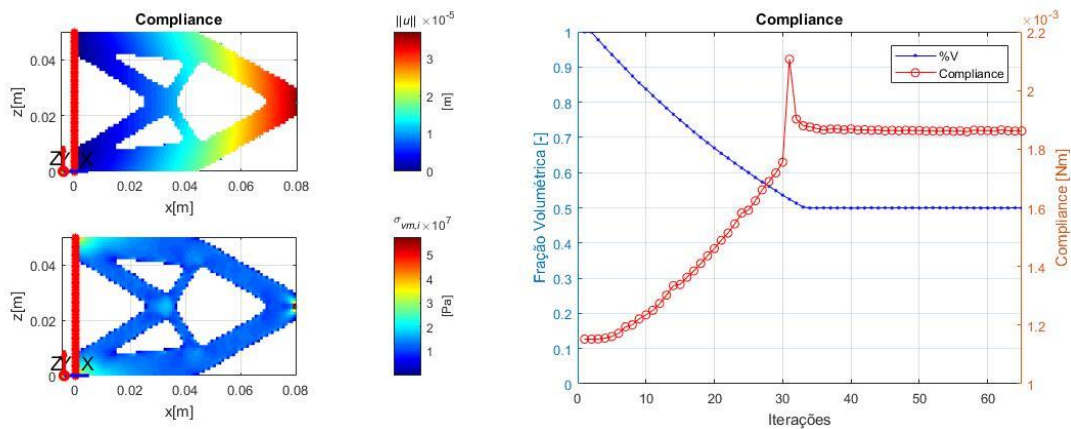


Figura 5.2 – Evolução da *compliance*, fração de volume e topologia final para otimização de viga engastada livre com restrição de volume.

Os resultados assemelham-se muito quanto à topologia final. Os dois algoritmos atendem a restrição de volume imposta. O valor da *compliance* apresenta um pico nos dois casos. Esse pico ocorre devido à “quebra” de barras próximas à extremidade direita da viga e pode ser observado na Figura 5.1 pela diferença da topologia entre a estrutura na iteração 20 em comparação com a iteração 33. O valor da *compliance* obtida por Huang e Xie (2010) foi de $1,865 \text{ Nmm}$ enquanto que o valor da *compliance* no algoritmo implementado foi de $1,862 \text{ Nmm}$. Os resultados apresentam significativa semelhança tanto no valor da função objetivo quanto na topologia final. O valor da tensão de von Mises obtido nas últimas iterações da otimização foi de $57,36 \text{ MPa}$ (valor que define a tensão limite para os algoritmos com restrição de tensão, a ser utilizado em seguida).

Os resultados das otimizações de tensão proporcional com restrição de tensão e *compliance* com restrição de tensão são apresentados nas Figuras 5.3 e 5.4.

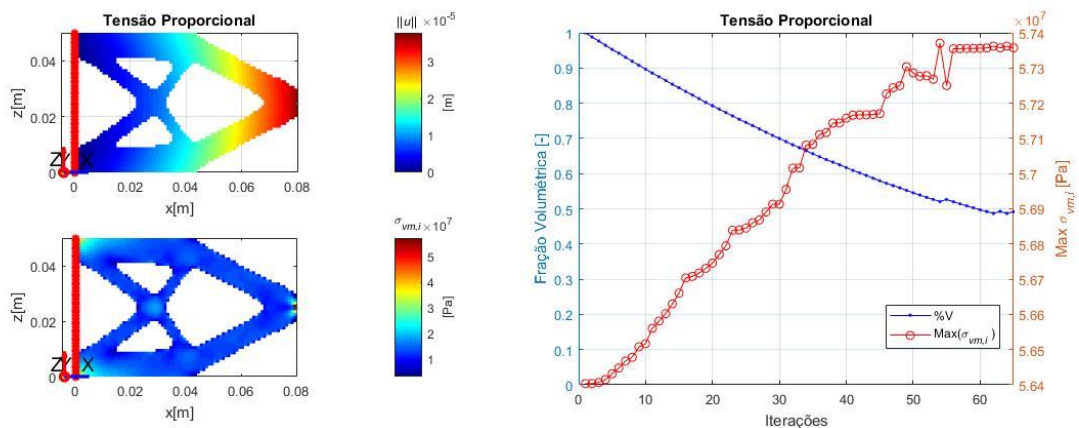


Figura 5.3 – Evolução da máxima tensão de von Mises, fração de volume e topologia final para otimização de viga engastada livre baseada em Tensão Proporcional com restrição de tensão.

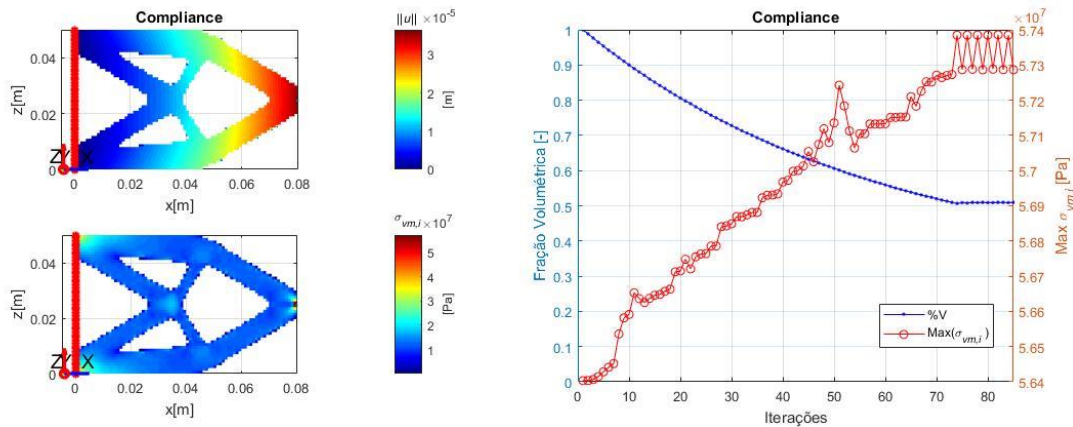


Figura 5.4 – Evolução da máxima tensão de von Mises, fração de volume e topologia final para otimização de viga engastada livre baseada em *compliance* com restrição de tensão.

Tabela 5.1 – Comparação entre os algoritmos quanto ao número de iterações, fração de volume, *compliance* e máxima tensão de Von Mises para otimização de viga engastada livre.

	Número de Iterações	Fração de Volume	<i>Compliance</i> [Nmm]	σ_{max}^{vm} [MPa]
Huang e Xie (2010)	65	0,5	1,865	-
<i>Compliance</i> com Restrição de Volume	65	0,5	1,862	57,36
Tensão Proporcional <i>c</i> / Restrição de Tensões	65	0,492	1,902	57,35
<i>Compliance</i> com Restrição de Tensões	85	0,509	1,830	57,29

O modelamento baseado na tensão proporcional leva a uma estrutura com menor fração de volume que o baseado na *compliance*. Pode-se notar que os resultados são praticamente iguais, a menos da inclinação das barras internas finais na estrutura otimizada. No caso do modelamento baseado na *compliance*, as barras são mais inclinadas que no caso do modelamento baseado na tensão proporcional. Como a estrutura final tem menos massa no primeiro caso, o valor da *compliance* é maior que no segundo caso. Além disso, pode-se perceber que o modelamento de tensão proporcional redistribuiu material até que a tensão máxima fique muito próxima do valor da restrição (mas ainda assim abaixo dela). Por outro lado, o algoritmo baseado em *compliance* oscila entre valores levemente maiores que a restrição de tensão e valores abaixo da restrição de tensão. Essa oscilação evidencia que o algoritmo baseado em *compliance* apresentou certa dificuldade para aproximar-se do valor da restrição de tensão mesmo com a implementação do fator de amortecimento para reduzir a quantidade de elementos redistribuídos a cada iteração. Por fim, percebe-se que os dois algoritmos atenderam à restrição de tensão imposta.

5.2 Otimização topológica de estrutura de quadricóptero simplificada

Os resultados obtidos para a otimização da estrutura de quadricóptero são apresentados na figura 5.5 para algoritmo baseado em tensão proporcional e na figura 5.6 para o algoritmo baseado em *compliance*.

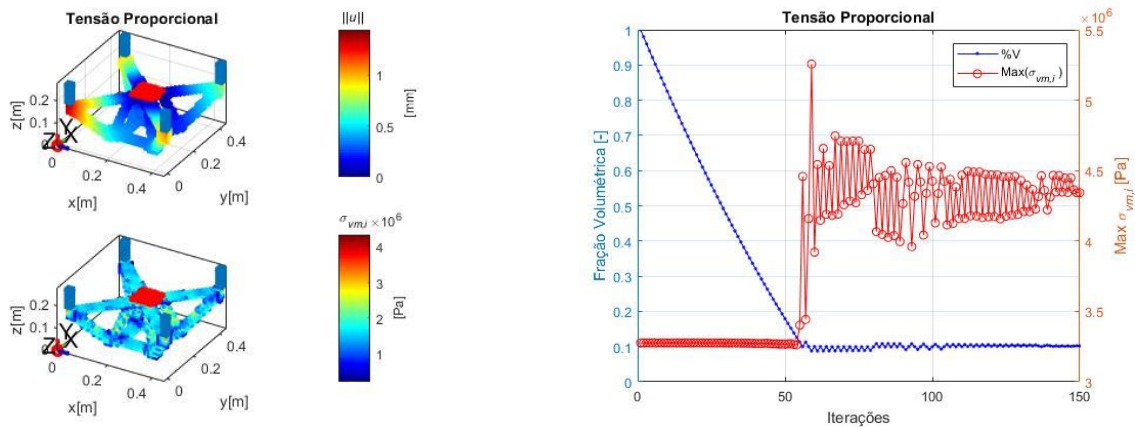


Figura 5.5 – Evolução da máxima tensão de von Mises, fração de volume e topologia final para otimização de quadricóptero baseada em tensão proporcional com restrição de tensão.

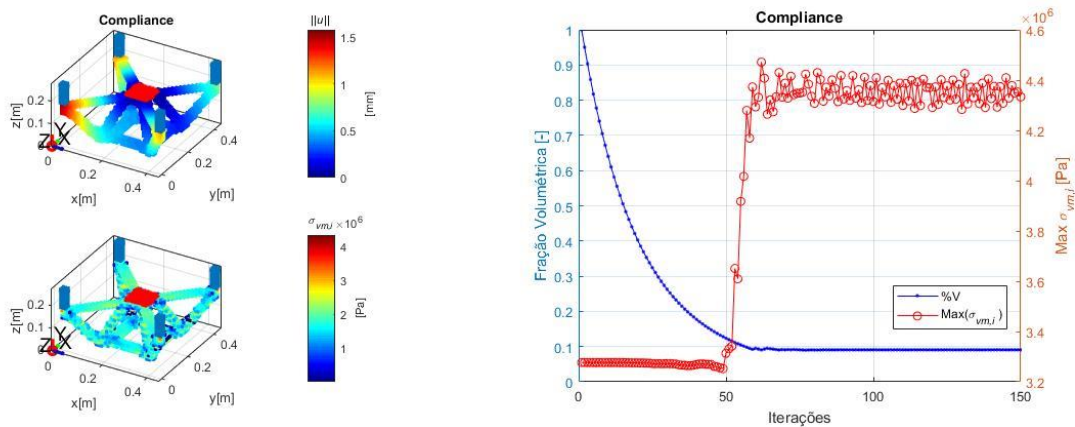


Figura 5.6 – Evolução da máxima tensão de von Mises, fração de volume e topologia final para otimização de quadricóptero baseada em *compliance* com restrição de tensão.

Os valores de fração de volume alcançados por cada um dos algoritmos bem como os valores de *compliance* e tensão máxima são apresentados na tabela 5.2

Tabela 5.2 – Comparação entre os algoritmos quanto ao número de iterações, fração de volume, *compliance* e máxima tensão de Von Mises para otimização de quadricóptero.

	Número de Iterações	Fração de Volume	<i>Compliance</i> [Nm]	σ_{max}^{vm} [MPa]
Tensão Proporcional c/ Restrição de Tensões	150	0,101	2,946	4,343
<i>Compliance</i> com Restrição de Tensões	150	0,091	3,215	4,333

A geometria das estruturas apresentadas nas figuras 5.4 e 5.5 apresentam considerável semelhança. A convergência dos algoritmos pode ser observada através da estabilização das frações de volume e da baixa variação nos valores de tensão máxima ao final da otimização. Durante a otimização, o algoritmo de tensão proporcional apresenta uma amplitude de oscilação maior que a amplitude de oscilação obtida com o algoritmo de *compliance*. Essa diferença de amplitudes pode ser relacionada com a variável de amortecimento que está presente somente no algoritmo de *compliance*.

Na última iteração, ambos algoritmos apresentaram valores de tensão máxima abaixo da restrição de tensão (4,366 MPa) e muito próximos entre si. Nota-se que enquanto o algoritmo de tensão proporcional indica estabilização da tensão máxima o algoritmo baseado em *compliance* oscila em torno do valor da restrição de tensão. Com isso, pode-se indicar que o aumento no número máximo de iterações levaria à estabilização do algoritmo de tensão proporcional em torno do valor da restrição de tensão, efeito esse que não seria observado no algoritmo de *compliance*.

Nesse exemplo, ao contrário dos resultados obtidos para a viga engastada livre, o algoritmo baseado em *compliance* alcançou menor fração de volume. Essa inversão nos resultados obtidos para cada um dos casos e a proximidade entre valores obtidos reforça a afirmação de Lie et al. (1999) de que o problema de otimização com critério de rigidez é equivalente ao problema de otimização com critério de tensão.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposta a otimização topológica de estruturas tridimensionais com restrições de tensão utilizando o método BESO para a minimização da *compliance* e minimização da massa. Os algoritmos implementados utilizaram elementos finitos hexaédricos de oito nós bem como ferramentas de estabilização e filtragem comumente utilizados para evitar singularidades e prevenir a formação de padrão de tabuleiro em métodos de otimização topológica.

Dois exemplos foram propostos para verificar os códigos desenvolvidos em MATLAB (2012). Primeiro um exemplo de validação propôs a comparação dos algoritmos implementados com os resultados obtidos Huang e Xie (2010) para a otimização de uma viga engastada livre em duas dimensões (aqui reproduzida por modelo tridimensional com um único elemento na espessura). Em seguida, um exemplo de aplicação do método em projeto é apresentado através de otimização de quadricóptero. Partindo da condição de projeto cheio (*full design*), todos os casos apresentaram resultados satisfatórios, os quais não violaram as restrições de tensão e apresentaram consideráveis semelhança entre si.

Tendo em vista a possibilidade de fabricação de geometrias complexas via manufatura aditiva, sugere-se o estudo e implementação de modelos de materiais com características anisotrópicas e não-lineares. Além disso, sugere-se para trabalhos futuros o aumento no refino da malha de elementos finitos durante a otimização, permitindo o início da otimização de problemas grandes sem limitar a formação de estruturas com barras finas ao final da otimização. Tais propostas permitiriam a análise de problemas maiores e mais complexos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N. “**Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method**”. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* No.71, pp.197–224. 1988.

Bendsøe, MP. “**Optimal shape design as a material distribution problem**”. *Structural Optimization*, p.193-202. 1989.

Biyikli, E.; To, A.C. “**Proportional Topology Optimization: A New Non-Sensitivity Method for Solving Stress Constrained and Minimum Compliance Problems and Its Implementation in MATLAB**”. *PLoS ONE*, V.10, No.12, e0145041. 2015.

Cantrell J.; Rohde, S.; Damiani, D.; Gurnani, R.; DiSandro, L.; Anton, J.; Young, A.; Jerez, A.; Steinbach, D.; Kroese, C.; Ifju, P. “**Experimental Characterization of the Mechanical Properties of 3D Printed ABS and Polycarbonate Parts**”. *Advancement of Optical Methods in Experimental Mechanics*, V.3, pp. 89-105. 2017.

Colominas, I.; París, J.; Navarrina, F., Casteleiro, M. “**High performance parallel computing in structural topology optimization**”, Proc. of The 12th Int. Conf. on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, CC 2009, Madeira, Portugal, 2009.

GE, “**General Electric Challenge**”, Acessado em 01/09/2018. 2018. <<https://geinnovationlab.com/10eqs/solvingcitythroughwaterreuse?1>>.

Haug, X.; Xie. Y. M. “**Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications**”, Wiley, 2010.

Le, C.; Norato, J.; Brums, T., Ha, C., Tortorelli, D. “**Stress-based topology optimization for continua**” Structural Multidisciplinary Optimization. V.41, pp.605-620, 2010.

Li, Q., Steven, G. P. “**On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization**” Structural Optimization, V.18, pp.67-73, 1999.

Liu, K., Tovar A.,” **An efficient 3D topology optimization code written in Matlab**”. Int Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization, V.50, No.6, pp.1175–1196. 2014.

MATLAB, “**MATrix LABoratory, R2012a**”. The MathWorks Inc., Natick, MA, 2000. <www.mathworks.com/>. Acessado em 01/09/2016.

Maxwell, J. C. “**On reciprocal figures, frames and diagrams of forces,**” Edinb Roy Soc Proc., v.7, pp.160-208, (re-edited in 1970), 1872.

Michell, A. G. M. “**The limits of economy of material in frame-structures**”. Phil. Mag. 8: 589–97, 1904.

Paris, J.; Navarrina, F.; Colominas, I.; Cateleiro, M. “**Improvements in the treatment of stress constraints in structural topology optimization problems**”, Journal of Computational and Applied Mathematics, V. 234, pp.2231–2238, 2010.

Rao, S. S., “**Engineering Optimization: Theory and Practice**”, Wiley, 4th ed., 2009.

Sigmund, O. “**A 99 line topology optimization code written in Matlab**”. Struct Multidisc Optim. V.21, pp.120–127, 2001.

Silva, E. “**Uma formulação de otimização topológica com restrição de tensão suavizada**”, Diss. de Mestrado, Pós-Graduação em Eng. Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2012.

Thesing, L. A. “**Estudo de uma formulação de otimização topológica de estruturas com restrição de tensão**”. 15f. Trabalho de Conclusão de Curso em Eng. Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2015.

Ultimaker, “**Ficha técnica ABS**”. V. 3.011, 2017. <<https://ultimaker.com/>>. Acessado em 07/10/2018.

Varella, G. “**Aplicação de um modelo substituto para otimização estrutural topológica com restrições e tensão e estimativa de erro a posteriori**”. Diss. Mestrado, Pós-Graduação em Eng. Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2015.

Xia, L.; Zhang, L.; Xia, Q.; Shi, T. “**Stress-based topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method**”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V.333, pp.356-370. 2018.

APÊNDICE

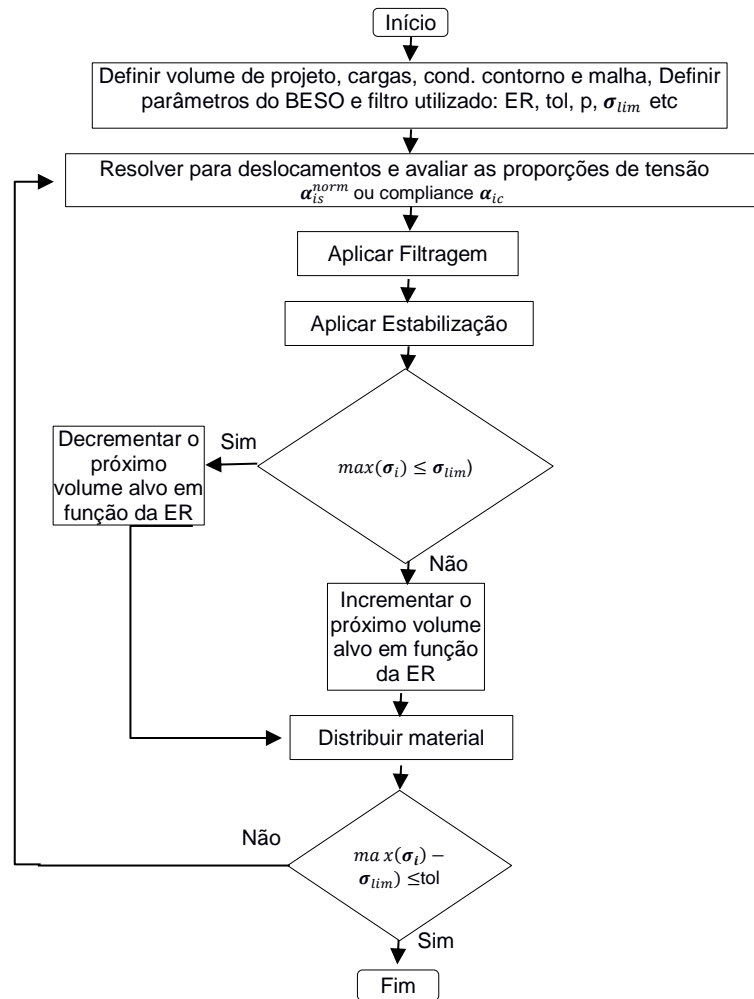


Figura A.1- Fluxograma do método BESO com restrições de tensões.