

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE LUIKOV POR TRANSFORMADA INTEGRAL (GITT) E TRANSFORMADA DE LAPLACE

R.L. Thum*, L. B. Barichello*, M. T. Vilhena* e R. M. Cotta**

* PROMEC, UFRGS, Rua Sarmento Leite, 425, 90050-170 - Porto Alegre, RS, Brazil
e-mail: rogthum@mecanica.ufrgs.br

**Mechanical Engineering Department, EE/COPPE/UFRJ - Cidade Universitária,
Cx. Postal 68503, Rio de Janeiro, RJ, 21945-970, Brazil

SUMMARY

The aim of this work is to advance a fully analytical approach to solve the system of linear ordinary differential equations that results from the application of the GITT (Generalized Integral Transform Technique) in the solution of Luikov's equations for drying in capillary porous media. The basic idea is to apply the Laplace transform to solve the system of ordinary differential equations. The resulting symbolic system is then solved by a recursive method. The transformed solution is finally analytically inverted by the Heaviside expansion technique. Numerical simulations and comparisons are presented for a two-dimensional problem, which validate and illustrate the relative merits of the proposed alternative approach.

INTRODUÇÃO

As Equações de Luikov formam um sistema de equações diferenciais parciais (EDP) linear, homogêneo e acoplado (temperatura e umidade), que modelam o processo de secagem em diferentes aplicações na engenharia. O modelo é obtido das equações de transferência de calor e massa em meios porosos capilares.

Variações desse problema foram abordadas por diversos autores (Ribeiro, 1992, Duarte, 1995 e Ribeiro e Cotta, 1995) através da técnica de transformada integral generalizada (GITT) (Cotta, 1993). Resumidamente a idéia básica dessa técnica híbrida consiste na aplicação da transformada integral generalizada removendo as variáveis espaciais e transformando o problema em um sistema de EDO's para a variável temporal, que é resolvido numericamente. A solução final é então encontrada pela aplicação da fórmula de inversão analítica.

Neste trabalho apresentamos uma técnica totalmente analítica, como proposto por Vilhena et alii (1998), Vilhena e Barichello (1998), para resolução do sistema de EDO's resultante da aplicação da GITT nas equações de Luikov. Dessa forma, na próxima seção aplicamos a GITT nas equações de Luikov para obtenção do sistema de EDO's na forma matricial. Na seção seguinte, descrevemos a técnica analítica de solução do sistema de EDO's usando a técnica da transformada de Laplace. Finalmente, na seção quatro, apresentamos resultados numéricos e comparações.

EQUAÇÕES DE LUIKOV E A TRANSFORMADA INTEGRAL (GITT)

As equações de Luikov, na forma adimensional como é mostrado em Duarte (1995), podem ser escritas como

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} \right) - \beta \left(\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \text{Lu} \left(\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} \right) - \text{LuPr} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

com condições iniciais

$$\theta_1(x, y, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\theta_2(x, y, 0) = 0, \quad (4)$$

e condições de contorno

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right|_{x=0} - \text{Pn} \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right|_{y=0} - \text{Pn} \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (8)$$

$$\theta_1(1, y, \tau) = 1, \quad (9)$$

$$\theta_2(1, y, \tau) = 1, \quad (10)$$

$$\theta_1(x, 1, \tau) = 1, \quad (11)$$

$$\theta_2(x, 1, \tau) = 1. \quad (12)$$

Aqui os parâmetros α, β, K, Lu e P_n são números adimensionais, como definidos em (Duarte, 1995).

Para aplicação da GITT, procedemos à escolha de problemas auxiliares de autovalores que mantenham as características do problema original; desenvolvemos o par transformada-inversa associado e efetuamos a transformação integral, decorrendo desta operação um sistema diferencial ordinário, infinito e acoplado. Neste caso, quatro autofunções aparecem, originadas nas duas dimensões (x e y) e das duas variáveis dependentes (Temperatura e Umidade).

Para esse problema específico as autofunções e autovalores dos problemas de Sturm-Liouville são todas do tipo

$$\Psi_i = \cos(\mu_i, x), \quad \mu_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (13)$$

sendo que designamos para os demais problemas as autofunções $\Psi_i, \Omega_n, \Gamma_j, \Xi_m$ e os respectivos autovalores $\mu_i, \sigma_n, \lambda_j, \eta_m$. Também para os quatro problemas auxiliares, a norma ou integral de normalização, é definida como:

$$N_i = \int_0^1 \Psi_i^2 dx \quad (14)$$

e da mesma forma, também para N_n, M_j, M_m . Podemos então definir o par Transformada-Inversa correspondente às expressões:

$$\overline{\theta}_{1in}(\tau) = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} \frac{\Psi_i \Omega_n}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_n}} \theta_{1h}(x, y, \tau) dx dy, \quad (15)$$

$$\overline{\theta}_{2jm}(\tau) = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} \frac{\Gamma_j \Xi_m}{\sqrt{M_j} \sqrt{M_m}} \theta_{2h}(x, y, \tau) dx dy, \quad (16)$$

$$\theta_{1h}(x, y, \tau) = \sum_i \sum_n \frac{\Psi_i \Omega_n}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_n}} \overline{\theta}_{1in}(\tau), \quad (17)$$

$$\theta_{2h}(x, y, \tau) = \sum_j \sum_m \frac{\Gamma_j \Xi_m}{\sqrt{M_j} \sqrt{M_m}} \overline{\theta}_{2jm}(\tau). \quad (18)$$

sendo as séries truncadas nas fórmulas de inversão para obtenção dos valores numéricos da solução.

SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EDO's VIA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A equação diferencial ordinária escrita na forma matricial, resultante da aplicação da GITT nas equações (1) e (2) pode ser escrita como

$$\frac{d}{d\tau} \overline{\theta} + [A] \overline{\theta} = 0; \quad \overline{\theta}(0) = \overline{\theta}_0 \quad (19)$$

onde as duas componentes do vetor $\overline{\theta}_0$ são

$$\overline{\theta}_{1in}(0) = -\frac{1}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_n}} \frac{\text{sen}(\mu_i) \text{sen}(\sigma_n)}{\mu_i \sigma_n}, \quad (20)$$

$$\overline{\theta}_{2jm}(0) = -\frac{1}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_m}} \frac{\text{sen}(\lambda_j) \text{sen}(\eta_m)}{\lambda_j \eta_m}, \quad (21)$$

e a matriz $[A]$ de ordem $2N \times 2N$ é formada pelos blocos de ordem $N \times N$

$$A_{11} = \alpha(\mu_i^2 + K^2 \sigma_n^2), \quad (22)$$

$$A_{12} = -\beta(\sigma_n^2 K^2 + \mu_i^2), \quad (23)$$

$$A_{21} = -Lu P_n (K^2 \eta_m^2 + \lambda_j^2), \quad (24)$$

$$e A_{22} = Lu(\lambda_j^2 + K^2 \eta_m^2). \quad (25)$$

Aplicando a Transformada de Laplace nas EDO's (19) a solução matricial é do tipo

$$[\overline{\theta}] = L^{-1}[(sI + [A])^{-1}] \cdot \overline{\theta}_0 \quad (26)$$

Aplicamos então a decomposição de Schur, segundo Strang (1976), na matriz $[A]$, sendo

$$A = Q^T U Q, \quad (27)$$

resultando que

$$(sI - A)^{-1} = Q^T (sI - U)^{-1} Q, \quad (28)$$

onde U agora é uma matriz triangular superior. Para determinação da inversa dessa matriz usamos um resultado válido para inversão de matriz em bloco, segundo Faddeev e Faddeeva (1963),

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1} B C^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

e estabelecendo um processo recursivo tal que

$$S_1 = [s + u_{11}], \quad (30)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} s + u_{11} & s + u_{12} \\ 0 & s + u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & s + u_{12} \\ 0 & s + u_{22} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

e assim sucessivamente

$$S_k = \begin{bmatrix} s + u_{11} & s + u_{12} & s + u_{13} & \dots & s + u_{1k} \\ 0 & s + u_{22} & s + u_{23} & \dots & s + u_{2k} \\ 0 & 0 & s + u_{33} & \dots & s + u_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s + u_{kk} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} & s + u_{1k} \\ & s + u_{2k} \\ S_{k-1} & s + u_{3k} \\ & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & s + u_{kk} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Portanto, por (29)

$$S_k^{-1} = \begin{bmatrix} & & & & \frac{S_{k-1}^{-1}}{s+u_{kk}} v \\ S_{k-1}^{-1} & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s+u_{kk}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

para $k = 2, \dots, N$ e V é definido como:

$$\left[s+u_{1k}, s+u_{2k}, \dots, s+u_{k-1,k} \right]^T \quad (34)$$

Agora, a partir da definição de matriz inversa, obtemos diretamente a matriz adjunta, já que pela técnica de expansão de Heaviside,

$$L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \sum_{i=1}^N p_i e^{s_i t} \quad (35)$$

$$\text{onde: } p_i = \frac{\text{Adj}(sI - U)}{\frac{d}{ds}(\det(sI - U))} \Big|_{s_i} \quad (36)$$

Finalmente, utilizando a fórmula de inversão dada por (17) e (18), obtemos uma representação analítica do potencial nas demais variáveis independentes eliminadas durante a etapa da transformação integral.

RESULTADOS

Abaixo apresentamos os resultados para diferentes valores de x , y e tempo que foram comparados com Duarte (1995). Da mesma referência, os valores adimensionais usados em α, β, K, Lu e Pn são respectivamente 1.021426, 0.003856, 4, 0.001834 e 5.556. Na primeira coluna indicamos a posição "x", nas segunda e quarta colunas são valores da referência de Duarte(1995), respectivamente para $N=6$ e $N=12$; nas terceira e quinta colunas são valores calculados pela técnica apresentada, também com $N = 6$ e $N = 12$, respectivamente.

Em todas as tabelas o valor de "y" é de 0.5. As tabelas 1, 2 e 3 correspondem ao valor da temperatura adimensionalizado (θ_1), para três valores de tempo: 0.015, 0.025 e 0.045. As tabelas 4, 5 e 6 correspondem ao valor da umidade adimensionalizada (θ_2), usando os valores de tempo 7, 15 e 26. Cabe salientar, relativamente aos resultados abaixo apresentados, que para cada valor de "x" e "τ" fixados, com $y=0.5$, os valores da tabela foram obtidos com tempo máximo de CPU de 0.85 segundos, em um Pentium (133 MHz, 32 Mb RAM). Além disso, resultados obtidos para

maiores valores de N identificam até três dígitos significativos

Tabela 1 - Valores de θ_1 (Temperatura), com $y = 0.5$ e $\tau = 0.015$

X	Duarte (N=6)	T.Laplace (N=6)	Duarte (N=12)	T.Laplace. (N=12)
0.0	0.394	0.396	0.393	0.396
0.2	0.423	0.425	0.423	0.425
0.4	0.509	0.510	0.508	0.510
0.6	0.643	0.644	0.642	0.644
0.8	0.812	0.813	0.812	0.813
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Tabela 2 - Valores de θ_1 (Temperatura), com $y = 0.5$ e $\tau = 0.025$

X	Duarte (N=6)	T.Laplace (N=6)	Duarte (N=12)	T.Laplace. (N=12)
0.0	0.604	0.605	0.604	0.605
0.2	0.623	0.624	0.623	0.624
0.4	0.679	0.680	0.679	0.679
0.6	0.767	0.767	0.767	0.767
0.8	0.877	0.878	0.877	0.877
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Tabela 3 - Valores de θ_1 (Temperatura), com $y = 0.5$ e $\tau = 0.045$

X	Duarte (N=6)	T.Laplace (N=6)	Duarte (N=12)	T.Laplace. (N=12)
0.0	0.829	0.830	0.829	0.830
0.2	0.838	0.838	0.837	0.838
0.4	0.862	0.862	0.861	0.861
0.6	0.899	0.899	0.899	0.899
0.8	0.947	0.947	0.947	0.947
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Tabela 4 - Valores de θ_2 (Umidade), com $y = 0.5$ e $\tau = 7$

X	Duarte (N=6)	T.Laplace (N=6)	Duarte (N=12)	T.Laplace. (N=12)
0.0	0.3134	0.3177	0.3134	0.3177
0.2	0.3466	0.3507	0.3466	0.3507
0.4	0.4433	0.4468	0.4433	0.4468
0.6	0.5947	0.5973	0.5947	0.5973
0.8	0.7866	0.7879	0.7866	0.7879
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Tabela 5 - Valores de θ_2 (Umidade), com $y = 0.5$ e $\tau = 15$

X	Duarte (N=6)	T.Laplace (N=6)	Duarte (N=12)	T.Laplace. (N=12)
0.0	0.6259	0.6259	0.6259	0.6259
0.2	0.6442	0.6442	0.6442	0.6442
0.4	0.6973	0.6973	0.6973	0.6973
0.6	0.7801	0.7801	0.7801	0.7801
0.8	0.8844	0.8844	0.8844	0.8844
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Tabela 6 - Valores de θ_2 (Umidade) , com $y=0.5$ e $\tau = 26$

X	Duarte (N=6)	T.Laplace (N=6)	Duarte (N=12)	T.Laplace (N=12)
0.0	0.8366	0.8366	0.8366	0.8366
0.2	0.8446	0.8446	0.8446	0.8446
0.4	0.8678	0.8678	0.8678	0.8678
0.6	0.9040	0.9040	0.9040	0.9040
0.8	0.9495	0.9495	0.9495	0.9495
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Os gráficos a seguir apresentam os valores calculados de temperatura e umidade adimensional em função da posição x .

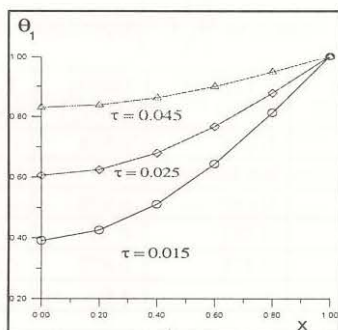


Figura 1 - Variação da temperatura adimensional em função da posição x para os tempos adimensionais 0.015, 0.025 e 0.045.

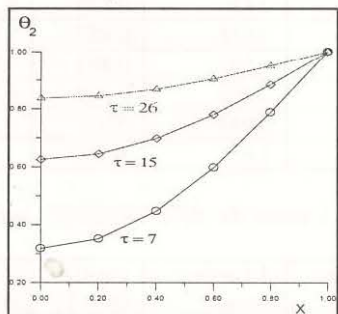


Figura 2 - Variação da umidade adimensional em função da posição x para os tempos adimensionais 7, 15 e 26.

CONCLUSÃO

A análise dos resultados apresentados nesse trabalho mostra claramente que o método proposto pode ser aplicado com sucesso para solução de sistemas de EDO's resultantes da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada às equações de Luikov, reduzindo o tempo computacional necessário para rotinas numéricas de solução de EDO's. Além disso, fica claro que essa abordagem pode ser usada associada à qualquer outro modelo, que não o de Luikov, que resulte em sistema de primeira ordem de EDO's. Principalmente devemos salientar que essa proposta estabelece uma solução analítica também para a variável temporal, nos problemas em que a GITT é aplicada. Dessa forma a análise de convergência do método GITT, para esse problema, fica restrito ao estudo da convergência, já bem

estabelecida, do método espectral (Gottlib e Orzag(1977)). Ainda o caráter analítico da solução proposta, bem como o baixo custo computacional requerido, sugere que o método proposto é uma ferramenta eficiente para resolver as equações transformadas pela GITT.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq.

REFERÊNCIAS

Cotta, R.M., 1993, "Integral Transform in Computational Heat and Fluid Flow", CRC PRESS, Boca Raton, Flórida, EUA.

Cotta, R. M., Ed., 1998, "The Integral Transform Method in Thermal & Fluids Sciences & Engineering", Chapter 26 - Combining Integral and Laplace Transform Technique, Begell House, New York.

Duarte, J.B.F., 1995, "Numerical solution of heat and mass diffusion in two-dimensional porous media", MSc Thesis, Physics Graduate Program of the Federal University of Ceará, Fortaleza, CE.

Faddeev, D.K. and Faddeeva, V.N., 1963, "Computational Method of Linear Algebra", W.H. Freeman and Company, San Francisco, EUA.

Gottlib, D. and Orzag, S.A., 1977, "Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications", CBMS-NSF, Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM.

Ribeiro, J.W., 1992, "Solução das Equações de Luikov para Secagem em Meios Capilares Porosos pela Técnica da Transformada Integral", Tese de Doutorado, ITA, SP.

Ribeiro, J.W. and Cotta, R.M., 1995, "On The Solution Of Non-Linear Drying Problems in Capillary Porous Media Through Integral Transformation of Luikov Equations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 1001-1020.

Strang, G., 1976, "Linear Algebra and It's Applications", Academic Press, New York, EUA

Vilhena, M.T., Barichello, L.B., Zabadal, J.R., Segatto, C.F. and Cardona, A.V., 1998, "On the Solution of the One Dimensional Transport Equation by the Laplace Transform", *Progress in Nuclear Energy*, vol. 33.

Vilhena, M.T. and Barichello, L.B., 1998, "A Closed-form Solution to the One Dimensional Linear and Nonlinear Problem in Radiative Transfer", *Hybrid Methods in Engineering*, Vol.1, no.1.