

## MODELAGEM MATEMÁTICA DOS PROCESSOS DE EXTRAÇÃO EM FLUXOS CONTRA CORRENTE CRUZADOS

### Gilmar de Oliveira Veloso

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), Departamento de Física, Estatística e Matemática  
Rua São Francisco, 501, Ijuí, RS - 98700-000  
kriukov@main.unijui.tche.br

### Viktor Krioukov

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), Departamento de Tecnologia  
Rua São Francisco, 501, Ijuí, RS - 98700-000  
kriukov@main.unijui.tche.br

### Horácio Antônio Vielmo

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Departamento de Engenharia Mecânica  
Rua Sarmiento Leite, 425, Porto Alegre, RS - 90050-170  
vielmo@meccanica.ufrgs.br

**Resumo:** Neste trabalho aperfeiçoa-se o modelo matemático proposto nos trabalhos anteriores dos mesmos autores, sobre a extração de uma espécie em fluxos contracorrente cruzados. No modelo, além dos fenômenos considerados anteriormente (transferência de massa entre as fases poro e bulk, difusão por todo o campo de extração, influência das zonas de carregamento e drenagem, existência de bandejas) introduz-se: as perdas da espécie e a sua dispersão pelo campo de extração, a drenagem da fase bulk na última bandeja. Foi modificado o submodelo de carregamento. O modelo matemático apresenta-se por duas EDP's evolutivas junto com equações integro-diferenciais ordinárias, que são resolvidas pelo método de linhas. No trabalho foram estabelecidas as condições principais de convergência de cálculos e discute-se a validação do modelo e aplicativo. Apresenta-se as distribuições de concentrações da espécie no estado estacionário por todo o campo de extração.

**Palavras-chave:** Modelo matemático, fluxo contracorrente cruzado, extração de óleo, meio poroso, método de linhas.

### 1. Introdução

Na natureza e na indústria, existe uma grande variedade de fluxos líquidos através dos meios porosos: difusão da água subterrânea, secagem de grãos por ar, movimento dos gases em tubos cromatográficos, etc. Os modelos matemáticos destes processos, baseados nas leis fundamentais do movimento e da difusão, prevêm as distribuições espaciais das características dos fluxos (modelos detalhados), o que contribui essencialmente na resolução dos problemas práticos e científicos. Na indústria de alimentos, os extratores, que operam em fluxos contracorrente cruzados (fabricação do açúcar, óleo de soja, óleo de girassol, café, etc.) são utilizados há mais de 20 anos. Entretanto, estes fluxos que possuem características particulares, e são de importância substancial (Erickson, 1995), por enquanto, não foram simulados com distribuições espaciais das características dentro do fluxo. O único modelo encontrado é o método dos estágios ideais (Lydersen, 1983, Vian et al, 1972) que não considera as características reais dos extratores. As primeiras tentativas para descrever os fluxos contracorrente cruzados (CCC) foram apresentadas nos trabalhos (Krioukov et al, 1999, Veloso et al, 2000) onde desenvolve-se um modelo matemático dos processos de extração de espécie (óleo vegetal) em extrator "De Smet".

Neste trabalho, aperfeiçoa-se o modelo para torná-lo mais adequado aos processos reais do extrator. Em particular, na nova versão, considera-se: as perdas da espécie e sua dispersão por todo o campo de extração, propõe-se um novo submodelo de carregamento e altera-se o caminho da fase bulk da zona de drenagem.

### 2. Fluxos contracorrente cruzados aplicados em um extrator e seu esquema físico

Nos fluxos CCC envolve-se: uma matéria-prima porosa (com dois tipos de porosidade:  $\varepsilon_b$  – porosidade externa e  $\varepsilon_p$  – porosidade interna e uma fase sólida) e, um solvente (miscela) que caminham de modo contracorrente cruzado. A matéria-prima inicialmente contém uma espécie que, com a sua interação com o solvente, se transfere à miscela. E, como resultado, a miscela torna-se mais concentrada em espécie.

Um esquema detalhado, com os fluxos da matéria-prima e da miscela com carregamento do vagão e da drenagem, está mostrado na Fig. (1). A matéria-prima entra pelo tubo 1, na seção 6, enchendo o corpo do extrator limitado pela comporta, e alí permanece subindo na tremonha até uma certa altura. A miscela com concentração desprezível (ou seja, solvente) entra no extrator pelo controlador (17) e se move pelo tubo (2) através das seções de percolação (8), bombas (11), tubos (13), até o tubo (3), de onde ela (sendo enriquecida de espécie) sai do campo de extração e entra no vaporizador (15); ao mesmo tempo, o farelo (matéria-prima sem a espécie) sai da seção de drenagem para o dessolventizador (14).

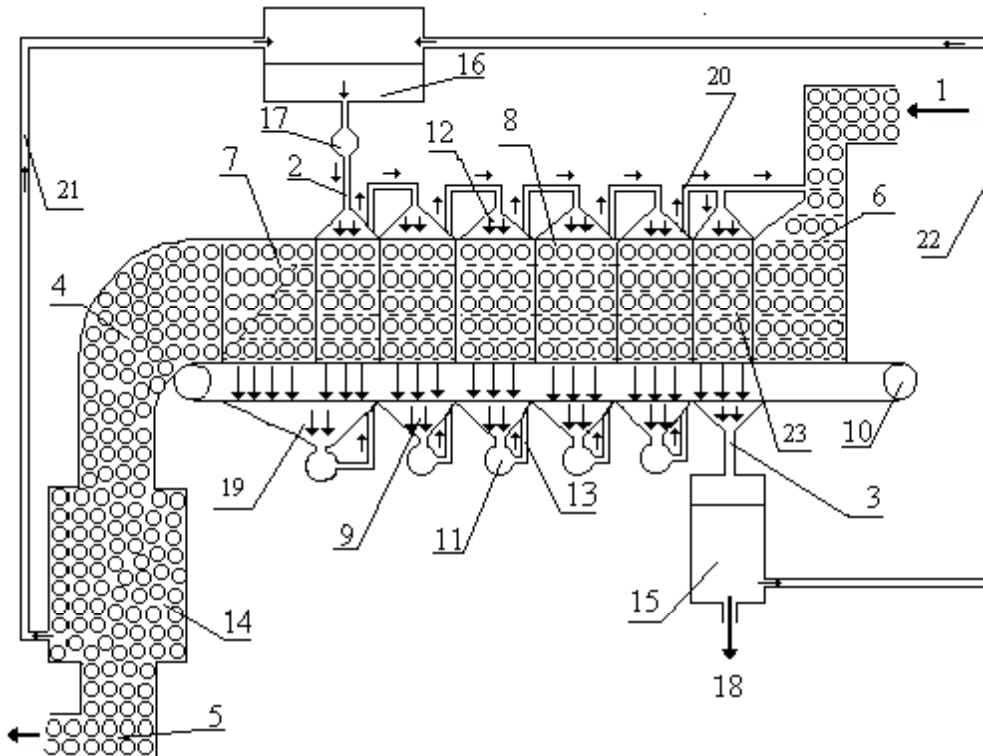


Figura 1. Esquema dos processos e dos dispositivos de um extrator típico

1 - tubo de entrada de matéria-prima na seção de carregamento; 2 - entrada de solvente no campo de extração; 3 - tubo de saída da miscela; 4 - saída de matéria-prima do extrator; 5 - farelo sem solvente; 6 - seção de carregamento de matéria-prima com miscela; 7 - seção de drenagem; 8 - seção de percolação; 9 - bandeja; 10 - transportador de matéria-prima; 11 - bombas de distribuição de miscela; 12 - distribuidor de miscela; 13 - tubo da saída de miscela forte; 14 - matéria-prima no DT (dessolventizador e tostador); 15 - vaporizador; 16 - reservatório de solvente; 17 - controlador de fluxo de solvente; 18 - saída de espécie vegetal; 19 - bandeja da miscela drenada; 20 - tubo com miscela distribuída à primeira seção de percolação e na zona de carregamento; 21 - tubo com solvente que retorna do DT; 22 - tubo com solvente que volta do evaporador; 23 - primeira seção de percolação.

Durante o carregamento, a miscela concentrada preenche os espaços entre as partículas da matéria-prima  $\epsilon_b$  e penetra na fase poro  $\epsilon_p$ . Ao mesmo tempo, por força da extração, a espécie da fase sólida sai à fase poro e, rapidamente, estabelece o equilíbrio entre as concentrações de espécie na fase sólida da matéria-prima ( $N$ ) e as concentrações da miscela na fase poro ( $C^p$ ).

No processo de percolação, passando de seção por seção, mantém-se o equilíbrio entre  $N$  e  $C^p$  e a concentração  $C^p$  diminui por causa da transferência do espécie da fase poro à fase bulk; ao mesmo tempo, na direção contrária, surge o fluxo oposto de solvente.

Na etapa de drenagem, a miscela (praticamente solvente puro) escoá dos espaços  $\epsilon_b$  entre partículas da matéria-prima, mas continua estar na fase poro e, este efeito condiciona as perdas da espécie. Em cada seção, durante a extração, as concentrações  $C$  (concentração da espécie na fase bulk) e  $C^p$  não são uniformes pelo espaço e pelo tempo.

A miscela, dentro de uma seção de percolação, move-se de cima para baixo, de modo cruzado com o fluxo da matéria-prima, e passa de uma seção para outra contra este fluxo, resultando o esquema dos fluxos contracorrente cruzado (Fig. 1). Ele também possui duas particularidades:

- o fluxo de miscela da drenagem une-se com o fluxo principal da miscela na bandeja (19);
- - uma parte da miscela concentrada passa para a seção de carregamento (6).

Há também o movimento lento da miscela, na direção horizontal, provocado pelo movimento da matéria-prima.

Apoiado nesta descrição e nos trabalhos (Krioukov et all, 1999, Veloso et all, 2000) foi melhorado o modelo físico dos processos no extrator típico. Os principais momentos do modelamento são:

1. Considera-se os fluxos contracorrente cruzados da matéria-prima e da miscela.
2. As seções vizinhas não têm separações físicas.
3. A difusão considera-se ao longo de todo o extrator, nas direções vertical e horizontal.
4. No início do preenchimento, todo o espécie está na fase sólida.
5. O preenchimento da fase poro ocorre (na seção de carregamento) de acordo com o submodelo apresentado abaixo.
6. A quantidade volumétrica do espécie que sai (no andamento da percolação) das partículas substitui-se por uma mesma quantidade volumétrica de solvente. Neste caso, o fluxo volumétrico da miscela, pelo extrator, é constante e não depende dos processos de transferência do espécie na fase bulk.
7. A superfície da miscela nas seções de percolação fica acima da superfície da matéria-prima.
8. Na etapa de drenagem a espécie, que fica na fase poro do farelo, está perdido (não retorna ao extrator).
9. Pelo volume de cada bandeja  $\bar{V}_b$  (os volumes das bandejas são iguais), a concentração da espécie ( $\bar{C}_m$ ) é uniforme.
10. A viscosidade é constante e não depende da concentração do espécie na miscela.
11. A temperatura é uniforme por toda a zona de extração.
12. Concentrações de espécie na parte sólida e fase poro estão em equilíbrio pela constante  $E_d = N/C^p$ .
13. As paredes celulares das partículas da matéria-prima estão totalmente rompidas.
14. Considera-se o regime transiente porque a concentração mássica ( $N_T$ ) da espécie que entra no extrator pode variar no intervalo  $N_T = 0,13..0,20$  durante o funcionamento da instalação.
15. As porosidades  $\epsilon_b$  e  $\epsilon_p$  são constantes durante o processo da extração.
16. Dentro das seções de extração a miscela da fase bulk move-se na direção vertical (com velocidade constante  $V_m$ , que é determinada pelas características da miscela e da matéria-prima) e também na direção horizontal (com velocidade constante  $u_h$  [m/s]), arrastada pela matéria-prima.
17. A velocidade do transportador ( $u$ ) é constante.
18. A área específica de contato das fases poro e bulk ( $a_p$ ) [1/m] é constante.

### 3. Modelo matemático para os processos em fluxos contracorrente cruzados

O extrator típico Fig. (2) possui as seções de percolação (campo de extração) e bandejas, uma seção de carregamento, uma seção de drenagem que são descritos pelos seus submodelos.

#### 3.1 Modelagem do campo de extração

O campo de extração descreve-se pelas duas equações:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = -V_m \frac{\partial C}{\partial z} + E_s \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + \frac{(1-\epsilon_b)}{\epsilon_b} k_f a_p (C^p - C) - u_h \frac{\partial C}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial C^p}{\partial \tau} = - \frac{k_f a_p (C^p - C)}{\left[ 1 + \frac{(1-\epsilon_p)}{\epsilon_p} E_d \right] \epsilon_p} - \frac{u \frac{\partial C^p}{\partial x}}{\left[ 1 + \frac{(1-\epsilon_p)}{\epsilon_p} E_d \right]} \quad (2)$$

onde:  $\tau$  é tempo corrente; o coeficiente de difusão ( $D_{AB}$ ) [ $m^2/s$ ] foi substituído pelo coeficiente de dispersão ( $E_s$ ) [ $m^2/s$ ] que é determinado pela fórmula  $E_s = \beta_1 D + \beta_2 V d_p$  encontrada em Cussler (1997), onde  $\beta_1 = 0,7$  e  $\beta_2 = 2,0$  são coeficientes experimentais. O coeficiente de transferência de massa entre a fase poro e bulk ( $k_f$ ) determina-se pela fórmula  $Sh = \alpha Re^\beta Sc^{0,42}$  (Majumdar, 1995, Treybal, 1963) onde:

$$\alpha = 2,4, \quad \beta = 0,34 \quad \text{para} \quad 0,08 < Re < 125$$

$$\alpha = 0,442, \quad \beta = 0,69 \quad \text{para} \quad 125 < Re < 5000$$

#### 3.2 Modelamento de drenagem

Depois da percolação saindo da fronteira esquerda da seção  $m_s$  ( $m_s$  é o número de seções do extrator – Fig. 2) a matéria-prima (já praticamente esgotada) e a miscela fraca (que ocupa os espaços  $\epsilon_b$  e  $\epsilon_p$ ) entram na zona de drenagem, onde esta miscela separa-se da matéria-prima. Analisando o funcionamento de um extrator e seu equipamento auxiliar, verifica-se que realmente todo solvente retorna ao extrator. Mas a matéria-prima, após passar pelo processo de extração

ainda contém espécie no seu interior, ou seja, existem as perdas de espécie ( $Q_f$ ) nas fases poro e sólida, que no modelo determinam-se por:

$$Q_f = Hu(1-\varepsilon_b) \left[ \varepsilon_p + (1-\varepsilon_p) E_d \right] \int_0^{L_r} (C^p(x_f, z, \tau)) dz \quad (3)$$

Observa-se que  $Q_\Sigma$  (fluxo volumétrico total de miscela no extrator [ $m^3/s$ ]) é constante porque de acordo com o esquema físico, nas seções de percolação, a espécie saindo da matéria-prima substituí-se pelo mesmo volume de solvente. Analisando o balanço dos fluxos na  $m_s$  seção para a fase bulk, pode-se escrever:

$$Q_\Sigma = Q_{so} + u_h \varepsilon_b H L_r \quad (4)$$

onde  $Q_{so}$  é o fluxo volumétrico de solvente puro no extrator [ $m^3/s$ ],  $H$  e  $L_r$  são a largura e altura do extrator [ $m$ ].

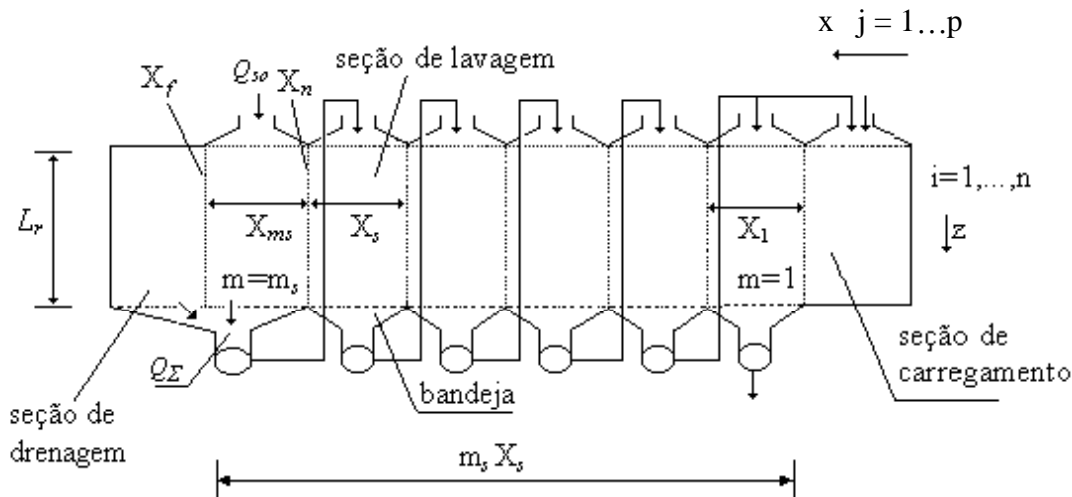


Figura 2. Esquema dimensional do extrator “De Smet”

### 3.3 Modelagem do carregamento

Na seção de carregamento (Fig. 1, fragmento 6), entra matéria-prima com fluxo mássico  $M_n$  [ $kg/s$ ] e com concentração mássica  $N_T$  de espécie, que são grandezas conhecidas. Ao mesmo tempo, nesta seção, entra a miscela concentrada para preencher os espaços entre partículas e espaços dentro delas, para formar as fases bulk e poro. Para determinar concentração da espécie na fase poro, na seção de carregamento ( $C_{en}^p$ ) escreve-se, inicialmente, a fórmula para o fluxo  $Q_{es}$  (vazão volumétrica da espécie no extrator [ $m^3/s$ ]) que entra na seção junto com a matéria-prima:

$$Q_{es} = \frac{N_T M_n}{\rho_{es}} \quad (5)$$

onde  $\rho_{es}$  é a densidade da espécie [ $kg/m^3$ ].

De acordo com o esquema físico, este espécie, inicialmente, é distribuído dentro da fase sólida que possui o fluxo volumétrico  $L_r H u (1-\varepsilon_b) (1-\varepsilon_p)$  e, no resultado, facilmente determina-se a concentração volumétrica na fase sólida:

$$C_s = \frac{N_T M_n}{\rho_{es} L_r H u (1-\varepsilon_b) (1-\varepsilon_p)} \quad (6)$$

Agora, consideremos o preenchimento da fase poro, somente numa partícula, onde, inicialmente, a espécie está num volume  $C_s (1-\varepsilon_p)$ , na fase sólida (Fig. 3a). Durante a primeira etapa do preenchimento, ocorre a passagem de miscela concentrada (Fig. 3a), com concentração  $\bar{C}_2$ , da fase bulk para a fase poro, ocupando uma parte dessa ( $\varepsilon_m$ ), acumulando-se dentro da partícula uma quantidade da espécie igual a  $C_s (1-\varepsilon_p) + \bar{C}_2 \varepsilon_m$  e, quase simultaneamente,

ocorre por força da extração, a transferência do espécie da fase sólida para a fase poro, ocupando a outra parte ( $\epsilon_p - \epsilon_m$ ) do espaço  $\epsilon_p$  (Fig. 3b). Nesta etapa, a quantidade da espécie dentro da partícula não se altera.

Depois do preenchimento, ocorre a mescla uniforme da espécie nos espaços  $\epsilon_m$  e  $(\epsilon_p - \epsilon_m)$  formando a concentração da fase poro,  $C_{en}^p$ , na zona de carregamento (Fig. 3c). Neste momento, também é estabelecido o equilíbrio entre as fases sólido,  $N_{in}$  (concentração de espécie na matéria-prima na entrada do extrator), e poro,  $C_{en}^p$ .

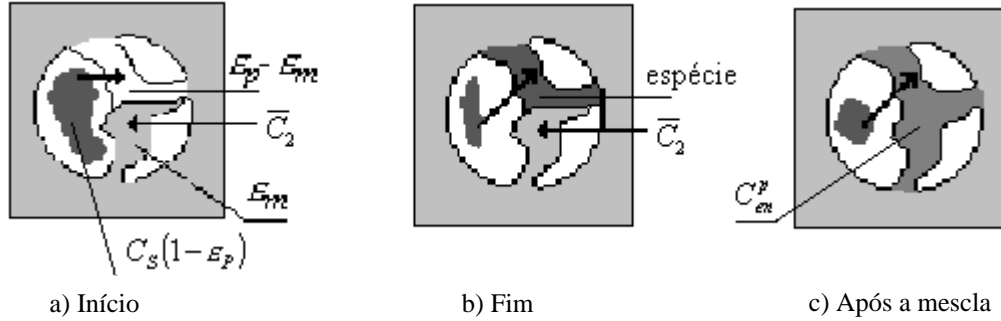


Figura 3. Esquema de preenchimento de uma partícula

Baseado nestas considerações, pode-se escrever as equações do submodelo de carregamento para determinar  $C_{en}^p$ ,  $N_{in}$  e  $\epsilon_m$ . Fazendo o balanço da espécie na partícula (fases sólido e poro), temos que a quantidade da espécie depois do preenchimento é igual a sua quantidade depois da mistura. Equacionando esta afirmação, recebe-se a primeira equação:

$$C_s(1-\epsilon_p) + \bar{C}_2\epsilon_m = C_{en}^p\epsilon_p + N_{in}(1-\epsilon_p) \quad (7)$$

A segunda fórmula é uma relação de equilíbrio:

$$N_{in} = E_d C_{en}^p \quad (8)$$

Substituindo  $N_{in}$  em (7), recebe-se:

$$C_s(1-\epsilon_p) + \bar{C}_2\epsilon_m = C_{en}^p\epsilon_p + E_d C_{en}^p(1-\epsilon_p) \quad (9)$$

A terceira equação, obtém-se considerando que “a quantidade de produto na fase poro, depois do preenchimento (Fig. 3b), é igual à quantidade do produto na fase poro depois da mistura”. Assim sendo, tem-se:

$$(\epsilon_p - \epsilon_m) + \bar{C}_2\epsilon_m = C_{en}^p\epsilon_p \quad (10)$$

e reescrevendo a equação (10), tem-se:

$$\epsilon_m = \epsilon_p \frac{(1 - C_{en}^p)}{1 - \bar{C}_2} \quad (11)$$

e substituindo na Eq. (9), tem-se:

$$C_s(1-\epsilon_p) + \bar{C}_2\epsilon_p \frac{(1 - C_{en}^p)}{1 - \bar{C}_2} = C_{en}^p\epsilon_p + E_d C_{en}^p(1-\epsilon_p) \quad (12)$$

Finalmente, isolando  $C_{en}^p$ , obtém-se:

$$C_{en}^p = \frac{C_s(1-\epsilon_p) + \frac{\bar{C}_2\epsilon_p}{1-\bar{C}_2}}{\frac{\bar{C}_2\epsilon_p}{1-\bar{C}_2} + \epsilon_p + E_d(1-\epsilon_p)} \quad (13)$$

A Eq. (13) determina a concentração volumétrica inicial do produto na fase poro após o carregamento da matéria-prima. Mas observa-se que, no modelo acoplado, esta grandeza é uma incógnita porque depende (além de outras) do valor de  $\bar{C}_2$  que é determinado durante a resolução de todo o sistema de equações deste modelo.

Na entrada na primeira seção o fluxo total no extrator ( $Q_\Sigma$ ) ramifica-se nos dois fluxos  $Q_{es}$  (fluxo para preencher os espaços  $\epsilon_p, \epsilon_b$ ) e  $Q_s$  (fluxo da miscela para a primeira seção). A fórmula para determinar  $Q_{es}$  evidencia-se:

$$Q_{es} = H L_r u \cdot \left( \epsilon_b + (1 - \epsilon_b) \epsilon_p \frac{(1 - C_{en}^p)}{1 - \bar{C}_2} \right) \quad (14)$$

A vazão da miscela concentrada na saída do extrator ( $Q_s$ ) através do tubo 3 (Fig. 1) determina-se pela fórmula:

$$Q_s = Q_\Sigma - Q_{es} \quad (15)$$

A concentração média da miscela concentrada ( $C_s$ ), na saída do extrator, determina-se pela expressão:

$$C_s = \frac{\int_0^{X_1} C(x, L_r, \tau) dx}{X_1} \quad (16)$$

onde  $X_1$  é a largura da primeira seção [m].

### 3.4 Equações de alteração das concentrações nas bandejas

As seções de lavagem estão ligadas através do fluxo da miscela que passa pelas bandejas e depois entra nos distribuidores. A concentração média de espécie ( $\bar{C}_m$ ) na bandeja  $m$  é igual à concentração na entrada da seção ( $m - 1$ ). A equação de alteração da concentração  $\bar{C}_m$  em cada bandeja é :

$$\frac{d\bar{C}_m}{d\tau} = \frac{V_m \int_{X_n}^{X_k} C(x, L_s, \tau) dx - \bar{C}_m(\tau) X_s V_m}{V_b / (H \cdot \epsilon_b)} \quad (17)$$

Na nova versão do modelo, a alteração da concentração na última bandeja considera-se a união dos dois fluxos:  $Q_D, Q_{so}$  (Fig. 1) e descreve-se pela equação:

$$\frac{d\bar{C}_{ms}}{d\tau} = \frac{\int_{X_n}^{X_f} C(x, L_r, \tau) dx + \int_0^{L_r} C(X_f, z, \tau) dz - \bar{C}_{ms} X_s V_m}{V_b / (H \cdot \epsilon_b)} \quad (18)$$

onde:  $X_f = X_n + X_{ms}$ ;  $X_n = X_1 + (m_s - 2) \cdot X_s$ .

### 3.5 Condições de contorno e iniciais

Para a fase bulk:

a) para o lado direito do campo da extração:

$$C(0, z, \tau) = \bar{C}_m(\tau); \quad m = 2, \quad z = 0, \dots, L_r; \quad \tau > 0; \quad (19)$$

b) para o seu lado esquerdo:

$$\frac{\partial C(X_f, z, \tau)}{\partial x} = 0; \quad z = 0, \dots, L_r; \quad \tau > 0; \quad (20)$$

c) para a fronteira superior do campo:

- para as seções de percolação  $m = 1, \dots, (m_s - 1)$

$$C(x, 0, \tau) = \bar{C}_{m+1}(\tau); \quad \tau > 0; \quad (21)$$

se  $m = 1$ , então,  $x = 0, \dots, X_l$ ;

se  $m = 2, \dots, (m_s - 1)$ , então,  $x = [X_l, + (m - 2) \cdot X_s], \dots, [X_l, + (m - 1) \cdot X_s]$ .

- para a seção  $m_s$

$$C(x, 0, \tau) = C_{in}; \quad x = X_l + (m_s - 1)X_s \quad (22)$$

d) no limite inferior do campo:

$$\frac{\partial C(x, L_r, \tau)}{\partial z} = 0; \quad x = 0, \dots, X_f; \quad \tau > 0; \quad (23)$$

Para a fase poro, a condição de contorno do lado direito do campo é:

$$C^p(0, z, \tau) = C_{en}^p; \quad z = 0, \dots, L_r; \quad \tau > 0; \quad (24)$$

Os dados iniciais em todo o campo de extração são prescritos:

$$C(x, z, 0) = C^0(x, z) \quad e \quad C^p(x, z, 0) = C^{p,0}(x, z) \quad (25)$$

para  $x = 0, \dots, X_f, \quad z = 0, \dots, L_r$ .

Nas bandejas:  $\bar{C}_m(0) = C_m^0$  para  $m = 2, \dots, m_s$ .

No modelo, procura-se determinar a alteração das concentrações  $C(x, z, \tau)$  e  $C^p(x, z, \tau)$  em todo o campo de extração e, as concentrações médias nas bandejas  $\bar{C}_m(\tau)$ , ao longo do tempo. Para resolver o sistema de equações, foi aplicado o método de linhas (Lambert, 1978) que transforma as equações(1) e (2) em EDO's, deixando as derivadas temporais, e discretizando as derivadas espaciais em  $x$  e  $z$  usando as diferenças finitas, por exemplo:

$$\frac{\partial C}{\partial x} \approx \frac{C_{ij} - C_{i,j-1}}{\Delta x}; \quad \frac{\partial^2 C}{\partial^2 x} \approx \frac{C_{i,j+1} - 2C_{ij} + C_{i,j-1}}{\Delta x^2} \quad (26)$$

onde  $C_{ij}$  - concentração na fase bulk na célula "ij" do campo de extração (Fig. 2).

Nas equações integro-diferenciais (17-18) as integrais foram substituídas por somas finitas usando a regra trapezoidal. O sistema de equações resultantes foi resolvido pelo método de Runge-Kutta explícito de ordem 4 e de passo quatro.

## 4 Verificação do modelo acoplado

### 4.1 Influência do passo de integração e tamanhos da malha

Na criação de modelos e aplicativos que estão destinados à indústria é importante determinar uma "zona de segurança" da realização das simulações numéricas. Esta zona, principalmente, determina-se pelos tamanhos da malha e pelo passo de integração  $h$ .

O problema é bastante complexo e teoricamente determinar as relações entre  $\Delta x$  (variação da coordenada  $x$ ),  $\Delta z$  (variação da coordenada  $z$ ) e  $h$  (passo de integração) necessárias para os cálculos estáveis é difícil (Maliska, 1995). Por isso, foi realizado um experimento matemático quando nas duas malhas diferentes foram executadas duas séries de cálculos com diferentes passos de integração  $h$ . A Tabela 1 apresenta estes resultados, onde  $n$  é o número de células na direção vertical,  $N_l$  e  $N_h$  são o número de células na direção horizontal, respectivamente, para a primeira e restantes seções de percolação. Também são apresentadas as grandezas  $C_s$ ,  $Q_f^p$  e os critérios de Courant (Wrobel, 1989) nas direções vertical e horizontal.

$$S_v = \frac{V_m h}{\Delta z} \quad \text{e} \quad S_u = \frac{uh}{\Delta x} \quad (27)$$

onde  $\Delta z = L_r/n$  e  $\Delta x = X_s m_s/p$ , onde  $p$  é o número de células na direção horizontal em todo o extrator.

Tabela 1. Influência do passo de integração na estabilidade de cálculos para dois tipos de tamanho de malha.

H	$n = 18, N_l = 12$ e $N_h = 24$				$n = 12, N_l = 9$ e $N_h = 18$			
	$C_s$	$Q_f^p$ ( $cm^3/s$ )	$S_v$	$S_u$	$C_s$	$Q_f^p$ ( $cm^3/s$ )	$S_v$	$S_u$
2	0,2808	53,01	0,050	0,045	0,2799	57,48	0,033	0,034
6	0,2808	53,01	0,151	0,137	0,2799	57,48	0,101	0,103
10	0,2808	53,02	0,252	0,229	0,2799	57,49	0,168	0,172
15	0,2808	53,04	0,379	0,344	0,2800	57,51	0,252	0,258
20	0,2808	53,06	0,505	0,459	0,2800	57,53	0,336	0,344
30	0,2809	53,00	0,758	0,688	0,2800	57,56	0,505	0,516
31	0,2808	53,08	0,783	0,711	0,2800	57,55	0,522	0,533
32	divergem	divergem	-	-	0,2800	57,54	0,539	0,550
40	-	-	-	-	0,2800	57,60	0,673	0,688
45	-	-	-	-	0,2800	57,51	0,758	0,774
48	-	-	-	-	0,2800	57,54	0,808	0,826
49	-	-	-	-	0,2800	57,57	0,825	0,843
50	-	-	-	-	divergem	divergem	-	-

Para a malha fina ( $n = 18, N_h = 24$ ) os cálculos são estáveis até  $h = 31s$  e, já para  $h = 32s$ , os cálculos divergem, o corresponde  $S_v = 0,783$  e  $S_u = 0,711$ . Para a malha grossa ( $n = 12, N_h = 9$ ) a divergência ocorreu para  $S_v = 0,825$  e  $S_u = 0,843$ . Observa-se também que dentro do intervalo de estabilidade a precisão dos cálculos é bastante para as necessidades práticas.

#### 4.2 Estabelecimento de um estado estacionário

É evidente que, se os parâmetros do regime operacional ( $M_n, N_T, Q_{so}, C_{in}$  e  $u$ ), são constantes, então, no campo de extração, tem que ser estabelecido um único estado estacionário das distribuições  $C$  e  $C^p$ , independentemente das suas distribuições iniciais. Este tipo de verificação do modelo foi realizado por um conjunto de simulações para diferentes estados iniciais do campo de extração deixando os dados iniciais restantes invariáveis. Considerando este aspecto, foram realizadas três simulações, chamadas (condicionalmente):

- regime “suave”: a distribuição inicial das concentrações  $C$  e  $C^p$  pelas seções de percolação são em forma de degraus e próximas, isto é,  $C_{in}^p \approx C_{in}$  e, por exemplo,  $C_1 = 0,2; C_2 = 0,16; C_3 = 0,12; C_4 = 0,08; C_5 = 0,04; C_6 = 0,01$ .
- regime “miscela forte”: a distribuição das concentrações iniciais,  $C$  e  $C^p$ , são uniformes pelas seções e praticamente iguais. Por exemplo,  $C_{in} = C_{in}^p \approx 0,1$ ;
- regime “industrial”: a distribuição inicial das concentrações  $C_{in}$  e  $C_{in}^p$  são uniformes por todo o campo de extração e  $C_{in}^p \gg C_{in}$ . Por exemplo,  $C_{in}^p = 0,2$  e  $C_{in} = 0,01$ .

Os resultados destas simulações (Tab. 2) mostram que as evoluções de todas as distribuições iniciais terminam-se num mesmo estado estacionário. Os dados foram obtidos para os mesmos parâmetros de malha (indicado no título da tabela).

Tabela 2. Comparação das concentrações  $\bar{C}_m$  nos estados estacionários obtidos para os regimes: “industrial”; “suave” e “miscela forte” ( $n = 18, N_h = 24, h = 10 s$ )

Regimes	$\bar{C}_5$	$\bar{C}_4$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_1$	$C_s$
Industrial	0,00955	0,0258	0,0557	0,110	0,208	0,2890
Suave	0,00988	0,0266	0,0570	0,112	0,209	0,2826
Forte	0,00952	0,0258	0,0556	0,110	0,208	0,2808



### 4.3 Conservação da espécie

No regime estacionário a soma dos fluxos de espécie que entram no extrator tem que ser iguais à soma dos fluxos de espécie que saem do extrator. Para a verificação com a lei da conservação de espécie foi usada a fórmula:

$$\frac{N_T M_n}{\rho_{es}} = Q_s C_s + Q_f \quad (28)$$

onde a parte esquerda corresponde vazão da espécie que entra no extrator e, a parte direita - à soma das vazões de sua saída. Na simulação numérica para regime básico, obtém-se os seguintes resultados:

$$C_s = 0,2808; \quad Q_s = 7,7 \text{ L/s}; \quad Q_f = 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ L/s}; \quad M_n = 9,3 \text{ kg/s}; \quad N_T = 0,2186; \quad \rho_{es} = 910 \text{ kg/m}^3.$$

Então, pela Eq. (28) obtém-se para o lado esquerdo,  $Q^{es} = 2,23 \text{ L/s}$  e, para o lado direito,  $Q^{es} = 2,22 \text{ L/s}$ , ou seja, observa-se uma diferença  $\Delta Q = 0,01 \text{ L/s} \Rightarrow 0,5 \%$ , o que comprova uma concordância razoável das simulações numéricas com a lei de conservação.

### 4.4 Comparação com os dados experimentais

Os dados experimentais na instalação industrial foram obtidos no “Grupo Zaffari “ (Passo Fundo – RS). Estes foram coletados no extrator “De Smet” quando ele funcionava no regime estacionário. Na figura (4), apresenta-se o esquema do campo de extração com os símbolos dos tamanhos e dos pontos de coleta de dados experimentais.

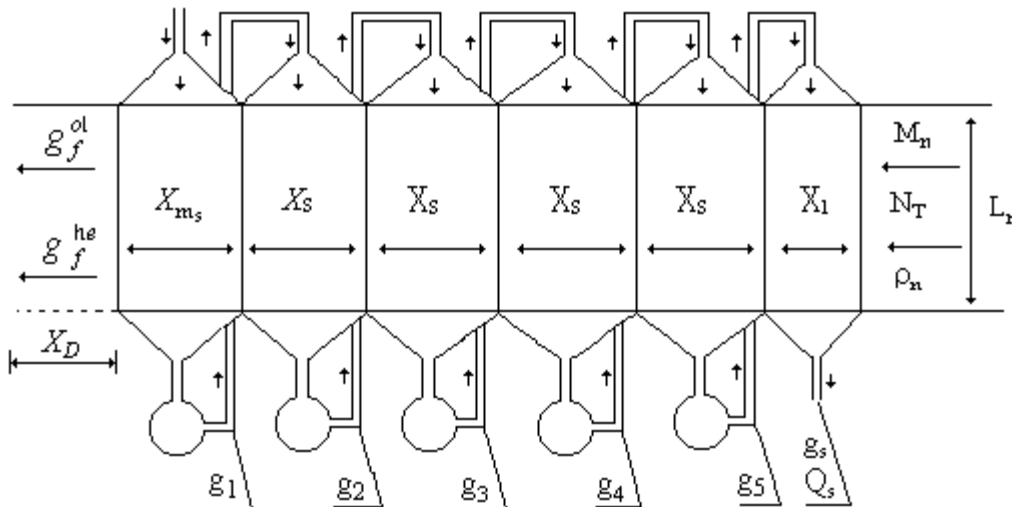


Figura 4. Esquema do campo de extração com pontos de coleta de dados experimentais

A Tab. (3) mostra os resultados experimentais obtidos no extrator. Os componentes utilizados para obtenção destes dados foram: o solvente (hexano), a espécie (óleo) e a matéria-prima que se prepara de grão de soja.

Tabela 3. Dados experimentais coletados do extrator De Smet (regime estacionário)

Parâmetros geométricos								
$m_s$	$X_D$	$X_f$	$X_s$	$X_l$	$L_r$	$H$		
6	2,60	1,37	2,00	1,50	2,00	2,40		
Concentrações mássicas								
$g_{in}$	$g_f^{ol}$	$g_f^{he}$	$g_5$	$g_4$	$g_3$	$g_2$	$g_1$	$g_s$
0,1%	0,89%	24%	31,4%	25,8%	10,9%	3,45%	0,85%	37,7%
Parâmetros de regime								
$\rho_{M_n} \text{ (kg/m}^3\text{)}$		$N_T \text{ (%)}$		$Q_s \text{ (L/hr)}$		$M_n \text{ (ton/d)}$		
521		21,26		25000		920		

onde  $g_{in}$  é a fração mássica inicial de óleo em solvente, na entrada do extrator,  $g_f^{ol}$  e  $g_f^{he}$  são, respectivamente, frações mássicas de óleo e solvente no farelo,  $g_i$  são as frações mássicas de óleo na miscela, nas bandejas e,  $g_s$  é a fração mássica de óleo na saída da miscela concentrada,  $\rho_{M_n}$  é densidade da matéria-prima.

As características necessárias para a simulação numérica ( $\rho_{so}$  – densidade do solvente,  $\rho_{es}$  – densidade da espécie,  $\epsilon_b$ ,  $\epsilon_p$ ,  $E_d$  – constante de equilíbrio) foram obtidas da bibliografia (Majumdar et al, 1995, Abraham et al, 1988) e da análise dos dados experimentais (Moreira et al, 2000). A área específica ( $a_p$ ) de contato entre a fase poro e bulk foi determinada, indiretamente, através da sua identificação pela concentração  $g_f^{es}$ , executando uma série de simulações numéricas mudando  $a_p$  até chegar à igualdade:  $g_f^{es}$  (experimental) =  $g_f^{es}$  (teórico).

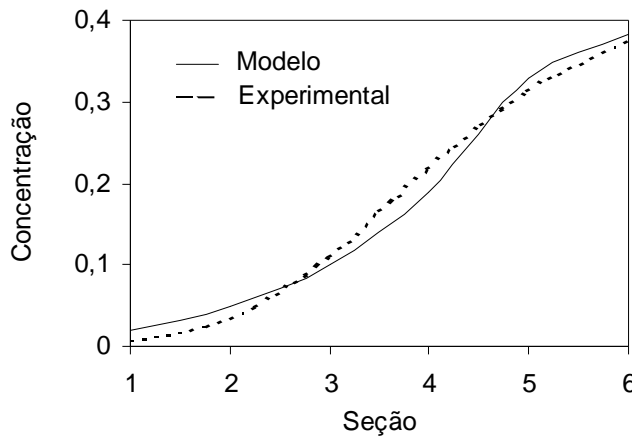


Figura 5. Comparação dos dados experimentais com os dados obtidos do modelo

As simulações numéricas foram realizadas até chegar ao estado estacionário. Os resultados experimentais e teóricos são comparados na Fig. (5). O desvio médio entre os dados experimentais e os resultados teóricos relativos à concentração  $C_s$  é de 3,7%.

### 5 Descrição do regime básico

Foram realizadas as simulações numéricas de um regime básico com os parâmetros geométricos e os parâmetros de regime apresentados na Tab. (3) até conseguir um estado estacionário. As distribuições  $C$  e  $C_p$  pelo campo de extração apresentam-se, respectivamente, nas Figs. (6 e 7) através dos gráficos tridimensionais onde, o comprimento do extrator é representado pela coordenada  $x = 0...40$  e, a altura, pela coordenada  $z = 0...20$ . Observando as distribuições  $C = f(x,z)$ , pode-se destacar:

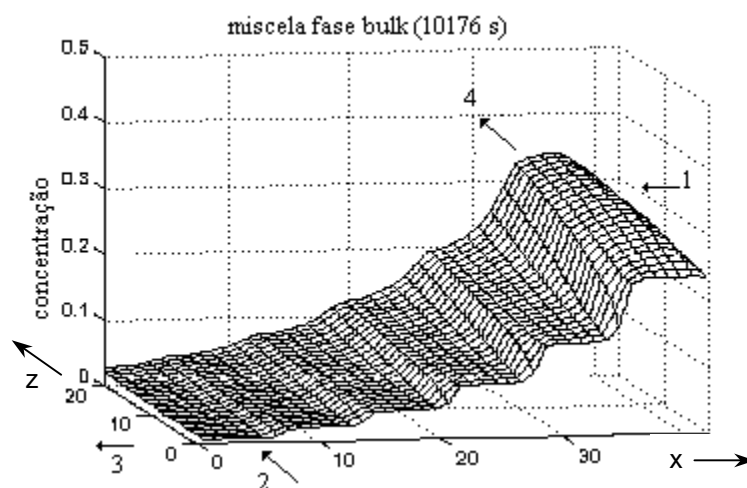


Figura 6. Campo de extração em regime estacionário ( $t = 10176$  s) – fase bulk:  
1 - entrada de matéria-prima, 2 - entrada de miscela, 3 - saída de farelo branco, 4 - saída de miscela

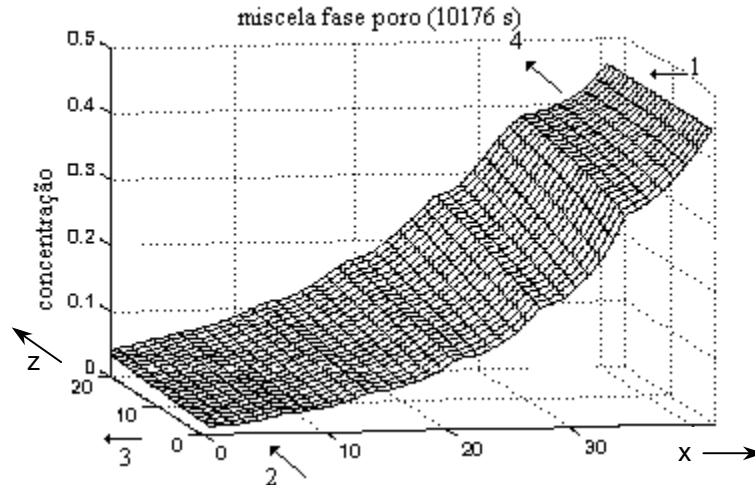


Figura 7. Campo de extração em regime estacionário ( $t = 10176s$ ) – fase poro:

1 - entrada de matéria-prima, 2 - entrada de miscela, 3 - saída de farelo branco, 4 - saída de miscela

- 1 - As concentrações  $C$  e  $C^p$  aumentam, à medida em que a miscela da zona de entrada do hexano se movimentava para a zona de sua saída;
- 2 - As distribuições  $C$  e  $C^p$ , dentro de cada seção de percolação e por todo o extrator, não são uniformes.
- 3 - A distribuição  $C$  tem a forma de uma escada, e as diferenças entre os degraus surgem nos limites entre as seções. A miscela se movimentava de cima para baixo nas seções de percolação.
- 4 - Os degraus aparecem devido às diferenças de concentrações do óleo em miscela nas entradas das seções vizinhas. Os degraus diminuem-se pela altura do extrator por causa da difusão e da transferência de óleo da fase poro.
- 5 - Na zona de saída da miscela concentrada revela-se um máximo nas concentrações  $C$  e  $C^p$ .

6 - No campo de concentrações  $C^p(x,z)$  não há degraus, mas existem evidentes “quebras” das derivadas  $dC^p/dx$ .

7 - As concentrações  $C^p$  do óleo na fase poro são mais altas por todo o campo de extração do que as concentrações  $C$ .

Todas as propriedades e particularidades do estado estacionário explicam-se levando em consideração as leis físico-químicas envolvidas e pelo esquema de funcionamento da instalação.

## 5. Conclusão

1. Os processos de transferência de massa em fluxos CCC porosos têm grande interesse na engenharia, principalmente na indústria de alimentos (óleo vegetal, café, açúcar, etc.). Os modelos matemáticos existentes sobre extração nestes fluxos CCC baseados no método de estágios ideais não prevêm distribuições espaciais das características do processo.
2. No presente trabalho foi melhorado o modelo dos processos de extração em fluxos CCC (Krioukov et al, 1999, Veloso et al, 2001) nos seguintes aspectos: perdas de espécie; preenchimento da fase poro; dispersão da miscela no campo de extração.
3. Os testes do modelo e do aplicativo permitiram fazer as seguintes observações:
  - a zona de estabilidade dos cálculos determina-se pela relação entre os tamanhos da malha e do passo de integração. No geral, os cálculos não divergiram para números de Courant  $S_u$  e  $S_v$ , menor que 0,7;
  - nas simulações numéricas, os resultados mostraram uma concordância de aproximadamente 0,5% com a lei de conservação da espécie.;
  - simulações realizadas mostram que independentemente do estado inicial do campo de concentrações o modelo prevê um único estado estacionário (mantendo iguais os parâmetros geométricos e de regime);
  - a concordância dos resultados teóricos com os dados experimentais são razoáveis.

## 6. Agradecimentos

Os autores agradecem a CNPq (processo nº 470458/2001-1) pelo apoio financeiro e ao Grupo Zaffari pela cooperação na aquisição de dados experimentais.

## 7. Referências

- Abraham G., Hron R.J. and Koltun S.P., 1988, “Modeling the Solvent Extraction of Oilseeds”, JAOCS, Campaign, Vol. 65, pp. 129-135.
- Cussler, E.L., 1997, “Diffusion: Mass Transfer in Fluid Systems”, Cambridge University Press, New York.
- Erickson D.R., 1995, “Practical Handbook of Soybean Processing and Utilization”, AOCS Press, Illinois, EUA, 701 p.

- Lambert J.D., 1978, "Numerical Methods for Ordinary Differential Systems – the Initial Value Problem", John Wiley, New York, 468p.
- Lydersen L.A., 1983, "Mass Transfer in Engineering Practice", Ed. John Wiley & Sons Ltd., 453 p.
- Majumdar G.C., Samanta A.N. and Sengupta S.P., 1995, "Modeling Solvent Extraction of Vegetable Oil in a Packed Bed", JAOCS, Vol. 7, pp. 971-979.
- Maliska C.R., 1995, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", LTC S.A., Rio de Janeiro, 424p.
- Treybal, R.E., 1963, "Liquid Extraction", McGraw-Hill, New York.
- Krioukov V.G., Veloso G.O. e Moreira L.G., 1999, "Modelagem Matemática dos Processos em Extrator "De Smet", XX Congresso Ibero-Latinoamericano de Métodos Computacionais em Engenharia – Proceedings of XX CILAMCE, Escola Politécnica da USP, São Paulo, Vol. 1, pp.1 – 14.
- Veloso G.O., Krioukov V.G. e Moreira L.G., 2000, "Modelagem dos Processos de Transferência de Massa e a Simulação Numérica dos Regimes Transientes do Extrator", VIII Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, Proceedings of VIII ENCIT, UFRGS, Porto Alegre-RS, Brasil, 8p.
- Moreira L.G., Veloso G.O. e Pires A., 2000, "Relatório de Pesquisa: Coleta de Dados Experimentais do Extrator "De Smet" e sua Análise", Grupo Zaffari, Passo Fundo-RS, Brasil, 23p.
- Vian Á. e Ocon J., 1972, "Elementos de Ingeniería Química (Operaciones Básicas)", Ed. Agilar S.A ., 2ª ed., Madrid, 754 p.
- Wrobel, L.C. et all, 1989, "Métodos Numéricos para Recursos Hídricos", Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Rio de Janeiro, 435 p.

## **MATHEMATICAL MODELLING THE PROCESSES OF EXTRACTION IN COUNTERCURRENT CROSSED FLOWS**

### **Gilmar de Oliveira Veloso**

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), Departamento de Física, Estatística e Matemática

Rua São Francisco, 501, Ijuí, RS - 98700-000

krioukov@main.unijui.tche.br

### **Viktor Krioukov**

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), Departamento de Tecnologia

Rua São Francisco, 501, Ijuí, RS - 98700-000

krioukov@main.unijui.tche.br

### **Horácio Antônio Vielmo**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Departamento de Engenharia Mecânica

Rua Sarmento Leite, 425, Porto Alegre, RS - 90050-170

vielmoh@mecanica.ufrgs.br

***Abstract.** In this paper improves the mathematical model proposed in works previous of same authors, about the species extraction in countercurrent crossed flows. In the model, besides the phenomena considered previously (mass transfer between the phases pore and bulk, diffusion for the whole extraction field, influence of the shipment and drainage zones, existence of trays) is introduced: the species losses and its dispersion for the extraction field, the phase bulk drainage in last tray. Shipment submodel was modified. The mathematical model includes two evolutionary EDP's and ordinary integral-differential equations, that are resolved by means of the method of lines. In the work was established the main conditions of calculation convergence and it was discussed the model and code validation. Are shown the specie concentration distributions of the stationary state for whole extraction field.*

***Keywords:** Mathematical model, countercurrent crossed flow, oil extraction, porous media, method of lines.*

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.