

## SIMULAÇÃO DE PETROV-GALERKIN DA HEMODINÂMICA EM UMA ANASTOMOSE SISTÊMICO-PULMONAR

**Dimitrius Caloghero Pereira**<sup>1</sup>

Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC)  
Departamento de Engenharia Mecânica – UFRGS  
Sarmento Leite nº425, 90050 – 170, Porto Alegre, Brasil  
dimidi@cesup.ufrgs.br

**Cleber Spode**<sup>2</sup>

Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC)  
Departamento de Engenharia Mecânica – UFRGS  
Sarmento Leite nº425, 90050 – 170, Porto Alegre, Brasil  
cleber@mecanica.ufrgs.br

**Sérgio Frey**<sup>3</sup>

Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC)  
Departamento de Engenharia Mecânica – UFRGS  
Sarmento Leite nº425, 90050 – 170, Porto Alegre, Brasil  
frey@mecanica.ufrgs.br

**João Ricardo Sant'anna**

Instituto de Cardiologia do RS  
Princesa Isabel nº 395  
Porto Alegre/RS – Brasil

**Resumo.** A anastomose sistêmico-pulmonar é um excelente procedimento paliativo para crianças e recém-nascidos portadores de cardiopatias congênitas cianóticas com diminuição da circulação pulmonar. Neste artigo, aproximações Streamline Upwind/Petrov-Galerkin foram utilizadas para simular o escoamento sanguíneo em anastomoses sistêmico pulmonares do tipo Blalock-Taussing modificada, que consistem na inserção de um enxerto de tubo sintético (prótese) entre a artéria subclávia esquerda e artéria pulmonar com o objetivo de desviar parte do fluxo sistêmico ao pulmonar. A metodologia de elementos finitos utilizada, conhecida como método SUPG, supera as dificuldades enfrentadas pelo método de Galerkin clássico em altos números de Reynolds, que são compatibilizar os subespaços de velocidade e pressão – satisfazendo deste modo a condição denominada de Babuška-Brezzi e evitar oscilações espúrias devido à natureza assimétrica da aceleração advectiva de equação de momentum – adicionando termos malha-dependentes para a formulação de Galerkin clássica. Um modelo tridimensional parametrizado, utilizando o elemento lagrangeano trilinear, foi criado a partir de medições obtidas durante procedimento cirúrgico para avaliar os efeitos do diâmetro e ângulo do enxerto e a pulsatilidade do escoamento. Foram verificados valores de  $f Re$  próximos a 64 em anastomoses com diâmetros do enxerto menor ao da artéria subclávia. Foram determinadas correlações para o fator de atrito e porcentagem de fluxo sanguíneo desviado pelo enxerto.

**Palavras chave:** Hemodinâmica, Elementos Finitos, SUPG.

### 1. Introdução

O emprego de códigos de dinâmica de fluidos computacional vem sendo utilizado para simular escoamentos de sangue com o objetivo de auxiliar pesquisas e tratamentos de doenças vasculares. Os resultados destas simulações tem colaborado nos projetos de novas próteses, no aperfeiçoamento de técnicas cirúrgicas e na compreensão da hemodinâmica do sistema vascular humano.

<sup>1</sup> Este autor é aluno do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC)/UFRGS.

<sup>2</sup> Este autor é aluno de graduação do Departamento de Engenharia Mecânica/UFRGS.

<sup>3</sup> Toda correspondência deve ser enviada a este autor.

As simulações do escoamento de sangue se concentram em artérias com bifurcações, ramificações e curvaturas, onde é elevada a incidência de patologias como: arteriosclerose, aneurisma e trombose. As simulações mais estudadas até o momento são a artéria carótida, a artéria aorta abdominal e de anastomoses de enxerto vascular na artéria femoral.

O objetivo deste trabalho é estudar a influência dos fatores geométricos no escoamento de sangue em uma anastomose sistêmico-pulmonar utilizando um código de dinâmica de fluidos computacional baseado no método de elementos finitos. A anastomose a ser estudada é conhecida como Blalock Taussig Modificada (Leval, 1981) e consiste em uma técnica cirúrgica paliativa indicada nas cardiopatias congênitas cianóticas com diminuição do fluxo de sangue arterial nas artérias pulmonares. Com o objetivo de aumentar o fluxo pulmonar, parte do fluxo sistêmico é direcionado para as artérias pulmonares através da interposição de um enxerto tubular (prótese, “Shunt”) de politetrafluoretileno – “PTFE” entre a artéria subclávia e a artéria pulmonar. A sobrevida destes pacientes depende do aumento no fluxo pulmonar pelo enxerto e portanto, da dinâmica do escoamento no enxerto e nas artérias pulmonares, diretamente ligado aos fatores geométricos envolvidos na cirurgia, tais como diâmetros das artérias e enxerto, ângulos da anastomose. Um modelo geométrico tridimensional parametrizado foi desenvolvido para permitir simulações com diferentes configurações geométricas.

## 2. Anastomoses sistêmico-pulmonares

A anastomose sistêmico-pulmonar desvia parte do fluxo da circulação sistêmica à circulação pulmonar com objetivo de aumentar o baixo fluxo pulmonar decorrente de cardiopatias congênitas.

A primeira cirurgia paliativa de anastomose sistêmico-pulmonar, para tratamento da cardiopatia cianótica com hipofluxo pulmonar, foi realizada em 1944, por Alfred Blalock e Helen Taussig em uma criança com 15 meses de idade, portadora de tetralogia de Fallot (Blalock e Taussig, 1945).

A primeira anastomose de Blalock-Taussig, ilustrada na Fig. (1a), foi realizada com o segmento terminal da artéria subclávia esquerda implantado lateralmente na artéria pulmonar do mesmo lado. Posteriormente, esta técnica cirúrgica passou a ser realizada no lado do tórax que continha a artéria inominada, Fig. (1b), pois considerava-se que a artéria subclávia originária da inominada apresentava menor propensão ao acotovelamento. Atualmente, a anastomose subclávio-pulmonar é realizada com a artéria subclávia esquerda pela maior parte dos cirurgiões (Thomé, 1993).

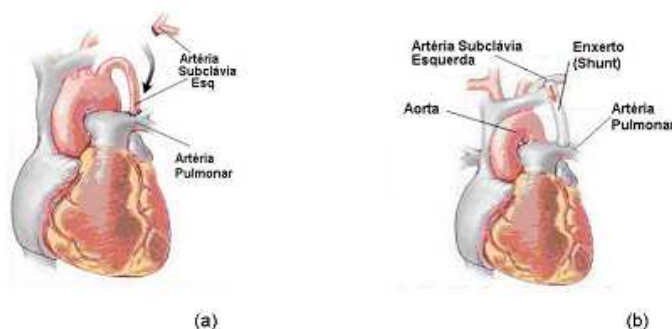


Figura 1. (a) Blalock-Taussig clássica, (b) Blalock-Taussig modificada.

O diâmetro da artéria subclávia tem a grande vantagem de limitar o fluxo sistêmico para o leito pulmonar, evitando hiperfluxo com conseqüente hipertensão arterial pulmonar, tornando esta complicação menos freqüente que nos casos de anastomose aorto-pulmonares. Algumas das suas desvantagens são que a trombose da anastomose ou fluxo insuficiente ocorre principalmente em crianças pequenas e neonatos devido a artérias diminutas ou hipoplásicas. Em 1962, foi relatada a criação de uma anastomose sistêmico-pulmonar em pacientes com cardiopatia congênita com hipofluxo pulmonar, onde foi utilizada uma prótese de teflon interposta entre as artérias subclávia e pulmonar. Foi o primeiro relato da cirurgia de Blalock-Taussig modificada (ver Thomé, 1993).

A vantagem deste tipo de cirurgia é a preservação da artéria subclávia prevenindo com isso as seqüelas descritas com a cirurgia de Blalock-Taussig (Thomé, 1993). A experiência posterior demonstrou que o teflon não se constituía um material adequadol para este procedimento. Soyer et al., 1972, relatou a primeira experiência com um novo produto protético para uso vascular, o politetrafluoretileno (PTFE). O PTFE foi desenhado para suportar pressões maiores que  $180 \text{ mmHg}$ , a sua estrutura molecular é constituída de átomos de carbono, circundados por átomos de flúor altamente eletronegativos. Esta composição química é uma das mais biocompatíveis e termicamente estáveis conhecidas pelo homem.

## 3. Aproximação por Elementos Finitos

A partir das equações de conservação de momentum e massa, empregando as adimensionalizações usuais em Mecânica dos Fluidos (Landau e Lifchitz, 1971), podemos modelar o escoamento de sangue em uma anastomose sistêmico-pulmonar através do seguinte problema de contorno,

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} \right) - 2\eta \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_g \quad \text{sobre } \Gamma_g \times (0, T) \\
\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}_h \quad \text{sobre } \Gamma_h \times (0, T) \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{em } \Omega \text{ com } t = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

onde  $\mathbf{u}$  é a velocidade do fluido,  $p$  sua pressão,  $\eta$  sua viscosidade,  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  a parte simétrica do tensor  $\nabla \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{n}$  a normal exterior unitária,  $\mathbf{f}$  a força de corpo do escoamento e  $\boldsymbol{\sigma}$  o tensor de Cauchy definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\eta(\gamma)\mathbf{D}(\mathbf{u}) \tag{2}$$

### 3.1 Formulação Streamline Upwind/Petrov-Galerkin

Na aproximação por elementos finitos para o sistema da Eq. (1) aplicaremos os seguintes subespaços finitos:

$$\mathbf{V}_h = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in \mathbf{R}_k(K)^N, K \in \mathcal{C}_h \} \tag{3}$$

$$P_h = \{ p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in R_1(K), K \in \mathcal{C}_h \} \tag{4}$$

$$\mathbf{V}_h^g = \{ \mathbf{v}(\cdot, t) \in H^1(\Omega)^N, t \in [0, T] \mid \mathbf{v}|_K \in \mathbf{R}_k(K)^N, K \in \mathcal{C}_h, \quad \mathbf{v}(\cdot, t) = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma_g \} \tag{5}$$

onde  $\mathcal{C}_h$  é a porção usual do domínio computacional  $\Omega$ , em elementos finitos,  $R_k$  e  $R_1$  denotam, respectivamente os polinômios espaciais de grau  $k$  e 1 (Ciarlet, 1978).

Das definições de espaços (3)-(5), podemos escrever a seguinte formulação Streamline Upwind/Petrov-Galerkin para o sistema (1): determinando o par  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^g \times P_h$

$$B(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}, q), \quad (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times P_h \tag{6}$$

onde

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}, q) &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + (2\nu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} + \nabla p - 2\nu \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}), \tau(\mathbf{Re}_K) ([\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} - \nabla q) \right)_K
\end{aligned} \tag{7}$$

e

$$F(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v})_{\Gamma_h} + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (\mathbf{f}, \tau(\mathbf{Re}_K) ([\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} - \nabla q))_K \tag{8}$$

com o parâmetro de estabilidade  $\tau$  definido por:

$$\tau(\mathbf{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(\mathbf{Re}_K) \tag{9}$$

$$\xi(\mathbf{Re}_K) = \begin{cases} \mathbf{Re}_K, & 0 \leq \mathbf{Re}_K < 1 \\ 1, & \mathbf{Re}_K \geq 1 \end{cases} \tag{10}$$

$$\mathbf{Re}_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4\nu} \tag{11}$$

onde  $|\mathbf{u}|_p$  denota a norma- $p$  em  $\mathfrak{X}^N$  e a constante  $m_k$  para a formulação SUPG definida como em Franca e Frey (1992).

*Observações:*

1. Fazendo o parâmetro de estabilidade  $\tau$  igual a zero na Eq.(7), obtemos a formulação de Galerkin clássica para o problema definido na Eq.(1) . Sua estabilidade, no contexto linear do problema de Stokes, é governada pela forma discreta do Teorema de Brezzi (Ciarlet, 1978), a qual impõe, além da satisfação da condição de Babuska-Brezzi envolvendo os subespaços de pressão e velocidade, que o problema discreto seja elíptico para toda velocidade pertencente ao subespaço  $\mathbf{K}_h$ , com

$$\mathbf{K}_h^0 = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \mid \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, q \in P_h \} \quad (12)$$

Visto que em geral  $\mathbf{K}_h^0 \subset \mathbf{K}^0$ , apenas um número limitado de combinações de elementos finitos irá satisfazê-las, criando assim uma séria limitação ao método de Galerkin em fluidos. Combinações de elementos computacionalmente desejáveis como as de igual ordem, ficam por esta razão descartadas.

2. A instabilidade da aproximação de Galerkin em regimes de escoamento advectivos-dominados decorre da falta de coercividade da forma bilinear definida na Eq. (7). Tomando  $(\mathbf{v}, q) = (u, -p)$  e  $\tau=0$  em (6) e selecionando  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$ , teremos

$$B(\mathbf{v}, q; \mathbf{v}, -q) \geq 2\nu \|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_0^2 \quad (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times P_h \quad (13)$$

Portanto, nas situações onde  $\nu \rightarrow 0$ , teremos a aproximação de Galerkin contaminada por oscilações espúrias, gerando soluções numéricas fisicamente irreais.

3. A expressão usual do número de Reynolds de malha (Johnson, 1987) foi modificada com a inclusão do parâmetro  $m_k$  na equação (7), de modo a também considerar o grau de interpolação empregado. Com isto, as regiões advectivas-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por  $Re_k > 1$  e as difusivas-dominadas por  $Re_k < 1$ , independente do elemento considerado (Franca e Frey, 1992).

#### 4. Simulações Numéricas

Neste estudo, a formulação Streamline Upwind/Petrov-Galerkin – SUPG, definida nas Equações (7) e (8), foi utilizada para aproximar o sistema que modela o escoamento de sangue na anastomose sistêmico-pulmonar do tipo Blalock-Taussig modificada. Um modelo geométrico parametrizado tridimensional foi desenvolvido baseado nas medidas obtidas durante procedimentos cirúrgicos realizados no Instituto de Cardiologia do Rio Grande do Sul. O modelo é composto pela artéria subclávia, pela artéria pulmonar e pela prótese de PTFE (“Shunt”), conforme pode ser visto nas Figs. 2 (a) e (b) . Os parâmetros obtidos pelos pacientes foram os diâmetros do enxerto tubular, artérias subclávia e pulmonares e os ângulos das anastomoses (proximal e distal).

As extensões das artérias foram determinadas a partir dos resultados obtidos pelas simulações pulsantes e medidas do exame de Ecodoppler. Com o objetivo de estudar a influência do determinantes geométricos (diâmetro, curvatura e ângulo) simulações em regime permanente foram realizadas modificando estes determinantes geométricos.

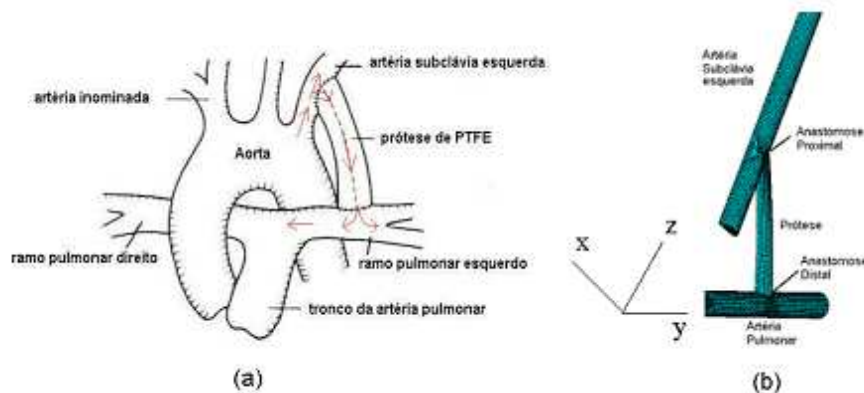


Figura 2. Anastomose do tipo Blalock-Taussig modificada, (a) desenho (b) modelo simétrico

#### 4.1 Aspectos computacionais

As simulações foram realizadas no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e Centro Nacional de Supercomputação (CESUP-RS). Os recursos computacionais utilizados nas simulações numéricas foram: Uma “Silicon Graphics ORIGIN 200 Workgroup Server” – com 2 processadores e 256 Mb de memória RAM. O código de dinâmica de fluidos computacional Flotran (Ansys Inc.) foi utilizado empregando a formulação “Streamline Upwind Petrov-Galerkin”.

O domínio foi discretizado por uma malha de elementos hexaedros de oito nós (trilinear). O tamanho do elemento (compatível com os recursos computacionais disponíveis) foi determinado - 0,0005. Diminuindo o tamanho do elemento a partir deste valor, não houve variações significativas nos valores de velocidade axial e pressão ao longo da artéria subclávia. Variando até 0,00025, as diferenças máximas de velocidade e pressão foram sempre menores de 3 e 2% respectivamente. O número de elementos variou de paciente para paciente devido às diferenças dos diâmetros das artérias e enxerto. O menor modelo foi discretizado em 17.976 elementos, enquanto que o maior foi em 72.666 elementos. O tempo de solução, em regime permanente, para o menor modelo foi de 17.209 segundos e para o maior, 39.762 segundos. A análise em regime pulsante consumiu 184.166 segundos de processamento.

O plano de simetria normal ao eixo Y foi assumido com o objetivo de reduzir a memória necessária com ganho de 50% na malha, e o tempo de solução – Fig. 2 (b).

Interpolações trilineares lagrangeanas foram utilizadas para aproximar os campos de velocidade e pressão. As simulações foram realizadas de acordo com as seguintes hipóteses: as paredes das artérias são rígidas, o sangue é homogêneo e se comporta como um fluido Newtoniano generalizado, o escoamento é laminar – com Reynolds entre 700 e 2400.

As condições de contorno impostas foram: condição de não deslizamento nas paredes das artérias e enxerto, condição de tração livre nas seções de saída das artérias subclávia e pulmonares (ver Fig. 3), de modo a retirar a indeterminação do campo de pressão incompressível, fixou-se em alguns nós das seções de saída  $p=0$ . Algumas simulações foram realizadas com as condições de contorno definidas por Migliavacca et al., 2000, com a imposição de fluxo prescrito, na saída da artéria subclávia. O perfil da velocidade de entrada na artéria subclávia foi considerado plano em todas as simulações. A condição de escoamento pulsante na artéria subclávia foi obtida a partir do exame de Ecodoppler (Fig. 4) realizado em um paciente submetido previamente ao procedimento de Blalock-Taussig modificado.

O código empregado resolve os sistema de equações de forma segregada, surgindo a necessidade de acoplamento entre as variáveis, principalmente entre velocidade e pressão, em escoamentos incompressíveis. O método batizado de SIMPLE (“Semi implicit linked equations”), Patankar e Spalding, 1972, foi utilizado para realizar este acoplamento. A solução do sistema de equações algébricas foi obtida com a utilização do método linha a linha TDMA (“TriDiagonal Matriz Algorithm”) desenvolvido por Thomas, 1949.

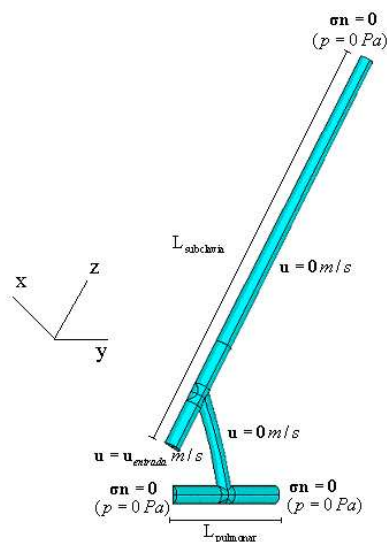


Figura 3. (a) Condições de contorno impostas ao modelo, (b) Condição pulsante na artéria subclávia – Velocidade (m/s)

#### 4.2 Pacientes - amostragem

Dez pacientes (Tab. (1)) com cardiopatia congênita e hipofluxo pulmonar, submetidos à cirurgia de anastomose sistêmico-pulmonar do tipo Blalock-Taussig modificada no Instituto de Cardiologia do RS, foram incluídos no presente estudo.

A inclusão do paciente esteve em consonância com o diagnóstico pré-operatório: a indicação do grupo de cardiopatias congênitas, a condição clínica do paciente, a anuência do responsável pelo paciente e a preferência

individual do cirurgião, o qual considerou adequada a cirurgia de anastomose sistêmico-pulmonar do tipo de Blalock-Taussig modificada.

Tabela 1. Pacientes com cardiopatia congênita cianótica incluídos no estudo – D (diâmetro), L (extensão)

Pacientes	D <sub>subclávia</sub>	D <sub>pulmonar</sub>	D <sub>enxerto</sub>	L <sub>enxerto</sub>	PTFE <sub>subclávia</sub>	PTFE <sub>pulmonar</sub>	Idade
P1	2.5	4	5	34	30°	90°	39 dias
P2	3	2	4	40	60°	90°	7 dias
P3*	6	5	5	30	30°	90°	4 anos
P4	2.5	3	5	30	30°	40°	2 meses
P5	5	9	6	30	50°	40°	9 meses
P6	6	7	4	37	30°	90°	4 meses
P7	8	6	5	37	60°	90°	4 meses
P8	3	6.6	5	33	70°	80°	2 dias
P9	4	3.5	5	37	60°	90°	4 dias
P10	4.5	10	6	35	110°	60°	4 meses

\* P3 foi submetido à 2 anos ao procedimento de Blalock-Taussig modificado – parâmetros geométricos foram obtidos através do exame de angiocardiograma.

### 4.3 Considerações éticas

Não houve impedimentos de ordem médica à realização da presente pesquisa, pois esta não implicou em qualquer risco adicional ao do procedimento cirúrgico rotineiro, para os pacientes. Isto porque: (1) a coleta de informações para simulação computacional na qual baseou-se a confecção de modelos geométricos não implicou em modificações na rotina de tratamento dos pacientes (incluindo-se o procedimento cirúrgico) ou requisaram exames e procedimentos específicos ou não previstos na conduta médica; (2) a simulação computacional foi aplicada a procedimentos cirúrgicos bem conhecidos e nos quais os médicos participantes possuem ampla experiência: estes procedimentos já estavam realizados quando da análise computadorizada, de modo que os resultados observados na simulação não terão interferência no manuseio dos pacientes ou na sua evolução clínica.

O grau de benefício trazido pelo estudo aos pacientes participantes poderá advir apenas do fato de que observação diagnóstica e cirúrgica cuidadosa e precisa é necessária para se obterem dados necessários para construção dos modelos.

Os responsáveis pelos pacientes considerados (estes neonatos ou crianças de pequena idade) foram contatados previamente ao procedimento cirúrgico para esclarecimento quanto à cirurgia a ser realizada e ao estudo proposto. Um consentimento para que o paciente venha a participar do estudo foi solicitado ao responsável, mediante assinatura do Termo de Consentimento para Participação no Estudo.

### 4.4 Validação e aplicação do método

Esta seção descreve o desenvolvimento do modelo geométrico e aplicação do método para simular o escoamento de sangue em anastomoses sistêmico-pulmonares do tipo Blalock-Taussig modificado. O sangue flui através das artérias subclávias até os braços. A primeira tarefa foi determinar os comprimentos ótimos das artérias subclávia ( $L_{\text{subclávia}} = 152 \text{ mm}$ ) e pulmonar ( $L_{\text{pulmonar}} = 40 \text{ mm}$ ) a serem modeladas. Para isso, os resultados numéricos foram comparados com as medições obtidas no exame de Ecodoppler de um paciente submetido ao referido procedimento cirúrgico. A Fig. (4) mostra os resultados numéricos obtidos pelo modelo geométrico deste trabalho sobrepostos ao exame de Ecodoppler durante um pulso junto a região da anastomose proximal. Pode-se observar uma boa concordância qualitativa e quantitativa entre o resultado numérico obtido no presente trabalho e o do exame de Ecodoppler.

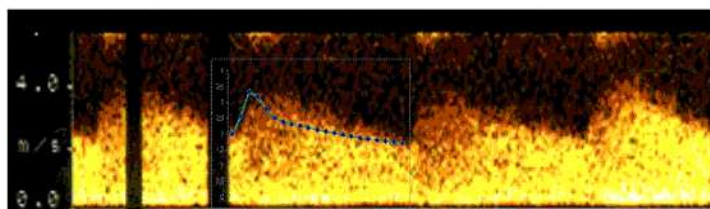


Figura 4. Velocidade ( $m/s$ ) na prótese

Com a intenção de assegurar a precisão do método empregado, foram realizadas análises numéricas com as condições de contorno impostas por Migliavacca et al., 2000.

Migliavacca et al., 2000, utilizou o código de dinâmica dos fluidos computacional FIDAP (FLUENT Inc.) com o objetivo de examinar a variação de pressão no “Shunt” em função do fluxo desviado pelo mesmo no procedimento cirúrgico de Norwood. (Fig. (5)). O modelo geométrico é composto pela artéria inominada com a bifurcação até o nível das artérias subclávia direita e carótida direita, o enxerto implantado e as artérias pulmonares. Nestas simulações o fluxo



(vazão volumétrica) na entrada da artéria inominada foi definida como 0,6 *l/min*, e foram impostos fluxos de saídas definidos de modo que o fluxo volumétrico no Shunt foi definido entre 0,2 e 0,6 *l/min*.

As Fig.s (6) e (7) mostram as relações entre a vazão volumétrica nos enxertos e a variação de pressão no mesmo, em shunts com 3 e 4mm de diâmetros.

Podemos verificar uma boa concordância nos resultados numéricos obtidos por Migliavacca et al. (2000) e o modelo apresentado neste estudo. Esta concordância foi satisfatória na faixa de 0.2-0.5 *l/min* de fluxo desviado pelo enxerto. Conforme Pennati et al., 2001, o escoamento desviado inteiramente pelo enxerto não é uma situação realística - segundo Migliavacca et al. (1999), o fluxo em um enxerto é estimado em aproximadamente entre 70-80% do fluxo da artéria inominada em recém nascidos. Uma pequena discrepância existe na Figs (6) para um desvio de 0.6 *l/min*, que equivale dizer 100% de desvio - situação não real. Esta discordância é difícil de ser levantada, devido ao pouco detalhamento numérico de Migliavacca et al. (2000), o qual não informa os perfis impostos nas seções de entrada e saída das artérias inominada e subclávia respectivamente.

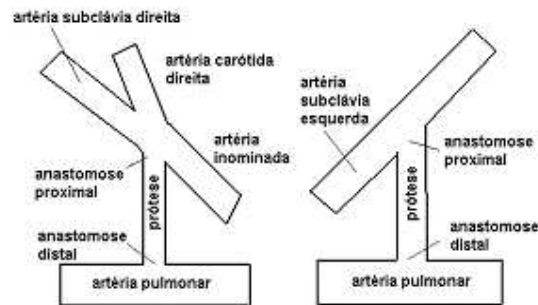


Figura 5. Procedimentos de (a) Norwood e (b) Blalock-Taussig modificado

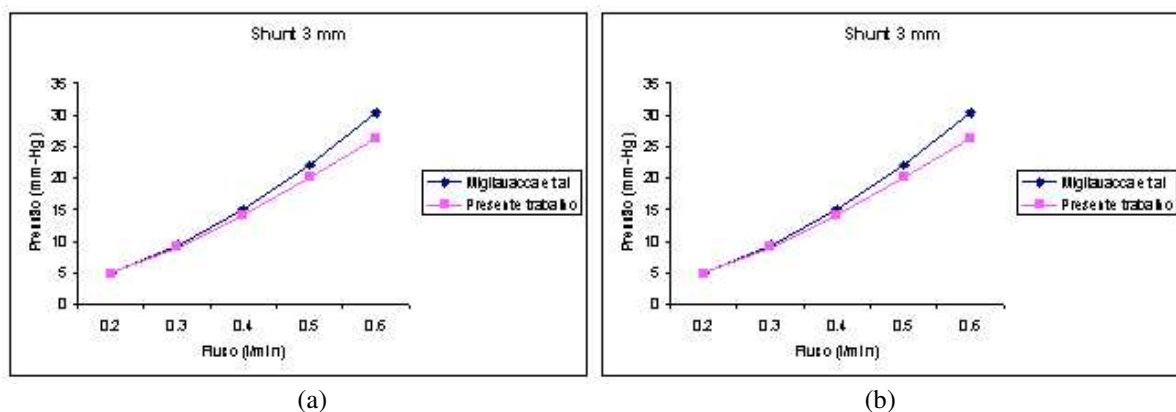


Figura 6. Variação da pressão nas próteses ("Shunts") de (a) 3 e (b) 4mm em função do fluxo de sangue desviado (*l/min*)

Migliavacca et al., 2000, desenvolveu uma correlação a fim de estimar o fluxo através do enxerto tubular. A variação de pressão para um enxerto reto foi definida por:

$$\Delta P = \frac{0.097}{D_{\text{Shunt}}^4} Q + \frac{0.521}{D_{\text{Shunt}}^4} Q^2 \quad (14)$$

onde a pressão é expressa em milímetros de mercúrio, o diâmetro do enxerto em centímetros e o fluxo no enxerto em litros por minuto.

A Fig. (7) mostra as isovalores de pressão no modelo geométrico com a extensão da artéria subclávia e as condições de contorno propostas no presente estudo.

Com a finalidade de justificar a hipótese utilizada neste estudo, de que o sangue se comporta como um fluido Newtoniano nas condições de escoamento impostas pela anastomose de Blalock-Taussig modificada, foram realizadas simulações numéricas tanto com modelos não Newtonianos (Newtonianos generalizados) - Equações (15)(Modelo Power Law) e (16)(Modelo Carreau) como com o modelo empregando a hipótese Newtoniana - Eq. (2). Os parâmetros destes modelos para o sangue foram obtidos em Slattey, 1999 e encontram-se na Tab. 2.

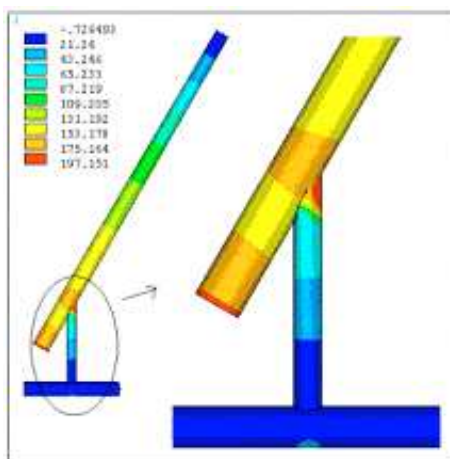


Figura 7. Iso-regiões de pressão (Pa) – (133,32 Pa = 1mmHg)

$$\eta(\gamma) = m\gamma^{n-1} \quad (15)$$

$$\eta(\gamma) = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty})[1 + (\lambda\gamma)^A]^{-\frac{n-1}{A}} \quad (16)$$

Tabela 2. Parâmetros dos modelos Newtonianos generalizados utilizados neste trabalho

Modelos	Parâmetros			
	$m (Pa s^n)$	$n$	$\gamma (s^{-1})$	
Power Law	0,035	0,61	226,5	
	$\lambda (s)$	$n$	$\eta_0 (Pa s)$	$\eta_{\infty} (Pa s)$
Carreau	3,313	0,3568	0,056	0,00345

onde  $\eta_0$  é a viscosidade a taxa de cisalhamento zero,  $\eta_{\infty}$  é a viscosidade a taxa de cisalhamento infinita,  $n$  é o “expoente power-law”,  $\lambda$  é uma constante de tempo e  $A$  um parâmetro adimensional que descreve a transição entre a região de taxa de cisalhamento zero e a região Power Law. Quando o valor de  $A$  é igual a 2, a Eq. (16) é conhecida por modelo de Carreau (Carreau, 1968).

Ao analisar a Fig.s (8) e a Tab. (3), é possível verificar a semelhança dos resultados obtidos pelo modelo Newtoniano e pelos modelos não Newtonianos (Newtonianos generalizados) - mais precisamente pelo modelo de Carreau. Com base nestes resultados o emprego do modelo Newtoniano é plenamente justificado, dado o baixo custo computacional do modelo linear de Newton. A discrepância entre o modelo Newtoniano e o modelo Power Law, pode ser justificada pela incapacidade do modelo Power-Law reproduzir a assíntota Newtoniana para  $\gamma \rightarrow 0$  e  $\gamma \rightarrow \infty$ .

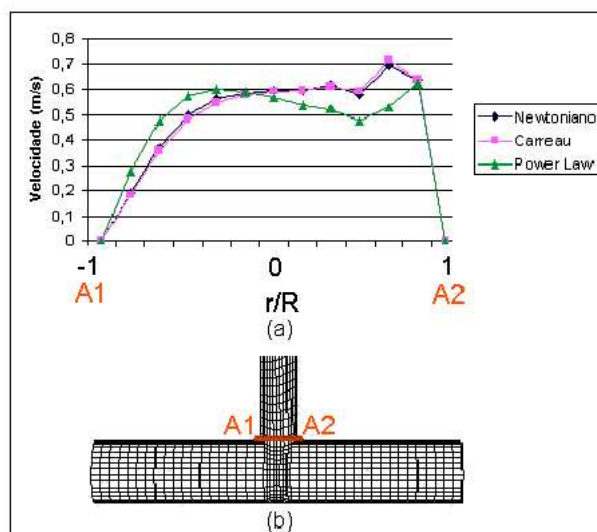


Figura 8. (a) Perfil de velocidade na anastomose distal do “Shunt” – seção A1A2 conforme (b)



Tabela 3. Porcentagem de sangue desviado pelo enxerto tubular (“Shunt”)

	% Desvio		
	Newtoniano	Carreau	Power Law
Prótese/total	33,19	33,62	31,08
Para a artéria pulmonar Esquerda	17,56	17,75	16,68
Para a artéria pulmonar Direita	15,63	15,87	14,40

## 5. Influência dos fatores geométricos

### 5.1. Fator de atrito do escoamento na artéria subclávia

Inicialmente estudaremos a influência dos determinantes geométricos no fator de atrito do escoamento na artéria subclávia. Num escoamento sem atrito, a equação de Bernoulli poderia ser utilizada para calcular os efeitos das variações de elevação e velocidade. Dessa forma, no caso de escoamentos viscosos, a preocupação principal são os efeitos do atrito. Estes provocam perda de carga no escoamento, ou seja, uma conversão indesejável de energia mecânica em energia térmica, fenômeno ausente no escoamento invíscido. A perda de carga total, é a soma das perdas distribuídas devidas aos efeitos do atrito no escoamento desenvolvido em tubos de seção constante, com as perdas localizadas, devidas a entradas, acessórios, mudanças de áreas etc.

Num escoamento completamente desenvolvido (Fox, 1998) através de um tubo horizontal de área constante, a perda de carga distribuída pode ser expressa como a perda de pressão e representa a energia mecânica convertida em térmica, por efeitos do atrito viscoso. A queda de pressão é equilibrada apenas pelas forças de cisalhamento nas paredes do tubo. Verificamos assim que a tensão de cisalhamento no fluido varia linearmente na direção transversal ao tubo.

Para o escoamento laminar o fator de atrito é caracterizado por uma única curva dada pela equação

$$f = \frac{64}{Re} \quad (17)$$

onde  $f = 2 \frac{\Delta p}{\rho} \frac{D}{Lu^2}$  e  $Re$  é o número de Reynolds, definido por  $Re = \frac{\rho u D}{\mu}$ , sendo  $\rho$  a densidade do fluido,  $u$  sua velocidade,  $L$  o comprimento do tubo,  $D$  o diâmetro do tubo e  $\mu$  a viscosidade do fluido.

Na anastomose sistêmico-pulmonar do tipo Blalock-Taussig modificado o diâmetro do enxerto interposto pode ser maior ou menor que o diâmetro da artéria subclávia. A Fig. (9(a)) apresenta o fator de atrito na artéria subclávia, para o caso onde o diâmetro do enxerto é maior que o diâmetro da artéria subclávia. Enquanto que a Fig. (9(b)) se refere ao caso onde o diâmetro maior é o da subclávia comparado ao do enxerto. Em ambos os casos o número de Reynolds foi fixado em 360, 810, 1260 e 1710, para os ângulos da anastomose de 30°, 60°, 90° e 110°.

Devido à interposição de um enxerto tubular na artéria subclávia, os valores de fator de atrito da artéria subclávia obtidos se afastaram aos previstos pela Eq. (17). Ao compararmos as Figs. (9(a)) e (9(b)), pode-se notar que para o mesmo número de Reynolds, os valores de fator de atrito não são os mesmos. Isto pode ser explicado pelo fato da inclusão de um enxerto com diâmetro maior que o da artéria subclávia causar maior perturbação no escoamento se comparado ao caso de um enxerto de diâmetro menor que o da artéria subclávia. Para exemplificar esta conclusão, alguns valores de  $f Re$  serão apresentados na Tab. (4), em uma anastomose de 60°.

Tabela 4.  $f Re$  calculado para anastomoses com ângulo de 60°

Tipos de anastomoses	Re			
	360	810	1260	1710
$D_{\text{protese}} > D_{\text{subclavia}} (f Re)$	16,78	21,96	25,71	28,18
$D_{\text{protese}} < D_{\text{subclavia}} (f Re)$	52,78	67,36	78,88	89,13

A Eq. (17), prescreve  $f Re = 64$ . Para escoamentos laminares completamente desenvolvidos em tubos retos, horizontais de seção constante. No nosso estudo não há comprimento de entrada suficiente para o escoamento se desenvolver, além da seção da artéria subclávia não ser sempre constante a jusante da anastomose. Mesmo assim pode-se notar que para o caso de anastomose com diâmetro do enxerto menor que o da artéria subclávia, obteve-se valores para  $f Re$  próximos a 64, o que já não ocorre na anastomose onde o diâmetro do enxerto é maior.

Ao analisarmos a Fig. (9) é possível concluir que existe uma influência sensível do ângulo da anastomose no escoamento do sangue na artéria subclávia, tendo em vista que para diferentes ângulos, tem-se diferentes valores para fator de atrito na artéria subclávia.

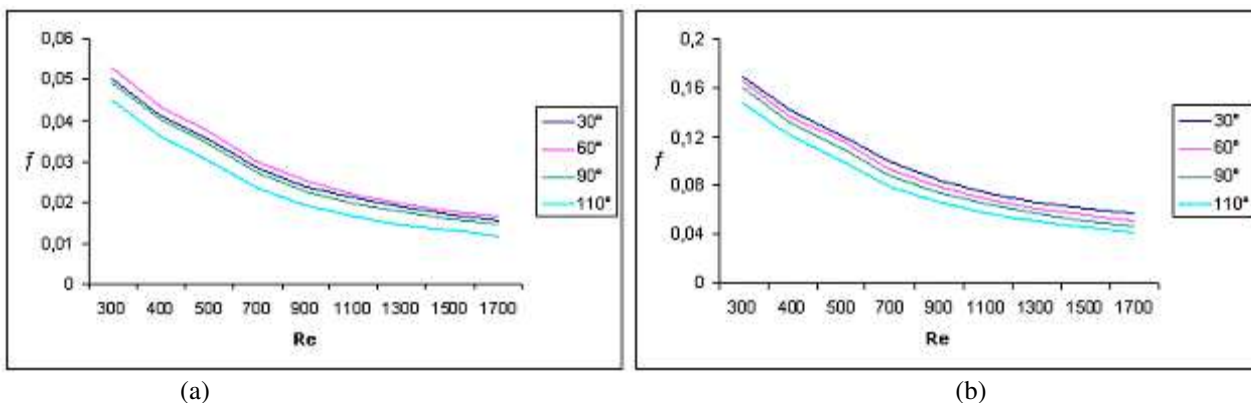


Figura 9. Gráfico  $f \times Re$  – (a) diâmetro do enxerto maior que o diâmetro da subclávia, (b) diâmetro do enxerto menor que o diâmetro da subclávia.

O fator atrito na artéria subclávia onde é incluído um enxerto de diâmetro maior que o seu, tem o valor maior para a anastomose proximal com ângulo de  $60^\circ$  (Fig. 9 (a)), enquanto que o fator de atrito na artéria subclávia onde é interposto um enxerto de menor diâmetro, tem o maior valor para o ângulo de  $30^\circ$  (Fig. 9(b)).

As Figs. (10 (a)) e (10(b)) apresentam o fator de atrito na artéria subclávia utilizando diâmetros de enxerto de  $4\text{mm}$ ,  $5\text{mm}$  e  $6\text{mm}$ .

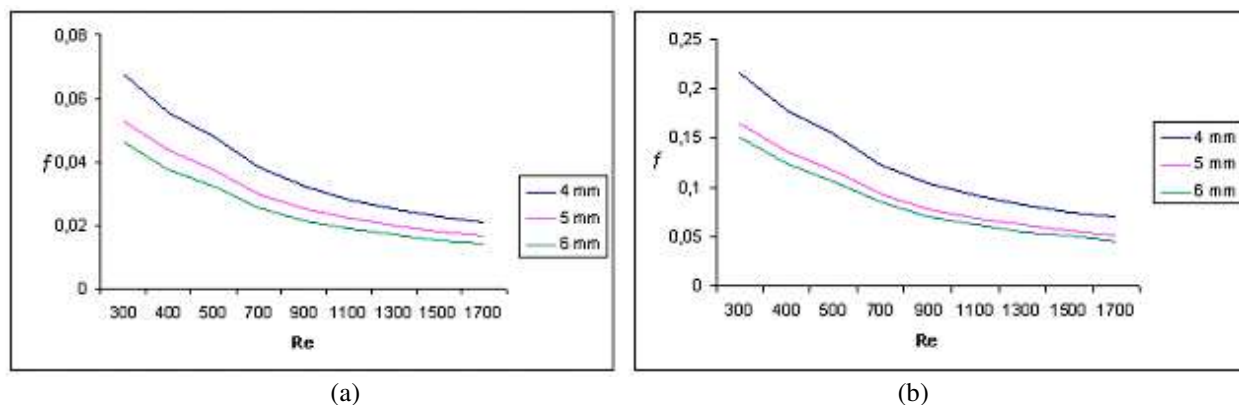


Figura 10. Gráfico  $f \times Re$  – (a) diâmetro do enxerto maior que o diâmetro da subclávia, (b) diâmetro do enxerto menor que o diâmetro da subclávia.

## 5.2. Fluxo desviado pelo enxerto

A partir de simulações envolvendo a razão entre os diâmetros da artéria subclávia e do enxerto, que será chamado de  $Dr$ , foi possível obter algumas correlações para os diâmetros de enxerto de  $4\text{ mm}$ ,  $5\text{ mm}$  e  $6\text{ mm}$ , apresentadas na Tab. (5). A Fig. (11) apresenta as curvas de desvio de fluxo no enxerto em função da razão entre o diâmetro da artéria subclávia e diâmetro do enxerto.

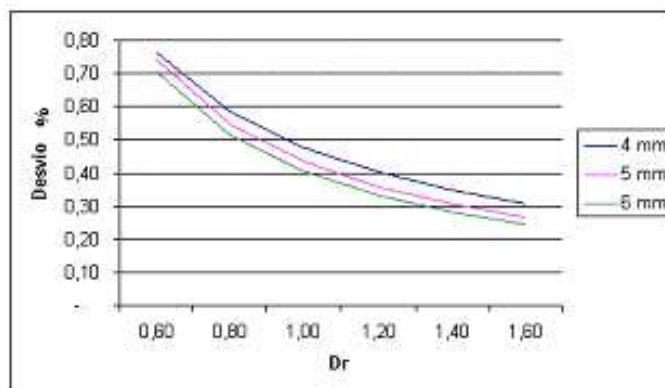


Figura 11. Desvio de fluxo de sangue no enxerto em função de  $Dr$ .

Tabela 5. Correlações para cálculo fluxo de sangue desviado pelo enxerto em função da razão entre os diâmetros da artéria subclávia e do enxerto.

Diâmetro do enxerto	Modelo Power Law ( $y=a x^b$ )	
	a	B
4 mm	0,4753	-0,9230
5 mm	0,4475	-1,0511
6 mm	0,4056	-1,0760

A Tab. (5) apresenta a porcentagem de fluxo desviado pelo enxerto e direcionado para cada uma das artérias pulmonares dos pacientes pertencentes a amostragem, dividida em dois grupos, em função dos ângulos simulados. O ângulo da anastomose tem uma significativa influência na porcentagem de fluxo desviada pelo enxerto. Vale ressaltar porém, que entre os ângulos de 30° e 60°, a diferença na porcentagem de fluxo é pouco expressiva. Para os procedimentos em que o diâmetro do enxerto é menor que o diâmetro da artéria subclávia, a porcentagem desviada é maior nos casos com anastomose de 60° comparado com o ângulo de 30°. Quando o diâmetro do enxerto é maior que a artéria subclávia, pode-se verificar o contrário. A influência do ângulo se torna mais expressiva nos casos de 90° e principalmente 110° graus. Em todos os casos onde foi simulado o ângulo da anastomose com 110°, foi notado a maior porcentagem de desvio. Isto não significa que este procedimento deva ser o mais indicado para o procedimento cirúrgico. Outro fato que deve ser levado em consideração é a porcentagem de fluxo direcionada para cada um dos pulmões. Procura-se sempre que possível manter um fluxo semelhante entre as duas artérias pulmonares. Os pacientes P3 e P6 caracterizam-se pelo diâmetro do enxerto ser menor que o diâmetro da artéria subclávia. Isto justifica a menor porcentagem de fluxo desviado para estes casos.

Tabela 5. Porcentagem de fluxo desviado pelo enxerto e distribuído pelas artérias pulmonares – 30°, 45°, 60°.

Pacientes	Local Desviado	30°	45°	60°
P1	Enxerto	79,33%	77,96%	78,43%
	Pul Dir.	40,64%	34,88%	29,92%
	Pul Eq.	38,68%	43,09%	48,51%
P3	Enxerto	38,67%	38,45%	39,65%
	Pul Dir.	21,30%	15,92%	11,77%
	Pul Eq.	17,37%	22,52%	27,88%
P4	Enxerto	76,32%	75,41%	76,15%
	Pul Dir.	36,65%	33,27%	31,02%
	Pul Eq.	39,66%	42,14%	45,13%
P6	Enxerto	27,71%	27,82%	28,68%
	Pul Dir.	20,24%	15,04%	9,93%
	Pul Eq.	7,47%	12,79%	18,75%

A Tab.(6) apresenta os resultados numéricos de porcentagem de fluxo de sangue desviado pelo enxerto implantado durante o procedimento cirúrgico comparado a outras duas opções de diâmetro. Como de esperado, verifica-se que quanto maior o diâmetro do enxerto, maior é o fluxo de sangue desviado para os pulmões.

Tabela 6. Porcentagem de fluxo desviado pelo enxerto e distribuído para as artérias

Pacientes	Local Desviado	3 mm	4 mm	5 mm
P1	Enxerto	65,06%	73,81%	79,33%
	Pul Dir.	33,17%	37,66%	40,64%
	Pul Eq.	31,89%	36,15%	38,68%
P2	Enxerto	36,97%	43,40%	47,96%
	Pul Dir.	18,80%	22,07%	24,39%
	Pul Eq.	18,17%	21,32%	23,57%
P4	Enxerto	62,35%	70,69%	76,32%
	Pul Dir.	28,24%	33,21%	36,65%
	Pul Eq.	34,11%	37,48%	39,66%
P8	Enxerto	50,74%	62,11%	69,37%
	Pul Dir.	28,14%	34,63%	38,59%
	Pul Eq.	22,60%	27,48%	30,79%

## 6. Conclusões

O presente estudo avaliou da influência dos determinantes geométricos envolvidos no procedimento cirúrgico da anastomose de Blalock-Taussig, visando a determinação de correlações para o fator de atrito e a porcentagem de fluxo sanguíneo desviado pelo enxerto. Quando da inclusão de um enxerto tubular na artéria subclávia cujo diâmetro é menor que o da artéria, obteve-se valores para  $f_{Re}$  próximos a 64, o que já não ocorre na anastomose onde o diâmetro do enxerto é maior que o da subclávia. Neste último, os valores do fator de atrito afastam-se significativamente aos preditos pela Eq. (17). A inclusão do enxerto de grande diâmetro, causa uma severa perturbação no padrão desenvolvido do escoamento na artéria subclávia, impedindo assim sua concordância com o valor predito pela teoria de Hagen-Poiseuille.

A partir de simulações numéricas, foi possível obter correlações entre o fluxo desviado para o enxerto versus o diâmetro do enxerto na faixa de 4 mm a 6 mm. Podemos observar que a porcentagem de fluxo desviada é maior a medida que o diâmetro do enxerto for maior que o da subclávia. O presente trabalho verificou a porcentagem de fluxo desviado pelo enxerto prevista por Migliavacca et al. (1999), a qual situa-se entre 70 a 80% para os recém-nascidos.

Observou-se ainda que o ângulo da anastomose proximal tem sensível influência na quantidade de fluxo desviada pelo enxerto. Esta influência começa diminuir para os ângulos entre 30° e 60°, situações as quais correspondem a aproximadamente 80% da amostragem levantada. Anastomoses proximais com ângulo de 110° apresentaram uma maior porcentagem de fluxo desviado. Este ângulo, entretanto, tem o inconveniente de tornar excessivo o fluxo sanguíneo que alcança o pulmão esquerdo, em detrimento do fluxo fornecido ao pulmão direito. O ângulo ótimo para a anastomose proximal seria aquele para o qual o fluxo fornecido aos dois pulmões fosse igual. As simulações realizadas indicam que este valor ótimo situa-se, na maior parte da amostragem, entre 30° e 60°.

Como se previa, o diâmetro do enxerto é o regulador principal da porcentagem de fluxo desviado. Quanto maior o for, maior será a porcentagem de desvio.

Finalizando esta conclusão, destacamos que tanto a modelagem mecânica empregada bem com a metodologia numérica utilizada, mostraram-se adequadas e precisas na análise da influência dos determinantes geométricos no escoamento de sangue através de uma anastomose sistêmico-pulmonar.

## 7. Agradecimentos

Os autores S. Frey, D.C. Pereira, e C. Spode agradecem o suporte financeiro provido pelo CNPq Proc. 350747/93-8 e PROPESQ-UFRGS, respectivamente.

## 8. Referências Bibliográficas.

- Blalock, A. e Taussig, H., 1945, "Surgical treatment of malformations of the heart in which there is pulmonary stenosis or pulmonary atresia". JAMA, Vol. 128, 189-202.
- Ciarlet, P.G., 1978, "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam.
- Fox, R.W., McDonald, A. T., 1998, "Introdução à Mecânica dos Fluidos", Ed. LTC, Rio de Janeiro, Brasil, 504 p.
- Franca, L.P. e Frey, S., 1992, "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 99, pp. 209-233.
- Franca, L.P., Frey, S. e Hughes, T.J.R., 1992, "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 95, pp. 253-276.
- Johnson, C., 1987, "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method", Cambridge University Press, Cambridge.
- Landau, L. e Lifchitz, E., 1971, "Mécanique des fluides", Edições Mir, Moscou (1971).
- Leval, M. R., McKay, R., Jones, M., Stark, J., Macartney, F. J., 1981, "Modified Blalock-Taussig Shunt. Use of subclavian artery orifice as flow regulator in prosthetic systemic-pulmonary artery shunts". Journal Thorac. Cardiovascular Surg., Vol. 81, 112-119.
- Migliavacca, F., 2000, "Calculating blood flow from doppler measurements in the systemic-to-pulmonary artery shunt after the Norwood operation: A method based on computational fluid dynamics", Ultrasound in Med. & Biol., Vol. 26, pp.209-219.
- Patankar, S., 1980, "Numerical heat transfer and fluid flow", McGraw-Hill, New York.
- Pennati G., Fiore, G. B., Migliavacca F, Laganà, K., Fumero R., Dubini G., 2001, "In vitro steady flow analysis to systemic-to-pulmonary shunt haemodynamics", Journal of Biomechanics, Vol 34, 23-30.
- Soyer, T., Lempinen, M., Cooper, P., Norton, L., Eiseman, A., 1972, "A new venous prosthesis". Surg. Vol. 72, 864-872.
- Thomas, L. H. ,1949, Elliptic problems in linear difference equations over a Network, Watson Sci. Comput. Lab. Report, Columbia University, New York.
- Thomé, G. L. ,1993, Cirurgia de Blalock-Taussig modificada com prótese de politetrafluoretileno – Resultados imediatos e tardios, Dissertação de mestrado – Fundação Universitária de Cardiologia – Porto Alegre.

## PETROV-GALERKIN SIMULATIONS OF HEMODYNAMICS IN A PULMONARY SHUNT

**Dimitrius Caloghero Pereira**<sup>1</sup>

Laboratory of Applied and Computational Fluid Mechanics (LAMAC)  
Mechanical Engineering Department – UFRGS  
Sarmiento Leite nº425, 90050 – 170, Porto Alegre, Brasil  
dimmi@cesup.ufrgs.br

**Cleber Spode**<sup>2</sup>

Laboratory of Applied and Computational Fluid Mechanics (LAMAC)  
Mechanical Engineering Department – UFRGS  
Sarmiento Leite nº425, 90050 – 170, Porto Alegre, Brasil  
cleber@mecanica.ufrgs.br

**Sérgio Frey**<sup>3</sup>

Laboratory of Applied and Computational Fluid Mechanics (LAMAC)  
Mechanical Engineering Department – UFRGS  
Sarmiento Leite nº425, 90050 – 170, Porto Alegre, Brasil  
frey@mecanica.ufrgs.br

**João Ricardo Sant’anna**

Cardiology Institute of RS  
Princesa Isabel nº 395  
Porto Alegre/RS – Brasil

**Abstract.** Systemic pulmonary shunts provide an excellent form of palliation in neonates and children presenting with cyanotic congenital heart disease with pulmonar flow decrease. In this article, Streamline Upwind/Petrov-Galerkin approximations for blood flow through systemic pulmonary shunts have been performed. The shunt studied in this article is known as modified Blalock-Taussing in which a synthetic tube graft is inserted between the left subclavian and the pulmonar arteries with the objective of addressing part of the sistemic to the pulmonary flow. The finite element methodology we are concerned with, called SUPG method, overcomes the classical Galerkin shortcoming for high Reynolds flows - namely, the need of compatibilize the velocity and pressure subspaces satisfying in this way the so-called Babuška-Brezzi condition and the rising of spurious numerical oscillations due to the asymmetric nature of advective acceleration of momentum equation - adding mesh-dependent terms to the classical Galerkin formulation. A parametric tridimensional model, employing trilinear lagrangean finite elements, was created based on direct intraoperative measurements to quantify the effects of geometry (diameter and angle) and pulsatility of the flow.

**Keywords:** Hemodynamics, Finite Elements, SUPG.

<sup>1</sup> This author is a graduate student at the Mechanical Engineering Program (PROMEC)/UFRGS.

<sup>2</sup> This author is an undergraduate student at Mechanical Engineering Department/UFRGS.

<sup>3</sup> All correspondence should be mailed to this author