

SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA NÃO-LINEAR

José V. P. de Oliveira

Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Matemática
Av. Roraima, S/N – CCNE – 97105-900 – Santa Maria, RS, Brasil.

Augusto V. Cardona – avcardona@pucri.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Faculdade de Matemática
Av. Ipiranga, 6681 – Prédio 15 – 90619-900 – Porto Alegre, RS, Brasil.

Marco T. M. B. de Vilhena – vilhena@cesup.ufrgs.br

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGEM
Av. Osvaldo Aranha, 99 – 6º andar – 90046-900 – Porto Alegre, RS, Brasil.

Ricardo Barros – ricardob@iprj.uerj.br

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico – IPRJ
Caixa Postal 97282 – 28630-050 – Nova Friburgo, RJ, Brasil.

***Resumo.** Neste trabalho, propomos uma nova abordagem para resolver problemas de transferência radiativa, utilizando a combinação dos métodos espectral e LTS_N . Para tanto, usando a idéia do método espectral, expande-se a intensidade de radiação numa série truncada de polinômios de Laguerre na variável temporal, e obtemos assim um conjunto de problemas estacionários unidimensionais de transporte que são resolvidos recursivamente através do método LTS_N . A temperatura e a intensidade de radiação são obtidas iterativamente a partir da temperatura inicial. Resultados numéricos são apresentados e comparados com os da literatura.*

***Palavras-chave:** Transferência radiativa, Problema transiente de transporte, Método espectral, Método LTS_N .*

1. INTRODUÇÃO

Existe um interesse especial na solução de problemas envolvendo o acoplamento de campos de radiação e de fluxo radiante. Estes problemas são caracterizados pela existência de não-linearidades, sendo o termo de fonte proporcional à quarta potência da temperatura. No entanto, são bem conhecidas as dificuldades de se obterem soluções para problemas de transferência radiativa dependentes do tempo. Soluções analíticas ou semi-analíticas de tais problemas raramente são encontrados na literatura, e em geral, as soluções são obtidas através de métodos numéricos, tais como Diferenças Finitas e Elementos Finitos (Szilard & Pomraning, 1992). Ademais, são adotados alguns modelos matemáticos simplificados para aproximar estes problemas; dentre eles, podemos citar os métodos baseados na Teoria da

Difusão, por exemplo, os métodos EDT (Pomraning, 1973), IDT (Larsen & Keller, 1974), ADT (Pomraning, 1973) e FDT (Levermore & Pomraning, 1981). Estes modelos de aproximação consistem basicamente em aproximar o fluxo radiativo pela lei de Fick, sendo que cada método apresenta seu coeficiente de difusão específico.

Neste trabalho, propomos uma nova abordagem para resolver a equação de transferência radiativa não-linear dependente do tempo, combinando o método LTS_N (Segatto & Vilhena, 1999; Vilhena et al., 1998) com a idéia do método espectral (Gottlieb & Orszag, 1977), desde que seja conhecida a temperatura. Para tanto, expandimos a intensidade de radiação angular em uma série truncada de polinômios de Laguerre na variável temporal. Substituímos essa expansão na equação de transferência radiativa, tomamos os momentos, para obtermos assim um conjunto de problemas estacionários de transporte unidimensionais que são resolvidos recursivamente através do método LTS_N . Basicamente, o método LTS_N consiste em aproximar o problema unidimensional estacionário de transporte por ordenadas discretas (S_N), resolvendo o sistema de equações diferenciais unidimensionais lineares resultante pela aplicação da transformada de Laplace na variável espacial, com inversão analítica. Portanto, as equações acopladas de transferência radiativa e balanço de energia são resolvidas recursivamente. Considerando a princípio a função de Planck proporcional à temperatura inicial elevada à quarta potência, resolvemos a equação de transferência radiativa pelo processo descrito acima. Conhecida a intensidade de radiação, determinamos a temperatura por uma simples integração da equação de balanço de energia. O processo avança, considerando a função de Planck proporcional à temperatura obtida elevada à quarta potência, continuando até que o desvio entre duas aproximações sucessivas da temperatura seja tão pequeno quanto desejado.

O presente trabalho é composto de seis seções, organizadas da seguinte forma: na próxima seção, descrevemos o problema estudado; na seção 3, construímos um problema auxiliar; na seção 4, fazemos uso do método espectral. Desenvolvemos o cálculo da temperatura na seção 5, e concluímos com resultados numéricos e uma breve discussão na seção 6.

2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Visando a apresentar o método proposto, consideremos por simplicidade um processo de espalhamento isotrópico e coerente, sendo este problema unidimensional transiente de transferência radiativa, com simetria azimutal, descrito pela equação

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} I(x, \mu, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x} I(x, \mu, t) + \sigma I(x, \mu, t) = \frac{c}{2} (\sigma_a B(x, t) + \sigma_s E(x, t)), \quad (1)$$

pelas condições de contorno,

$$I(0, \mu, t) = \Gamma_0(\mu, t), \quad \text{se } \mu > 0, \quad (2)$$

$$I(L, \mu, t) = \Gamma_1(\mu, t), \quad \text{se } \mu < 0, \quad (3)$$

e pela condição inicial,

$$I(x, \mu, 0) = I_0(x, \mu), \quad (4)$$

onde $I(x, \mu, t)$ denota a intensidade de radiação dependente da variável espacial $x \in [0, L]$, da variável temporal t e de μ , definido como o co-seno do ângulo entre a direção de propagação do fóton e o eixo x . Os símbolos c , σ_a , σ_s e σ denotam, respectivamente, a velocidade da luz e os coeficientes (seção de choque) de absorção, de espalhamento e de interação total. A densidade de energia de radiação $E(x, t)$ é definida por:

$$E(x, t) = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I(x, \mu, t) d\mu. \quad (5)$$

Ademais, ao assumir a descrição do problema para um meio cinza (um grupo de energia), tem-se que a densidade de energia $B(x, t)$ é dada por

$$B(x, t) = a\{T(x, t)\}^4, \quad (6)$$

sendo $T(x, t)$ a temperatura do material e a constante de radiação dada por

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3}, \quad (7)$$

onde h e k denotam, respectivamente, as constantes de Planck e Boltzmann.

Desconsiderando a condução de calor e o movimento do fluido, a Eq. (1) é acoplada apenas pela equação balanço de energia, que é dada por

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = c\sigma_a(E - B), \quad (8)$$

sujeita à condição inicial

$$T(x, 0) = T_0(x). \quad (9)$$

3. O PROBLEMA AUXILIAR

Inicialmente, construímos um problema auxiliar para o problema descrito na seção anterior. Assim, consideremos a equação

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, \mu, t, \tau) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \mu, t, \tau) + \sigma \Phi(x, \mu, t, \tau) \\ = \frac{c}{2} \left(\sigma_a B(x, \tau) + \frac{\sigma_s}{c} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu, t, \tau) d\mu \right) \end{aligned} \quad (10)$$

dotada das condições de contorno,

$$\Phi(0, \mu, t, \tau) = \Gamma_0(\mu, \tau), \quad \mu > 0, \quad (11)$$

$$\Phi(L, \mu, t, \tau) = \Gamma_1(\mu, \tau), \quad \mu < 0, \quad (12)$$

e da condição inicial,

$$\Phi(x, \mu, 0, \tau) = \Phi_0(x, \mu). \quad (13)$$

Fazendo uso de raciocínio análogo ao usado no Teorema de Duhamel (Özisik, 1980), concluímos que o problema descrito pelas Eqs. (1-4) relaciona-se com o problema auxiliar dado pelas Eqs. (10-13), através da expressão

$$I(x, \mu, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Phi(x, \mu, t - \tau, \tau) d\tau. \quad (14)$$

Para demonstrar esta relação, aplicamos a transformada de Laplace na variável temporal nas Eqs. (1-3) e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{s}{c} \bar{I}(x, \mu, s) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \bar{I}(x, \mu, s) + \sigma \bar{I}(x, \mu, s) \\ = \frac{c}{2} \left(\sigma_a \bar{B}(x, s) + \frac{\sigma_s}{c} \int_{-1}^1 \bar{I}(x, \mu, s) d\mu \right) + \frac{1}{c} I_0(x, \mu), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\bar{I}(0, \mu, s) = \bar{\Gamma}_0(\mu, s), \quad \text{se } \mu > 0 \quad (16)$$

$$\bar{I}(L, \mu, s) = \bar{\Gamma}_1(\mu, s), \quad \text{se } \mu > 0. \quad (17)$$

Usando o mesmo procedimento nas Eqs.(10-12) e, em seguida, aplicando o operador $\int_0^\infty e^{-s\tau} d\tau$ em ambos os lados das equações resultantes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{s}{c} \bar{\bar{\Phi}}(x, \mu, s) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \bar{\bar{\Phi}}(x, \mu, s) + \sigma \bar{\bar{\Phi}}(x, \mu, s) \\ = \frac{c}{2} \left(\sigma_a \frac{\bar{B}(x, s)}{s} + \frac{\sigma_s}{c} \int_{-1}^1 \bar{\bar{\Phi}}(x, \mu, s) d\mu \right) + \frac{1}{c} \frac{\Phi_0(x, \mu)}{s}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\bar{\bar{\Phi}}(0, \mu, s) = \frac{\bar{\Gamma}_0(\mu, s)}{s}, \quad \text{se } \mu > 0, \quad (19)$$

$$\bar{\bar{\Phi}}(L, \mu, s) = \frac{\bar{\Gamma}_1(\mu, s)}{s}, \quad \text{se } \mu < 0, \quad (20)$$

desde que $\bar{\bar{\Phi}}(x, \mu, s, s) = \bar{\bar{\Phi}}(x, \mu, s)$. A dupla transformada é definida como

$$\bar{\bar{\Phi}}(x, \mu, s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\tau+t)s} \Phi(x, \mu, t, \tau) dt ds. \quad (21)$$

Multiplicando ambos os lados das Eqs.(18-20) por s e comparando as Eqs.(15-17) com as equações resultantes, concluímos que os problemas descritos por essas equações são idênticos se

$$\bar{I}(x, \mu, s) = s \overline{\Phi}(x, \mu, s). \quad (22)$$

Substituindo a Eq. (21) na Eq. (22) obtemos

$$\bar{I}(x, \mu, s) = s \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\tau+t)s} \Phi(x, \mu, t, \tau) dt ds. \quad (23)$$

Para inverter este resultado, fazemos uso da convolução generalizada da função $\Phi(x, \mu, t, \tau)$, definida como (Özsisik,1980)

$$\Phi^*(x, \mu, t) = \int_0^t \Phi(x, \mu, t - \tau, \tau) d\tau, \quad (24)$$

cuja transformada de Laplace é dada por

$$L[\Phi^*(x, \mu, t)] = \overline{\Phi^*}(x, \mu, s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\tau+t)s} \Phi(x, \mu, t, \tau) dt ds. \quad (25)$$

Comparando as Eqs. (23) e (25), concluímos que

$$L[I(x, \mu, t)] = L\left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi^*(x, \mu, t)\right]. \quad (26)$$

Invertendo este resultado, obtemos

$$I(x, \mu, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi^*(x, \mu, t). \quad (27)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (24) na Eq. (27), temos

$$I(x, \mu, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Phi(x, \mu, t - \tau, \tau) d\tau. \quad (28)$$

4. O MÉTODO ESPECTRAL

Com o objetivo de resolver o problema descrito pelas Eqs. (10-13), a função $\Phi(x, \mu, t, \tau)$ é aproximada por uma série truncada de polinômios ortonormais de Laguerre (Abramowitz & Stegun, 1998), $L_k(t)$, com $k = 0, 1, \dots, M$, ou seja,

$$\Phi(x, \mu, t, \tau) = \sum_{k=0}^M \Phi^k(x, \mu, \tau) L_k(t). \quad (29)$$

Substituímos a Eq. (29) na Eq. (10), multiplicamos a equação resultante por $e^{-t}L_m(t)$ e integramos o resultado em $0 < t < \infty$, obtendo a equação

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \Phi^m(x, \mu, \tau) + \sigma \Phi^m(x, \mu, \tau) &= \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \Phi^m(x, \mu', \tau) d\mu' + \frac{c}{2} \sigma_a B(x, \tau) \delta_{0,m} \\ &+ \frac{1}{c} \sum_{k=m+1}^M \Phi^k(x, \mu, \tau), \end{aligned} \quad (30)$$

onde $\delta_{0,m}$ representa o delta de Kronecker.

Por outro lado, substituindo a Eq. (29) na condição inicial (13), obtemos

$$\sum_{k=m+1}^M \Phi^k(x, \mu, \tau) = \Phi_0(x, \mu) - \sum_{k=0}^m \Phi^k(x, \mu, \tau). \quad (31)$$

Substituindo a Eq. (31) na Eq. (30), concluímos que cada componente $\Phi^m(x, \mu, \tau)$ satisfaz o seguinte problema estacionário

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Phi^m(x, \mu, \tau) + \sigma^* \Phi^m(x, \mu, \tau) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \Phi^m(x, \mu', \tau) d\mu' + Q^m(x, \mu, \tau), \quad (32)$$

$$\Phi^m(0, \mu, \tau) = \Gamma_0(\mu, \tau) \delta_{0,m}, \quad \text{se } \mu > 0, \quad (33)$$

e

$$\Phi^m(L, \mu, \tau) = \Gamma_1(\mu, \tau) \delta_{0,m}, \quad \text{se } \mu < 0, \quad (34)$$

para $m = 0, 1, \dots, M$, onde definimos

$$\sigma^* = \sigma + \frac{1}{c} \quad (35)$$

e

$$Q^m(x, \mu, t) = \begin{cases} \frac{c}{2} \sigma_a B(x, \tau) + \frac{\Phi_0(x, \mu)}{c}, & \text{se } m = 0 \\ \frac{\Phi_0(x, \mu)}{c} - \frac{\Phi^0(x, \mu, \tau)}{c}, & \text{se } m = 1 \\ \frac{Q^{m-1}(x, \mu, \tau)}{c} - \frac{\Phi^{m-1}(x, \mu, \tau)}{c}, & \text{se } m > 1 \end{cases}. \quad (36)$$

Cabe ressaltar que para obter as condições de contorno (33) e (34), substituímos a Eq. (29) nas condições de contorno (11) e (12), multiplicamos as equações resultantes por $e^{-t}L_m(t)$, com $m = 0, 1, \dots, M$, e integramos estas em $0 < t < +\infty$.

Uma vez estabelecida a fonte $Q^n(x, \mu, \tau)$ na Eq. (36), isto é, que os momentos $\Phi^k(x, \mu, \tau)$ sejam conhecidos para $k < m$, então o momento $\Phi^m(x, \mu, \tau)$ será determinado pelo método LTS_N (Vilhena et al., 1998), no problema dado pelas Eqs. (32-34). Assim, sendo conhecida a densidade de energia $B(x, \tau)$, podemos determinar recursivamente, a partir de $\Phi^0(x, \mu, \tau)$, os demais momentos $\Phi^m(x, \mu, \tau)$, com $m = 1, 2, \dots, M$. Finalmente, $\Phi(x, \mu, t, \tau)$ é completamente estabelecida pela Eq. (29).

5. CÁLCULO DA TEMPERATURA

Uma expressão explícita para a temperatura pode ser obtida integrando-se a Eq. (8), desde que a densidade de energia $B(x, t)$ seja conhecida e a função $\Phi(x, \mu, t, \tau)$ seja estabelecida pela Eq. (29) na seção anterior. Desta forma, obtemos um processo iterativo para a estimativa da n-ésima aproximação da temperatura $T^{(n)}(x, t)$, escrita em termos de $T^{(n-1)}(x, t)$, isto é,

$$T^{(n)}(x, t) = T_0(x) + \frac{\sigma_a}{c_v} \int_{-1}^1 \int_0^t \Phi^n(x, \mu, t - \tau, \tau) d\tau d\mu - \frac{c\sigma_a}{c_v} \int_0^t a[T^{(n-1)}(x, t')]^4 dt', \quad (37)$$

onde

$$\Phi^n(x, \mu, t, \tau) = \sum_{k=0}^M \Phi^{n,k}(x, \mu, \tau) L_k(t), \quad (38)$$

com os momentos $\Phi^{n,k}(x, \mu, \tau)$ satisfazendo o conjunto de problemas estacionários descritos pelas Eqs. (32-34), sendo:

$$Q^{n,k}(x, \mu, \tau) = \begin{cases} \frac{c}{2} \sigma_a a (T^{(n-1)}(x, \tau))^4 + \frac{\Phi_0(x, \mu)}{c}, & \text{se } k=0 \\ \frac{\Phi_0(x, \mu)}{c} - \frac{\Phi^{n,0}(x, \mu, \tau)}{c}, & \text{se } k=1 \\ \frac{Q^{n,k-1}(x, \mu, \tau)}{c} - \frac{\Phi^{n,k-1}(x, \mu, \tau)}{c}, & \text{se } k>1 \end{cases}. \quad (39)$$

Portanto, a partir da primeira aproximação da temperatura, $T^{(1)}(x, t) = T_0(x)$, obtemos a n-ésima aproximação para a intensidade de radiação, $\Phi^n(x, \mu, t, \tau)$, descrita pela Eq. (38) e, em seguida para a temperatura, $T^{(n)}(x, t)$, expressa pela Eq. (37).

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de testarmos a formulação acima, sob o ponto de vista da modelagem computacional, consideramos o problema não-linear de transferência radiativa, descrito pelas Eqs. (1-9), em uma placa de espessura $L = 20$, com condições de contorno $\Gamma_0(\mu, t) = 2$, se $\mu > 0$, e $\Gamma_1(\mu, t) = 0$, se $\mu < 0$; e condições iniciais

$I_0(x, \mu) = 0.5 \times 10^{-10}$ e $T_0(x) = 10^{-5/2}$. Os coeficientes c , a , σ e σ_s são considerados iguais a unidade.

A fim de resolver o conjunto de problemas estacionários, resultante da aplicação do método espectral, dado pelas Eqs.(32-34), usamos o método LTS_N . A integral de convolução, resultante da reconstrução da intensidade de radiação pela inversão da transformada de Laplace, é resolvida pela regra dos trapézios, com 40 pontos. Nas Fig. 1 e 2, os resultados apresentados para a temperatura, em $t = 1.0$, estão em escala logarítmica. Na Fig. 1, apresentamos valores da temperatura para as ordens de aproximação em polinômios de Laguerre $M = 9, 10$ e 11 , considerando a ordem de quadratura angular $N = 16$. Para os resultados apresentados na Fig. 2, consideramos as ordens de quadratura $N = 4, 6$ e 8 e a aproximação $M = 9$. Nestes gráficos fica evidenciada a estabilidade numérica do método. Ademais, estes resultados estão em conformidade com os resultados considerados 'Benchmark' para o problema descrito acima, apresentados na Fig. 2 do artigo de Szilard & Pomraning (1992).

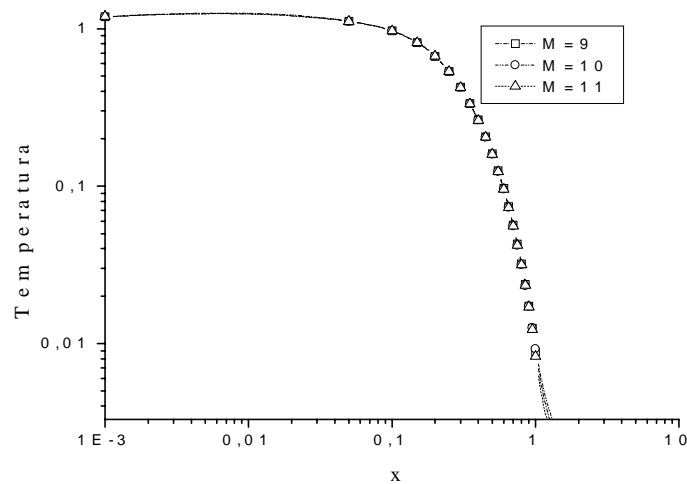


Figura 1 – Variação da Temperatura para $t = 1.0$, considerando $N = 16$.

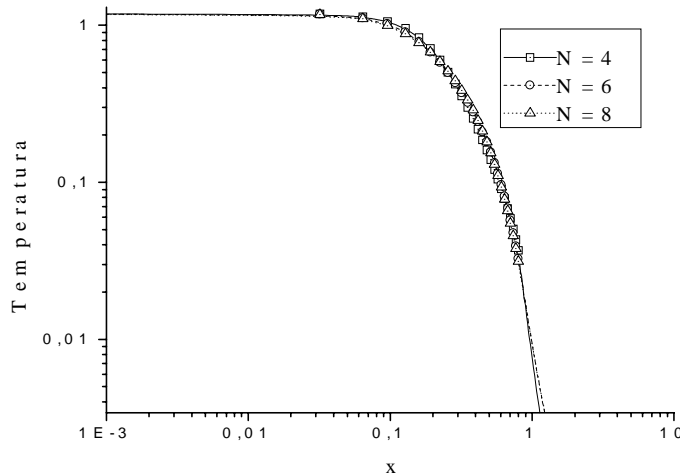


Figura 2- Variação da Temperatura para $t=1.0$, considerando $M=9$.

É importante observar que nenhuma aproximação foi feita no processo de obtenção do conjunto de problemas estacionários, dado pelas Eqs. (32-34), exceto pelo truncamento da expansão em polinômios de Laguerre. Ademais, obtemos uma solução fechada para a intensidade de radiação pelo método descrito neste trabalho, facilitando o processo iterativo de determinação da temperatura. Convém salientar que a formulação proposta é facilmente aplicável a outros tipos de condições de contorno e iniciais, bem como a problemas em domínios heterogêneos. Por fim, a eficiência deste método é reforçada pela demonstração da convergência do método LTS_N em problemas unidimensionais de transporte que foi obtida por Pazos & Vilhena (1999).

REFERÊNCIAS

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A., 1998, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Publications, Inc., New York.
- Gottlieb, D. & Orszag, S. A., 1977, Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications, SIAM, Philadelphia.
- Larsen, E. W. & S  ller, J. B., 1974, Asymptotic solution of neutron transport problem for small mean free paths, J. Math. Phys., vol. 15, pp. 75.
- Levermore, C. D. & Pomraning, G.C., 1981, A flux-limited diffusion theory, The Astrophysical Journal, vol.248, pp. 321-334.
-   zisik, M. N., 1980, Heat Conduction, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Pazos, R.P. & Vilhena, M. T., 1999, Convergence of LTS_N method: Approach of C_0 Semigroups, Progress in Nuclear Energy, vol. 34, pp. 77.
- Pomraning, G. C., 1973, The Equations of Radiation Hydrodynamics, Pergamon Press, Oxford.
- Segatto, C. F. & Vilhena, M. T., 1999, The state-of-the-art of the LTS_N method, Mathematics and Computation, Proceedings of The International Conference in Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications, Madrid, vol. 2, pp. 1618-1631.
- Szilard, R. H. & Pomraning, G. C., 1992, Numerical transport and diffusion methods in radiative transfer, Nuclear Science and Engineering, vol. 112, pp. 256-269.
- Vilhena, M. T.; Barichello, L. B.; Segatto, C. F.; Zabadal, J. & Cardona, A V., 1998, General solution of one-dimensional approximations to the transport equation, Progress in Nuclear Energy, vol. 33, pp. 99-115.

Analytical Solution of the Non-Linear Radiative Transfer Equation. In this paper, we describe a new approach to solve the radiative transfer problem, combining the LTS_N method and Spectral method. We use the essence of the spectral methods, where the intensity of radiation is expanded in time in a truncated series of Laguerre polynomials yielding a set of stationary one-dimensional transport problems, that we solve using the LTS_N method. The material temperature and the intensity of radiation are determined by an iteration from the initial temperature. Numerical results and comparisons with the results found in the literature are also presented.

Key words: Radiative transfer, Transient transport problem, Spectral method, LTS_N method.